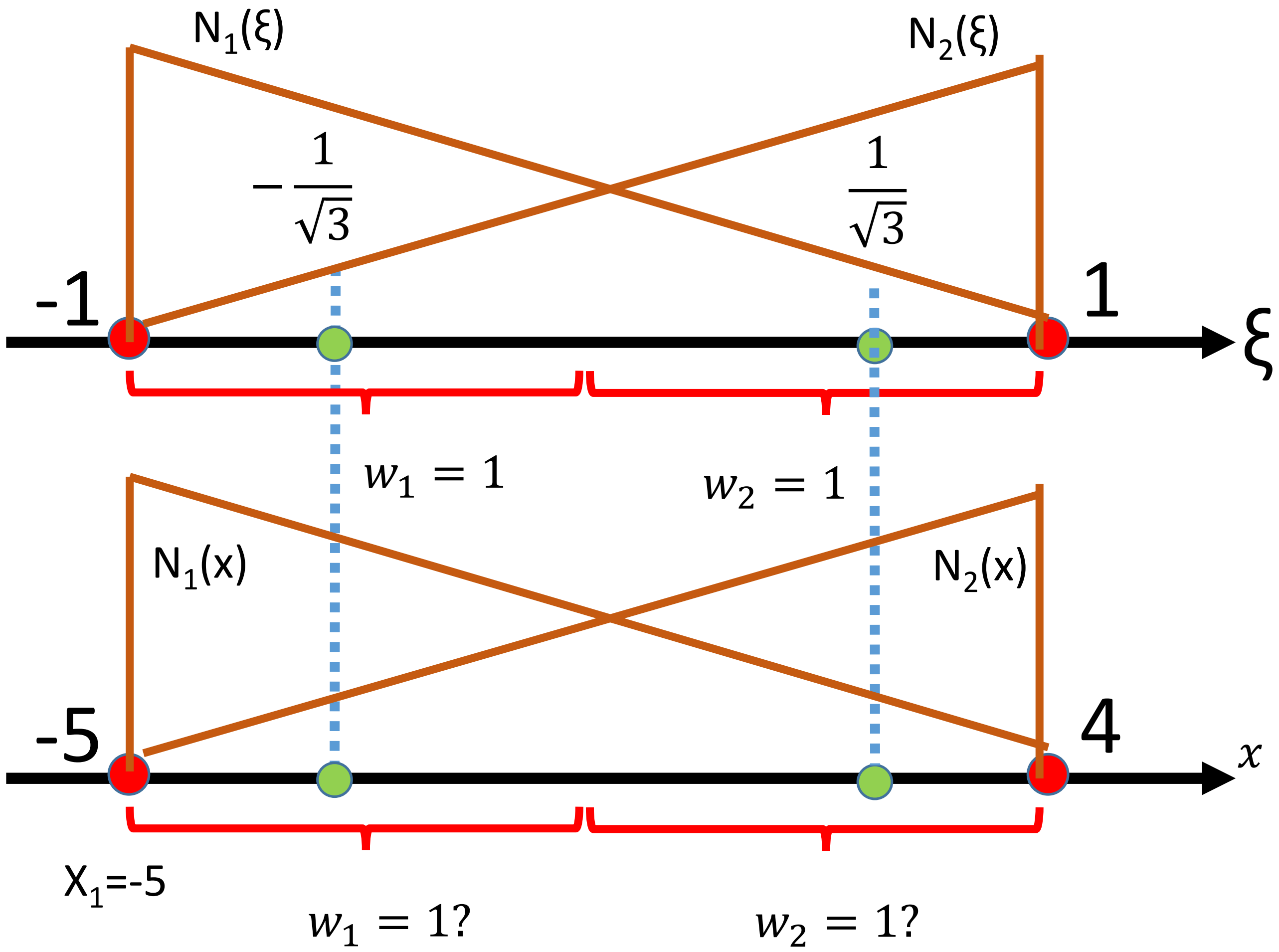
Całkowanie numeryczne metodą Gaussa w przedziale A,B, Całkowanie macierzy H

dr inż. Kustra Piotr

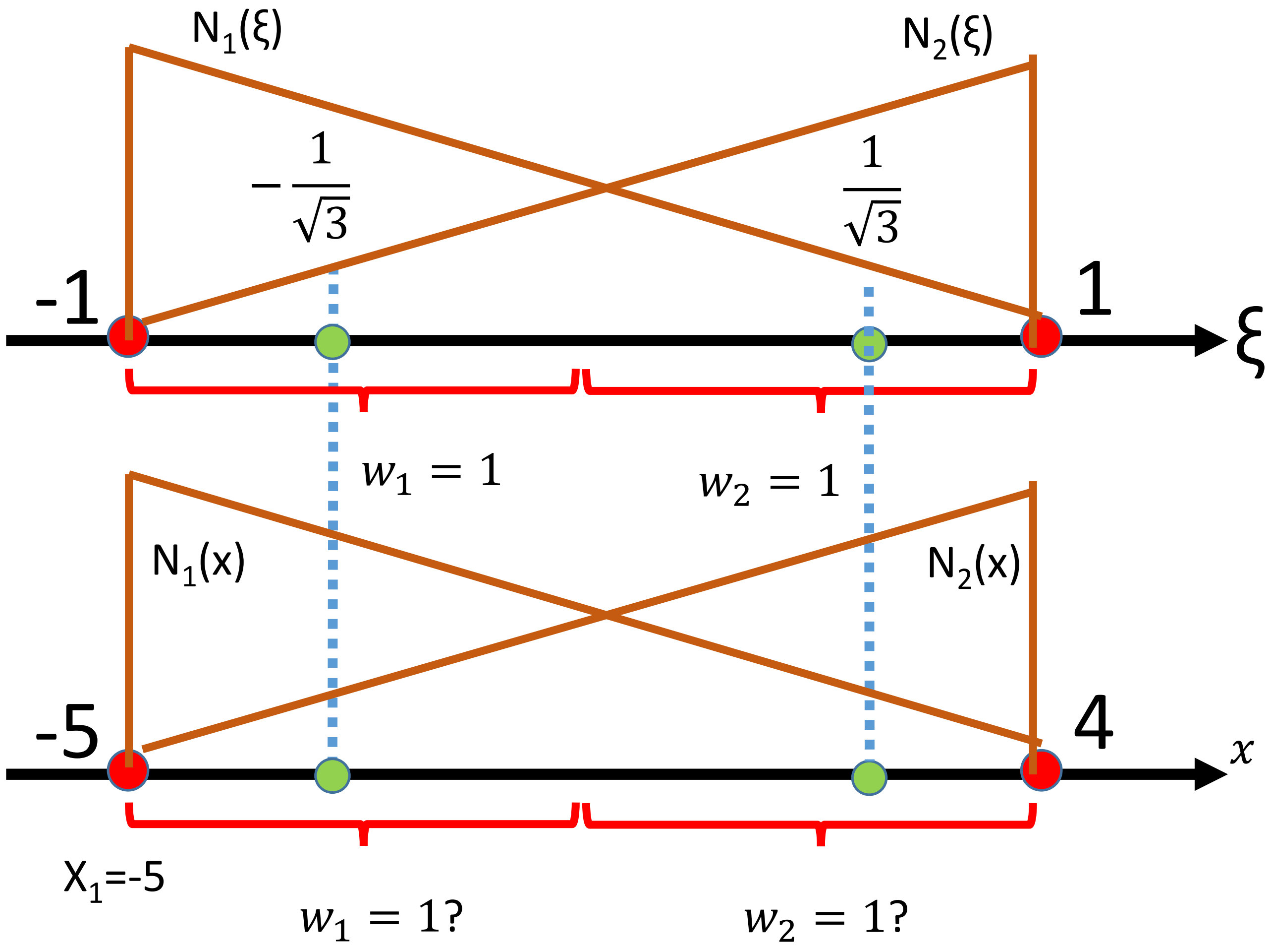
WIMiIP, KISiIM, AGH

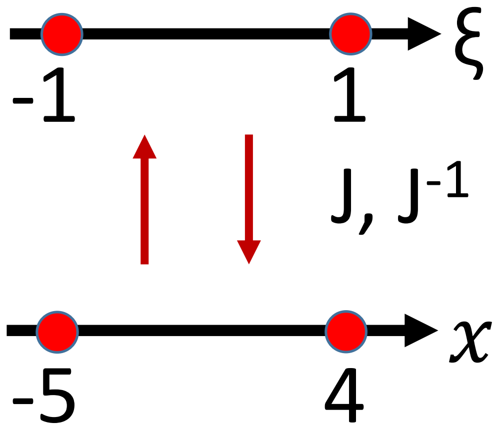
B5, pokój 710

Jakobian przekształcenia 1D

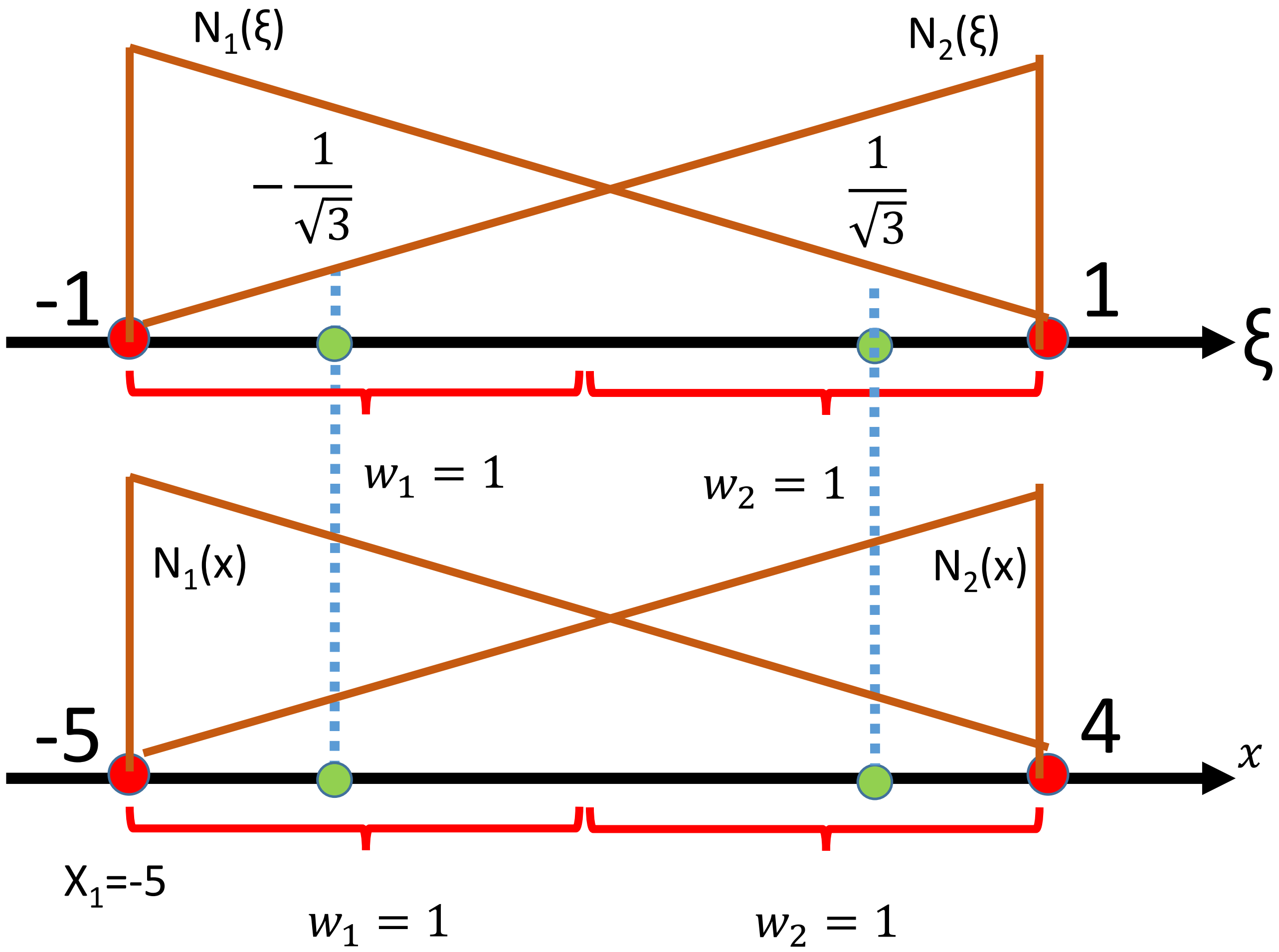


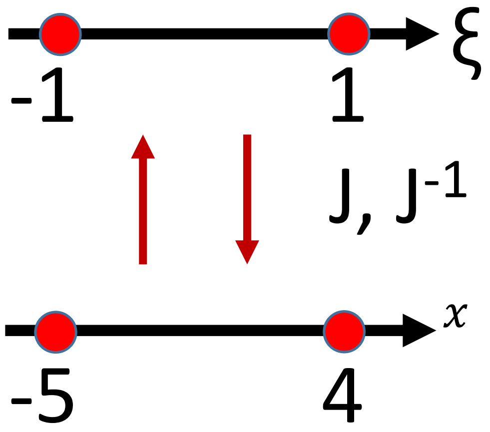
Jakobian przekształcenia 1D





Jakobian przekształcenia 1D

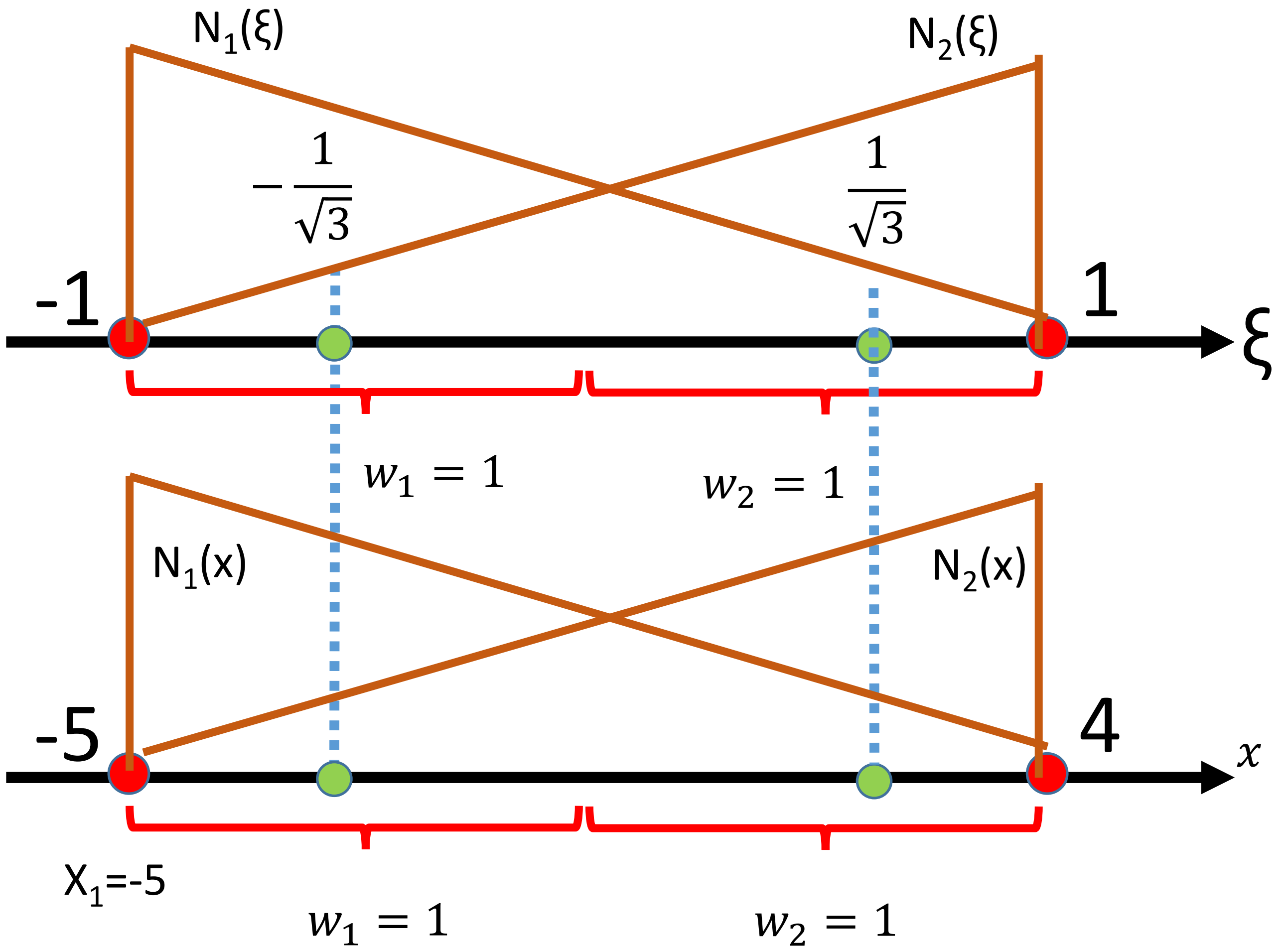




$$N_1(\mathrm{x}) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

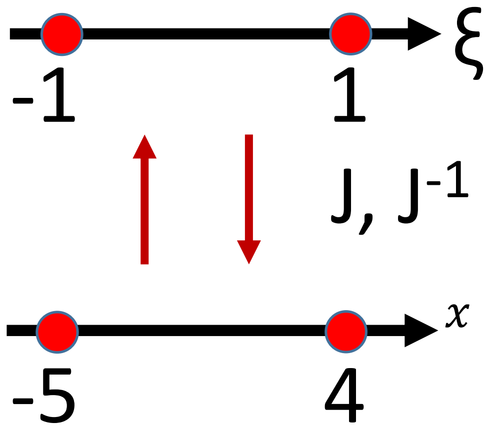
$$N_2(\mathrm{x}) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jakobian przekształcenia 1D



$$N_1(\xi) = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1}$$

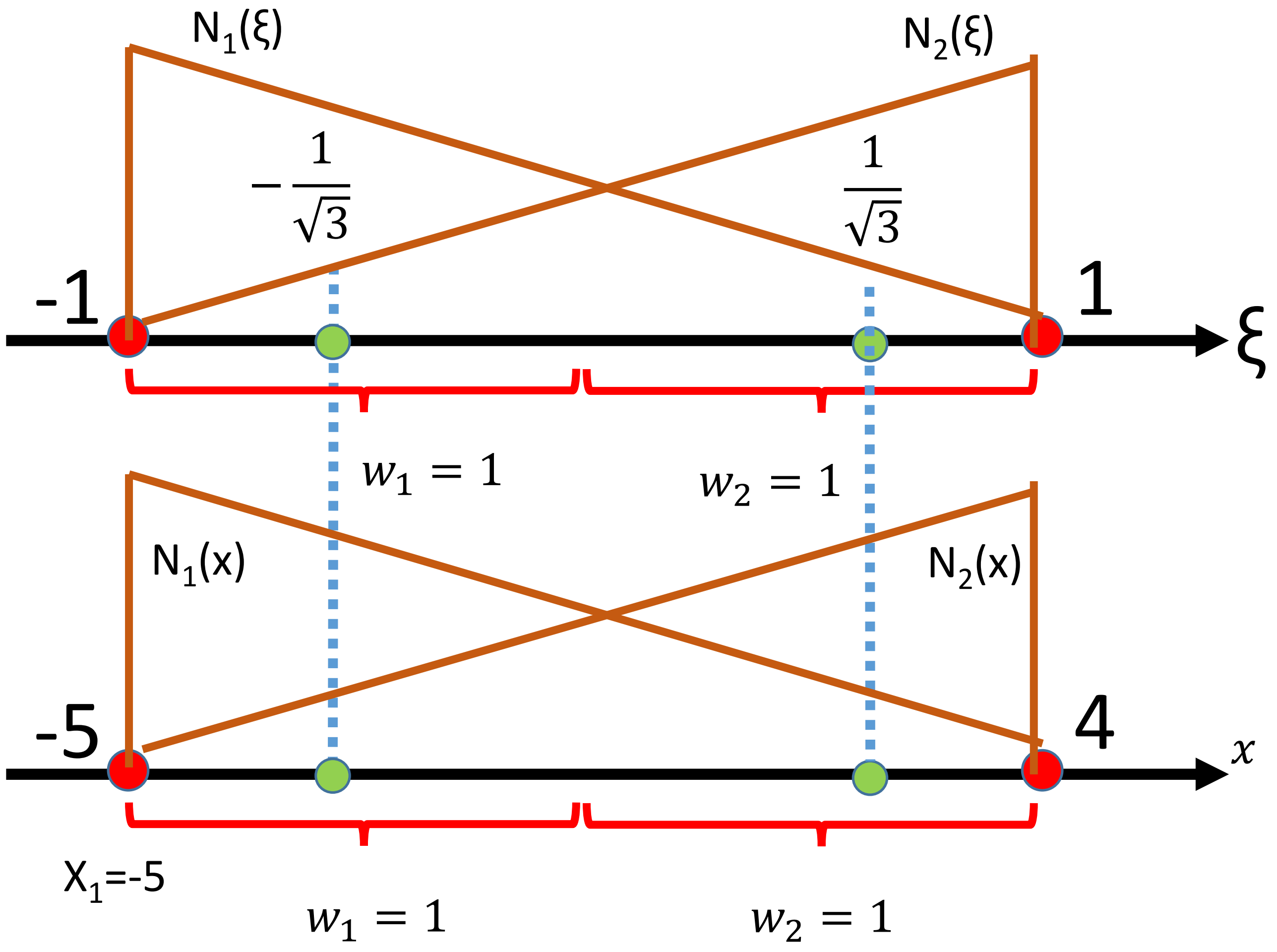
$$N_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$



$$N_1(\mathrm{x}) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

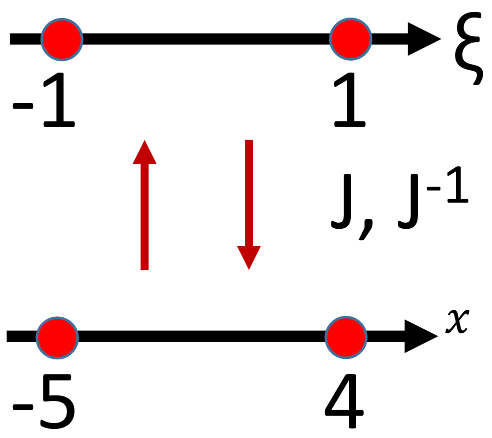
$$N_2(\mathrm{x}) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jakobian przekształcenia 1D



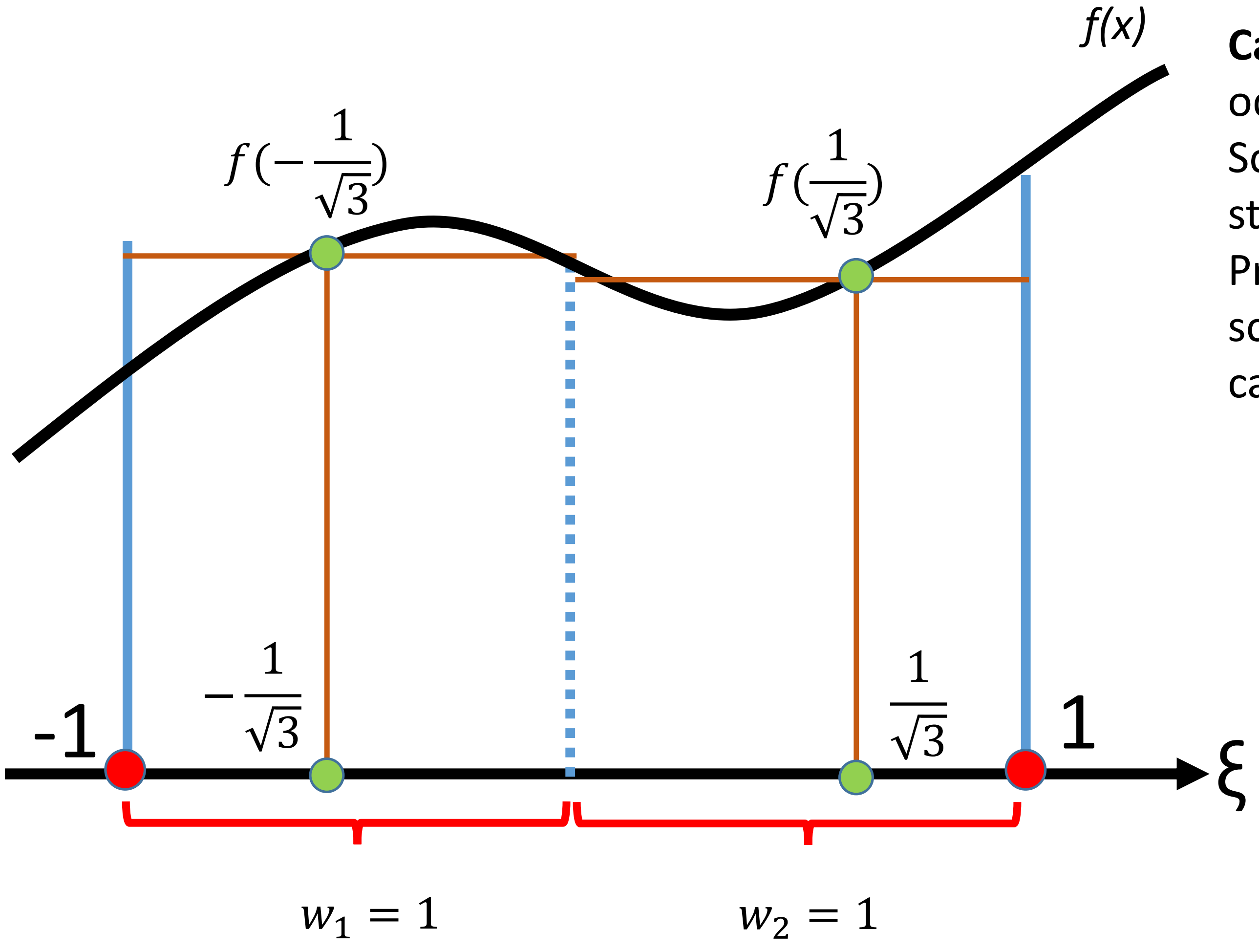
$$N_1(\xi) = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1-\xi}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1+\xi)$$



$$N_1(\mathrm{x}) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$N_2(\mathrm{x}) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2)$$

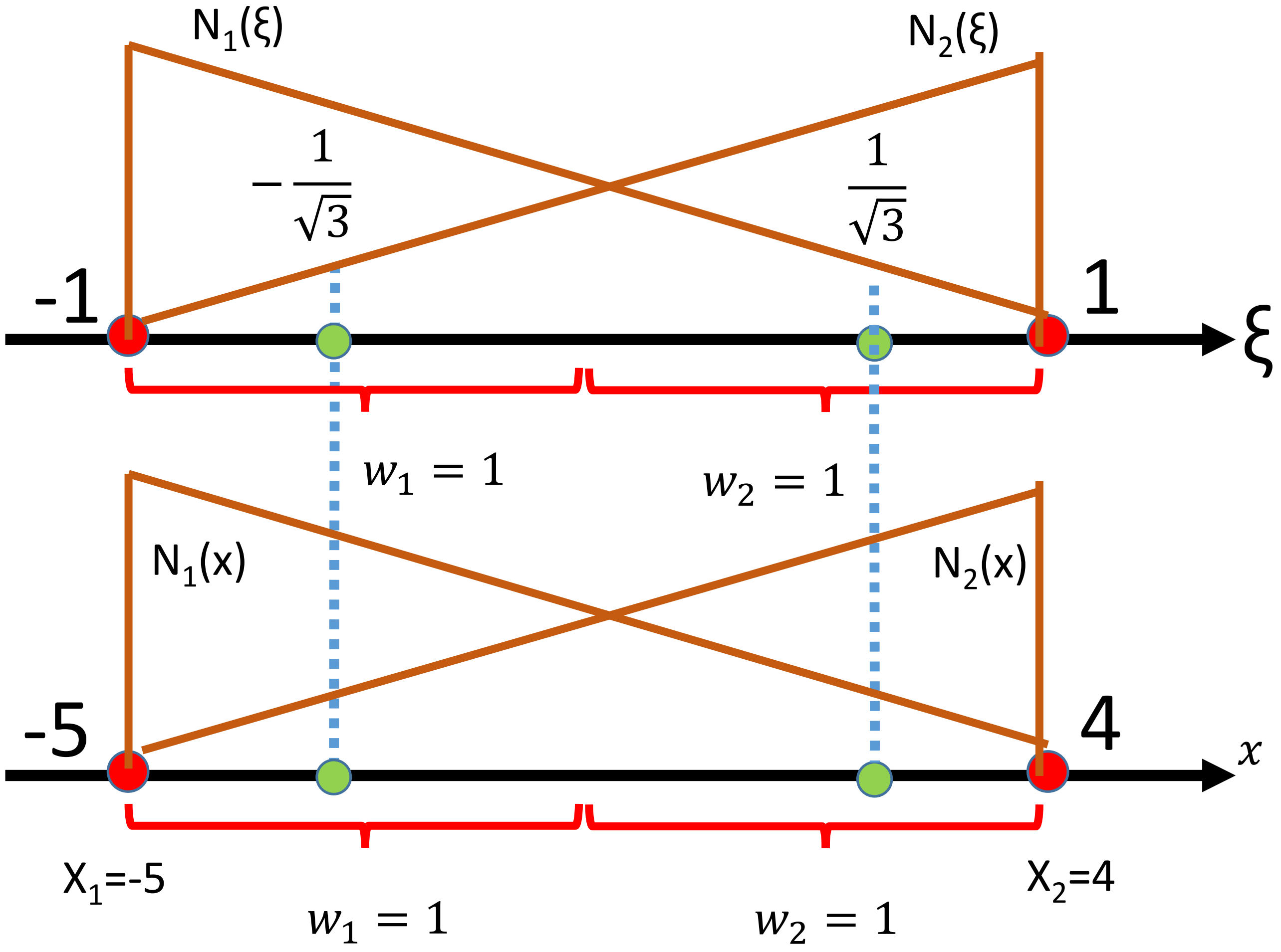
Całkowanie metodą Gaussa

odbywa się w przedziale <-1; 1>

Schematy całkowania zostały opracowane oraz stabelaryzowane. Nazywane są one kwadraturami Gaussa. Przedstawiono przykład dla *n*=1 czyli dwupunktowego schematu całkowania. X_k oznaczono współrzędną punktu całkowania a A_k wagę punktu całkowania.

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1;2	∓ 0.339981	0.652145
4	0;4	∓ 0.906180	0.236927
	1;3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889



Całkowanie metodą Gaussa

Jeżeli całkowanie realizowane jest w innym przedziale niż <-1;1> punkty całowania znajdują się w innych miejscach. Ich lokalizację należy obliczyć. Funkcje kształtu w układzie lokalnym maja postać:

$N_1(\xi)=0.5*(1- \xi)$

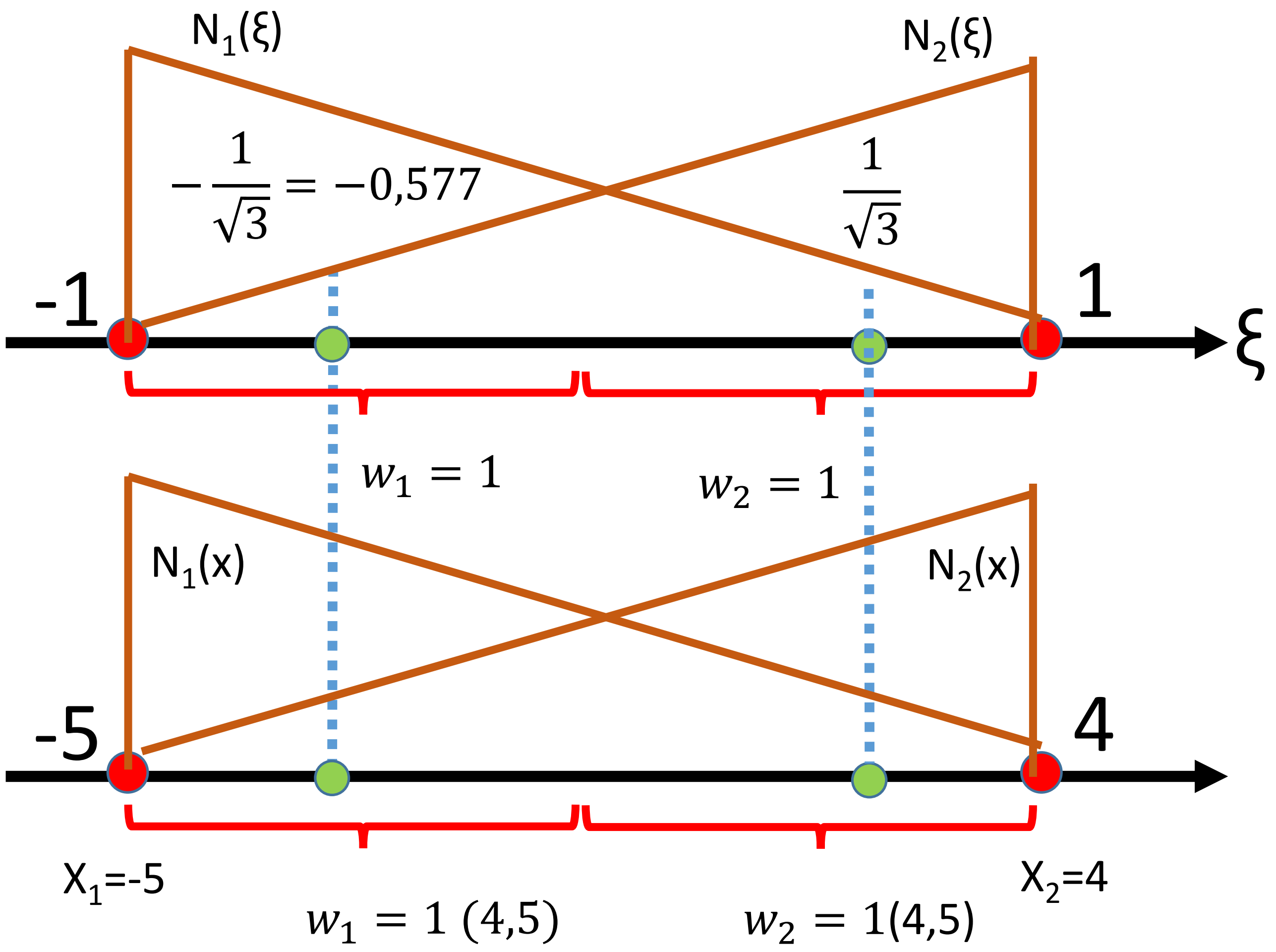
$N_2(\xi)=0.5*(1+ \xi)$

$N_1(x)=(x_2-x)/(x_2-x_1)$

$N_2(x)=(x-x_1)/(x_2-x_1)$

Z przedstawionego schematu wynika, iż bez względu na to ile wynosi x_1 oraz x_2 wartość funkcji kształtu w punktach całkowania w układzie lokalnym oraz globalnym jest taka sama.

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = w_1 * f(\xi_1) + w_2 * f(\xi_2) = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)w_i)$$



Obliczanie położenia punktów całkowania
Interpolacja x

Ponieważ wartości funkcji N(x) w punktach całowania mają taką samą wartość jak N(ξ) w punktach całkowania interpolację można przeprowadzić w następujący sposób:

$x=N_1(\xi)*x_1+N_2(\xi)*x_2$

Obliczamy wartości funkcji kształtu w pierwszym punkcie całkowania ξ=-0,577:

$N_1(\xi)=0.5*(1-\xi)=0.5*(1-(-0{,}577))=0{,}788$

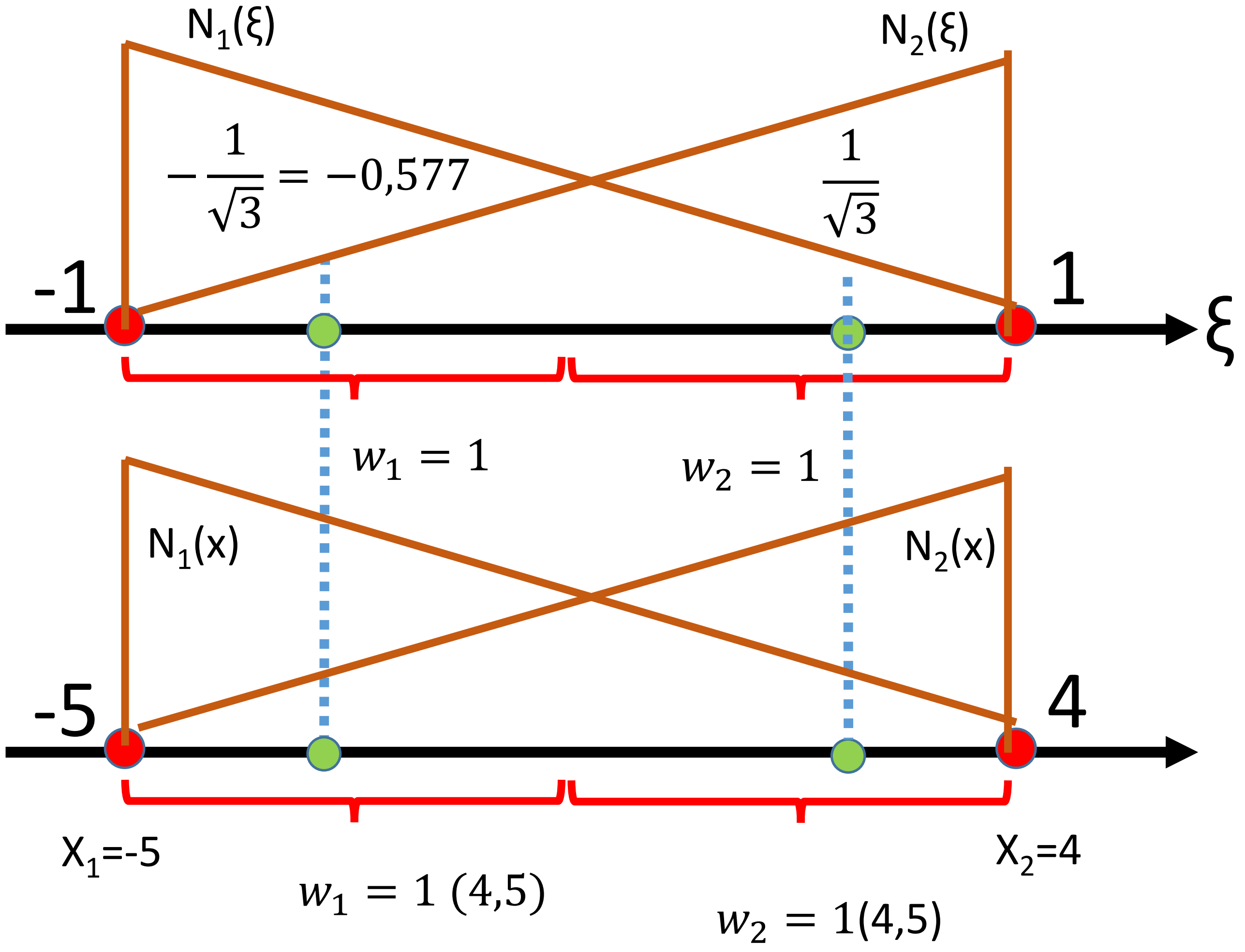
$N_2(\xi)=0.5*(1+\xi)=0.5*(1+(-0{,}577))=0{,}212$

$x_{pc1}=0{,}788*(-5)+0{,}212*4=-3{,}098$

$x_{pc2}=0{,}212*(-5)+0{,}788*4=2{,}098$

Jak można zauważyć waga w układzie globalnym nie jest równa 1. Wartość ta wynika z geometrii. W układzie lokalnym długość pomiędzy -1 a 1 wynosi 2 dlatego suma wag wynosi 2. W układzie globalnym długość wynosi x_2-x_1 czyli 9. Dlatego waga powinna być równa 4,5.

$$\int_{-5}^{4} f(x)dx = (w_1 * f(x_{pc1}) + w_2 * f(x_{pc2}))detJ$$



Różnica długości wag związana jest z Jakobianem przekształcenia 1D: http://home.agh.edu.pl/~pkustra/MES/Jakobian.pdf

$x = N_1(\xi) * x_1 + N_2(\xi) * x_2$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} * x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} * x_2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -0{,}5 \qquad \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = 0{,}5$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -0{,}5 * x_1 + 0{,}5 * x_2 = \frac{(x_2 - x_1)}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{(4-(-5))}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 = \det[J]$$

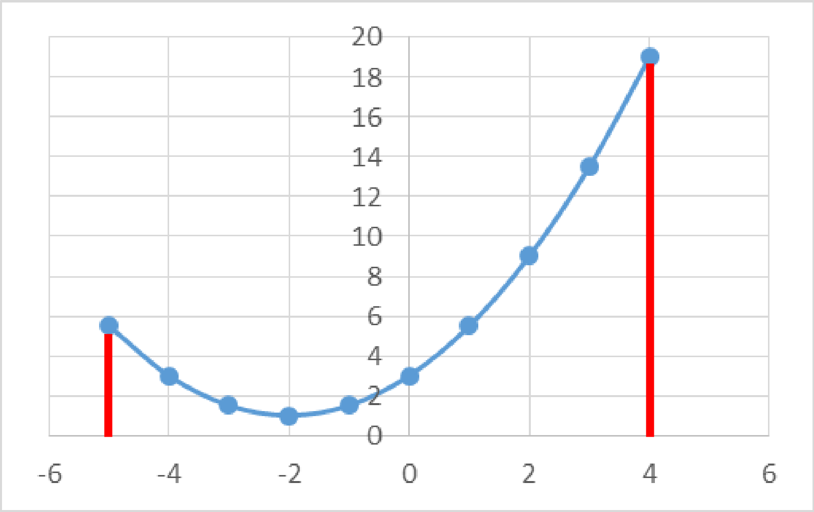
$$\int_{-5}^{4} f(\mathrm{x})d\mathrm{x} = (w_1 * f(\mathrm{x}_{pc1}) + w_2 * f(\mathrm{x}_{pc2})) * \det[J]$$

$$\int_{-5}^{4} f(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} (f(\mathrm{x}_{pci}) * w_i) * \det[J]$$

Wartość 4,5 mówi o tym jak zmienia się długość układu globalnego względem układu lokalnego. W związku z tym całkowanie realizowane jest w sposób następujący:

Przykład dla dwupunktowego schematu całkowania

$$\int_{-5}^{4} 0.5x^2 + 2x + 3dx$$



$$f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$$

x_{pc1}=0,788*(-5) + 0,212*4=-3,098

x_{pc2}=0,212*(-5) + 0,788*4=2,098

$$f(xpc1) = 0.5(-3{,}098)^2 + 2(-3{,}098) + 3 = 1{,}60288$$

$$f(xpc2) = 0.5(2{,}098\,)^2 + 2(2{,}098\,) + 3 = 9{,}398$$

$$\int_{-5}^{4} f(\mathrm{x})dx = (w_1 * f(\mathrm{x}_{pc1}) + w_2 * f(\mathrm{x}_{pc2})) * \det[J]$$

$$\int_{-5}^{4} f(\mathrm{x})dx = (1 * 1{,}60288 + 1 * 9{,}938) * 4{,}5 = 49{,}5$$

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1;2	∓ 0.339981	0.652145
4	0;4	∓ 0.906180	0.236927
	1;3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

Przykład dla trójpunktowego schematu całkowania

$$\int_{-5}^{4} 0.5x^2 + 2x + 3dx$$

Węzły i współczynniki kwadratur Gaussa-Legendre'a dla N=1, 2, 3, 4

N	k	Węzły x_k	Współczynniki A_k
1	0; 1	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
2	0; 2	$\mp\sqrt{3/5}$	5/9
	1	0	8/9
3	0; 3	∓ 0.861136	0.347855
	1;2	∓ 0.339981	0.652145
4	0;4	∓ 0.906180	0.236927
	1;3	∓ 0.538469	0.478629
	2	0	0.568889

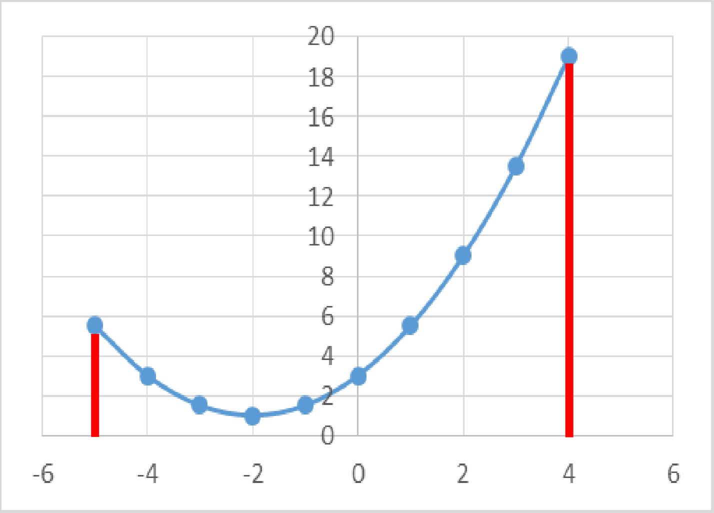
$$f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$$

x_{pc1}=0,88729*(-5) + 0,112702*4=-3,9856

x_{pc2}=-0,5 x_{pc3}=-2,9856

$$f(xpc1) = 0.5(-3,9856)^2 + 2(-3,9856) + 3 = 2,97148$$

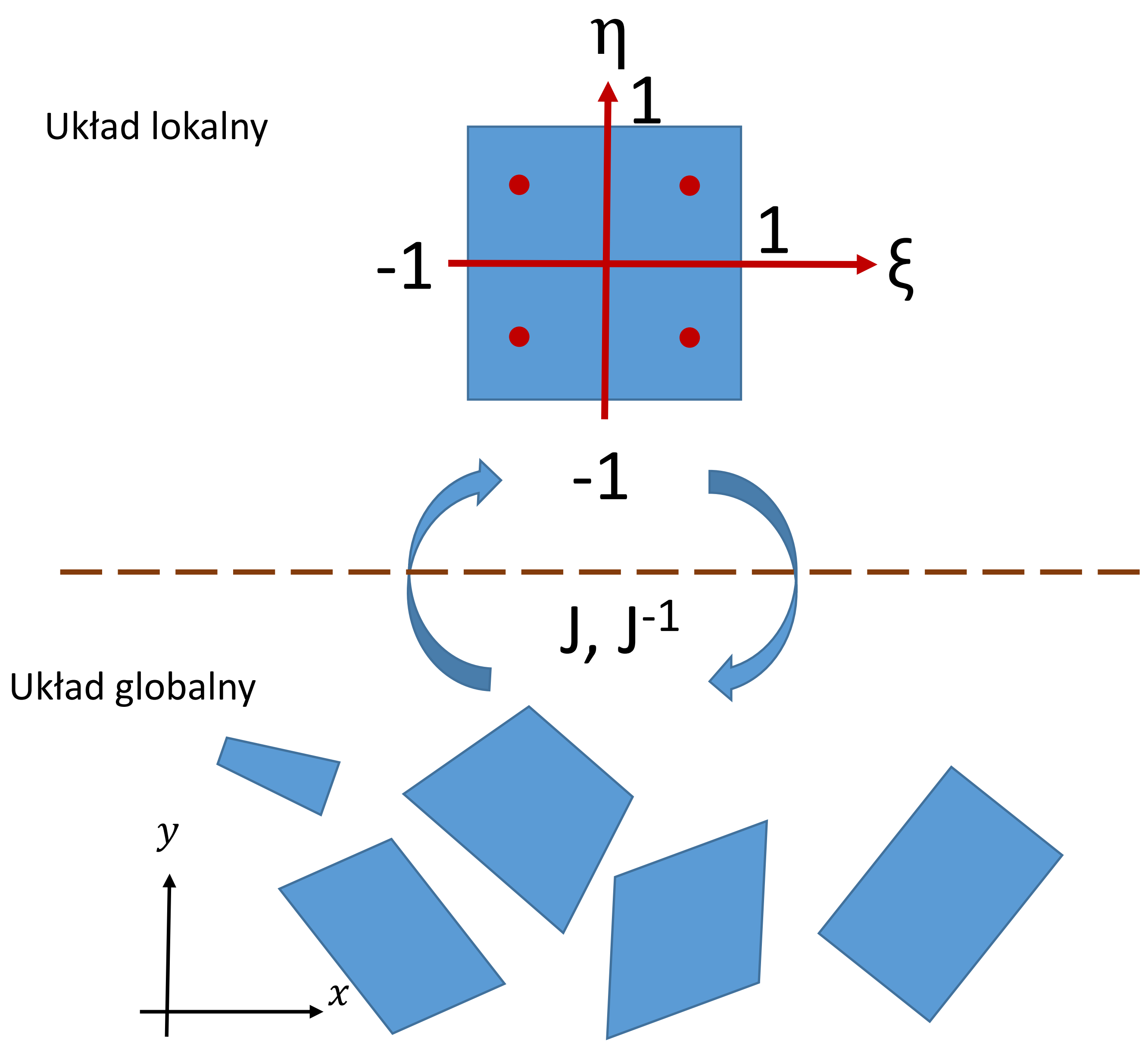
$$f(xpc2) = 2,125 \quad f(xpc3) = 13,428$$

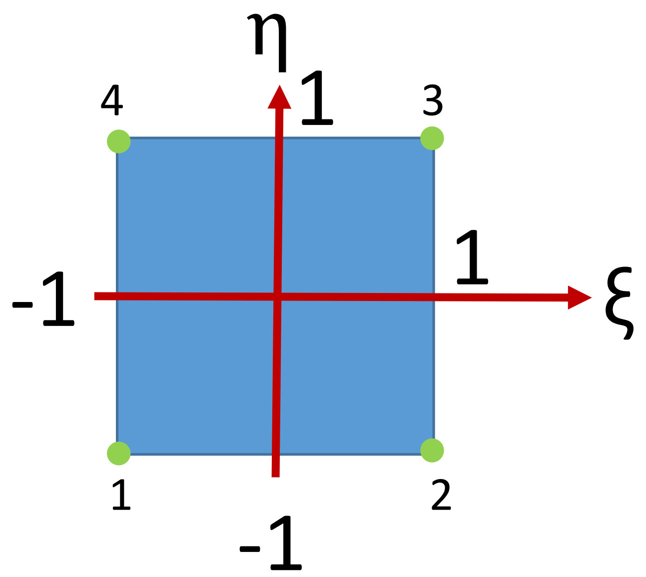


$$\int_{-5}^{4} f(\mathrm{x})dx = (w_1 * f(\mathrm{x}_{pc1}) + w_2 * f\left(\mathrm{x}_{pc2}\right) + w_3 * f(\mathrm{x}_{pc3})) * \det[J]$$

$$\int_{-5}^{4} f(\mathrm{x})dx = (\tfrac{5}{9} * 2,697148 + \tfrac{8}{9} * 2,125 + \tfrac{5}{9} * 13,428) * 4,5 = 49,5$$

Jakobian przekształcenia 2D





$$N1 = 0.25(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N2 = 0.25(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N3 = 0.25(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N4 = 0.25(1-\xi)(1+\eta)$$

Problem do rozwiązania:

$$[H] = \int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right) dV$$

http://home.agh.edu.pl/~pkustra/MES/Jakobian.pdf

$$\boxed{[H] = \int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right) dV}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\frac{\partial N_i}{\partial \xi}} \\ \boxed{\frac{\partial N_i}{\partial \eta}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dN1}{d\xi} = -0.25(1-\eta)$$

$$\frac{dN2}{d\xi} = 0.25(1-\eta)$$

$$\frac{dN3}{d\xi} = 0.25(1+\eta)$$

$$\frac{dN4}{d\xi} = -0.25(1+\eta)$$

$$\frac{dN1}{d\eta} = -0.25(1-\xi)$$

$$\frac{dN2}{d\eta} = -0.25(1+\xi)$$

$$\frac{dN3}{d\eta} = 0.25(1+\xi)$$

$$\frac{dN4}{d\eta} = 0.25(1-\xi)$$

$$N1 = 0.25(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N2 = 0.25(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N3 = 0.25(1+\xi)(1+\eta)$$

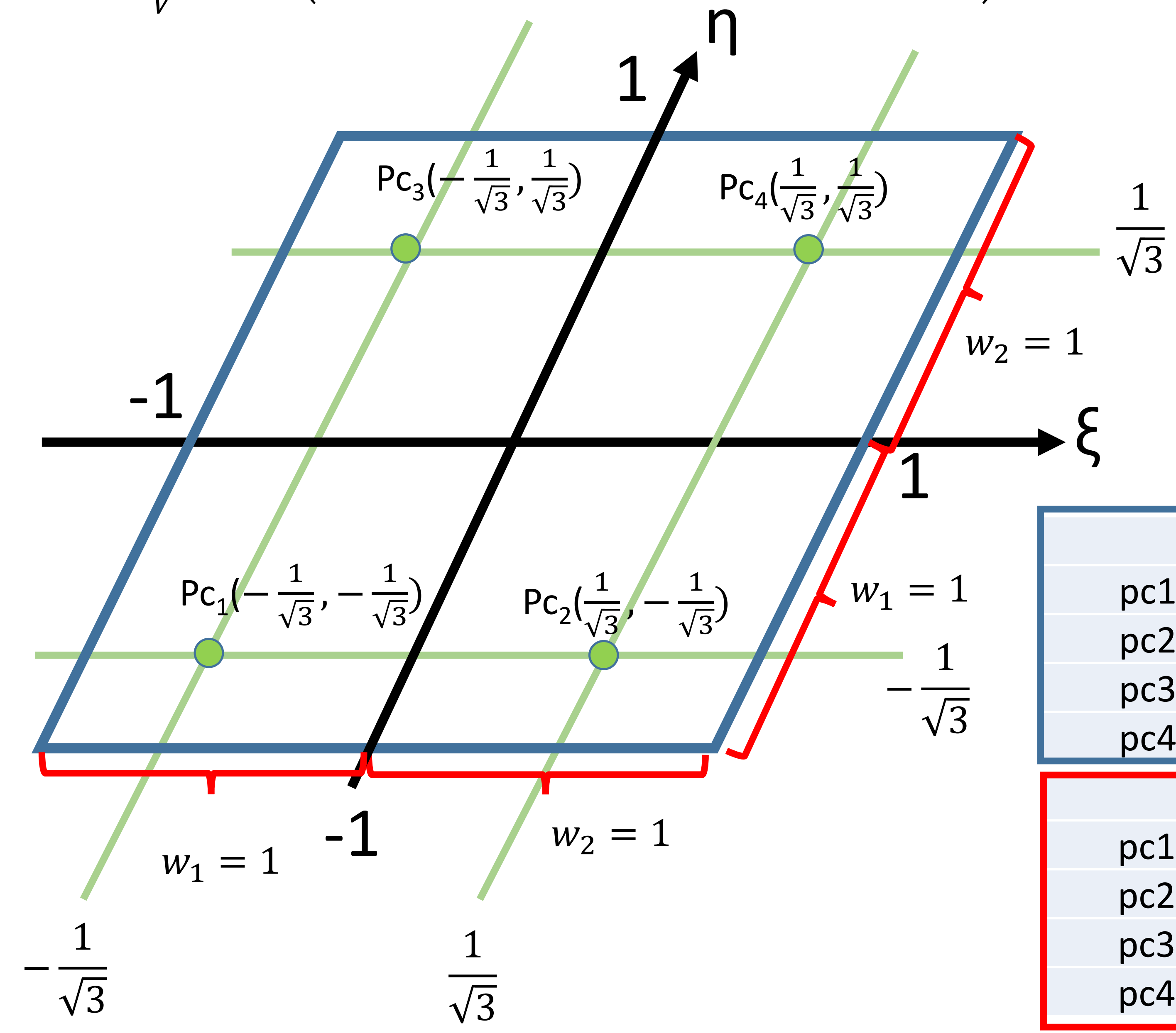
$$N4 = 0.25(1-\xi)(1+\eta)$$

$$x = \sum_{i=1}^{np}(N_i x_i) = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 = \{N\}^T\{x\}$$

$$y = \sum_{i=1}^{np}(N_i y_i) = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 = \{N\}^T\{y\}$$

$$[H] = \int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right)dV$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \boxed{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$



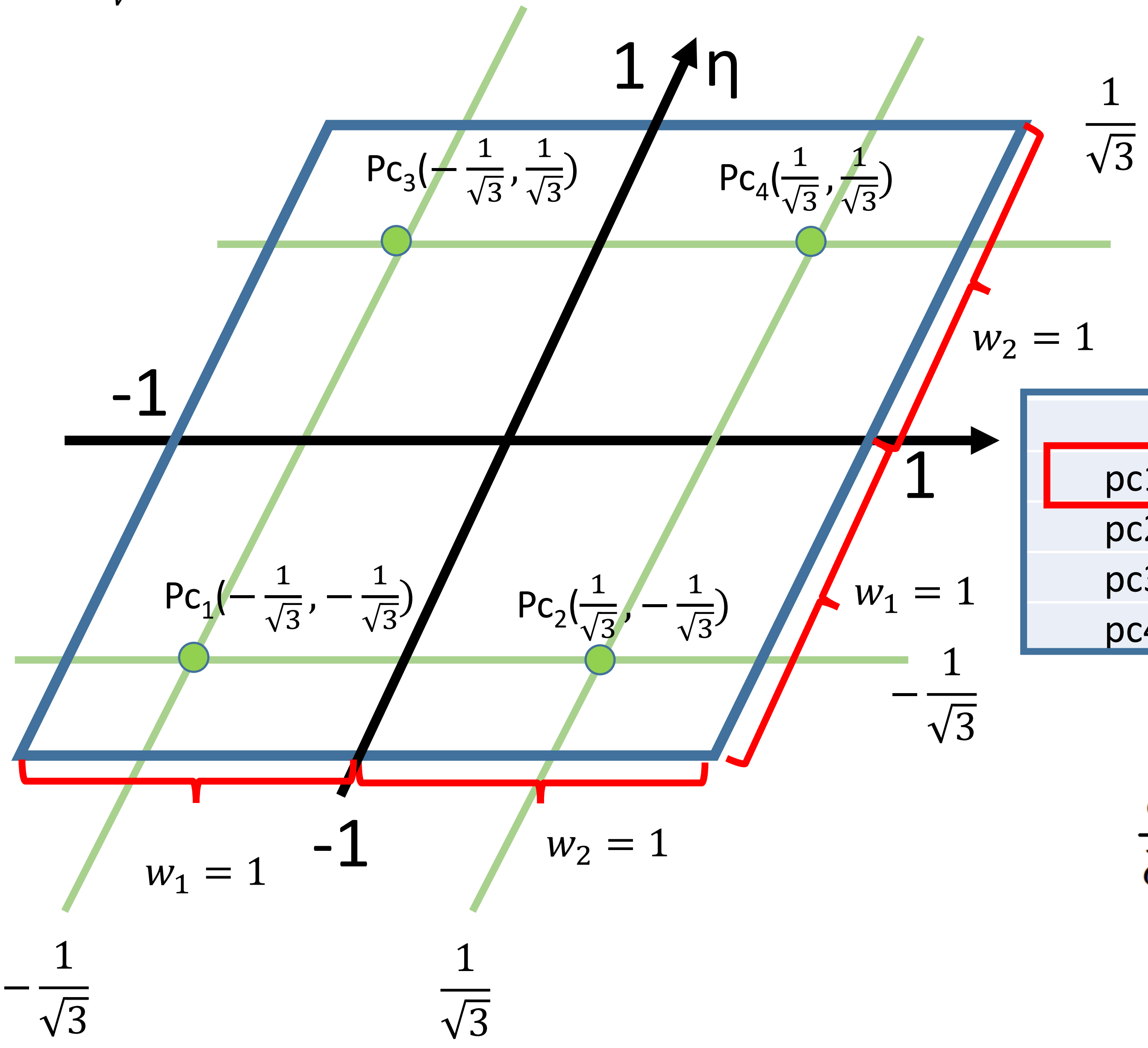
$$x = \sum_{i=1}^{np}(N_i x_i) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi}x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi}x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi}x_4$$

	dN1/dξ	dN2/dξ	dN3/dξ	dN4/dξ
pc1	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc2	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc3	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434
pc4	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434

	dN1/dη	dN2/dη	dN3/dη	dN4/dη
pc1	-0,39434	-0,10566	0,105662	0,394338
pc2	-0,10566	-0,39434	0,394338	0,105662
pc3	-0,39434	-0,10566	0,105662	0,394338
pc4	-0,10566	-0,39434	0,394338	0,105662

$$[H]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right)dV$$



$$\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \boxed{\frac{\partial x}{\partial \xi}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

ID	1	2	3	4
x	0	0,025	0,025	0
y	0	0	0,025	0,025

	dN1/dξ	dN2/dξ	dN3/dξ	dN4/dξ
pc1	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc2	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc3	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434
pc4	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434

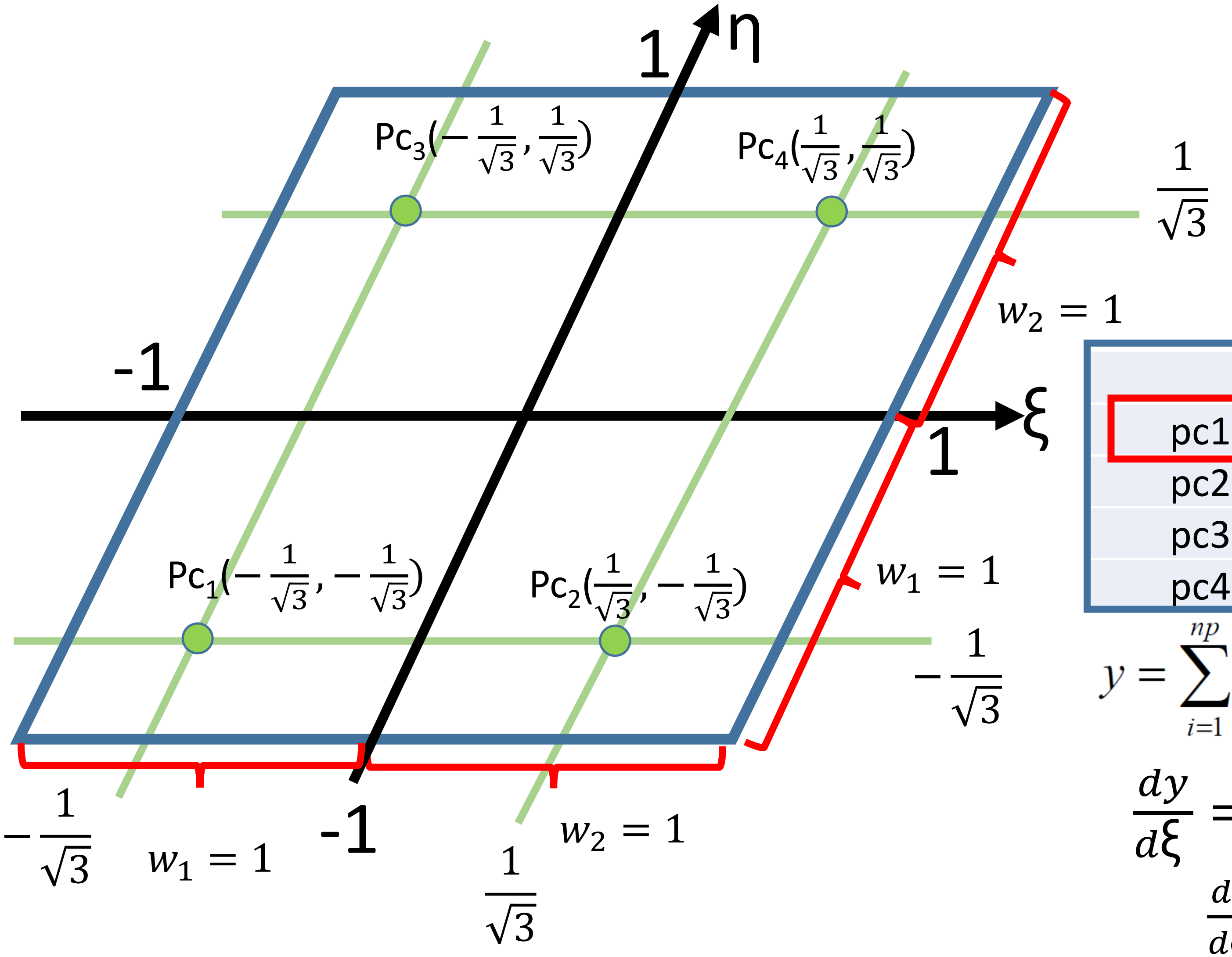
$$x=\sum_{i=1}^{np}(N_i x_i)=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial N_1}{\partial \xi}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial \xi}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial \xi}x_4$$

$\frac{dx}{d\xi}=-0{,}39439*0{,}0+0{,}39439$*0,025+
0,105662*0,025+(-0,105662)*0,0=0,0125

$$[H] = \int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right) dV$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \boxed{-\frac{\partial y}{\partial \xi}} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$



ID	1	2	3	4
x	0	0,025	0,025	0
y	0	0	0,025	0,025

	dN1/dξ	dN2/dξ	dN3/dξ	dN4/dξ
pc1	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc2	-0,39434	0,394338	0,105662	-0,10566
pc3	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434
pc4	-0,10566	0,105662	0,394338	-0,39434

$$y = \sum_{i=1}^{np}(N_i y_i) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \{N\}^T\{y\}$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} y_1 + \frac{dN_2}{d\xi} y_2 + \frac{dN_3}{d\xi} y_3 + \frac{dN_4}{d\xi} y_4$$

$$\frac{dy}{d\xi} = -0{,}39439 * 0{,}0 + 0{,}39439*0{,}0+$$

0,105662*0,025+(-0,105662)*0,025=0,0

$$[H] = \int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right) dV$$

$$\frac{dN1}{d\xi} = -0.25(1-\eta)$$

$$\frac{dN2}{d\xi} = 0.25(1-\eta)$$

$$\frac{dN3}{d\xi} = 0.25(1+\eta)$$

$$\frac{dN4}{d\xi} = -0.25(1+\eta)$$

$$\frac{dN1}{d\eta} = -0.25(1-\xi)$$

$$\frac{dN2}{d\eta} = -0.25(1+\xi)$$

$$\frac{dN3}{d\eta} = 0.25(1+\xi)$$

$$\frac{dN4}{d\eta} = 0.25(1-\xi)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\frac{\partial N_i}{\partial \xi}} \\ \boxed{\frac{\partial N_i}{\partial \eta}} \end{bmatrix}$$

Dla pc1

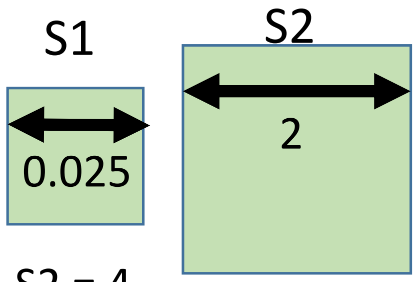
0,0125	0
0	0,0125

det[j] = 0,00015625

1/det[j] = 6400

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = 6400 \begin{bmatrix} 0{,}0125 & 0 \\ 0 & 0{,}0125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$



S2 = 4

S1 = 0,000625

S1/S2 = 0,00015625

struct GlobalData ()
{
}

struct node
{
}

struct element
{
    Jakobian[npc]
}

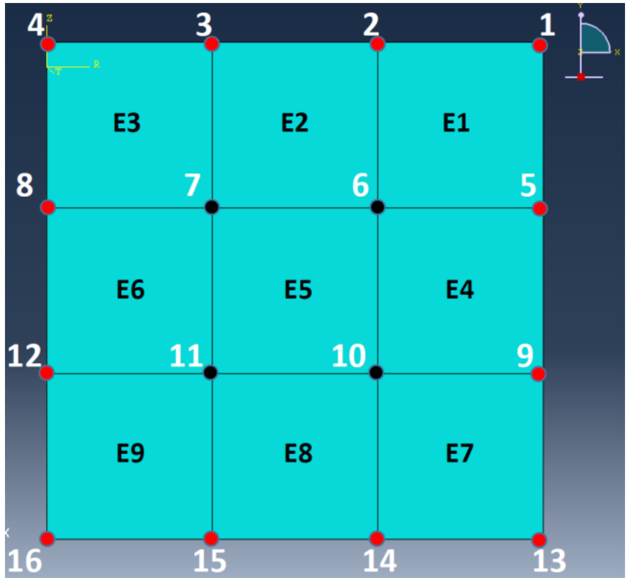
struct grid
{
}

struct GlobalData (odczyt z pliku)
{
    npc
}

Praca domowa

struct ElemUniv
{
    dN_dξ[npc][4]
    dN_dη[npc][4]
}
struct Jakobian
{
    J[2][2]
    J1[2][2] // macierz Jakobiego odwrotna
    detJ
}

Siatka elementów skończonych



*Node
    1, 0.100000001, 0.00499999989
    2, 0.0666666701, 0.00499999989
    ....
    14, 0.0666666701, -0.0949999988
    15, 0.0333333351, -0.0949999988
    16,   0., -0.0949999988
*Element, type=DC2D4
 1, 1, 2, 6, 5
 2, 2, 3, 7, 6
 3, 3, 4, 8, 7