57. Simplificați fracțiile :

a) $\dfrac{A_n^5 + A_n^6}{A_n^4}, n \geq 6$; b) $\dfrac{C_n^2 + C_n^3}{C_n^4}, n \geq 4$; c) $\dfrac{A_n^2 + A_n^3}{A_n^1}, n \geq 3$;

d) $\dfrac{(n+1)! + (n-1)!}{n^2 + n}, n \geq 1$; e) $\dfrac{C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3}{C_n^2}, n \geq 2$; f) $\dfrac{(2n)! + (2n+1)!}{(2n-1)! + (2n)!}, n \geq 1$.

58. Cu câte zerouri se termină numărul $100!$?

59. Câte numere de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1,3,5,7,9 ?

60. Câte submulțimi are mulțimea $\{a,b,c,d,e\}$?

61. Câte submulțimi cu cel puțin 3 elemente are mulțimea $\{4,5,6,7,8\}$?

62. Câte submulțimi cu un număr impar de elemente are mulțimea $\{2,4,6,8,10,12\}$?

63. În câte feluri pot fi ordonate 5 cărți diferite pe un raft al unei biblioteci ?

64. În câte feluri poate fi format un şir indian din 6 elevi ?

65. Roxana i-a scris lui Dragoş , de la mare , în fiecare zi a săptămânii , câte o scrisoare.În câte feluri poate să-i pună scrisorile în 7 plicuri de culori diferite ?

66. Care număr este mai mare : C_{10}^8 sau C_{11}^9 ?

67. Care este cel mai mare element al mulțimii $\{C_7^3, C_7^4, C_7^5\}$?

68. Câte submulțimi cu două elemente are mulțimea $\{a,m,i,c\}$?

69. Câte submulțimi cu 3 elemente are mulțimea $\{a,l,i,n\}$?

70. Se numeşte ***prieten*** orice submulțime cu trei elemente a unei mulțimi finite.Câți ***prieteni*** are fiecare dintre mulțimile următoare :

$X = \{L,U,C,I,A\}, Y = \{D,R,A,G,O,S\}, Z = \{A,N,D,R,E,I\}$?

71. Comparați numerele :

a) $a = C_{10}^7$ şi $b = C_9^8$; b) $a = C_8^3$ şi $b = C_9^8$; c) $a = C_{100}^2$ şi $b = C_{100}^{98}$;

d) $x = A_6^2, y = A_5^3$; e) $x = A_4^3, y = A_6^2$; f) $x = A_5^2, y = C_6^2$.

72. Rezolvați ecuațiile :

a) $C_n^2 + C_n^1 = 10;$ b) $C_7^6 + C_7^5 = C_n^6;$ c) $C_n^{10} = C_{11}^{10} + C_{11}^{9};$

d) $C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + C_n^3 = 10;$ e) $3 \cdot C_n^1 - 2 \cdot C_n^2 + C_n^3 = 4;$ f) $C_n^5 = C_n^6.$

73. Determinați m în fiecare din cazurile următoare :

a) $C_{3m}^{1+m^2} = C_{2m+1}^{m};$ b) $C_{2m}^2 = 15;$ c) $C_{2m+3}^{1+m^2} = C_{2m+1}^{m+2};$

d) $C_{3m}^2 + C_{4m}^2 = 11m^2 - 1;$ e) $\sum_{k=1}^{m} C_m^k = 511;$ f) $C_{3m}^{2m} = C_{3m}^{4m}.$

74. Rezolvați ecuațiile :

a) $A_x^6 - 24 \cdot x \cdot C_x^4 = 11 \cdot A_x^4;$ b) $A_x^2 + 2 \cdot A_{x+1}^2 = 30;$ c) $C_{3x+3}^{3x-2} = 4 \cdot A_{3x+2}^3;$

d) $A_x^2 \cdot C_{x+1}^2 + A_{x+1}^2 \cdot C_x^2 = 240;$ e) $16 \cdot C_{x+4}^8 = 57 \cdot A_x^4;$ f) $C_x^1 + 2 \cdot C_x^2 + 3 \cdot C_{x+1}^2 = 13.$

75. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații:

a) $\begin{cases} 8 \cdot A_x^y = A_x^{y+1} \\ 8 \cdot C_x^y = 5 \cdot C_x^{y+1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_x^y = 2 \cdot A_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y+2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

d) $\dfrac{C_{x+1}^{y+1}}{4} = \dfrac{C_{x+1}^{y}}{4} = 8 \cdot C_{x+1}^{y-1}$ e) $\begin{cases} 3 \cdot C_{x+2}^{y+1} = 7 \cdot C_{x+1}^{y} \\ C_{x+1}^{y+1} = 2 \cdot C_x^{y+1} \end{cases}$ f) $C_{x+1}^{y} = C_{x+2}^{y+1} = C_x^{y-1}$

76. Rezolvați inecuațiile : a) $A_{x+1}^2 \le 12;$ b) $C_{x+1}^2 + C_x^2 \le 9;$ c) $C_{3x}^1 + C_{4x}^2 \le 34.$

77. Elevii unei clase studiază 14 materii.În câte feluri poate fi întocmit orarul unei zile,dacă într-o zi acesta trebuie să conțină 5 materii diferite ?

78. La un baraj pentru formarea unui lot de matematică trebuie să fie date 4 teste în timp de 7 zile.În câte feluri se poate face programarea testelor ? Dar dacă ultimul test trebuie susținut obligatoriu în ultima zi ?

79. Alina are 7 melodii preferate pe care le ascultă zilnic.Dacă le ascultă exact în aceeași ordine se plictisește totuși,așadar le schimbă ordinea în fiecare zi.După câți ani va ajunge Alina la ordinea inițială ?

80. În câte feluri se pot așeza pe un raft 8 cărți (5 de autori diferiți și 3 de același autor)astfel încât cărțile care au același autor să fie una lângă cealaltă ?

81. În comisia de politică externă a Parlamentului României sunt 7 deputați și 6 senatori. În câte moduri se poate forma o delegație pentru Consiliul Europei,formată din 5 persoane dintre care cel puțin doi senatori și un deputat ?

82. În câte moduri se pot alege dintr-o școală cu 20 de profesori un director,un director adjunct și un consilier educativ ?

83. La o reuniune de 12 persoane fiecare a dat mâna cu fiecare dintre ceilalți participanți.Câte strângeri de mână au fost ?

84. La un institut de matematică aplicată trebuie formată o echipă de studiu formată din 10 specialişti,dintre care cel puţin unul matematician.În câte feluri se poate forma echipa,dacă avem 3 matematicieni şi 8 economişti ?

85. Din 3 trandafiri roşii şi 3 trandafiri albi se alcătuieşte un buchet format dintr-un număr impar de n flori de culori diferite($n \geq 3$).În câte feluri se poate alcătui buchetul ?

86. Un laborator dispune de 9 cercetători (6 biologi şi 3 chimişti).În câte feluri se poate forma o echipă de cercetare formată din 5 specialişti din care cel puţin unul să fie chimist ?

87. În câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1,2,...,n\}$ astfel încât numerele 1,2,3 să fie aşezate unul după celălalt,în ordine crescătoare ($n \geq 3$) ?

88. Dacă A şi B sunt două mulţimi finite disjuncte cu 7,respectiv 9 elemente,determinaţi în câte feluri poate fi ordonată mulţimea $A \cup B$ astfel încât primul element să fie din A , iar ultimul să fie din B ?

89. Cei 10 băieţi ai unei clase doresc să formeze o echipă de volei.Patru dintre ei vor să joace numai pe postul de libero,ceilalţi nu au nici o preferinţă.În câte feluri se poate alcătui echipa clasei ?

90. Cei 18 băieţi ai unei clase formează trei echipe diferite de volei : A , B şi C. În câte feluri se pot forma cele trei echipe ?

91. Câte diagonale are un octogon ? În câte puncte se intersectează aceste diagonale ?

92. Câţi vectori sunt determinaţi de 10 puncte în plan,oricare trei necolineare ? Câte drepte determină aceste puncte ?

93. Câte unghiuri se pot forma având 5 puncte,oricare 3 necolineare ?

94. Demonstraţi egalităţile :

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$; b) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + ... + C_{19}^9 = C_{20}^{10}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; d) $\sum_{k=2}^{n+1} C_k^2 = C_{n+2}^3$.

95. Determinaţi numerele x şi y ştiind că $C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_x^y$ sunt în progresie aritmetică , iar $A_x^y, A_x^{y+1}, A_{x+1}^{y+1}$ sunt în progresie geometrică.

96. Rezolvaţi sistemul : $\begin{cases} C_x^3 \cdot x^3 \cdot 2^{x-3} - C_x^4 \cdot x^4 \cdot 2^{x-4} < 0 \\ C_x^5 \cdot x^5 \cdot 2^{x-5} - C_x^4 \cdot x^4 \cdot 2^{x-4} < 0 \end{cases}$

97. Arătaţi că : $C_n^k = C_n^j \Rightarrow k = j$ sau $k + j = n$.

98. Arătaţi că următoarele numere sunt naturale pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$a = \frac{C_{nk}^n}{k}, k \in \mathbb{N}^*$ şi $b = \frac{(3n)!}{3!(n!)^3}$.

99. Arătaţi că numărul $c = \prod_{k=1}^{2n} C_{2n+1}^k$ este pătrat perfect .

100. Demonstrați că $\sqrt{C_n^{k-1} \cdot C_n^k} + \sqrt{C_n^k \cdot C_n^{k+1}} < C_{n+1}^{k+1}, \forall k,n \in \mathbb{N}, n > 2k.$

4.3. Binomul lui Newton, aplicații.

101. Care este al treilea termen al fiecăreia din dezvoltările următoare ?

a) $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7$; b) $(x-2)^{10}$; c) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$;

d) $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^8$; e) $\left(\frac{u}{2}+\frac{2}{u}\right)^9$; f) $\left(t+\frac{2}{t}\right)^{20}$.

102. Care este al șaselea termen al fiecăreia din dezvoltările următoare ?

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}\right)^8$; b) $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{12}$; c) $\left(\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}\right)^{10}$;

d) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{11}$; e) $\left(u\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\right)^{10}$; f) $\left(\frac{1}{2x}-\frac{2\sqrt{x}}{3}\right)^6$.

103. Determinați coeficientul lui a^{10} din următoarele dezvoltări :

a) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$; b) $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)^{15}$; c) $(2a-3)^{21}$.

d) $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{a}\right)^{70}$; e) $(1-3a)^{20}$; f) $\left(a^2+\frac{1}{a}\right)^{14}$.

104. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 128. Găsiți termenul care îl conține pe a^3.

105. Găsiți termenul care îl conține pe x^3 în dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+2y\right)^9$.

106. Găsiți termenul care îl conține pe x^8 în dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{20}$.

107. Găsiți termenul care îl conține pe $\frac{1}{x}$ în dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$.

108. Determinați termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt{x}}}\right)^{17}$ în care x și y au puteri egale.

109. Găsiți al 7-lea termen al dezvoltării $\left(5x+\sqrt{\frac{5}{x}}\right)^{n}$ știind că termenul al treilea are coeficientul binomial egal cu 105.

110. Găsiți termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ în care a și b au puteri egale.

111. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{x}{2\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^{n}$ suma coeficienților binomiali este egală cu 128. Găsiți termenul care îl conține pe x^4.

112. Determinați x dacă al treilea termen al dezvoltării $(x+2)^8$ este egal cu al patrulea termen al dezvoltării $(x+2)^6$.

113. Determinați rangul termenului care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x}-\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^{26}$.

114. Determinați rangul termenului care conține pe x^8 în dezvoltarea $\left(2\sqrt{x}+3x\right)^{12}$.

115. Determinați termenul care nu îl conține pe x din dezvoltarea $\left(2x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{15}$.

116. Determinați $n\in\mathbb{N}$ dacă al treilea termen al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{a}\right)^{n}$ nu îl conține pe a.

117. Determinați $a\in\mathbb{R}$ dacă al șaptelea termen al dezvoltării $\left(2^{a}+2^{\sqrt{a-1}}\right)^{8}$ este 112.

118. Determinați $t\in\mathbb{R}_+$ dacă al cincilea termen al dezvoltării $\left(2^{t}+t^{\lg 2}\right)^{5}$ este egal cu 10.

119. Găsiți câți termeni raționali are fiecare din următoarele dezvoltări :

a) $\left(1+\sqrt{3}\right)^{30}$; b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{40}$; c) $\left(2+\sqrt[4]{2}\right)^{60}$;

d) $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{3}\right)^{50}$; e) $\left(\sqrt{5}+\sqrt[4]{4}\right)^{25}$; f) $\left(\frac{1}{2}+\sqrt[4]{4}\right)^{100}$.

120. Determinați rangul celui mai mare termen al fiecăreia din dezvoltările următoare:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{80}$; c) $\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)^{100}$;

d) $\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{40}$; e) $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{50}$; f) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{30}$.

121. Determinați suma coeficienților dezvoltărilor următoare :

a) $(2x-3y)^{2006}$; b) $(3x-y)^{10}$; c) $(5x-4y)^{123}$.

122. Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{5}\right)^n$ conține exact 10 termeni raționali.

123. Determinați coeficientul lui x^6 din dezvoltarea $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 1536.

124. Găsiți termenul în care apare $\frac{1}{x^3}$ din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x}+\frac{2}{x}\right)^{21}$.

125. Arătați că dacă a , b , c , d sunt patru coeficienți binomiali consecutivi , atunci :

$$\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}=\frac{2b}{b+c}.$$

126. Determinați termenul care îl conține pe $\frac{1}{x^2}$ din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{y}+\frac{y}{\sqrt[4]{x}}\right)^{22}$.

127. Se consideră $a=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{100}$.

a) Determinați numărul de termeni raționali din dezvoltarea binomului dat;

Se notează cu S suma termenilor raționali și cu T suma termenilor iraționali ai dezvoltării.

b) Arătați că : $S-T=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{100}$;

c) Demonstrați că : $S>T$;

d) Arătați că : $S-T<\frac{1}{3^{100}}$.

128. Determinați termenul care îl conține pe b^2 din dezvoltarea $\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)^n$, știind că n este cel mai mare număr natural care verifică : $\log_{\frac{1}{3}} n+\log_{\frac{n}{3}} n>0$.

129. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{1+\lg x}}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$. Determinați numărul real x dacă al patrulea termen al dezvoltării este egal cu 200.

130. Determinați numărul natural n știind că al șaselea termen al dezvoltării $(7+3n)^n$ este cel mai mare.

131. Există termeni independenți de x în dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^8}\right)^{2006}$?

132. Determinați $m,n\in\mathbb{N}$ dacă suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(x^m+\frac{1}{x^2}\right)^n$ este egală cu 256,iar al cincilea termen nu conține pe x .

133. Calculați sumele :

a) $C_{10}^0+3C_{10}^1+9C_{10}^2+...+3^{10}C_{10}^{10}$;

b) $C_{10}^0+C_{10}^2+...+C_{10}^{10}$;

c) $C_n^0+4C_n^2+4^2C_n^4+4^3C_n^6+...$;

d) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+....$;

e) $C_{20}^0-2C_{20}^1+4C_{20}^2-8C_{20}^3+...+2^{20}C_{20}^{20}$;

f) $\frac{C_n^0}{2}+\frac{C_n^1}{3}+...+\frac{C_n^n}{n+2}$.

134. Calculați suma : $S=1+C_n^1\cos x+C_n^2\cos 2x+...+C_n^n\cos nx, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$.

135. Demonstrați că : $C_{2n}^n+2\cdot C_{2n-1}^n+4\cdot C_{2n-2}^n+...+2^n\cdot C_n^n=4^n$.

136. Arătați că : $\sum_{k=0}^{3n}C_{6n}^{2k}\cdot(-3)^k=2^{6n}$.

137. Calculați sumele $S=1+\sum_{k=1}^{n}\cos ka, T=\sum_{k=1}^{n}\sin ka$.

138. Calculați suma $S=C_m^0\cdot C_n^k+C_m^1\cdot C_n^{k-1}+...+C_m^k\cdot C_n^0$.

139. Arătați că : $C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}C_n^n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$.

140. Dacă $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ sunt numere reale în progresie aritmetică,arătați că :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot a_{k+1}=0.$$

4.4. Teste recapitulative

TEST nr. 7 (nivel mediu de dificultate) – Varianta 1

1. Calculați suma $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{31\cdot32}$
2. Calculați suma primilor 40 de termeni ai șirului : 3 , 8 , 13 , 18 , 23 , ...
3. Câte numere de 3 cifre au suma primelor două cifre egală cu 4 ? .
4. Câte submulțimi cu cel mult 3 elemente are mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?
5. Rezolvați ecuația $C_n^2+3\cdot C_n^1=18$.
6. Câte permutări ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ au pe primul loc un număr par ?
7. Găsiți termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{20}$ care îl conține pe x^4.

TEST nr. 7 (nivel mediu de dificultate) – Varianta 2

1. Calculați suma $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{41\cdot42}$
2. Calculați suma primilor 60 de termeni ai șirului : 4 , 9 , 14 , 19 , 24 , ...
3. Câte numere de 3 cifre au suma ultimelor două cifre egală cu 5 ?
4. Câte submulțimi cu cel puțin 4 elemente are mulțimea $\{1,2,3,4,5,6\}$?
5. Rezolvați ecuația $3\cdot C_n^2-4\cdot C_n^1=10$.
6. Câte permutări ale mulțimii $\{2,3,4,5,6\}$ au pe primul loc un număr par ?
7. Găsiți termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{30}$ care îl conține pe x^6.

TEST nr.8 (nivel puțin mai sporit de dificultate) – Varianta 1

1. Determinați numerele întregi n pentru care $2^n \geq n^2$.
2. Câte submulțimi cu un număr par de elemente are mulțimea $\{1,2,3,...,10\}$? .
3. La secția de chirurgie a unui spital sunt de gardă 3 medici și 4 asistente.În câte feluri se poate forma o echipă de intervenție formată din 3 cadre medicale dintre care cel puțin unul medic ?
4. Calculați suma : $C_{10}^0-3C_{10}^1+9C_{10}^2-27C_{10}^3+...+3^{10}C_{10}^{10}$.
5. Dacă a și b sunt rădăcinile ecuației $x^2-6x+1=0$,arătați că $(a^n+b^n)\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$.