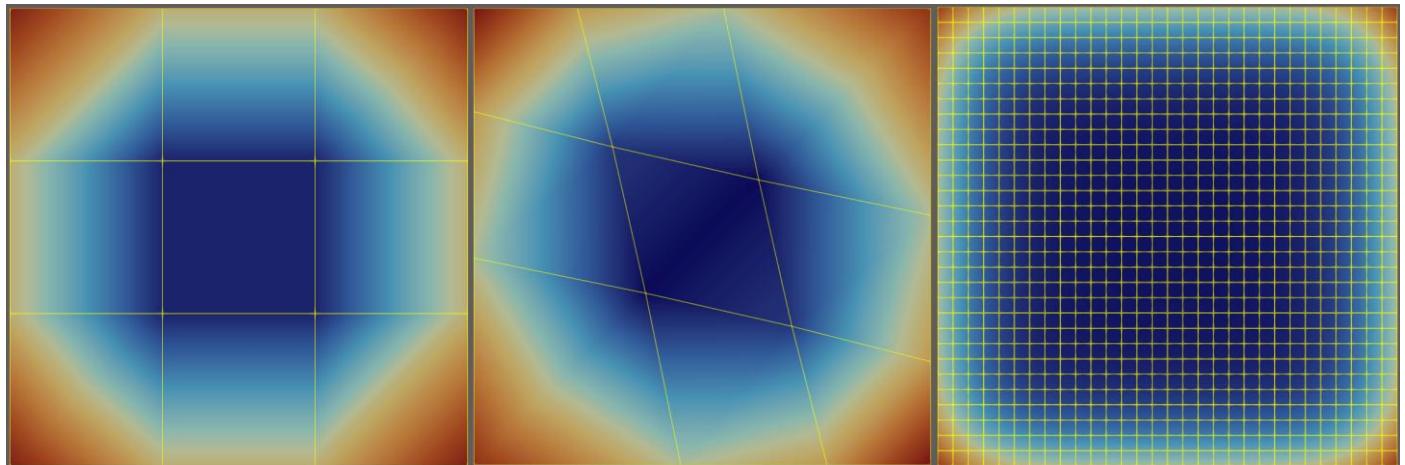


## Wstęp. Schemat modelu, geometria, warunki brzegowe i charakterystyka oprogramowania.

### Opis modelu procesu i schematy siatek.

Rysunek 1 Schematy siatek a) 4x4, b) 4x4\_mix, c) 31x31. Żółte linie i wierzchołki zarysowują schemat siatki.



Proste siatki 4x4 oraz 4x4\_mix służą do testowania kodu. Wersja „mix” do m.in. sprawdzania poprawności liczenia wyznaczników jacobianów. Siatka 31x31 pozwala na dokładniejsze obliczenia.

Warunki brzegowe zadane są na każdą z czterech krawędzi siatki (na prawej, górnej, lewej i dolnej).

Oprogramowanie symuluje nagrzewanie się, np. stalowej płyty w . Na jej krawędziach dochodzi do konwekcji wymuszonej (eng. forced convection).

Wartości fizyczne symulacji:

$\alpha$  (efektywny współczynnik wymiany ciepła) = 300

Density (gęstość) = 7800

SpecificHeat (ciepło właściwe) = 700

Conductivity (współczynnik przewodności cieplnej) = 25

Tot (temperatura otoczenia) = 1200°C

Wartość  $\alpha$  = 300 sugeruje, że jest to konwekcja wymuszona. Właściwości fizyczne materiału mniej więcej odpowiadają stali. [1] [2] [3]

## Charakterystyka oprogramowania

### Przedstawienie plików programu:

**model.h** – zawiera klasy: Jacobian, Node, Element4, Grid, GlobalData oraz funkcje pomocniczą load\_data\_from\_file.

**utils.h** – zawiera dwie funkcje pomocnicze do pracy na ciągach znaków.

**solver.h** – zawiera kod wygenerowany LLM (chatGPT) do rozwiązywania równań liniowych w formie macierzowej.

**vtu\_parser.h** – zawiera kod wygenerowany LLM (chatGPT) służący do zapisywania symulacji plikach do wizualizacji programem ParaView. Plik .pvda zawiera informacje o krokach symulacji (pozostałych plikach), a pliki .vtu zawierają dane z danego kroku symulacji.

**gauss.h** – zawiera klasę UniversalElement4, GaussQuad oraz funkcję init\_univElem\_bc\_edges\_N\_values. Zawiera on zatem klasę odpowiadającą za element uniwersalny, klasę służącą do wykonywania całkowania numerycznego metodą gausa oraz funkcję do ustawienia wartości funkcji kształtu dla krawędzi elementu uniwersalnego.

**mes.cpp** – plik główny programu zawiera funkcje: a) obliczające wartości danych macierzy (H,C,P,HBC), b) agregujące c) funkcje pomocnicze, które zapisują do pliku, wypisując w terminalu. W funkcji głównej programu przeprowadzana jest konfiguracja programu oraz pętla symulacji

### Opis działania:

- ustawiamy liczbę punktów całkowania
- inicjalizujemy element uniwersalny oraz liczymy wartości, które są stałe w trakcie trwania symulacji.
- ustawiamy odpowiednie ścieżki do plików
- inicjalizujemy obiekty z danymi globalnymi, siatką, danymi równania.

### W pętli symulacji:

- Liczymy macierze H i C (lokalne)
- liczymy P
- agregujemy
- agregujemy część związaną z czasem (lub nie jeżeli zakomentujemu dla procesu stacjonarnego)
- obliczamy układ równań
- zapisujemy / wypisujemy dane

## Testy i porównanie wyników programu z wynikami z UPEL.:

## Siatka 4x4:

Rysunek 2. Porównanie macierzy  $H$ ,  $H+BC$  i  $P$  dla siatki  $4 \times 4$ . Po lewej dane z UPeL, po prawej dane z oprogramowania.

Rysunek 3. Porównanie macierzy C dla siatki 4x4. Po lewej dane z UPeL, po prawej dane z oprogramowania.

Rysunek 4. Porównanie macierzy  $H$  i  $P$  po agregacji z czasem dla siatki  $4 \times 4$ . Po lewej dane z UPeL, po prawej dane z oprogramowania.

```

P_Vector ([{P}+{[C]/dT}*{T0})
20660 25552 25552 20660 25552 18897 18897 25552 25552 18897 18897 25552 20660 25552 25552 20660
{[P]}+{[C]/dT}*{T0}:
20659.7 25552.2 25552.2 20659.7 25552.2 18897.4 18897.4 25552.2 25552.2 18897.4 18897.4 25552.2 20659.7 25552.2 25552.2 20659.7

```

Rysunek 5. Porównanie wktora  $P$  dla kolejnej iteracji. Na górze wyniki z UPeL na dole wyniki oprogramowania.

Tabela 1. Zestawienie min. i max. temperatur dla siatki 4x4. Wartości z programu i z UPeL.

time [s]	Program		UPeL	
	min[°C]	max[°C]	min[°C]	max[°C]
50	110.038	365.815	110.038	365.815
100	168.837	502.592	168.837	502.592
150	242.801	587.373	242.801	587.373
200	318.615	649.387	318.615	649.387
250	391.256	700.068	391.256	700.068
300	459.037	744.063	459.037	744.063
350	521.586	783.383	521.586	783.383
400	579.034	818.992	579.034	818.992
450	631.689	851.431	631.689	851.431
500	679.908	881.058	679.908	881.058

Tabela 2. Zestawienie min, max, avg (średniej) temperatury w danym kroku dla siatki 4x4

SIATKA 4X4				
step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]
0	50	110.038	365.815	243.471
1	100	168.837	502.592	344.407
2	150	242.801	587.373	424.842
3	200	318.615	649.387	493.737
4	250	391.256	700.068	554.917
5	300	459.037	744.063	610.162
6	350	521.586	783.383	660.424
7	400	579.034	818.992	706.303
8	450	631.689	851.431	748.241
9	500	679.908	881.058	786.6

Tabela 3. Zestawienie wyników dla 2,3 i 4 punktów całkowania. Brak różnic dla wyników przy zadanej dokładności.

SIATKA 4X4 - 3 Punkty Calkowania					SIATKA 4X4 - 4 Punkty Calkowania				
step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]	step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]
0	50	110.038	365.815	243.471	0	50	110.038	365.815	243.471
1	100	168.837	502.592	344.407	1	100	168.837	502.592	344.407
2	150	242.801	587.373	424.842	2	150	242.801	587.373	424.842
3	200	318.615	649.387	493.737	3	200	318.615	649.387	493.737
4	250	391.256	700.068	554.917	4	250	391.256	700.068	554.917
5	300	459.037	744.063	610.162	5	300	459.037	744.063	610.162
6	350	521.586	783.383	660.424	6	350	521.586	783.383	660.424
7	400	579.034	818.992	706.303	7	400	579.034	818.992	706.303
8	450	631.689	851.431	748.241	8	450	631.689	851.431	748.241
9	500	679.908	881.058	786.6	9	500	679.908	881.058	786.6
Różnica w wartościach między 2 a 3 PC					Różnica w wartościach między 2 a 4 PC				
step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]	step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]
0	50	0	0	0	0	50	0	0	0
1	100	0	0	0	1	100	0	0	0
2	150	0	0	0	2	150	0	0	0
3	200	0	0	0	3	200	0	0	0
4	250	0	0	0	4	250	0	0	0
5	300	0	0	0	5	300	0	0	0
6	350	0	0	0	6	350	0	0	0
7	400	0	0	0	7	400	0	0	0
8	450	0	0	0	8	450	0	0	0
9	500	0	0	0	9	500	0	0	0
brak różnicy					brak różnicy				

Porównanie macierzy H również nie wykazuje różnic w wartościach.

## Siatka 4x4 MIX:

Macierz HG  
 17.7624 -3.39971 0 0 -3.39972 -10.963 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 -3.39971 35.6892 -5.19066 0 -6.10152 -7.64516 -13.2722 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 -5.19066 35.2659 -5.49125 0 -4.50181 -7.71486 -12.3674 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 -5.49125 16.2136 0 0 -5.23115 -5.49125 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 -3.39972 -6.10152 0 0 0 35.6892 -7.64516 0 0 -5.19067 -13.2722 0 0 0 0 0 0 0  
 -10.963 -7.64516 -4.50181 0 -7.64516 71.0151 -10.2767 -4.50181 -10.2767 -15.2849 0 0 0 0 0 0  
 0 -13.2722 -7.71486 -5.23115 0 -10.2767 71.0237 -7.71486 0 -3.26595 -10.2767 -13.2722 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -12.3674 -5.49125 0 0 -7.71486 35.2659 0 0 -4.50181 -5.19066 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -5.19067 -4.50181 0 0 35.2659 -7.71486 0 0 -5.49125 -12.3674 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -13.2722 -10.2767 -3.26595 0 0 -7.71486 71.0237 -10.2767 0 -5.23115 -7.71486 -13.2722 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -15.2049 -10.2767 -4.50181 0 0 -10.2767 71.0151 -7.64516 0 -4.50181 -7.64516 -10.963  
 0 0 0 0 0 0 -13.2722 -5.19066 0 0 -7.64516 35.6892 0 0 -6.10152 -3.39971  
 0 0 0 0 0 0 0 -5.49125 -5.23115 0 0 16.2136 -5.49125 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 0 0 0 -12.3674 -7.71486 -4.50181 0 -5.49125 35.2659 -5.19066 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 0 0 0 0 -13.2722 -7.64516 -6.10152 0 -5.19066 35.6892 -3.39971  
 Macierz HG<sup>H</sup>  
 26.824 -1.13431 0 0 -1.13431 -10.963 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 -1.13431 43.3438 -3.58878 0 -6.10152 -7.64516 -13.2722 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 -3.58878 40.7351 -4.35854 0 -4.50181 -7.71486 -12.3674 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 -4.35854 20.7445 0 -5.23115 -4.35854 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 -1.13431 -6.10152 0 0 43.3438 -7.64516 0 0 -3.58878 -13.2722 0 0 0 0 0 0 0  
 -10.963 -7.64516 -4.50181 0 -7.64516 71.0151 -10.2767 -4.50181 -10.2767 -15.2049 0 0 0 0 0  
 0 -13.2722 -7.71486 -5.23115 0 -10.2767 71.0237 -7.71486 0 -3.26595 -10.2767 -13.2722 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -12.3674 -4.35854 0 0 -7.71486 40.7351 0 0 -4.50181 -3.58878 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -3.58878 -4.50181 0 0 40.7351 -7.71486 0 0 -4.35854 -12.3674 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 -13.2722 -10.2767 -3.26595 0 0 -7.71486 71.0237 -10.2767 0 -5.23115 -7.71486 -13.2722 0 0 0  
 0 0 0 0 -15.2049 -10.2767 -4.50181 0 0 -10.2767 71.0151 -7.64516 0 -4.50181 -7.64516 -10.963  
 0 0 0 0 0 0 -13.2722 -5.38878 0 0 -7.64516 43.3438 0 0 -6.10152 -1.13431  
 0 0 0 0 0 0 0 -4.35854 -5.23115 0 0 20.7445 -4.35854 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 0 0 0 -12.3674 -7.71486 -4.50181 0 -4.35854 40.7351 -3.58878 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 0 0 0 0 0 0 0 0 -13.2722 -7.64516 -6.10152 0 -3.58878 43.3438 -1.13431  
 0 0 0 0 0 0 0 0 -10.963 -1.13431 0 0 -1.13431 26.824  
 Wektor PG  
 16310.9 13922.3 9844.53 8155.47 13922.3 0 0 9844.53 9844.53 0 0 13922.3 8155.47 9844.53 13922.3 16310.9

Rysunek 6. Porównanie macierzy  $H$ ,  $H+BC$  i  $P$  dla siatki  $4 \times 4$  MIX. Po lewej dane z UPeL, po prawej dane z oprogramowania.

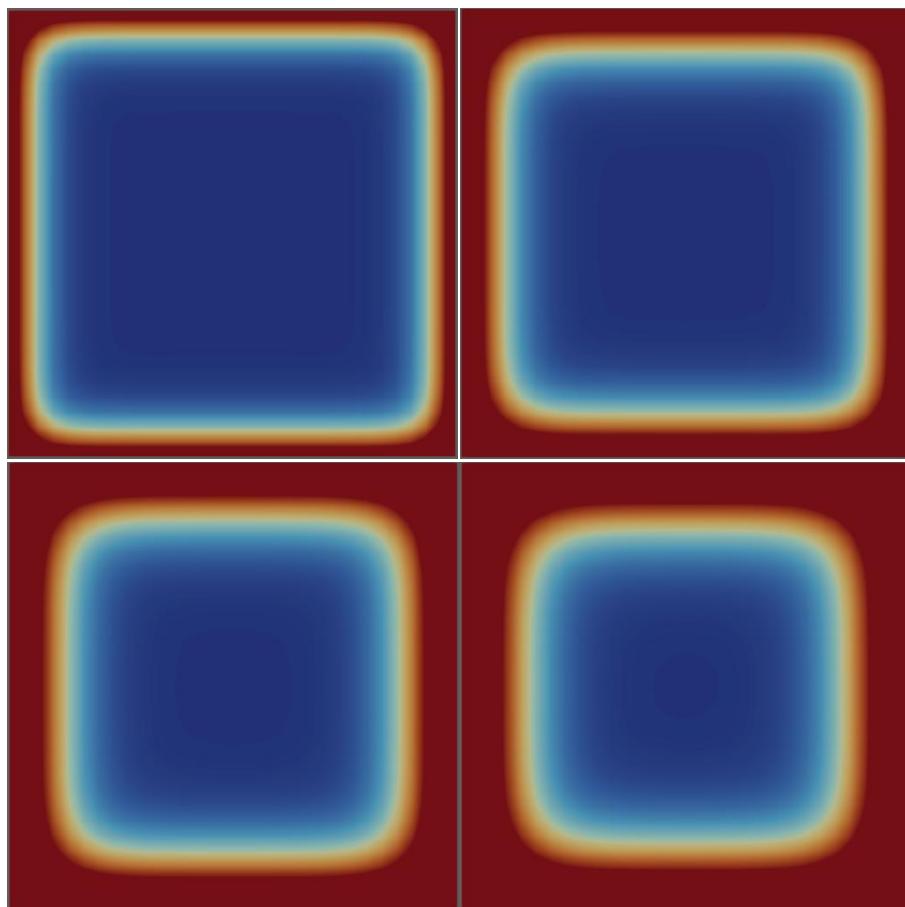
Tabela 4. Zestawienie min, max, avg (średniej) temperatury w danym kroku dla siatki 4x4 mix. Krok ustawiony na 55 sekund aby wyniki miały sens fizyczny (brak spadku temperatury poniżej wartości początkowej).

SIATKA 4X4 MIX				
step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]
0	55	100.586	387.34	252.919
1	110	162.246	521.591	359.501
2	165	242.975	604.507	444.53
3	220	325.955	666.72	517.34
4	275	404.978	718.638	581.772
5	330	478.079	764.339	639.612
6	385	544.916	805.636	691.852
7	440	605.734	842.654	739.153
8	495	660.966	876.041	782.026

## Siatka 30x30

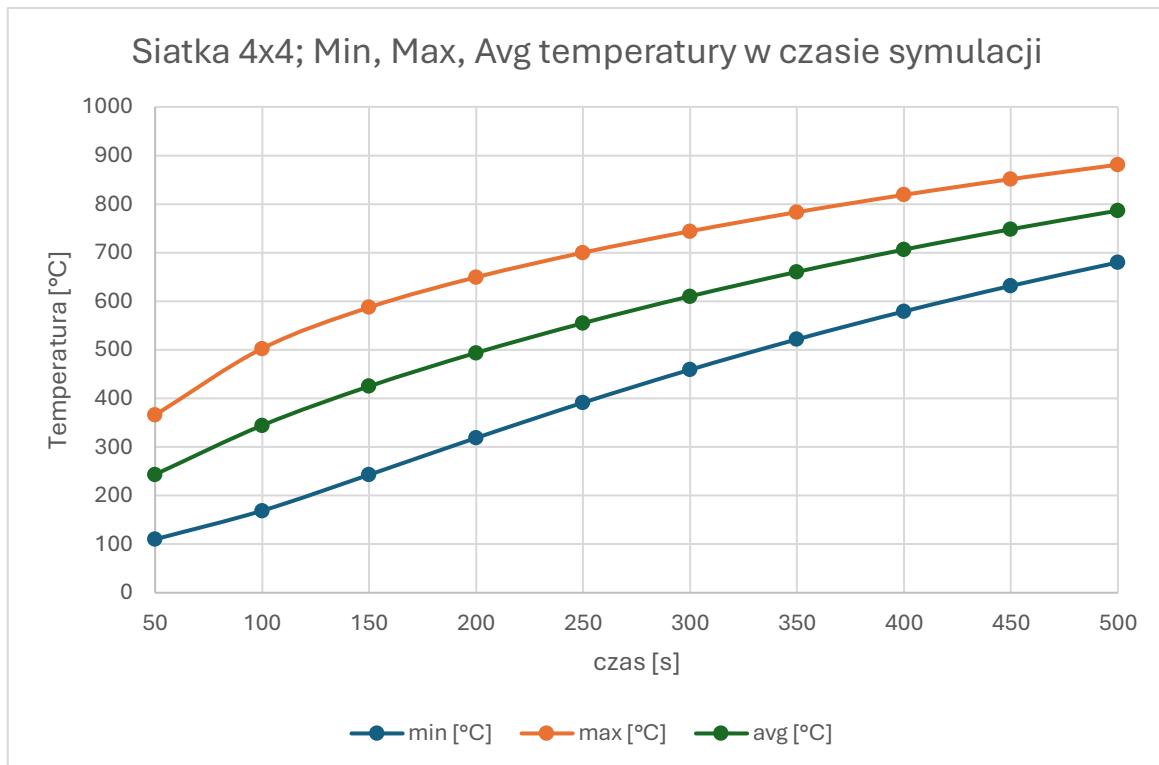
Tabela 5. Zestawienie min, max, avg (średniej) temperatury w danym kroku dla siatki 30x30. Temperatura w [°C]

SIATKA 30x30				
step	time [s]	min [°C]	max [°C]	avg [°C]
0	1	100	149.557	103.904
1	2	100	177.445	107.077
2	3	100	197.267	109.964
3	4	100	213.153	112.703
4	5	100	226.683	115.348
5	6	100	238.607	117.924
6	7	100	249.347	120.447
7	8	100	259.165	122.926
8	9	100	268.241	125.368
9	10	100	276.701	127.778
10	11	100.001	284.641	130.159
11	12	100.002	292.134	132.514
12	13	100.003	299.237	134.846
13	14	100.005	305.997	137.157
14	15	100.009	312.451	139.447
15	16	100.014	318.631	141.72
16	17	100.021	324.564	143.974
17	18	100.032	330.271	146.213
18	19	100.046	335.772	148.436
19	20	100.064	341.085	150.644

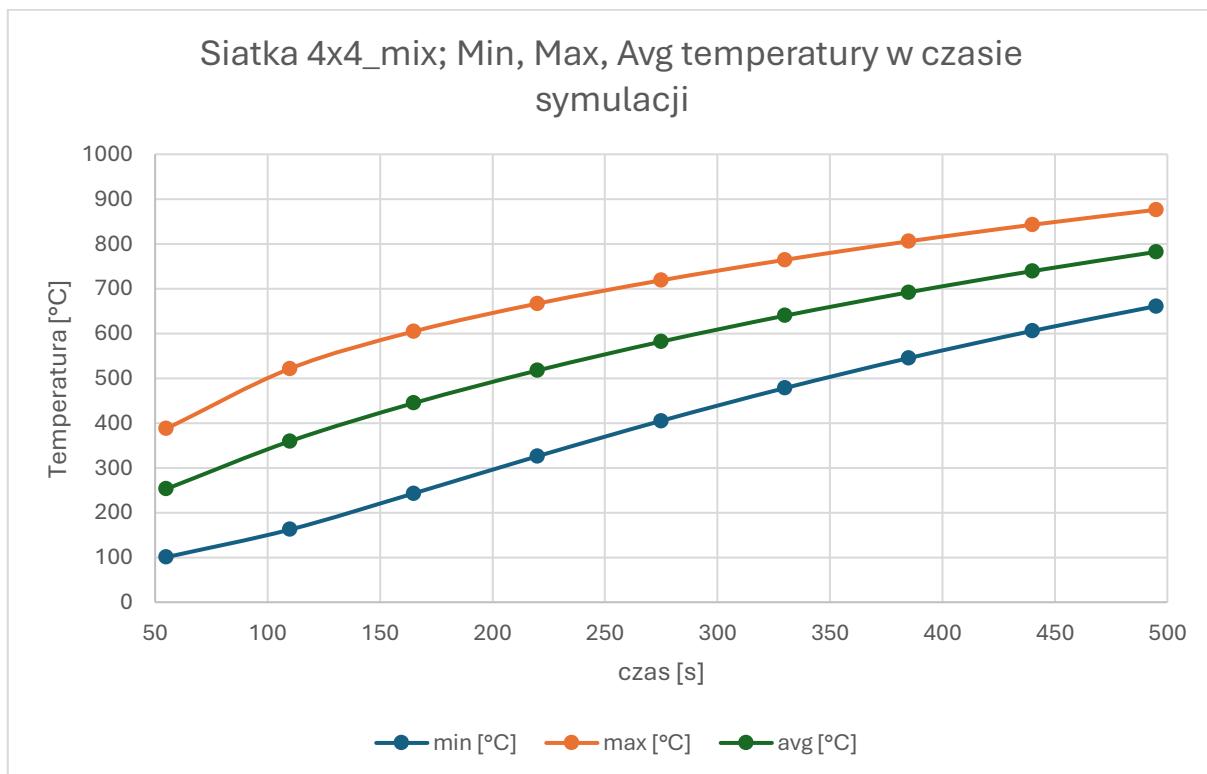


Rysunek 7. Wizualizacja gradientu temperatur w siatce 30x30 w 5,10,15,20 sekundzie symulacji. Program do wizualizacji ParaView (v. 6.0.1)

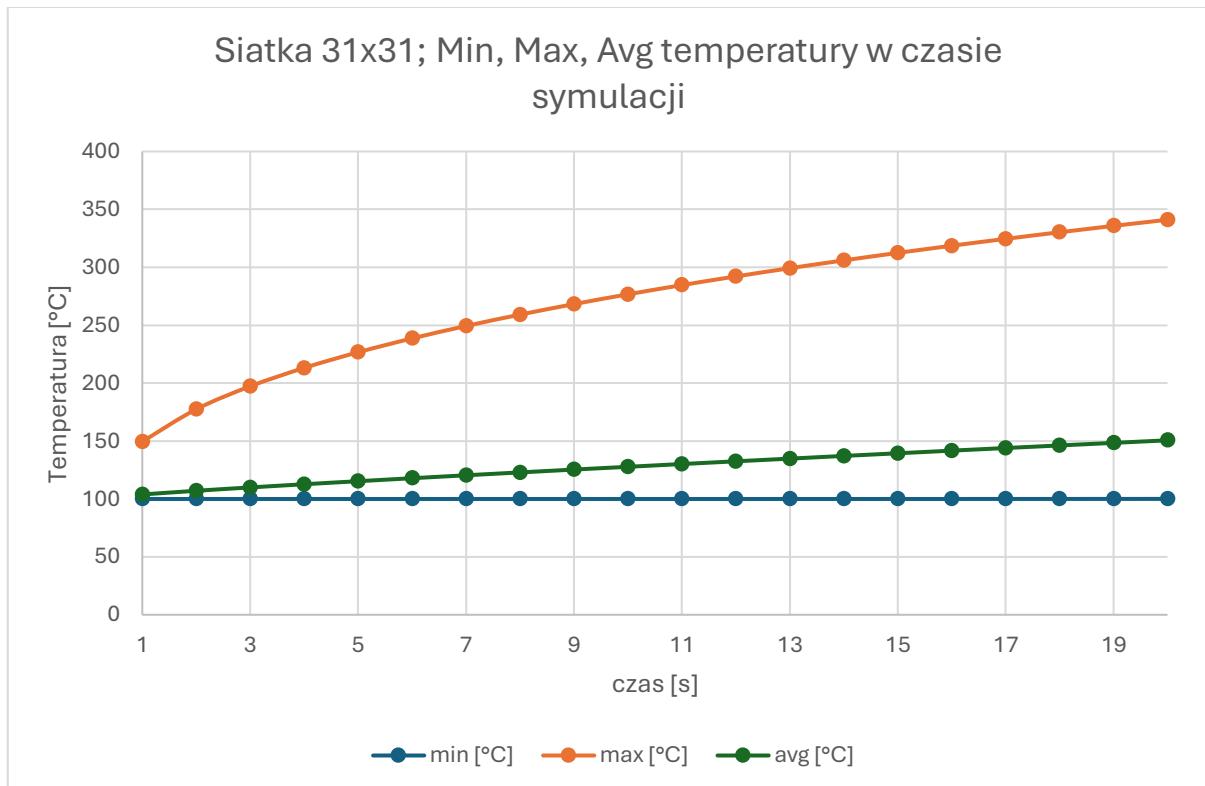
## Wykresy temperatur w czasie symulacji



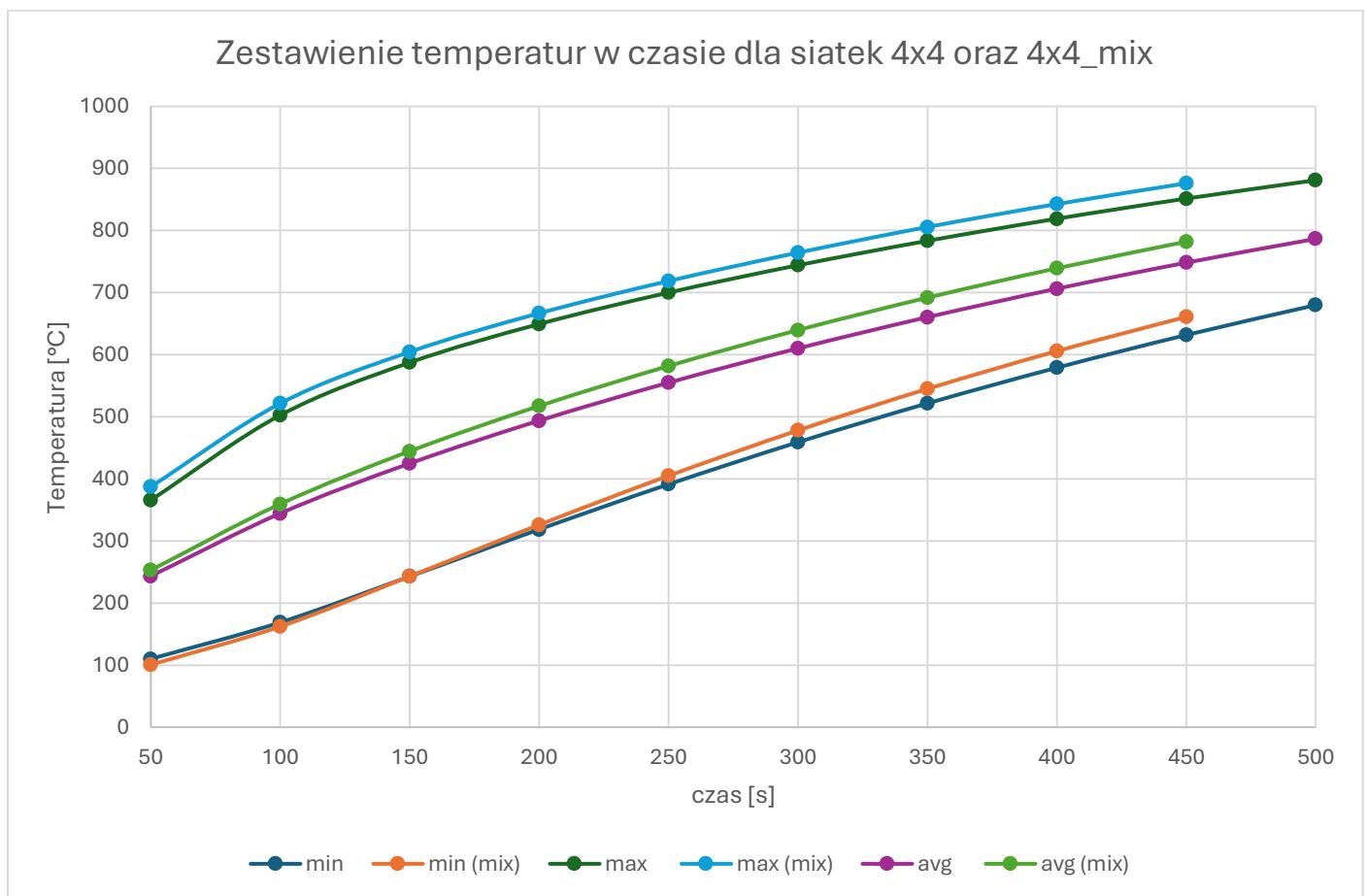
Rysunek 8. Wykres przedstawia temperaturę w czasie symulacji dla siatki 4x4



Rysunek 9. Wykres przedstawia temperaturę w czasie symulacji dla siatki 4x4\_mix



Rysunek 10. Wykres przedstawia temperaturę w czasie symulacji dla siatki 31x31



Rysunek 11. Zestawienie temperatur dla dwóch symulacji. Siatka 4x4 (krok 50s) oraz 4x4\_mix (krok 55s).

## Wnioski

Złe dobranie kroku czasowego do zagęszczenia, czy kształtu siatki może skutkować błędami i nie fizycznym zachowaniem symulacji.

Gęstość siatki ma znaczenie dla wyników i dokładności symulacji. Dla siatki 31x31 wyraźnie widać płynniej zmieniający się gradient. Gęstość siatki przekłada się natomiast na liczbę węzłów, co wydłuża czas obliczeń.

Kształt siatki również wpływa na wyniki symulacji co widać porównując siatkę 4x4 oraz siatkę 4x4\_mix. Można zauważyć że rozkład temperatury różni się ze względu na różny kształt elementów siatek.

# Problem rzeczywisty. Symulacja chłodzenia procesora.

## Opis oraz założenia modelu

Wprowadzenie. Krótki opis problemu i modelu.

Model symuluje chłodzenie procesora poprzez radiator – część chłodzącą, na którą składa się IHS oraz żebra radiatora (**RYSUNEK 12**). Dla uproszczenia procesor (cpu die), IHS oraz żebra radiatora są wszystkie tym samym materiałem – miedzią. Pozostałe elementy siatki to powietrze.

Model symuluje proces stacjonarny, niestacjonarny oraz niestacjonarny ze sztuczną dyfuzją.

Źródłem ciepła w układzie jest procesor (cpu die), który traktowany jest jako wewnętrzne źródło ciepła.

## Wielkość i skala modelu:

Model zakłada, że powierzchnia IHS w rzeczywistości to 40mmx40mm, a wielkość cpu die to około 13mmx13mm. Ze względu na przyjęte rozwiązanie w postaci siatki 30x30 elementów, gdzie każdy element jest kwadratem, skalujemy siatkę wstępna (od prowadzącego) współczynnikiem równym 0.39, tak aby otrzymać wielkość boku elementu równą 1.3mm. Dzięki takiemu rozwiązaniu wielkość cpu die to 13mm szerokości na 1.3mm wysokości, czyli wymiary powierzchniowe (szerokość) zgadzają się z rzeczywistością. Powierzchnia IHS jest jedynie w przybliżeniu równa 40mm, dokładnie wynosi 39mm. [1]

Skalowanie odbywa się poprzez pomnożenie wartości współrzędnych x oraz y dla każdego węzła siatki.

```
const double SCALE_FACTOR_X = 0.39;
const double SCALE_FACTOR_Y = SCALE_FACTOR_X;
// ...
void scale_mesh(Grid& grid, const double& scale_factor_x, const double& scale_factor_y){
    for(auto& node : grid.nodes){
        node.x = node.x * scale_factor_x;
        node.y = node.y * scale_factor_y;
    }
}
```

*Listing 1. Fragment kodu reprezentujący stałą wartość współczynnika skalującego siatkę oraz funkcję skalującą.*

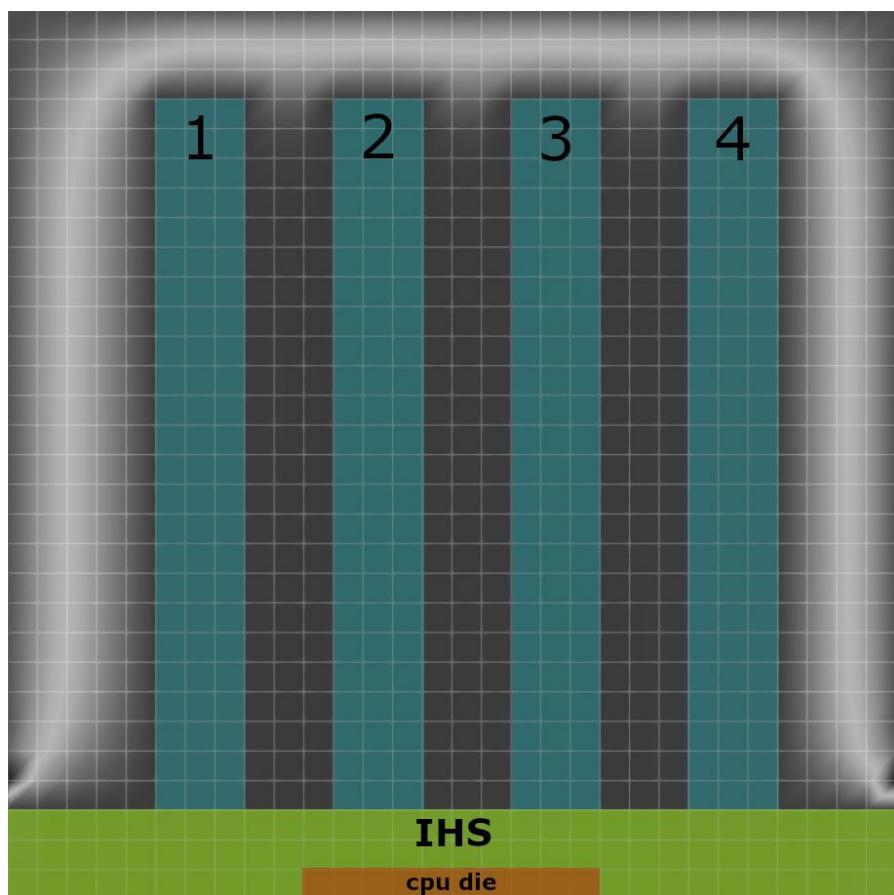
## Materiały oraz ich własności fizyczne:

Materiały stosowane w modelu to miedź (czysta) oraz powietrze. Wartości zostały sprawdzone w źródłach internetowych dla temperatury 20°C oraz uśrednione z 2 źródeł w których podana została informacja dla jakiej temperatury są to dane. Przyjęto następujące własności:

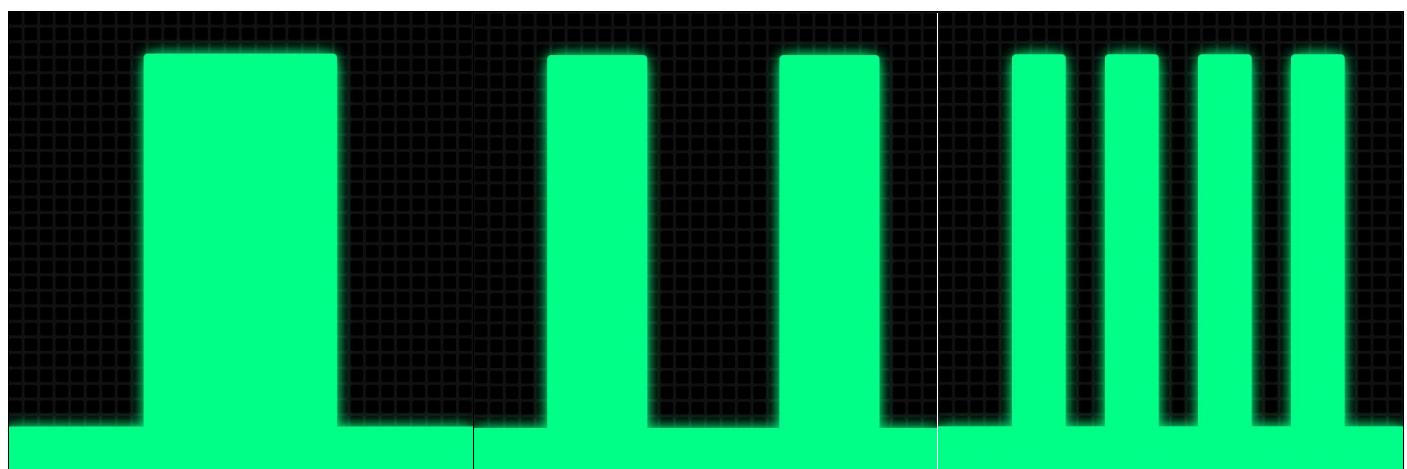
Tabela 6. Wartości własności fizycznych dla powietrza oraz miedzi. [4] [5] [6] [7] [8]

WARTOSCI W PROJEKCIE:			
jednostka	właściwość	Powietrze	Miedź
W/m K	CONDUCTIVITY	0.025368	394.85
kg/m3	DENSITY	1.20435	8911.47
J/kg·K	SPECIFIC HEAT	1006.55	384.37

## Wizualizacja i opis schematu modelu



Rysunek 12. Rysunek przedstawia schemat modelu. Kolorem niebieskim oraz liczbami 1,2,3,4 zostały zaznaczone żebra/kolumny radiatora, kolorem zielonym oraz opisem „IHS” został oznaczony IHS (eng. Integrated Heat Spreader - pl. Zintegrowany Rozpraszacz Ciepła), kolorem czerwonym i opisem „cpu die” została oznaczona część półprzewodnikowa procesora, która dostarcza ciepło do układu.



Rysunek 13. Rysunek przedstawia 3 rozpatrywane scenariusze. a) jedno żebro/kolumna, b) dwa żebra, c) trzy żebra.

Schemat jest ten sam dla każdego scenariusza (scenariusze różnią się liczbą kolumn/żebra radiatora; 1k (k - kolumna), 2k, 4k), tzn. „cpu die” i „IHS” się nie zmieniają, zmienia się jedynie liczba i położenie żebra/kolumn radiatora (kolor niebieski).

W praktyce rozróżnienie na te części (cpu die, ihs, radiator) nie ma większego znaczenia dla modelu, ponieważ wszystkie te elementy są po prostu miedzią. Jedynym rozróżnieniem jest to że cpu die, czyli część która się nagrzewa ma zadane wewnętrzne źródło ciepła. Na schemacie przyjęte zostało takie rozróżnienie ze względu na powiązanie problemu z rzeczywistym zagadnieniem.

Warunek brzegowy konwekcji nałożony jest na prawą, górną oraz lewą ścianę.

Długość styku miedzi z powietrzem w zależności od scenariusza:

Równanie 1. Wzór na długość styku radiatora (miedzianego) z powietrzem.

$$A_{vert} + A_{hor} = A_{total}$$

Równanie 2. Wzór na długość styku pionową – góra-dół.

$$A_{vert} = 30 * 1.3mm = 39mm$$

Równanie 3. Wzór na długość poziomą, która zależy od ilości żeber. n – ilość żeber

$$A_{hor} = 2 * n * 24 * 1.3mm$$

Tabela 7. Wartości długości styku miedzi z powietrzem w zależności od liczby żeber

liczba żeber	Ahor [mm]	Atotal [mm]
1	62.4	101.4
2	124.8	163.8
4	249.6	288.6

Sposób obliczenia zadanego źródła ciepła – TDP (Thermal Design Power) procesora.

Producenci podają TDP, czyli maksymalną wartość wydzielanego ciepła (w Watach) jaką procesor generuje podczas obciążenia.

W modelu przyjęta została metoda zadania wewnętrznego źródła ciepła na części z elementów (cpu die). Do obliczenia ilości generowanego ciepła została zastosowana następująca metoda.

Równanie 4.

$$\text{Ilość generowanego ciepła} = \frac{TDP}{V_{cpu}} \left[ \frac{W}{m^3} \right]$$

Ze względu na to że jednostka ilości generowanego ciepła to  $W/m^3$  objętość procesora została obliczona w  $m^3$ , a TDP zadane w watach.

Równanie 5.

$$V_{cpu} = \frac{13mm * 13mm * 1.3mm}{1000,000,000} [m^3]$$

Tabela 8. Porównanie zmian w długości styku miedzi z powietrzem w zależności od liczby żeber

liczba żeber	Ahor [mm]	Atotal [mm]
1	100%	100%
2	200%	162%
4	400%	285%

Listing 2. Stała ilości generowanego ciepła w kodzie

```
const double HEAT_GENERATION = 2.175 / (13*13*1.3 / (1000*1000*1000)); // [W/m3]
```

## Analiza dla procesu ustalonego:

a) Określenie maksymalnego TDP procesora w każdym scenariuszu przy założeniu maksymalnej osiągniętej temperatury 100°C

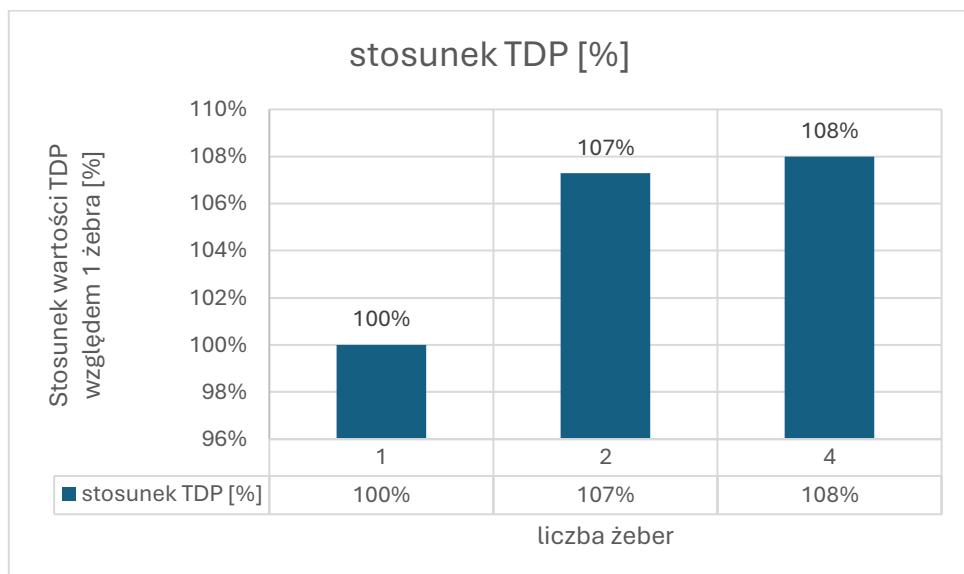
Temperatura maksymalna 100°C została przyjęta, ze względu na dokumentację procesorów Intel w której można znaleźć podaną maksymalną dla DTS (eng. digital thermal sensor – który rejestruje temperaturę cpu die) [9]

Metoda optymalizacji zakładała dokładność rzędu 1e-3 i została wykonana ręcznie, nie programowo (metoda binary search).

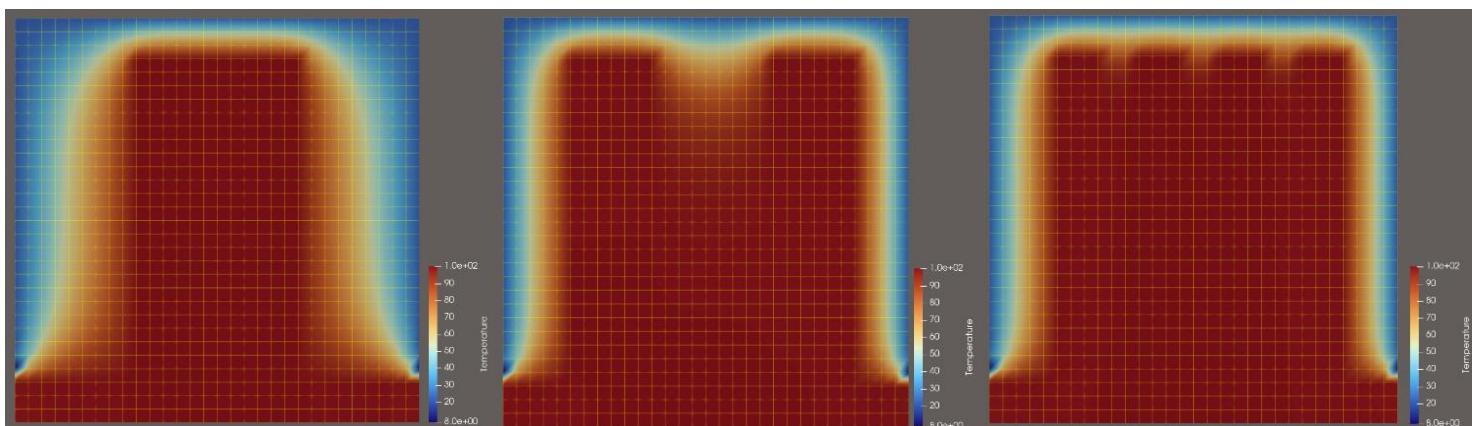
Tabela 9. Tabela przedstawia maksymalne znalezione TDP w zależności od liczby żeber/kolumn

Liczba żeber	max TDP [W]
4	2.349
2	2.3335
1	2.175

Otrzymane wartości TDP zgadzają się w przybliżeniu z wartościami otrzymanymi w [1], z zastrzeżeniem że w tym artykule element chłodzący to IHS bez dodatkowych żeberek.



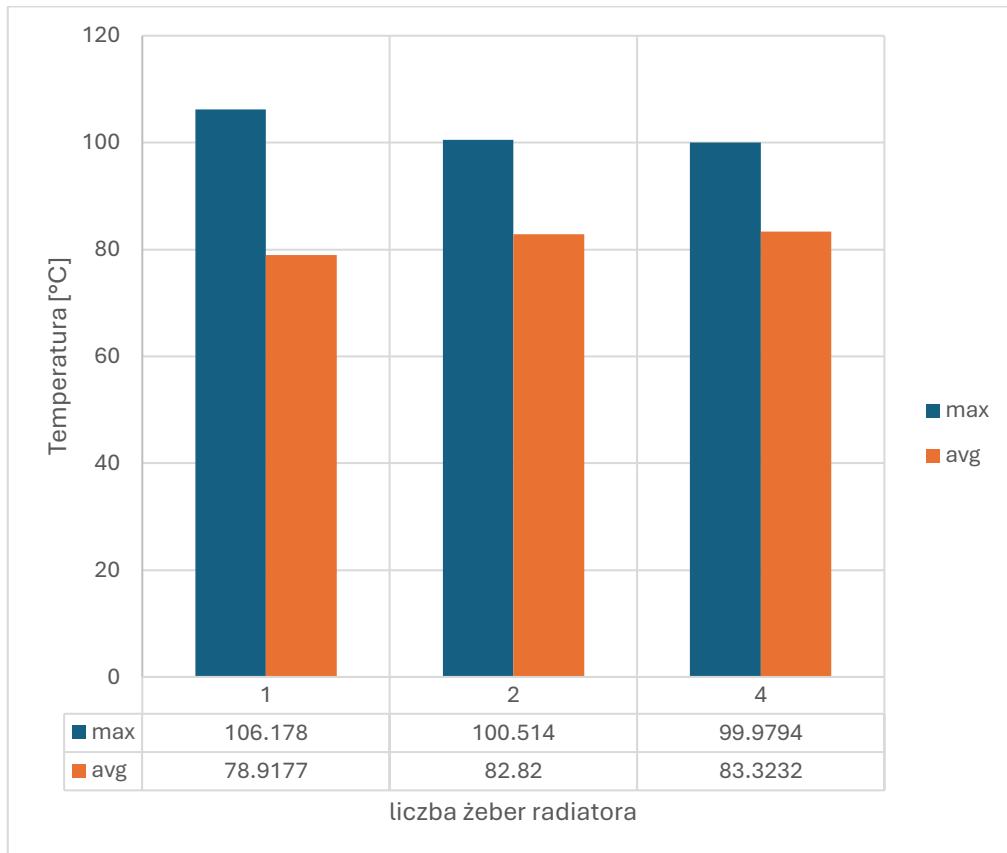
Rysunek 14. Diagram pokazuje procentowy stosunek wartości uzyskanego TDP dla danego scenariusza w odniesieniu do scenariusza z jednym żebrem radiatora.



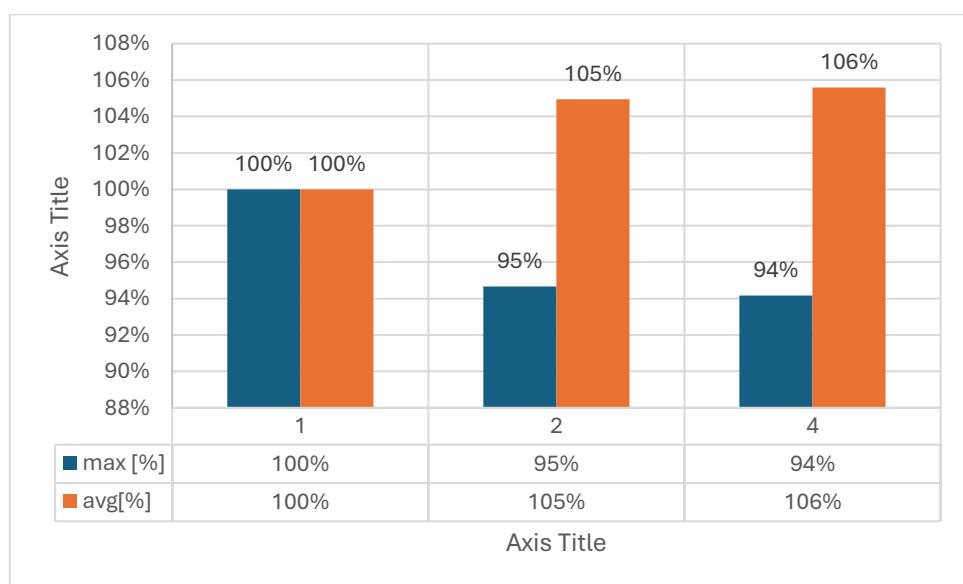
Rysunek 15. Rysunek przedstawia wizualizacje wartości temperatur w trzech scenariuszach.

Jak widać w **TABELA 9**, mimo że długość styku zmienia się znacząco między scenariuszami, to wartość uzyskanego TDP nie zmienia się proporcjonalnie do zmiany długości chłodzącej (styku miedzi z powietrzem), TDP zmienia się jedynie nieznacznie (**RYSUNEK 14**) - wzrost o 7% i o 8% względem jednego żebra odpowiednio dla 2 i 4 żeber, co spowodowane jest, jak widać na **RYSUNEK 15** nagrzaniem się powietrza między żebrami (średnia temperatura liczona jest z każdego elementu, a nie tylko z miedzi – radiatora).

*b) Porównanie uzyskanych temperatur dla stałego TDP w zależności od liczby żeber radiatora.*



*Rysunek 16. Diagram przedstawia zestawienie maksymalnych i średnich temperatur dla tego samego TDP=2.349 w każdym scenariuszu (w zależności od liczby żeber)*



*Rysunek 17. Diagram przedstawia wzajemną (względna do scenariusza z jednym żebrem) różnicę w uzyskanych temperaturach dla stałego TDP=2.349 w każdym scenariuszu (w zależności od liczby żeber/kolumn).*

Jak widać w **TABELA 8**, mimo że długość styku zmienia się znacząco między scenariuszami, to maksymalna temperatura zmienia się jedynie nieznacznie (**RYSUNEK 17**) – spadek o 5% i o 6% względem jednego zebra. Średnia temperatura natomiast wzrasta, co spowodowane jest jak w przypadku wartości TDP nagrzaniem się powietrza między żebrami.

## Analiza procesu nieustalonego

### a) Porównanie symulacji ze sztuczną dyfuzją powietrza oraz bez niej

Sztuczna dyfuzja wprowadzona została w następujący sposób:

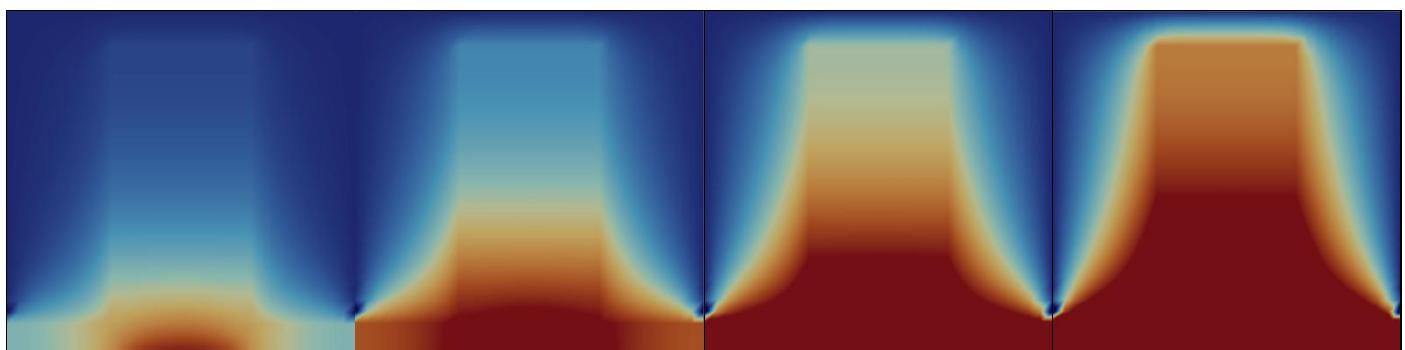
Średnia temperatura powietrza liczona jest ze wszystkich elementów powietrza w modelu, nie graniczących z miedzią. Dla każdego elementu sumowana jest wartość temperatury w jego węzłach, mnożona przez sumę jacobianów jego punktów całkowania (w ramach uwzględnienia pola powierzchni elementu), następnie dzielona przez ilość węzłów (4).

$$\text{Temp. średnia elementu} = \frac{\text{suma temp. węzłów} * \text{suma wyzn. jacobiana punktów całkowania}}{4}$$

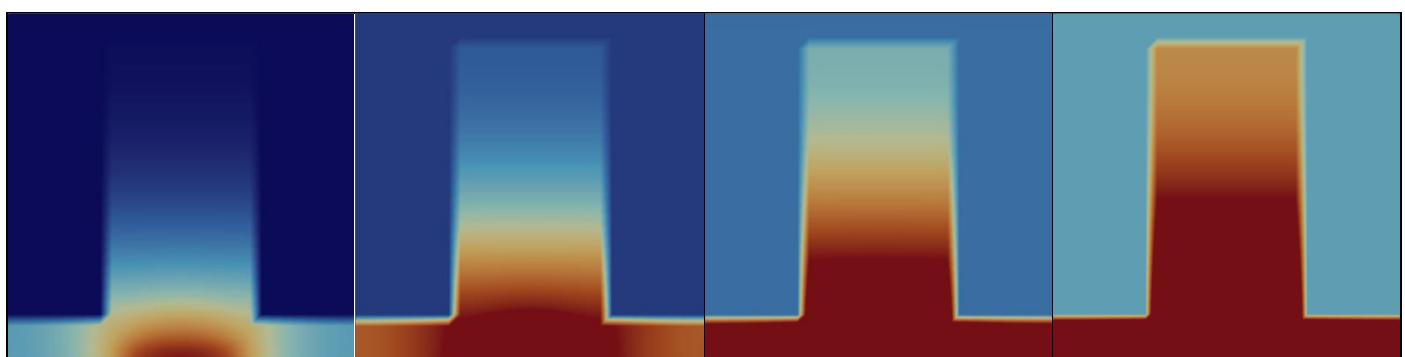
Temperatura średnia całego powietrza to suma temperatur średnich wszystkich elementów powietrza podzielona przez sumę wyznaczników jacobianów wszystkich elementów.

$$\text{Temp. średnia powietrza} = \frac{\text{suma śr. temp. elementów}}{\text{suma wyzn. jacobianów elemntów}}$$

*Rysunek 18. Rysunek przedstawia 4 pierwsze sekundy symulacji dla procesu nieustalonego bez dyfuzji.*



*Rysunek 19. Rysunek przedstawia 4 pierwsze sekundy symulacji dla procesu nieustalonego z dyfuzją.*



Jak widać na **RYSUNEK 20** i **RYSUNEK 21** proces nagrzewania się żebra radiatoria jest bardzo podobny, nagzewanie się powietrza jest natomiast zupełnie różne. Przy braku dyfuzji wyraźnie widać gradient temperatur, przy sztucznej dyfuzji widać natomiast, że temperatura powietrza zmienia się równomiernie w całej jego objętości.

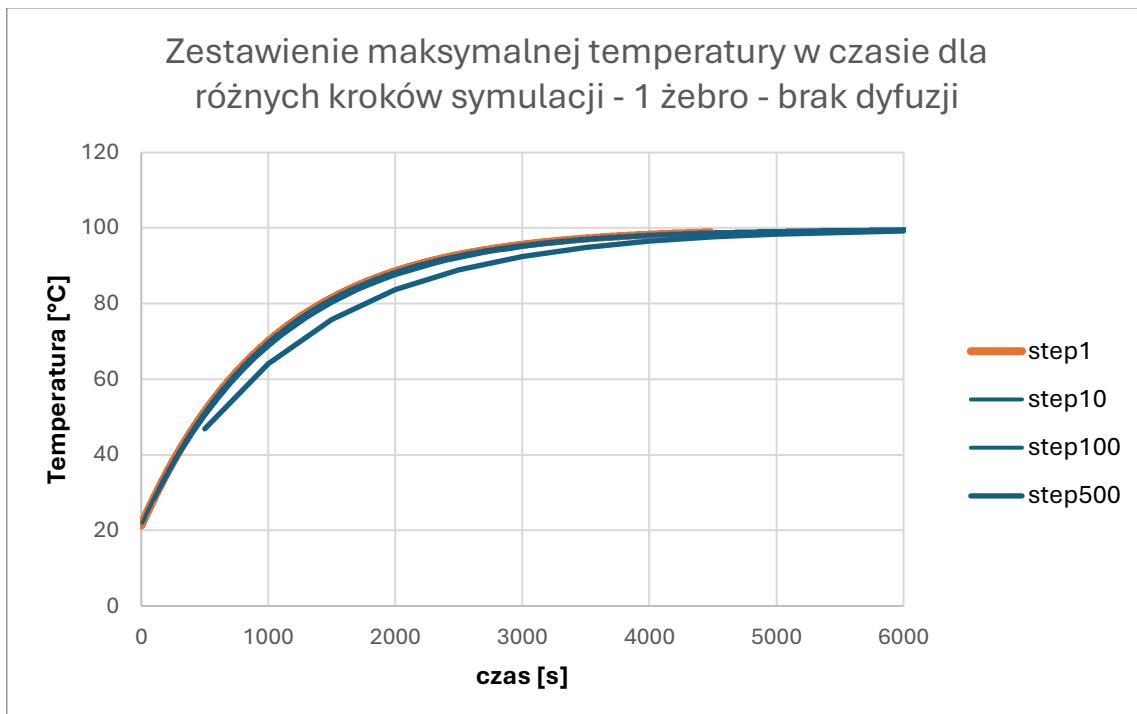
Tabela 10. Porównanie temperatur w 2000. sekundzie symulacji dla procesu nieustalonego z dyfuzją oraz bez niej.

liczba zeber	czas [s]	temperatura bez dyfuzji [°C]		temperatura z dyfuzją [°C]	
		max	avg	max	avg
1	2000	88.4771	66.8539	86.68	64.933
2	2000	90.1263	74.6965	87.9263	71.9978
4	2000	90.2483	75.6047	82.3743	67.9357

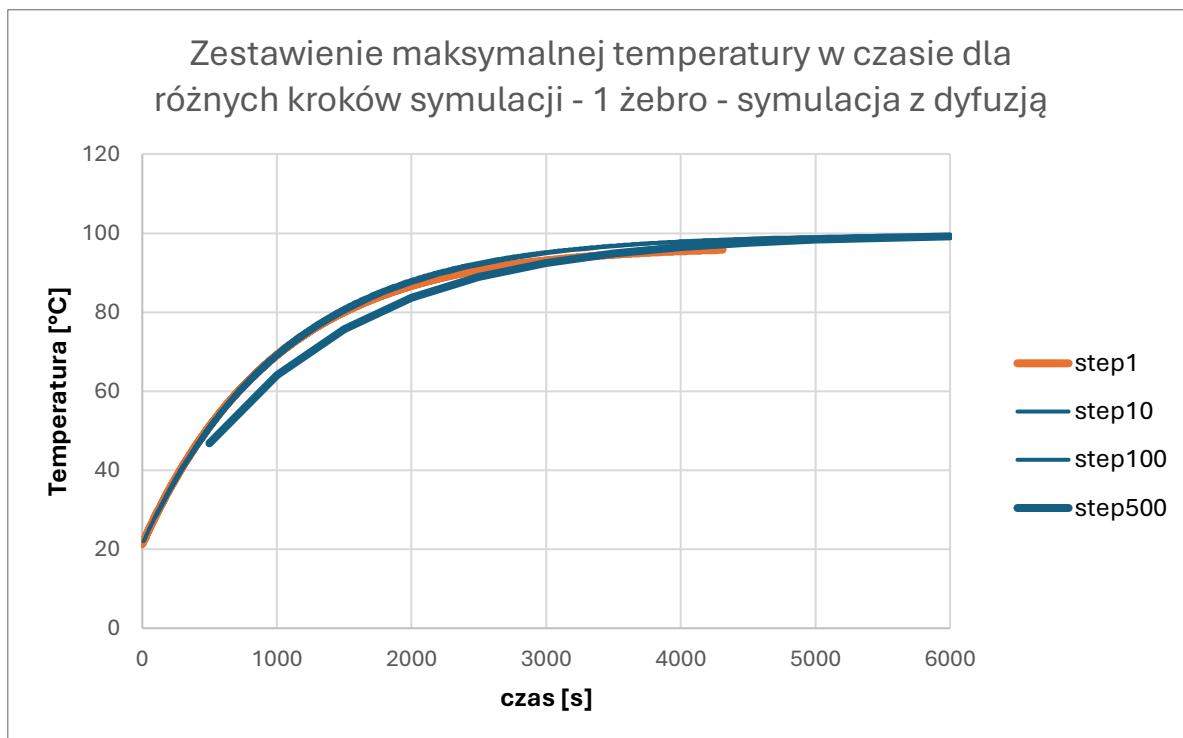
W

**TABELA 10** zauważać można że maksymalne temperatury są niższe dla symulacji z dyfuzją. Dzięki dyfuzji powietrza lepiej oddaje temperaturę na zewnątrz, co jest bliższe realnemu zachowaniu się powietrza, które mieszałoby się ze względu na różnicę temperatur oraz/lub ruch powietrza spowodowany wiatrakiem wentylatora. Szybsze chłodzenie wiąże się z tym, że bez dyfuzji skrajne elementy powietrza nie będą się nagrzewać od samego początku więc konwekcja nie będzie działać, przy dyfuzji od razu skrajne elementy mają taką samą temperaturę jak te przy radiatorze i mogą oddawać ciepło w wyniku konwekcji (warunek brzegowy).

b) Sprawdzenie jak zwiększenie kroku symulacji wpływa na jej dokładność w kontekście maksymalnej temperatury i zbiegania w czasie do procesu ustalonego.



Rysunek 20. Diagram przedstawia porównanie maksymalnych temperatur w czasie symulacji dla różnych kroków czasowych dla 1 żebra.



Rysunek 21. Diagram przedstawia zestawienie maksymalnych temperatur w czasie symulacji w zależności od kroku symulacji dla 1 żebra z dyfuzją.

Symulacja ([RYSUNEK 20](#), [RYSUNEK 21](#)) dla kroku 1 zakończyła się w czasie poniżej 6000s ponieważ zaimplementowany został mechanizm sprawdzenia zbieżności. Jeżeli zmiana maksymalnej temperatury była mniejsza niż epsilon (0.001) to symulacja byłakończona.

\*Diagramy mają postać liniową a nie punktową ze względu na czytelność.

Na **RYSUNEK 20** widać, że symulacje dla kroków 1, 10 oraz 100 dość dobrze się pokrywają w całym zakresie. Dla kroku 500 widać jednak, że początkowy zakres mocno odbiega od pozostałych i zbiega dopiero pod koniec.

Na **RYSUNEK 21** widać, że dla kroku większego niż 1 wartości zbiegają do wyższych wartości.

Dla kroków 10 oraz 100 wartości temperatury dość dobrze pokrywają się w początkowym przedziale (1-2000s) z wartościami dla kroku 1. Dla kroku 500 wartości zaczynają pokrywać się dopiero w końcowym „zbieżnym” etapie symulacji.

#### Stan ustalony podczas symulacji:

O tym, że proces osiągnął stan ustalony świadczy wartość zmiennej epsilon [ $^{\circ}\text{C}/\text{s}$ ] [temperatura / dł.kroku]. Zdefiniowana jest ona jako wartość zmiany maksymalnej temperatury w modelu na przestrzeni kroków symulacji podzielonej przez długość kroku symulacji.

*Tabela 11. Tabela przedstawia zestawienie temperatur dla procesu stacjonarnego oraz symulacji z różnymi krokami czasowymi (1s, 10s, 100s) i porównanie ich zbieżności.*

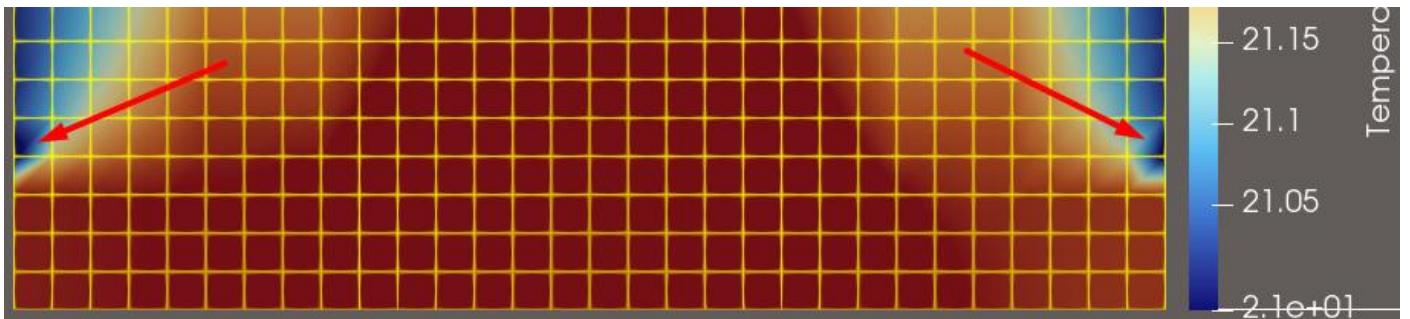
ZESTAWIENIE WYNIKÓW ZBIEGANIA SYMULACJI Z WYNIKAMI PROCESU STACJONARNEGO epsilon = 0.001 [ $^{\circ}\text{C}/\text{s}$ ]									
stan/dł.kroku	liczba zeber	krok	czas [s]	min [ $^{\circ}\text{C}$ ]	max[ $^{\circ}\text{C}$ ]	avg [ $^{\circ}\text{C}$ ]	min [%]	max [%]	avg [%]
ustalony	1	0	1	7.98505	99.8688	74.6275	100.0000%	100.0000%	100.0000%
1	1	4485	4485	8.15608	98.8342	73.9215	102.1419%	98.9640%	99.0540%
10	1	929	9300	7.98676	99.8585	74.6205	100.0214%	99.9897%	99.9906%
100	1	146	14700	7.98507	99.8687	74.6275	100.0003%	99.9999%	100.0000%
ustalony	2	0	1	8.03343	99.9892	82.4121	100.0000%	100.0000%	100.0000%
1	2	4243	4243	8.19225	99.0255	81.6581	101.9770%	99.0362%	99.0851%
10	2	872	8730	8.03501	99.9796	82.4045	100.0197%	99.9904%	99.9908%
100	2	137	13800	8.03344	99.9891	82.412	100.0001%	99.9999%	99.9999%
ustalony	4	0	1	8.04588	99.9794	83.3232	100.0000%	100.0000%	100.0000%
1	4	4222	4223	8.20329	99.023	82.5646	101.9564%	99.0434%	99.0896%
10	4	867	8680	8.04745	99.9699	83.3157	100.0195%	99.9905%	99.9910%
100	4	137	13800	8.04589	99.9793	83.3231	100.0001%	99.9999%	99.9999%

Jak widać w **TABELA 11** dla kroku 100s wartość temperatury uzyskanej przez symulację jest prawie identyczna (0.0001% lub mniej błędu) jak temperatura obliczona dla procesu stacjonarnego. Dla kroku 10s błąd jest lekko większy bo wynosi około 0.01% a dla kroku 1s błąd wynosi prawie 1% temperatury maksymalnej uzyskanej podczas symulacji procesu stacjonarnego.

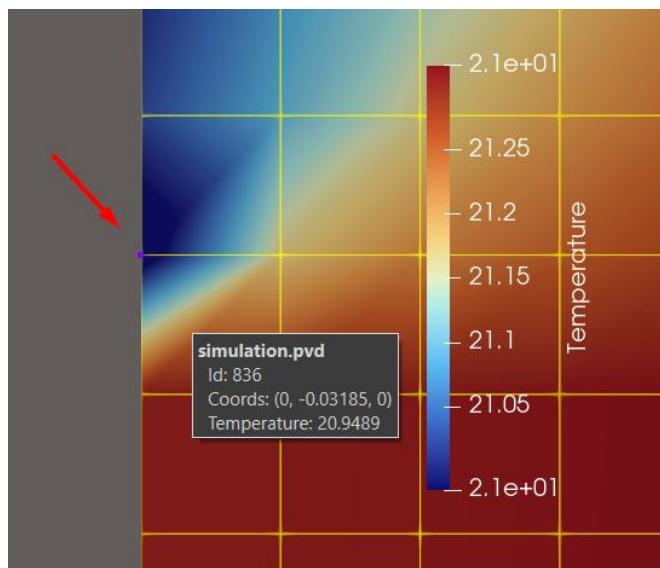
## Błąd w dwóch węzłach

W dwóch węzłach pojawia się błąd – temperatura spada poniżej temperatury otoczenia. Nie jest to zjawisko (najprawdopodobniej) zależne od kroku czasowego – występuje dla kroków 0.1s, 0.2s, 0.5s, 1s, 5s, 10s, 100s, 500s.

Hipoteza, że jest to zależne od błędu w liczeniu BC chyba też jest błędna, ponieważ nie jest to węzeł na granicy dwóch materiałów.



Rysunek 22. Przedstawia błędne wartości w dwóch węzłach. Wartości poniżej temperatury otoczenia.



Rysunek 23. Przedstawia węzeł z błędna wartością w powiększeniu.

## Literatura

- [1] J. Elliott, M. Lebon i A. Robinson, „Optimising integrated heat spreaders with distributed heat transfer coefficients: A case study for CPU cooling,” *Case Studies in Thermal Engineering*, tom 38, p. 102354, 2022.
- [2] Engineering ToolBox, „Metal Alloys – Densities,” [Online]. Available: [https://www.engineeringtoolbox.com/metal-alloys-densities-d\\_50.html](https://www.engineeringtoolbox.com/metal-alloys-densities-d_50.html). [Data uzyskania dostępu: 14 1 2026].
- [3] Engineering ToolBox, „Thermal Conductivity of Metals,” [Online]. Available: [https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-metals-d\\_858.html](https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-metals-d_858.html). [Data uzyskania dostępu: 14 1 2026].
- [4] „Air Density, Specific Weight, and Thermal Expansion Coefficients at Varying Temperatures and Pressures,” [Online]. Available: [https://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d\\_600.html](https://www.engineeringtoolbox.com/air-density-specific-weight-d_600.html). [Data uzyskania dostępu: 14 1 2026].
- [5] P. Evans, „Properties of Air at atmospheric pressure,” 2015. [Online]. Available: <https://theengineeringmindset.com/properties-of-air-at-atmospheric-pressure/>. [Data uzyskania dostępu: 14 01 2026].
- [6] The Pennsylvania State University, [Online]. Available: [https://www.me.psu.edu/cimbala/me433/Links/Table\\_A\\_9\\_CC\\_Properties\\_of\\_Air.pdf](https://www.me.psu.edu/cimbala/me433/Links/Table_A_9_CC_Properties_of_Air.pdf). [Data uzyskania dostępu: 14 1 2026].
- [7] „Encyclopedia Magnetica,” [Online]. Available: <https://www.e-magnetica.pl/doku.php/copper>. [Data uzyskania dostępu: 14 1 2026].
- [8] Engineering ToolBox, „Copper - Density, Specific Heat and Thermal Conductivity vs. Temperature,” [Online]. Available: [https://www.engineeringtoolbox.com/copper-density-specific-heat-thermal-conductivity-vs-temperature-d\\_2223.html](https://www.engineeringtoolbox.com/copper-density-specific-heat-thermal-conductivity-vs-temperature-d_2223.html). [Data uzyskania dostępu: 14 01 2026].
- [9] I. Corporation, „Intel® Xeon® Processor Scalable Family Thermal Mechanical Specifications and Design Guide,” Intel Corporation, 2019.

## Załącznik. Materiały dodatkowe:

Kod programu, wyniki symulacji i inne materiały znajdują się na:

<https://github.com/AndrzejJanaszek/fem-lab-agh.git>