Curs 8. Vectori și valori proprii
QR, DVS

1) Determinați prima iterație a metodei QR pt matricea A.

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{9+1}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\Rightarrow G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & 0 \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{(1)} = G_1 \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & 0 \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{3\sqrt{10}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \frac{4\sqrt{10}}{5} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{160}{25}+1}} = \sqrt{\frac{5}{37}}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\frac{4\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{\frac{37}{5}}} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{37}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{37}}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{37}} & \sqrt{\frac{5}{37}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{37}} & \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{37}} \end{bmatrix}$$

$$R^{(1)} = G_2^{(1)} G_1^{(1)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{\frac{2}{37}} & \sqrt{\frac{5}{37}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{37}} & 4\sqrt{\frac{2}{37}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{3\sqrt{10}}{\cancel{10}5} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \frac{4\sqrt{10}}{5} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q^{(1)} = G_1^T \cdot G_2^T = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)}.$$

---

2) Aplicați metoda QR cu deplasare explicită pt. mat. A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol: Pt. a determina factorul de accelerare τ_1, trebuie să determinăm val. prop. ale matricei

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = E$$

$$\det(E - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$\Delta = 36 - 32 = 4$

$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$

Cum ambele valori prop. sunt la fel de depărtate de valoarea lui $a_3^{(1)}$ $\rightarrow$ alegem pe oricare dintre cele două, de exemplu, pe $\lambda_2 = 2 \rightarrow \sigma_1 = 2$.

$$A^{(1)} - \sigma_1 I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A_1^{(1)}$$

$$G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{(1)} = G_1^{(1)} \cdot A_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \qquad \sin\theta_2 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos\theta_2 = 0.$$

$$\Rightarrow G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1^{(1)} = G_2^{(1)} G_1^{(1)} \cdot A_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$Q_1^{(1)} = G_1^{(1)T} \cdot G_2^{(1)T}$$

$$A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)} + \sigma_1 \cdot I_3$$

---

3) Determinați prima iterație a algoritmului QR fără deplasare pt. mat. urm.

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{-3}{\sqrt{9+4}} = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$A_2^{(1)} = G_1^{(1)} \cdot A$$

$$A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)}.$$

---

4) Determinați prima iterație a alg. QR cu deplasare pt. mat. urm:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol: $A_1^{(1)} = A - \sigma_1 I_3$

$$E^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \sigma_1 = 2$$

$$A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(1)} + \sigma_1 I_3.$$

Scanned by CamScanner

5). Implementați în OCTAVE algoritmul QR fără deplasare pt. determinarea val. prop. ale unei matr. sim. tridiag.

Sol:

```
function lambda = QRalg (A, n, tol, maxiter)
M=0;
if M > maxiter
  disp('S-a depășit nr. de iterații');
else
  if n<2
    lambda(1) = A(1,1);
  else
    [Q,R] = qr(A);
    AA = R * Q;
    if AA(n,n-1) <= tol
      lambda(n) = AA(n,n);
      A = AA(1:n-1, 1:n-1);
      n=n-1;
      M=M+1;
    else
      A=AA;
      M=M+1;
    endif
  endif
endif
endfunction.
```

6) Implementați algoritmul QR cu deplasare pt. a determina val. prop. ale unei matrice sim. tridiag.

Sol:

function lambda = QRdepl (A, n, tol, maxiter)

M = 0; ~~SHIFT = 0;~~

if M > maxiter

disp ('S-a depășit nr. de iterații');

else

if (n < 2)

lambda (1) = A(1,1);

else

E = A (n-1 : n , n-1 : n);

e = eig (E);

~~dep = max (abs (A(n,n) - e(1)), abs(A(n,n) - e(2))~~ min +

if abs(A(n,n) - e(1)) < < abs (A(n,n) - e(2))

dep = e(1);

else

dep = e(2);

endif.

B = A - dep * eye(n);

[Q, R] = qr (B);

BB = R * Q + dep * eye(n);

~~SHIFT = dep + SHIFT;~~

if BB (n, n-1) <= tol

lambda (n) = BB (n,n); ~~+ SHIFT;~~

A = BB (1:n-1 , 1:n-1);

n = n-1;

M = M+1;

~~SHIFT = 0;~~

else

A = BB;

M = M+1;

endif

endif

endif

end function.

7). Arătați că produsul dintre o matrice superior triung. și o matrice superior Hessenberg produce o matrice sup. Hessenberg.

Sol: Notăm produsul cu $C = RQ$, unde R - sup. Δ
Q - sup. Hessenberg

$$\left.\begin{array}{l} c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} \cdot q_{kj} \\ r_{ik} = 0 \text{, pt } k < i \end{array}\right] \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=i}^{n} r_{ik} \cdot q_{kj}$$

Q - sup. Hessenberg $\Rightarrow q_{kj} = 0$, $k > j+1$.

$\Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=i}^{j+1} r_{ik} \cdot q_{kj} \Rightarrow$ Dacă $i > j+1$ atunci

$c_{ij} = 0 \Rightarrow C$ is upper Hessenberg matrix.

BONUS EXAMEN $\leftrightarrow$ DVS:

8) Fie o imagine reprezentată prin matricea A. Să se realizeze compresia imaginii fără a se pierde informația utilă.

Sol: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(A^TA) = \det(A^TA - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

(polinom caract.

$$= (2-\lambda)^2(4-\lambda) + 1 + 1 - (4-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$= (4 - 4\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 2 - 4 + \lambda - 2 + \lambda - 2 + \lambda$$

$$= 16 - 4\lambda - 16\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 6 + 3\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 = 0$$

Schema lui Horner:

	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
	-1	8	-17	10
1	-1	7	-10	$\boxed{0}$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 10) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 5$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 1.$$

$$\Rightarrow s_1 = \sqrt{5}$$

$$s_2 = \sqrt{2}$$

$$s_3 = 1$$

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pt $s_1 = \sqrt{5}$ determinăm v_1:

$$A^T A \cdot v_1 = s_1^2 \cdot v_1 \Rightarrow (A^T A - s_1^2 I_3) \cdot v_1 = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 2 - s_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 - s_1^2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 - s_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 v_{11} + v_{12} + v_{13} = 0 \\ v_{11} - v_{12} + v_{13} = 0 \\ v_{11} + v_{12} - 3 v_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog se det. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normăm vectorii și obținem matricea V:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Avem nevoie doar de coloanele u_1, u_2, u_3 din matricea U și de $S_{3\times 3}$ pt. a comprima imaginea A în $A_3 = U_3 \cdot S_3 \cdot V_3^T$.

$$u_1 = \frac{1}{s_1} A \cdot V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{10} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{30}}{10} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U S V^T$$

Înlocuind matricea S, $n \times n$, cu S_k, $k \times k$ ce conține cele mai semnif. val. prop. reușim compres imaginii.

$$S_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_3^T = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_3 = \cancel{S_3 V_3^T} \; U_3 S_3 V_3^T = A}$$

Curs 9. Interpolare

1) Scrieți o funcție OCTAVE care implementează calculul polinomului Lagrange într-un punct a diferit de punctele în care este cunoscută funcția.

LAGRANGE

Sol:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & a-x_1 & \dots & a-x_1 \\ a-x_2 & 1 & \dots & a-x_2 \\ \vdots & & & \\ a-x_n & a-x_n & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ x_1-x_2 & 1 & & x_n-x_2 \\ \vdots & & & \\ x_1-x_n & x_2-x_n & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$

$y = [f(x_1) \quad f(x_2) \quad \dots \quad f(x_n)]$

$$\begin{cases} U = \text{ones}(n) * \text{diag}(x) - \text{diag}(x) * \text{ones}(n) + \text{eye}(n) \\ V = (a - \text{diag}(x)) * \sim\text{eye}(n) + \text{eye}(n) \\ L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n] = \text{prod}(V) ./ \text{prod}(U) \\ b = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot y_i = \text{prod}(V) ./ \text{prod}(U) * y. \end{cases}$$

```
function b = Lagrange (x, y, a)
    U = ones (n) * diag (x) - diag (x) * ones (n) + eye (n);
    V = (a - diag (x)) * ~eye (n) + eye (n);
    b = prod (V) ./ prod (U) * y;
endfunction
```

2) Aproximați $f(3)$ folosind polinomul Lagrange.

$x_0 = 2$, $x_1 = 2,75$, $x_2 = 4$

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{2}$, $f(x_1) = \frac{1}{2,75}$, $f(x_2) = \frac{1}{4}$

Sol: Calculăm multiplicatorii Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{2}{3}(x - 2,75)(x - 4)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{16}{15}(x - 2)(x - 4)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{5}(x - 2)(x - 2,75)$$

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2) \cdot L_2(x)$$

$$= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$$

$$f(3) = \frac{29}{88} \simeq 0,329$$

$$\boxed{P_{i,j}(x) = \frac{(x - x_j) P_{i,j-1}(x) + (x_i - x) P_{i+1,j}(x)}{x_i - x_j} \quad 0 \le i < j \le n}$$

3) Se csd. funcția f cunoscută prin valorile:

x	0,4	0,9	1,5	2,5
$f(x)$	0,9	0,5	0,2	0,1

Determinați valoarea fct. f în pct. $x = 4$ cu Neville.

$$P_{00}(4) = f(x_0) = 0,9$$

$$P_{11}(4) = f(x_1) = 0,5$$

$$P_{22}(4) = f(x_2) = 0,2$$

$$P_{33}(4) = f(x_3) = 0,1$$

$$P_{01}(4) = -1,98 \qquad P_{12}(4) = -1,05 \qquad P_{23}(4) = -0,05$$

$$P_{02}(4) = 1,06 \qquad P_{13}(4) = 0,89$$

$$P_{03}(4) = 0,76.$$

$$\Rightarrow f(4) \simeq P_{03}(4) = 0,76.$$

$$P_{01}(4) = \frac{(4-x_1)P_{00} + (x_0-4)P_{11}}{x_0 - x_1} = \frac{(4-0,9)\cdot 0,9 + (0,4-4)\cdot 0,5}{0,4-0,9} =$$

$$= \frac{3,1\cdot 0,9 + (-3,6)\cdot 0,5}{-0,5} = \frac{2,79 - 1,8}{-0,5} = \frac{0,99}{-0,5} = -1,98$$

$$P_{12}(4) = \frac{(4-x_2)P_{11} + (x_1-4)P_{22}}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{(4-1,5)\cdot 0,5 + (0,9-4)\cdot 0,2}{0,9-1,5} = \frac{2,5\cdot 0,5 - 3,1\cdot 0,2}{-0,6}$$

$$= \frac{1,25 - 0,62}{-0,6} = \frac{0,63}{-0,6} = -1,05.$$

$$P_{23}(4) = \frac{(4-x_3)P_{22} + (x_2-4)P_{33}}{x_2 - x_3} = \frac{(4-2,5)\cdot 0,2 + (1,5-4)\cdot 0,1}{1,5-2,5} =$$

$$= \frac{1,5\cdot 0,2 - 2,5\cdot 0,1}{-1} = \frac{0,3 - 0,25}{-1} = -0,05$$

$$P_{02}(4) = \frac{(4-x_2)P_{01} + (x_0-4)P_{12}}{x_0 - x_2} = \frac{(4-1,5)(-1,98) + (0,4-4)(-1,05)}{0,4-1,5}$$

$$= \frac{2,5(-1,98) + 3,6\cdot 1,05}{} = \frac{4,85 + 3,78}{-1,1} = 1,06$$

4). Scrieți un program OCTAVE care calculează valoarea unei fct. într-un pct. folosind metoda Neville

```
function b = Neville (x, y, a)
    n = length (x);
    for k = 1 : n-1
        for i = 1 : n-k
            raport = (a - x(k+i)) / (x(i) - x(k+i));
            y(i) = raport * y(i) + (1-raport) * y(i+1);
        endfor
    endfor
    b = y(1)
endfunction.
```

---

5) Trecerea de la diferențe finite la diferențe divizate.

$$\boxed{\Delta^n f(x_i) = \nabla^n f(x_{i+n}) = \delta^n f\left(x_{i+\frac{n}{2}}\right) = n!\, h^n F_n[x_i, \ldots x_{i+n}]}$$

6) Dat. polinomul $P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + a_3 \ldots$, arătați că $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

Sol:

$$f(x_2) = P_n(x_2) = f[x_2] = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + a_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \rightarrow \frac{f[x_1, x_2](x_2 - x_1) +}{}$$

$$\frac{+f[x_0,x_1](x_1-x_0) - f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{f[x_1,x_2](x_2-x_1) - f[x_0,x_1](x_1-x_0)}{x_2-x_0}$$

$$= f[x_0,x_1,x_2].$$

---

7) Arătați că expresia erorii la diferențe divizate este ~~...~~ $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$

Știind că:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

DIFERENȚE DIVIZATE

<u>Sol</u>:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f[x_0,x_1] + \dots + f[x_0,\dots x_n, x]\cdot()\dots$$

$$\Rightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

$$R_n(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)\cdot f[x_0,x_1,\dots,x_n,x].$$

Polinomul $R_n(x)$ are $n+1$ răd $\Rightarrow R_n'(x)$ va avea n rădăcini:

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)$$

$$P_n^{n}(x) = n!\cdot f[x_0, x_1, \dots x_n]$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) - n!\, f[x_0,x_1,\dots,x_n] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f[x_0,x_1,\dots,x_n,x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}}$$

Scanned by CamScanner

8). Polinomul de interpolare Hermite are $2n+2$ coeficienți care se deduc din $2n+2$ condiții de interpolare:

→ condiția să treacă prin pct. date:

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad i=\overline{0:n}$$

→ condiția ca tangentele să corespundă (derivatele)

$$P'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad i=\overline{0:n}$$

Deci polinomul de interpolare Hermite are gradul $2n+1$ și arată astfel:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \cdot \hat{H}_{n,j}(x).$$

unde:

$$\begin{cases} H_{n,j}(x) = [1-2(x-x_j) L'_{n,j}(x_j)] \cdot L^2_{n,j}(x) \\ \hat{H}_{n,j}(x) = (x-x_j) L^2_{n,j}(x) \end{cases}$$

Unde

$L_{n,j} = l_j$ sunt multiplic Lagrange.

---

9) Folosiți interpolarea polinomială Hermite cunoscând următoarele date.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1,3	0,62	-0,52
1	1,6	0,45	-0,56
2	1,9	0,28	-0,58

Sol: Mai întâi determinăm multiplicatorii Lagrange și derivatele acestora.

$$L_{2,0}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}$$

$$L_{2,0}'(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}.$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = -\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}$$

$$L_{2,1}'(x) = -\frac{200}{9}x + \frac{320}{9}.$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}$$

$$L_{2,2}'(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}.$$

HERMITE

$$H_{2,0}(x) = \left[1 - 2(x-x_0) \cdot L_{2,0}'(x_0)\right] \cdot L_{2,0}^2(x).$$

$H_{2,1}(x) \ldots\ldots$

$$\hat{H}_{2,0}(x) = (x-x_0) \cdot L_{2,0}^2(x)$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x-x_1) \cdot L_{2,1}^2(x).$$

$\vdots$

$$H_5(x) = \sum_{j=0}^{2} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{2} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}.$$

$$H_5(1{,}5) = 0{,}511.$$

10) Spline de clasă C^1: - polinoame lineare.

Asd. fct. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, unde $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ și valorile în aceste pct. fiind $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_n)$. Vom asd. fct. de interpolare lineare, locale și subintervalele:

$(x_0, x_1), (x_1, x_2) \dots, (x_{n-1}, x_n)$:

$$\boxed{p_i(x) = a_i x + b_i} \quad i = 0:n-1$$

Cei $2n$ parametrii se determină din condițiile de interpolare

$$\begin{cases} p_i(x_i) = f(x_i) & , i = 0:n-1 \\ p_{n-1}(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

și din cond. de racordare (continuitatea în pct. int).

$$\boxed{p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})} \quad i = 0:n-2$$

SPLINE

De unde rezultă parametrii:

$$\begin{cases} a_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} & i = \overline{0:n-1} \\ \\ b_i = \dfrac{x_{i+1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} & i = \overline{0:n-1} \end{cases}$$

11) Fie o funcție dată în 3 pct. Construiți o interpolare spline continuă formată din fct. de îmbinare ae^x+b, $c\log x+d$.

Sol: $f(x) = 2x^2+3x-4$.

$f(2) = 2\cdot 4+3\cdot 2-4 = 8+6-4 = 10$.

x	$f(x)$
0	-4
1	1
2	10

$s_0(x) = ae^x+b$

$s_1(x) = c\log x+d$.

→ cond. interpolare:

$$\begin{cases} s_0(x_0) = f(x_0) \\ s_1(x_1) = f(x_1) \\ s_1(x_2) = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^0+b = -4 \\ c\log 1+d = 1 \\ c\log 2+d = 10 \end{cases}$$

$$s_0(x_1) = s_1(x_1) \Leftrightarrow ae^1+b = c\log 1+d$$

$$\begin{cases} a+b = -4 \\ d=1 \\ c\log 2+1 = 10 \\ a\cdot e+b = d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-4 \\ a\cdot e+b = 1 \\ d=1 \\ c = \frac{9}{\log 2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4-a \\ a\cdot e-4-a = 1 \\ d=1,\ c = \frac{9}{\log 2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a = \frac{5}{e-1}$, $b = -4-\frac{5}{e-1}$

$d=1$, $c = \frac{9}{\log 2}$.

12) Ce formă are matricea coef. sist. liniare pt. aflarea coeficient. splineurilor naturale de clasă C^2 ce folosesc fct. de îmbinare polin-ale grad 3? Dar pentru tensionat. Ce condiții se impun la splineurile naturale și tensionale.

Sol: Matricea coeficienților este de formă tridiag., strict diagonal dominantă.

Splineuri naturale:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & \dots & \dots & h_{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Splineuri tensionate:

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

Condiții pt. splineuri de cls. C^2:

→ $n+1$ condiții de tip Lagrange.

$$\begin{cases} s_i(x_i) = f(x_i) & i = \overline{0:n-1} \\ s_{n-1}(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

→ $3n-3$ condiții de cont., deriv., curbură

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) & i = \overline{0:n-2} \\ s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \end{cases}$$

→ 2 condiții pt. spline natural / tensionat:

* NATURAL:

$$S_0''(x_0)=0$$
$$S_{n-1}''(x_n)=0$$

* TENSIONAT:

$$S_0'(x_0)=f'(x_0)$$
$$S_{n-1}'(x_n)=f'(x_n)$$

---

13) Să se calculeze spline-ul tensionat ce folosesc fc de îmbinare polin. de grad 3 s_0 și s_1 pt. fct:

$f(x)$: $x=[0\ 1\ 2]$ $f=[6\ 4\ 3]$ $f'=[1\ \cdot\ -1]$

Sol: Avd splinewrile:

$$S_0(x)=a_0+b_0(x-x_0)+c_0(x-x_0)^2+d_0(x-x_0)^3$$
$$S_1(x)=a_1+b_1(x-x_1)+c_1(x-x_1)^2+d_1(x-x_1)^3$$

→ n+1 condiții Lagrange:

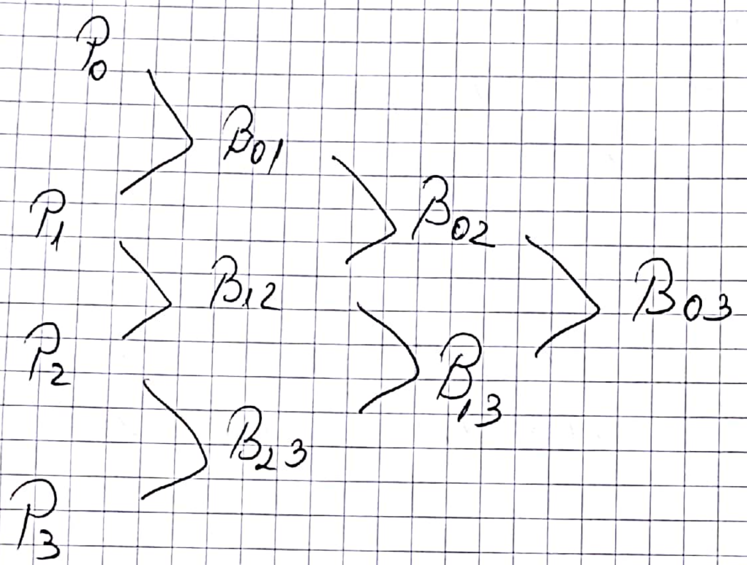
$$\begin{cases} S_i(x_i)=f(x_i) & i=\overline{0:n-1} \\ S_{n-1}(x_n)=f(x_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1})=s_{i+1}(x_{i+1}) & i=\overline{0:n-2} \\ s_i'(x_{i+1})=s_{i+1}'(x_{i+1}) \\ s_i''(x_{i+1})=s_{i+1}''(x_{i+1}) \\ s_0'(x_0)=f'(x_0) \\ s_1'(x_2)=f'(x_2) \end{cases}$$

14) Explicați cum se construiesc curbele Bézier pornind de la 4 pct. inițial P_0, P_1, P_2, P_3 (inclusiv grafic)

Sol: Pt. construirea curbelor Bézier se folosește algoritmul de Casteljau, deoarece este o modalitate mult mai eficientă de calculare a unui pct. aflat pe o curbă Bézier. Acest algoritm este puțin mai lent, dar este stabil din pct. de vedere numeric.

Algoritmul folosește următoarea recurență:



BÉZIER

$$B_{01} = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$B_{12} = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$B_{23} = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$B_{02} = (1-t)B_{01} + tB_{12}$$

$$= (1-t)\left[(1-t)P_0 + tP_1\right] + t\left[(1-t)P_1 + tP_2\right]$$

$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

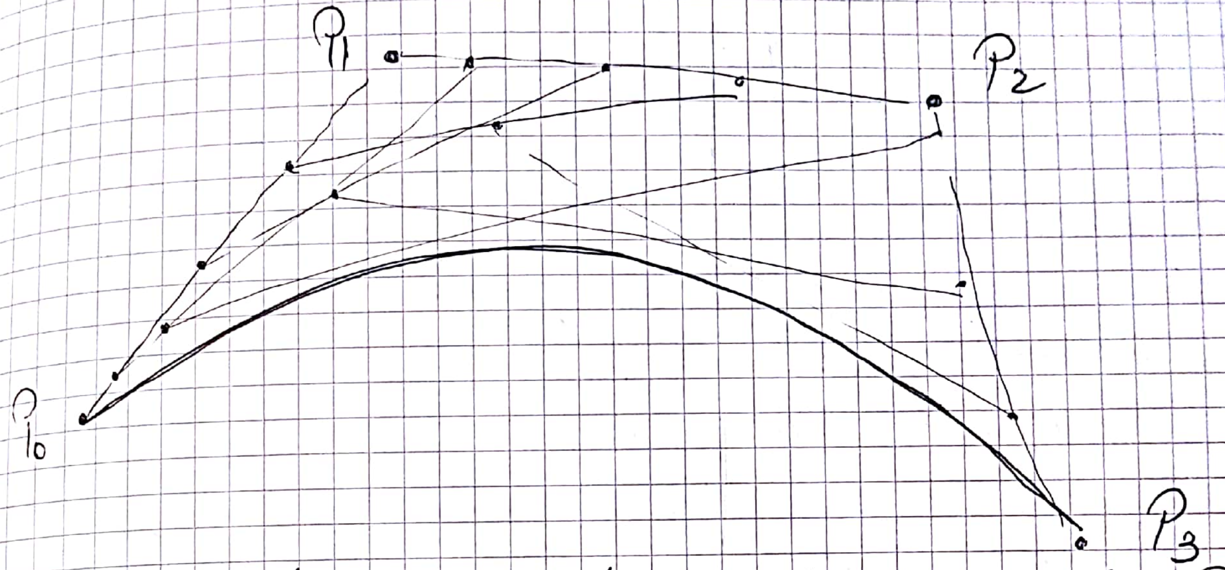
$$B_{13} = (1-t)B_{12} + tB_{23} = (1-t)\left[(1-t)P_1 + tP_2\right] + t\left[(1-t)P_2 +$$

$$= (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t) P_2 + t^2 P_3$$

$$P_{03} = (1-t) B_{02} + t B_{13} = (1-t)\left[(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2\right] +$$

$$+ t\left[(1-t)^2 P_1 + 2t(1-t) P_2 + t^2 P_3\right] =$$

$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 .$$



Fiind dată o mulțime de $n+1$ pct. $P_0, P_1, \dots P_n$ (numite pct. de control) în plan sau în spațiu, curba Bézier de grad n det. de aceste pct are forma parametrică:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \quad , \; t \in [0,1] \quad , \text{unde}$$

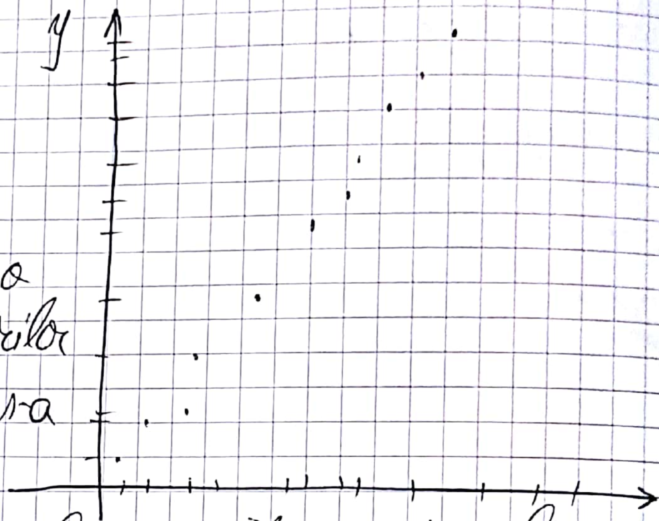
$B_{i,n}(t)$ s.n. polin. Bernstein de grad n definite prin relația:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{(n-i)} t^i \, , \quad i = 0 : n .$$

Curs 10. Aproximarea în sensul CMMP
Aproximarea cu fct. raționale
Transformata Fourier Rapidă

1) Explicați conceptul în sensul celor mai mici pătrate.

Sol:



Se poate observa în graficul alăturat că pt. o fct. liniară, din cauza erorilor de măsurare, linearitatea s-a pierdut. Și deci, dacă am interpola aceste date am fi nevoiți să suferim consecințele perturbațiilor.

Dacă am aproxima această fct. pornind de la aceste date și deci nu am respecta ca aproximația obținută să treacă prin pct. date, atunci în acest caz am fi avantajați.

Ne interesează o dreaptă $a_1 x + a_0$ care să treacă printre pct. date și care să aproximeze fct. cât mai bine. Adică am dori ca eroarea exprimată astfel:

$$\boxed{E = E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2}$$

să fie cât mai mică. De aici și titulatura de în sensul celor mai mici pătrate.

2) Ce înseamnă aproximarea continuă trigonom. în sensul celor mai mici pătrate.

Sol: Cea mai bună aproximare în sensul CMMP, g^* din G, a lui f din F este unică.

$$g^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* u_k$$

De unde rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \langle u_1, u_1 \rangle c_1 + \langle u_2, u_1 \rangle c_2 + \dots \langle u_n, u_1 \rangle c_n = \langle f, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_1, u_n \rangle c_1 + \langle u_2, u_n \rangle c_2 + \dots \langle u_n, u_n \rangle c_n = \langle f, u_n \rangle . \end{cases}$$

CMMP

~~Acest sistem poartă numele de determinant GRAM~~

Sistem simetric și rău condiționat, al cărui determinant poartă numele de determinant GRAM. Deoarece rezolvarea sistemului este anevoioasă se aleg cazuri particulare, adică diferite baze.

Aproximarea continuă trigonometrică în sensul cmmp se referă la alegerea bazei ortogonale ce are $2n+1$ componente:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx) \text{ și}$$

funcția pondere $w(x) = 1$, lucru care ne asigură că sistemul GRAM va deveni diagonal, adică ușor de rezolvat.

3) Prezentați produsul scalar și norma considerați în aproximarea continuă și discretă în sensul CMMP.

Sol:

Un spațiu PH este un dublet $(\mathcal{F}, u)$ unde $\mathcal{F}$ este un spațiu vectorial cu scalari din corpul $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), iar u este un ~~po~~ produs scalar, $u: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ și cu urm. prop:

* linearitatea: $\langle f_1 + f_2, f_3 \rangle = \langle f_1, f_3 \rangle + \langle f_2, f_3 \rangle$

$\langle c \cdot f_1, f_2 \rangle = c \cdot \langle f_1, f_2 \rangle$

* comutativitatea: $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle$

* definire pozitivă: $\langle f, f \rangle \geq 0$

* nesingularitatea: $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Norma unui elem. f din $\mathcal{F}$ se definește ca:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

---

4). Demonstrați că g^* (cel mai bun aproximant în sensul CMMP al unui elem f în subspațiul G) este unic. Folosiți prop. $\langle f - g^*, g \rangle = 0 \quad \forall g \in G$.

Sol: Pp. că $(\exists)$ g_1^* și g_2^* cei mai buni aproxim. a lui

$$\rightarrow \begin{cases} \langle f - g_1^*, g \rangle = 0 \\ \langle f - g_2^*, g \rangle = 0 \end{cases} \forall g \in G \Leftrightarrow \langle f - g_1^*, g \rangle = \langle f - g_2^*, g \rangle \quad \forall g \in G$$

liniaritate
$\Longleftrightarrow \cancel{\langle f, g\rangle} - \langle g_1^*, g\rangle = \cancel{\langle f, g\rangle} - \langle g_2^*, g\rangle$

$\Rightarrow g_1^* = g_2^*$.

$\Rightarrow g^*$ este unicul aproximant.

---

5). Scrieți o fcț MATLAB/OCTAVE care implementează calculul aproximării cubice, în sensul celor mai mici pătrate pt. o fcț cunoscută în 3 pct.

Sol:

$$E = E_2(a_0, a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{3} [y_i - P_3(x_i)]^2.$$

$$P_3(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3$$

$$E = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3} y_i P_3(x_i) + \sum_{i=1}^{3} [P_3(x_i)]^2.$$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^{3} y_i x_i^j + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{3} x_i^{j+k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{3} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{3} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^{3} x_i^3 = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot x_i^0 \\ a_0 \sum_{i=1}^{3} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^{3} x_i^4 = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot x_i^1 \\ a_0 \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{3} x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^{3} x_i^5 = \sum y_i \cdot x_i^2 \\ \ldots \end{cases}$$

```
function E = aprox(x, y, n)
  //n- gradul polin cu care aproximăm
  A = zeros(n+1, n+1)
  for i = 1:n+1
    for j = 1:n+1
      A(i,j) = sum(x.^(i-1+j-1));
      b(i) = sum(y*(x.^(i-1)));
    endfor
  endfor.

  a = A\b;

  E = sum(y - (a(1) + a(2)*x + a(3)*(x^2) + a(4)*(x^3)))
endfunction.
```

6). Să se det. polin. Cebâșev de grad 2 pt. fct.
$f:[-5,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

Sol: Facem schimbare de var. pt. ca fct. să fie definită pe $[-1,1]$.

$$x=at+b \Rightarrow \begin{cases} a\cdot(-1)+b=-5 \\ a\cdot 1+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b=-5 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow x=4t-1 \Rightarrow F:[-1,1]\to\mathbb{R},$$

$$F(t)=f(4t-1)=2(4t-1)+1=8t-1.$$

CEBAȘEV

Cod. baza Cebâșev și scriem forma generală a polin. de interpolare Cebâșev de grad 2.

$$P_2(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} T_0(t) + a_1 T_1(t) + a_2 T_2(t)$$

Pt. a determina coefic. a_0, a_1, a_2 calc. rădăcinile lui $T_3(t) = 0$:

$$x_0 = \cos \frac{2\cdot 0+1}{2\cdot 2+2}\pi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_1 = \cos \frac{2\cdot 1+1}{2\cdot 2+2}\pi = \cos\frac{3}{6}\pi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$x_2 = \cos \frac{2\cdot 2+1}{2\cdot 2+2}\pi = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{a_0 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \qquad a_p = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, T_p(x_i)}$$

$$\boxed{x_k = \cos\frac{2\cdot k+1}{2n+2}\pi.}$$

$F(t_1) = -4\sqrt{3}-1 \qquad F(t_2) = -1 \qquad F(t_3) = 4\sqrt{3}-1$

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-4\sqrt{3}-1-1+4\sqrt{3}-1\right) = -\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{2}{3}\left(F(t_1)\cdot t_1 + F(t_2)\cdot t_2 + F(t_3)\cdot t_3\right) = 8.$$

$$a_2 = \frac{2}{3}\left(F(t_1)\cdot(2t_1^2-1) + F(t_2)\cdot(2t_2^2-1) + F(t_3)(2t_3^2-1)\right) =$$

$$\rightarrow \boxed{P_2(t) = -1 + 8t = 8t - 1.}$$

Scanned by CamScanner

7) Să se det. P_2, polinomul de grad 2 care realiz. aproximarea în sensul celor mai mici pătrate a funcției $f(x) = |x|$ pe interv. $(-1,1)$ cu $w(x) = 1$.

Sol: Vom cons. baza canonică $u_0 = 1$, $u_1 = x$, $u_2 = x^2$. Sistemul Gram este:

$$\begin{cases} c_0 \langle 1,1\rangle + c_1 \langle 1,x\rangle + c_2 \langle 1,x^2\rangle = \langle 1, f(x)\rangle \\ c_0 \langle x,1\rangle + c_1 \langle x,x\rangle + c_2 \langle x,x^2\rangle = \langle x, f(x)\rangle \\ c_0 \langle x^2,1\rangle + c_1 \langle x^2,x\rangle + c_2 \langle x^2,x^2\rangle = \langle x^2, f(x)\rangle \end{cases}$$

$$\langle 1,x\rangle = \langle x,1\rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \langle x,x\rangle = \langle x^2,1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\langle x,x^2\rangle = \langle x^2,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0.$$

$$\langle x^2,x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

$$\langle 1, f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$$

$$\langle x, f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} x|x|\,dx = 0$$

$$\langle x^2, f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} x^2|x|\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_0 + \frac{2}{3}c_2 = 1 \\ \frac{2}{3}c_1 = 0 \\ \frac{2}{3}c_0 + \frac{2}{5}c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{3}{16} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{15}{16}. \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow P_2(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = \frac{15}{16} x^2 + \frac{3}{16}.$$

---

8) Să se det. P_2 care realizează aproximarea discretă în sensul CMMP a fct. date în tabelul de mai jos cu $w(x) = 1$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Sol: Vom avea baza canonică $u_0 = 1$, $u_1 = x$, $u_2 = x^2$.

Sistemul gram este:

$$\text{CMMP}\begin{cases} c_0\langle 1,1\rangle + c_1\langle 1,x\rangle + c_2\langle 1,x^2\rangle = \langle 1,f(x)\rangle \\ c_0\langle x,1\rangle + c_1\langle x,x\rangle + c_2\langle x,x^2\rangle = \langle x,f(x)\rangle \\ c_0\langle x^2,1\rangle + c_1\langle x^2,x\rangle + c_2\langle x^2,x^2\rangle = \langle x^2,f(x)\rangle \end{cases}$$

Calculul produselor scalare este:

$$\langle 1,1\rangle = \sum_{i=0}^{4} 1 = 5$$

$$\langle 1,x\rangle = \langle x,1\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i = 0$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \langle x,x\rangle = \langle x^2,1\rangle = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = \frac{5}{2}$$

$\vdots$

$$\langle 1,f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{4} |x_i| = 3$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = \frac{6}{7} x^2 + \frac{6}{35}}.$$

Scanned by CamScanner

9) Seria MacLaurin pt e^{-x} este:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

Calculați aproximarea Padé pt. e^{-x} de gradul 5 cu $n=3$ și $m=2$.

Sol: ~~x_0~~

PADE

$$\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\dots\right)\left(1+q_1x+q_2x^2\right)-\left(p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3\right)$$

Pt. a de aproximarea Padé trebuie să det. coef. $p_0, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2$ a.î. coefic. lui x^k, $k=0:N=n+m$ să fie 0.

x^0: $1 = p_0$

x^1: $-1+q_1=p_1$

x^2: $q_2-q_1+\frac{1}{2}=p_2$

x^3: $-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}q_1-q_2=p_3$

x^4:

x^5:

Rez. sist $\Rightarrow r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}\dots$

10). Explicați FFT fără formule:

Sol: Interpolarea unui set de date alcătuit din $2m$ pct folosind aproxim. trig. directă necesită efectuarea unui nr. mare de operații: $(2m)^2$ înmulțiri și $(2m)^2$ adunări, motiv pt. care și creșterea obținută în cazul unui nr. mare de pct. este foarte mare.

Metoda alternativă de a determina forma polin. de interp. trig. necesită $O(m \log_2 m)$ înmulț. și $O(m \log_2 m)$ adunări.

Astfel, nr de operații necesare pt. obținerea polin-lui interp. trig. devine de ordinul miilor atunci când setul de date este de ordinul miilor, spre deosebire de calculul direct, unde nr. de op. este de ordinul milioanelor.

Metoda poartă numele de Fast Fourier Transform (FFT) și a fost descrisă de J. W. Cooley și J. W. Tukey.

FFT

În locul evaluării directe a constantelor a_k și b_k, trans. FFT ~~modifică~~ det. valoarea coef. complecși c_k.

Odată constantele c_k determinate, a_k și b_k pot fi calculate folosind formula lui Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

---

11). Cum arată un sistem pt care determinantul matricii coef s.n. determinant Gram? Ce înseamnă coef. Fourier? Explicați (u, bază și f funcția).

<u>Sol</u>:

$$\begin{cases} c_1 \langle u_1, u_1 \rangle + c_2 \langle u_2, u_1 \rangle + \dots + c_n \langle u_n, u_1 \rangle = \langle f, u_1 \rangle \\ c_1 \langle u_1, u_2 \rangle + c_2 \langle u_2, u_2 \rangle + \dots + c_n \langle u_n, u_2 \rangle = \langle f, u_2 \rangle \\ \vdots \end{cases}$$

Sistemul este simetric și rău condiționat, iar det matricea coef. poartă numele de determinant Gram. Deoarece rezolvarea sistemului este anevoioasă se aleg cazuri particulare astfel diferite de baze.

Coeficienții Fourier reprezintă $c_k^* = \langle f, u_k \rangle$ unde u_k este o bază ortonormată, iar f este o fct. din $\mathcal{F}$.

Curs 11 - Derivare și integrare numerică

1) Deduceți o formulă aproximativă de derivare de 2 ori pt. o fct. f pornind de la forma Taylor (dezvoltați în serie de polinoame Taylor de grad 3 $f(x_0+h)$ și $f(x_0-h)$ în pct. x_0 și țineți cont de $\exists\, c \in (a,b)$, $\frac{f^{(4)}(a)+f^{(4)}(b)}{2} = f^{(4)}(c)$).

Sol:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot h^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\cdot h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(b) h^4 + \dots$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot h^2 - \frac{1}{6} f'''(x_0)\cdot h^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(a) h^4 + \dots$$

$$x_0 - h < a < x_0 < b < x_0 + h.$$

DERIVARE

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + f''(x_0)\cdot h^2 + \frac{1}{24} f^{(4)}(a)\cdot h^4 + \frac{1}{24} f^{(4)}(b)\cdot h^4$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h) + f(x_0+h) - 2f(x_0)\right] - \frac{h^4}{24}\left[f^{(4)}(a) + f^{(4)}(b)\right]$$

$\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f^{(4)}(c) = \frac{1}{2}\left[f^{(4)}(a) + f^{(4)}(b)\right]$.

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\ \right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c).$$

2) Deduceți relația $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ folosind polinomul Lagrange.

<u>Sol</u>: Avd x_0 și $x_1 = x_0 + h$

$$f(x) = L_1(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi(x))$$

$$L_1(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - x_0 - h}{\cancel{x_0} - \cancel{x_0} - h} = \frac{x - x_0 - h}{-h}$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0} = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) \cdot \frac{x - x_0 - h}{-h} + f(x_0+h) \cdot \frac{x - x_0}{h} +$$

$$+ \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_0 - h) \cdot f''(\xi(x))$$

Derivăm în fct. de x:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}\left[2(x - x_0) - h\right] \cdot f'(\xi(x))$$

$$+ \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_0 - h)\, D_x(f''(\xi(x)))$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

2 point formula

Scanned by CamScanner

3) Regula Trapezelor:

Sol: $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)}_{\text{polin Lagrange.}} dx + \underbrace{\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} dx}_{\text{eroarea}}$$

Ad. $x_0 = a$ și $x_1 = b$ și $h = b-a$ și folosim polinomul linear Lagrange pt. a deduce formula de la regula Trapezelor.

$$\left.\begin{array}{l} L_0(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} \\ L_1(x) = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) \cdot f''(\xi(x)) dx$$

Folosind T. Mediilor pt. eroare avem:

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx =$$

$$= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx =$$

$$= f''(\xi) \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x_0+x_1}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right] \Bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$= -\frac{h^3}{6} f''(\xi).$$

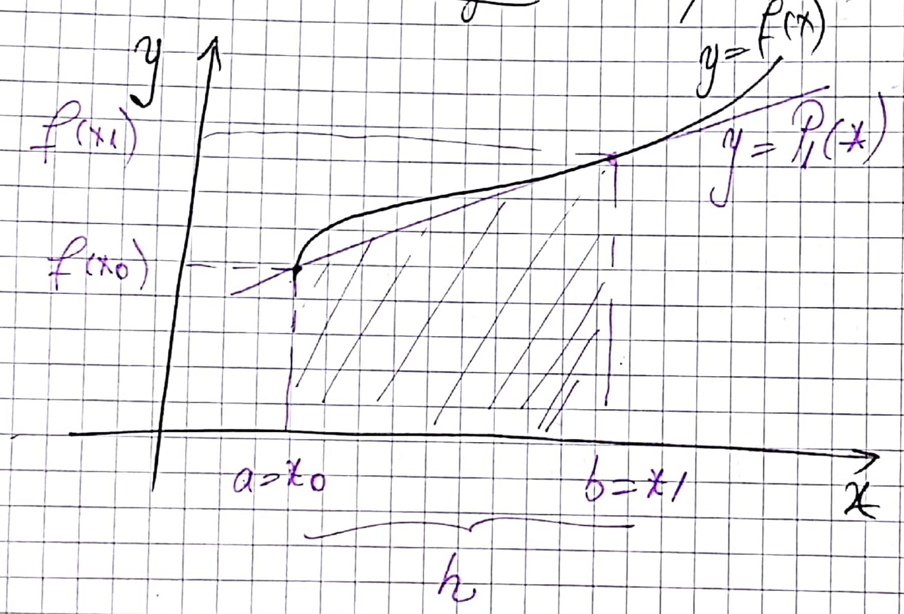
$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right] \Big|_{x_0}^{x_1} -$$

$$-\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$= \frac{(x_1-x_0)}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

Pt. o fct. cu val. pozitive aproxim. integralei definită se face cu aria trapezului format, de aici și titulatura de <u>regula trapezului</u>.



5) <u>Regula Simpson</u>:

<u>Sol</u>: Ad $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = x_0 + h$, unde $h = \frac{b-a}{2}$.

Dezvoltăm în serie Taylor cu polin de ord 3 în jurul lui x_1

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3$$

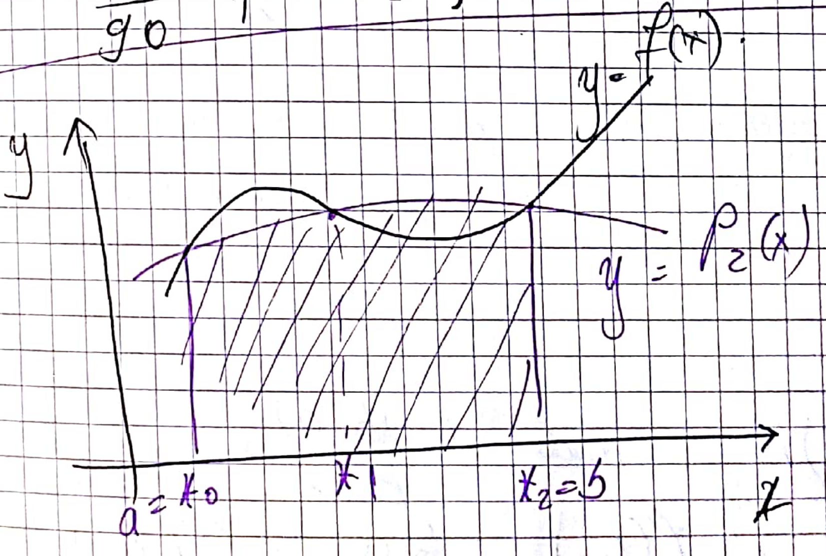
$$+ \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \frac{1}{24} f^{(4)}(\varepsilon_1) \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\varepsilon_1)}{60} h^5$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{h^2}\left[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2) \right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\varepsilon_2) \right] + \frac{f^{(4)}(\varepsilon_1)}{60} h^5$$

$$\boxed{\Rightarrow \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\varepsilon).}$$



Formulele trapezelor și Simpson fac parte din clasa mai generală "Newton - Cotes".

6). Explicați grafic formulele Trapezelor și Simpson compuse. Explicați grafic și generalizarea acestor formule.

Sol: Formula Trapezelor compusă:

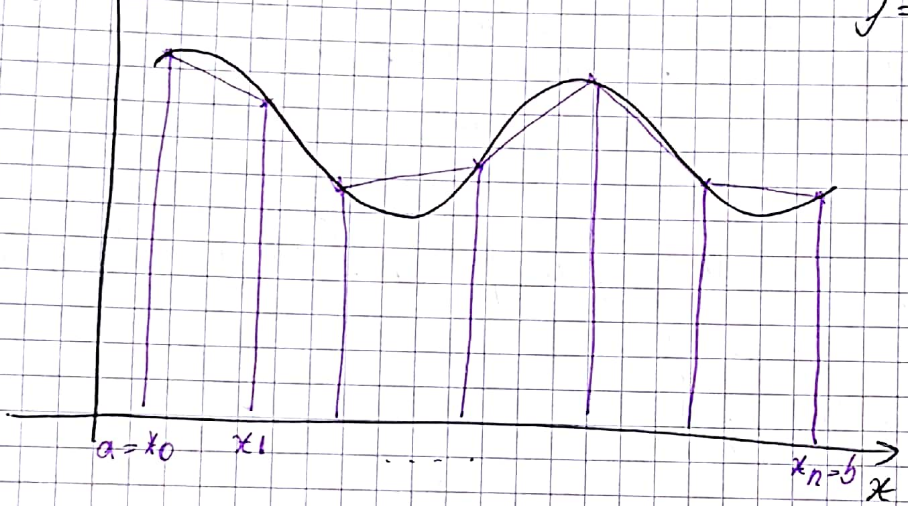
a) Împărțim intervalul $[a,b]$ în n subintervale și aplicăm formula trapezelor.

$x_0 = a$

$x_n = b$

$x_j = a + j \cdot h$, $j = \overline{0, n}$, unde $h = \frac{b-a}{n}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$$



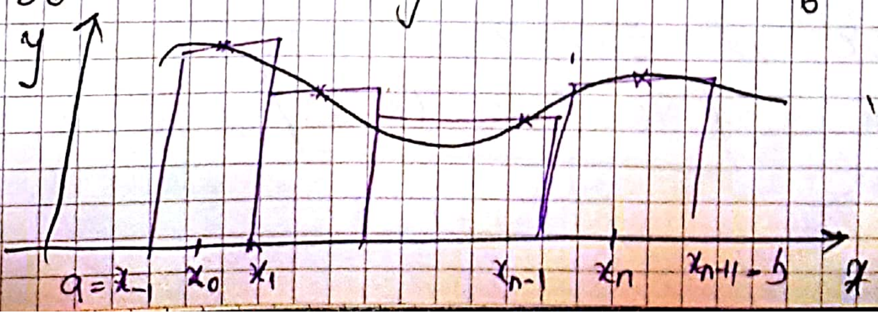
b) Împărțim intervalul $[a,b]$ în n subintervale și aplicăm formula trapezelor ~~compusă~~ cu pct. de mijloc

$x_{-1} = a$

$x_{n+1} = b$

$x_j = a + (j+1)h$, unde $h = \frac{(b-a)}{n+2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6} h^2 f''(\mu).$$

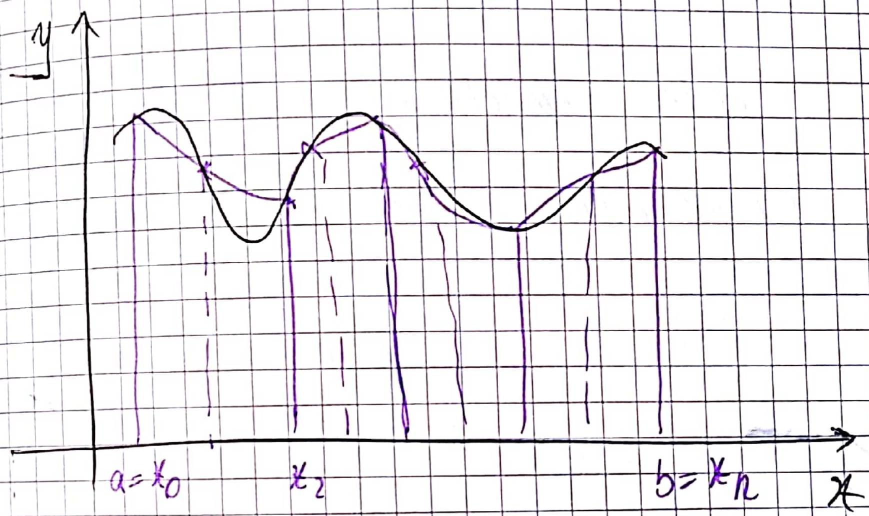


Formula Simpson compusă:

Alegem ca n să fie par, adică $2m$ și apoi împărțim intervalul în n subintervale și aplicăm formula Simpson pe o pereche de subintervale consecutive.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$

$$-\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu).$$

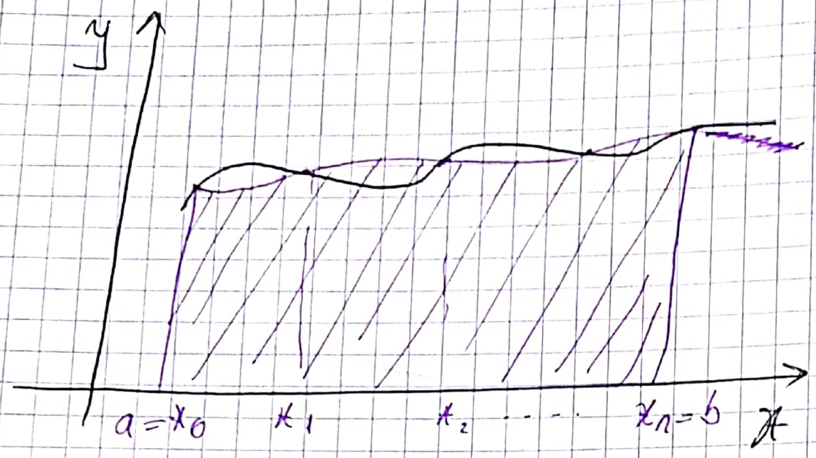


Generalizarea formulelor trapezelor și Simpson este reprezentată de formulele Newton-Cotes.

* Formulele Newton-Cotes închise

Alegem $n+1$ pct. $x_i = x_0 + ih$, $i=\overline{0,n}$ cu $x_0 = a$ și $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \text{ unde } a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx$$



Pt. $n=1 \Rightarrow$ formula trapezelor
$n=2 \Rightarrow$ formula Simpson.

* Formulele Newton-Cotes deschise.

$x_i = x_0 + ih$, $i=\overline{0, n+1}$, unde $h=\frac{(b-a)}{n+2}$.

$x_{-1}=a$

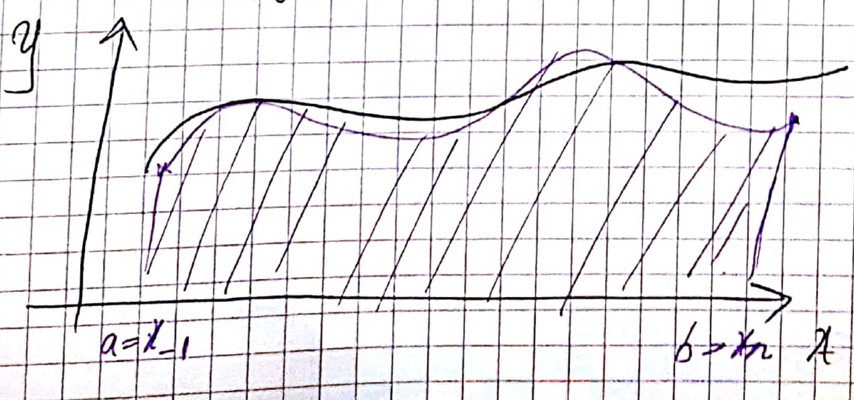
$x_{n+1}=b$

$x_0=a+h$

$x_n=b-h$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx.$$



$\to n=0 \to$ pct. de mijloc.

7) a) Calculați integrala prin Simpson în 3 pct.
N=1.

Sol: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$

$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$.

$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$

$x_i = a + i \cdot h = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$,

b) Se dă $f: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$h = \frac{b-a}{2N}$.

$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy$, f cont $\Rightarrow I = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$.

$= \int_a^b \frac{h}{3} \left(f(x,c) + f(x,d) + 4 f\left(x, \frac{d+c}{2}\right) \right) dx$

$= \ldots$

---

8) Calculați aproximativ integrala:

$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

$\begin{cases} ax+b = t \\ a \cdot 0 + b = -1 \\ a \cdot 1 + b = 1 \end{cases}$ $\quad b = -1$, $a = 2$

Sol: Facem schimbarea de var $t = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{\sqrt{\left(\frac{t+1}{2}\right)\left(1 - \frac{t+1}{2}\right)}} \frac{1}{2} dt = \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{\sqrt{(t+1)(1-t)}} dt =$

$= \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^4$

$w(x) = \sqrt{1-x^2}$

$a = -1$
$b = 1$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\cos \frac{(2i-1)}{2n}\pi\right)$$

f are gradul $4 \Rightarrow n=3$. $\Rightarrow$ gradul de exact. este $\boxed{2 \cdot 3 - 1 = 5.}$

$x_1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x_2 = \cos \frac{3\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$x_3 = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \int = \frac{\pi}{3}\left[(\ )^4 + (\ )^4 + (\ )^4\right].$$

Valentina Ilescu

Curs 12: Extrapolare Richardson
Integrare Romberg
Integrare Gaussiană.

1) Ce înseamnă extrapolarea Richardson:

Sol: Se dorește aproximarea unei valori M cu o formulă $N_1(h)$ ce depinde de un parametru, de obicei de pasul a.d.

Eroarea se exprimă astfel:

$$M - N_1(h) = k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \dots$$, eroare fiind în $O(h)$.

Extrapolarea se referă la combinarea acestor aproximări, de tipul $O(h)$, pt. a produce formule de aproximare cu eroare de ordin mai mare $O(h^2)$, etc.

$$M - N_2(h) = \hat{k}_2 h^2 + \hat{k}_3 h^3 + \dots$$

2) Îmbunătățirea formulelor în $O(h^2)$:

Sol: Pornim de la:

$$M = N_1(h) + k_1 h + k_2 h^2 + \dots \quad \text{val. pt } h > 0. \;\; / \cdot (-1)$$

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1 \frac{h}{2} + k_2 \cdot \frac{h^2}{4} + \dots \;\; / \cdot 2$$

$$\Rightarrow M = \underbrace{N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]}_{N_2(h)} + k_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + \dots$$

$$\Rightarrow M = N_2(h) - \frac{k_2 h^2}{2} - \frac{3 k_3}{4} h^3 - \dots$$

3). Dacă $N_2(h)$, $1>h>0$ este o formulă de aproximare pt. o val. M cu eroarea $k_1h^2+k_2h^4+k_3h^6$ atunci polin Lagrange care trece prin $(h^2, N_1(h))$ și $(h^2/4, N_1(\frac{h}{2}))$ evaluat în 0 este egal cu $N_2(h)$

Sol: $P(x) = L_0(x)\cdot f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$

$$= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$$

$$= \frac{x-h^2/4}{h^2-h^2/4}\cdot N_1(h) + \frac{x-h^2}{\frac{h^2}{4}-h^2} N_1\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P(0) = \frac{-\frac{h^2}{4}}{\frac{3h^2}{4}} N_1(h) + \frac{-h^2}{\frac{-3h^2}{4}} N_1\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} N_1(h) + \frac{4}{3} N_1\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$= N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right].$$

$$M = N_1(h) + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \dots \quad / \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + k_1\frac{h}{2} + k_2\frac{h^2}{4} + k_3\frac{h^3}{8} \dots \quad / \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}M - \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{4}{3}k_1\frac{h}{2} - \frac{1}{3}k_1h + \frac{4}{3}k_2\frac{h^2}{4} - \frac{k_2h^2}{3}$$

$$\dots \Rightarrow M = \underbrace{N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]}_{N_2(h)} + k_1h^2 + k_2h^4 + k_3h^6$$

Scanned by CamScanner

4). Îmbunătățiți formula $N_1(h)$ care aproxim. val. M și are eroarea exprimată sub forma

$$\sum_{i=1} K_i h^{2i}$$

Sol: $M = N_1(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 \ldots \quad / (-1)$

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h^2}{4} + K_2 \frac{h^4}{16} + K_3 \frac{h^6}{64} \quad / \cdot 4$$

$$3M = 4 N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + K_2 \frac{h^4}{4} - K_2 h^4 + \ldots$$

$$\Rightarrow M = \frac{4}{3}\left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right] \cancel{+} K_2 \frac{h^4}{4} - \ldots$$

$$M = N_2(h) - K_2 \frac{h^4}{4}, \text{ unde } N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]$$

---

5). Dacă în metoda compusă a trapezelor eroarea era exprimată astfel $\left(h = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + ih\right)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{12} f''(\mu) h^2$$

$\Rightarrow$ S-a demonstrat că eroarea se mai poate exprima și astfel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 \ldots$$

unde K_i sunt const. și depind numai de $f^{(2i-1)}(a)$ și $f^{(2i-1)}(b)$.

Atunci ținând seama de extrapolarea Richardson putem îmbunătăți formulele de aproximare prin alegerea lui $h = \frac{h}{2}$, adică în $O(h^4)$, $O(h^6)$ ...

6) Aplicați Romberg pt. a aproxima $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

$n = 1, 2, 4, 8, 16$.

Sol: $R_{1,1} = \frac{\pi}{2}[\sin 0 + \sin \pi] = 0$

$R_{2,1} = \frac{\pi}{4}[\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi] = \ldots$ $\Big\} R_{2,2}$

$R_{3,1} = \frac{\pi}{8}\left[\sin 0 + 2\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\pi\right] = \ldots$ $\Big\} R_{3,2}$

$R_{4,1}$

$R_{5,1}$.

$O(h^4)$ aprox:

$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) = \ldots$

$R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{1}{3}(R_{4,1} - R_{3,1}) = \ldots$

$O(h^6)$

⋮

$$\boxed{R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1}\left(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}\right)}$$

$k = j, j+ \ldots$

ROMBERG

Cuadraturi Adaptive

7).

Sol

Pres...
Sim...

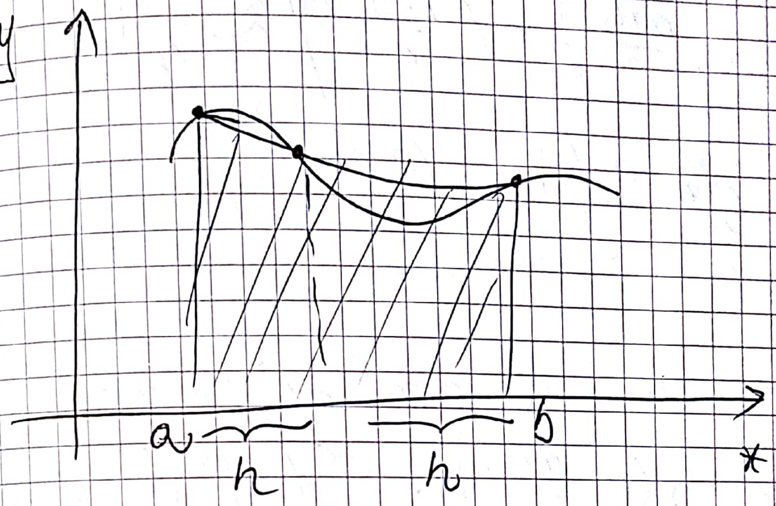
7). Quadraturi adaptive. Teorie plus explicații:

Sol: Aceasta reprezintă o metodă bazată pe Simpson. Presupunem că vrem să aproximăm $\int_a^b f(x)dx$ cu Simpson cu pas $h = \frac{b-a}{2}$;

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4f(a+h)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Notăm $S(a,b) = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4f(a+h)\right]$.

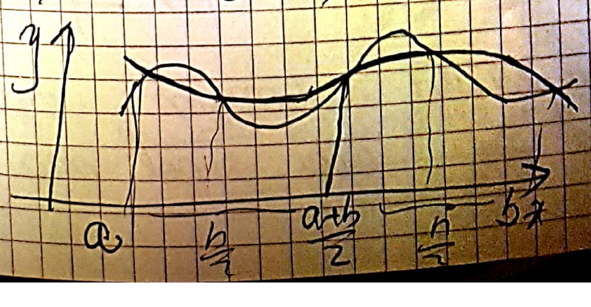
Quadraturi Adaptive



În continuare vrem să scăpăm de termenul $f^{(4)}$ și pt aceasta vom folosi Simpson cu pas $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{4}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(a+\frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 4f\left(a+\frac{3h}{2}\right) + f(b)\right] - \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{f^{(4)}(\bar{\xi})}{180}(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\bar{\xi})$$



Dacă este: $f^{(4)}(\xi) \approx f^{(4)}(\overline{\xi})$ atunci:

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\overline{\xi}) \approx$$

$$\approx S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \approx \frac{16}{15}\left[S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

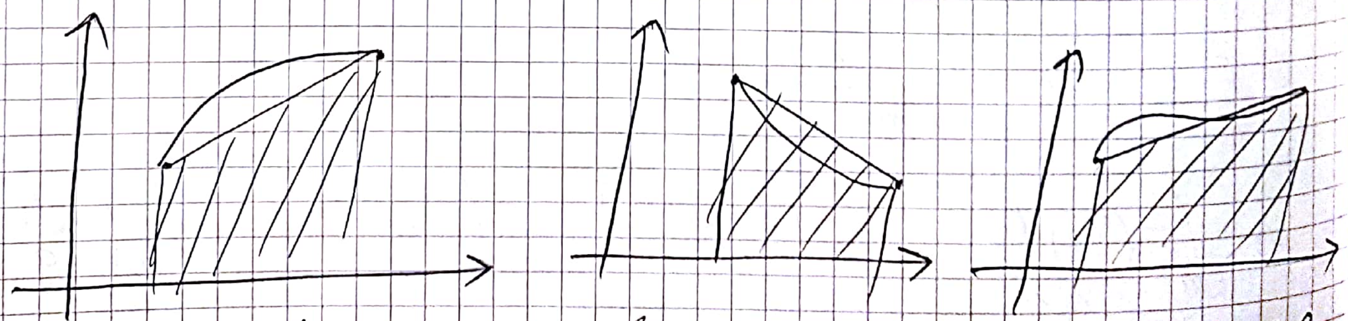
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right| \approx \frac{1}{16}\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\xi)$$

$$\approx \frac{1}{15}\left|S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)\right|$$

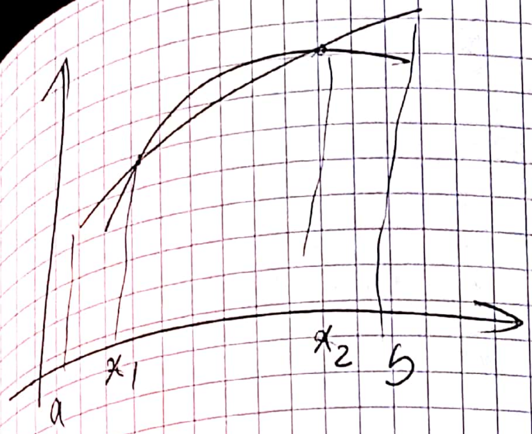
Ceea ce înseamnă că am aproximat de 15 ori mai bine cu $S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ decât cu $S(a,b)$.

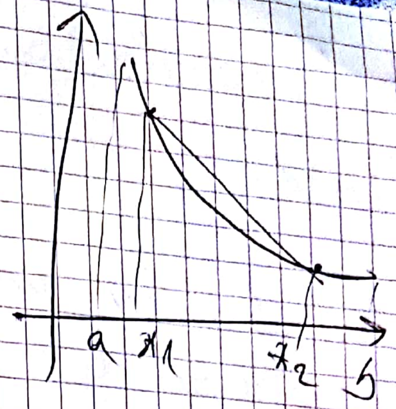
Integrare Gaussiana

8) La integr. Gaussiană ne propunem să extindem gradul de valabilitate al formulelor pt polin. de grad mai mare.



La regula trapezelor estimam integrala în acest fel și nu era cel mai bine





Mai bine am estima integrala asa. Adică dacă la Newton-Cotes pct. erau echidistante, la Integrarea Gaussiană pct. x_i sunt optim alese.

Pct x_i și coef. c_i sunt aleși a.î. să minimizeze eroarea din formula generală de quadratură:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Avem de ales c_i și x_i cu condiția ca $x_i \in [a,b]$.

Integrarea Gaussiană - Trecerea de la $[a,b]$ la $[-1,1]$.

$$t = d\,x + c$$

$$\left.\begin{aligned} x = a &\Rightarrow t = -1 \\ x = b &\Rightarrow t = 1 \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} a \cdot d + c &= -1 \\ b \cdot d + c &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cancel{d\,d}\; d(b-a) = 2 \Rightarrow d = \frac{2}{b-a}$$

$$c = 1 - \frac{2b}{b-a} = \frac{b-a-2b}{b-a} = \frac{-a-b}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b-a} \cdot x - \frac{a-b}{b-a} = t$$

$$\Rightarrow x = \left(t + \frac{a+b}{b-a}\right)\frac{b-a}{2} = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{(b+a)}{2}.$$

9) Se cons. integrala:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

Det. formula de integrare $I \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3)$ a.î. gradul de exact. să fie maxim. Precizați gradul de exact.

Sol: În formula de integrare gaussiană:

$$\int_a^b f(x)\cdot w(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$ nodurile x_i sunt

det. din condiția de ortogon. a polin.:

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$ cu un polin. oarecare

de grad mai mic decât $\pi(x)$, adică x^k.

$$\int_a^b \pi(x)\cdot w(x)\cdot x^k\,dx = 0 \qquad k = 0:n-1$$

$$\pi(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c)\cdot x^k\,dx = 0 \qquad k = 0:2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = c = 0 \\ b = -\frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - \frac{3}{5}x = 0$$ (polinom Legendre)

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\quad x_2 = 0,\quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Pt. det. coef. a_1, a_2, a_3:

$f=1$: $\int_{-1}^{1} dx = a_1 + a_2 + a_3 = 2$

$f = x$

$f = x^2$

$\Rightarrow I = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

grad. de val.: $2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Curs 13. Ecuații diferențiale cu condiții inițiale

1) Arătați că $f(t,y) = t|y|$ satisface condiția Lipschitz pe intervalul $S = \{(t,y) / 1 \le t \le 2$ și $-3 \le y \le 4\}$.

Sol: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t|\,||y_1| - |y_2|| \le 2|y_1 - y_2|$

$\Rightarrow L = 2 \Rightarrow f$ satisface condiția Lipschitz.

---

2) Arătați că există o unică soluție pt:

~~$y'(t) = f(t,y),\ a \le t \le b,\ y(a) = \alpha$~~

$y' = 1 + t\sin(ty)$, $0 \le t \le 2$

$y(0) = 0$.

Sol: $f(t,y) = 1 + t\sin(ty)$

$$\frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} f(t,\xi) = t^2\cos(t\xi)$$

$\Rightarrow |f(t,y_2) - f(t,y_1)| = |y_2 - y_1|\,|t^2\cos(\xi t)| \le 4|y_2 - y_1|$

$L = 4 \Rightarrow$ satisface cond. Lipschitz, deci sol este unică.

3) Euler:

Metoda își propune să afle aproximarea sol. ec. diferențial cu condiții inițial:

$y' = f(t, y) \quad a \le t \le b \quad , y(a) = \alpha$.

Se află soluția unei astfel de ecuații într-un set de pct. numit mesh points din [a, b] și apoi soluția într-un pct diferit de mesh points se va obține prin interpolare.

Cod. $t_i = a + ih$ și folosim Taylor:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, \underbrace{y'(t_i)}_{f(t_i;\, y(t_i))} + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi)$$

Metoda Euler construiește $w_i \simeq y(t_i)$ renunțând pt. fiecare pas la rest.

$w_0 = \alpha$

$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i) \quad i = \overline{0:N}$.

---

4) Folosiți algoritmul Euler pt. a determina sol.

$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \le t \le 2 \quad y(0) = 0,5$.

la $t = 2$.

Sol: $f(t, y) = y - t^2 + 1$.

$w_0 = f(0) = 0,5$

$w_1 = \cancel{f(0)}\ w_0 + 0,5\, f(0; 0,5) = 0,5 + 0,5(1,5) = 1,25$

$w_2 = w_1 + 0,5\,(w_1 - (0,5)^2 + 1) = 2,25$

$w_3 = w_2 + 0,5\,(w_2 - (1)^2 + 1) = 3,375$

$y(2) \approx \omega_4 = \omega_3 + 0{,}5\,(\omega_3 - (1{,}5)^2 + 1) = \ldots$

$\boxed{y = a_2 + a_1 x} \to a_2, a_1 \to y(1{,}3) = \ldots$

5) <u>Cod Euler</u> :

```
function y = euler (a,b, n, f, y0)
    x= linspace (a,b, n);
    h= x(2) - x(1);
    y(1)= y0;
    for i=1:n
        y(i+1)= y(i)+ f(x(i), y(i))*h;
    endfor
end function.
```

Rezolvate de

Hrascu Valentina.

Scanned by CamScanner