论鼓的振动模态解和定音鼓的发声机理

袁云鹏, 李兆彬[1] and 蒲天舒, 肖钰洋[2]

[1] 北京大学信息科学技术学院

[2] 北京大学物理学院

2022 年 11 月 21 日

1 鼓膜振动

我们将鼓膜的振动近似地看作是一个有限大的圆形薄膜的二维振动，且不考虑周期力。首先考虑一个矩形薄膜，其尺寸为 L_x 和 L_y，边缘固定，表面张力系数 T 始终恒定。假设薄膜材料的面密度为 σ。薄膜发生振动时，考虑一面元 dxdy，如图1所示，在竖直方向上

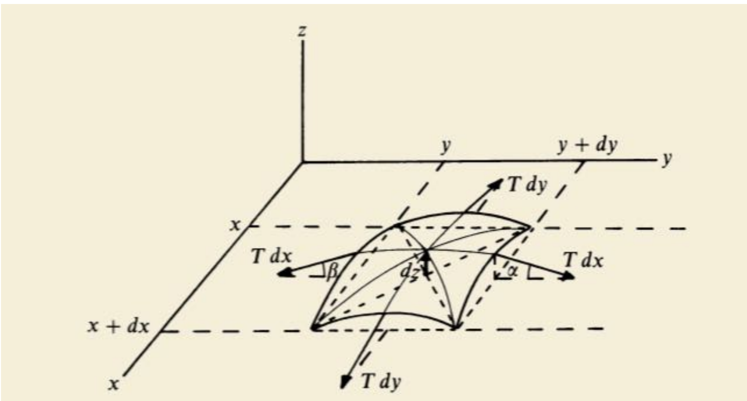

图 1: 鼓上微元受力

有 dz 大小的位移，因此微元四周受到表面张力 T 给面元恢复平衡的趋势。其中垂直 x 轴方向的张力大小为 $T\mathrm{d}x$，它们的垂直分量为 $-T\sin\alpha\mathrm{d}x$ 和 $-T\sin\beta\mathrm{d}x$。α 和 β 为表面张力与水平面的夹角，小量近似得:

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = (\frac{\partial z}{\partial y})_{y+\mathrm{d}y}$$

$$\sin\beta \approx \tan\beta = (\frac{\partial z}{\partial y})_{y}$$

因此这组张力的垂直分量有

$$F_y = -T\mathrm{d}x\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y\right] = -T\mathrm{d}x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y$$

同理，作用在面元上的垂直 y 轴方向的一组张力的垂直分量有

$$F_x = -T\mathrm{d}y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

则面元受到的竖直方向表面张力大小有 $F = F_x + F_y$，根据牛顿第二定律有

$$T\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

两边除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 得偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

其中 $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$，作极坐标代换得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right)$$

1.1 法一

对 z 进行分离变量得 $z = f(r)g(\theta)h(t)$，将上式代入二阶偏微分方程得

$$f(r)g(\theta)h''(t) = c^2\left(f''(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r}f'(r)g(\theta)h(t) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)h(t)\right)$$

两边同时除以 $f(r)g(\theta)h(t)$ 得

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2\left(\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}\right)$$

由于方程中右式仅与 t 相关，左式仅与 r、θ 相关，且 t、r、θ 是三个独立变量，则等式两边须等于同一个常数 $-\omega^2$，于是得到两个方程

$$h''(t) = -\omega^2 h(t)$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

解得

$$h(t) = H\sin(\omega t + \Phi)$$

其中 H、Φ 为常数，将化简后偏微分方程两边同乘 r^2 得

$$r^2\frac{f''(r)}{f(r)} + r\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{\omega^2}{c^2}r^2 = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

由于方程中右式仅与 r 相关，左式仅与 θ 相关，且 r、θ 是两个独立变量，则等式两边仍须等于同一个常数，则可能为正弦函数或指数函数，而的周期为 2π，则常数的公因数为一整数 n 的平方，则有

$$g''(\theta) = -n^2 g(\theta)$$

解得

$$g(\theta) = G\sin(n\theta + \psi)$$

其中 G、ψ 为常数，于是偏微分方程有

$$r^2\frac{f''(r)}{f(r)} + r\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{\omega^2}{c^2}r^2 = n^2$$

两边同乘 $f(r)$ 并除以 r^2 得

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2}\right)f(r) = 0$$

该方程的解为 $J_n(\frac{\omega r}{c})$ 和 $Y_n(\frac{\omega r}{c})$ 的线性组合，当 r 趋于 0 时，后者趋于-∞，于是膜中心为一奇点，则解仅与 $J_n(\frac{\omega r}{c})$ 有关[1]。

由 z 的变量分离得

$$z = AJ_n\left(\frac{\omega r}{c}\right)\sin(\omega t + \Phi)\sin(n\theta + \psi)$$

其中 A 为常数。则圆形薄膜的固有振动的频率有

$$f_{n,k} = \frac{j_{n,k}}{2\pi a}c$$

其中 $j_{n,k}$ 为 n 阶 Bessel 函数的第 k 个零点，a 为鼓膜半径，$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$。

鼓的基频有

$$f_{0,1} = \frac{j_{0,1}}{2\pi a}c$$

1.2 法二

偏微分方程和边界条件有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{z}|_{r=0}\text{有界，}\quad \mathrm{z}|_{r=a} = 0 \tag{1.2}$$

$$z|_{\theta=0} = z|_{\theta=2\pi}, \left.\frac{\partial z}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = \frac{\partial z}{\partial \theta}|_{\theta=2\pi} \tag{1.3}$$

[1]参见吴崇试，高春媛. 数学物理方法 [M]. 北京大学出版社，2019.

若方程有非零解

$$z(r,\theta,t)=v(r,\theta)e^{i\omega t} \tag{2}$$

代入偏微分方程（1.1）及边界条件（1.2）和（1.3），并令得下列偏微分方程本征值问题

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2v=0\\ v|_{r=0}\text{有界，}\ v|_{r=a}=0\\ v|_{\theta=0}=v|_{\theta=2\pi},\frac{\partial v}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=\frac{\partial v}{\partial\theta}\Big|_{\theta=2\pi}\end{gathered}$$

再令 $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，分离变量，分解为两个常微分方程的本征值问题

$$\theta''(\theta)+\lambda\theta(\theta)=0 \tag{3.1}$$

$$\theta(0)=\theta(2\pi),\theta'(0)=\theta'(2\pi) \tag{3.2}$$

和

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right]+\left(k-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0 \tag{4.1}$$

$$\text{R(0)有界，}R(a)=0 \tag{4.2}$$

其中本征值问题（3）的解为

$$\begin{gathered}\text{本征值}\lambda_m=m^2,m=0,1,2,3,\dots\\ \text{本征函数}\Theta_m(\theta)=\begin{cases}\cos m\theta, & m=0,1,2,\dots\\ \sin m\theta, & m=1,2,3,\dots\end{cases}\end{gathered}$$

故本征值问题（4）中参数 $\lambda=m^2$ 已知，本征值 k^2 待求将（4.1）式两端乘以 $rR^*(r)$ 再积分得

$$k^2\int_0^a R(r)R^*(r)rdr=m^2\int_0^a R(r)R^*(r)\frac{dr}{r}+\int_0^a\frac{dR(r)}{dr}\frac{dR^*(r)}{dr}rdr$$

故一定有本征值 $k^2>0$，通过作变换 $x=kr$ 将微分方程（4.1）化为 Bessel 方程，从而求得它的通解

$$R(r)=CJ_m(kr)+DN_m(kr)$$

考虑到边界条件（4.2）的要求，$R(0)$ 有界，故 D 有界。又由于要求 $R(a)=0$, 得到

$$J_m(ka)=0$$

将 m 阶 Bessel 函数的第 i 个正零点（由大到小排列）记作 $\mu_i^{(m)},i=1,2,3,\dots$，则本征值问题（4）的解是

$$\begin{gathered}\text{本征值}k_{mi}^2=(\frac{\mu_i^{(m)}}{a})^2,i=1,2,3,\dots\\ \text{本征函数}R_{mi}(r)=J_m(k_{mi}r)\end{gathered}$$

于是求得圆形薄膜的固有振动的频率，其中 $\mu_i^{(m)}$ 是 m 阶 Bessel 函数的第 i 个正零点。

2　定音鼓的发声机理简要分析

2.1　综述

在定音鼓（timpani, or Kettledrum）的研究中，有几个重要的点需要强调。一是鼓上膜的振动模态，二是鼓腔内空气和膜共同振动，三是演奏时敲击的位置（影响哪种模态可以被激发）[1]。虽然空腔的形状和物理性质似乎也会改变频率，但研究表明这似乎不是一个非常重要的影响因素。

2.2　鼓膜的影响

由第一部分的理论计算我们可以知道，膜为圆形的鼓上，其模态为 Bessel 函数（普通、球形）的线性叠加（当然，膜为矩形或方形的鼓面也是存在的，葡萄牙的女性就常常演奏一种名叫 *adufe* 的传统方形手鼓，但是我们暂时只研究圆形鼓面情况）。代入边界条件，通过求这些方程的数值解，可以得级数 n 不同时的振动模态[2]。

表 1: 前几级 Bessel 函数的数值根

k	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520	14.37254

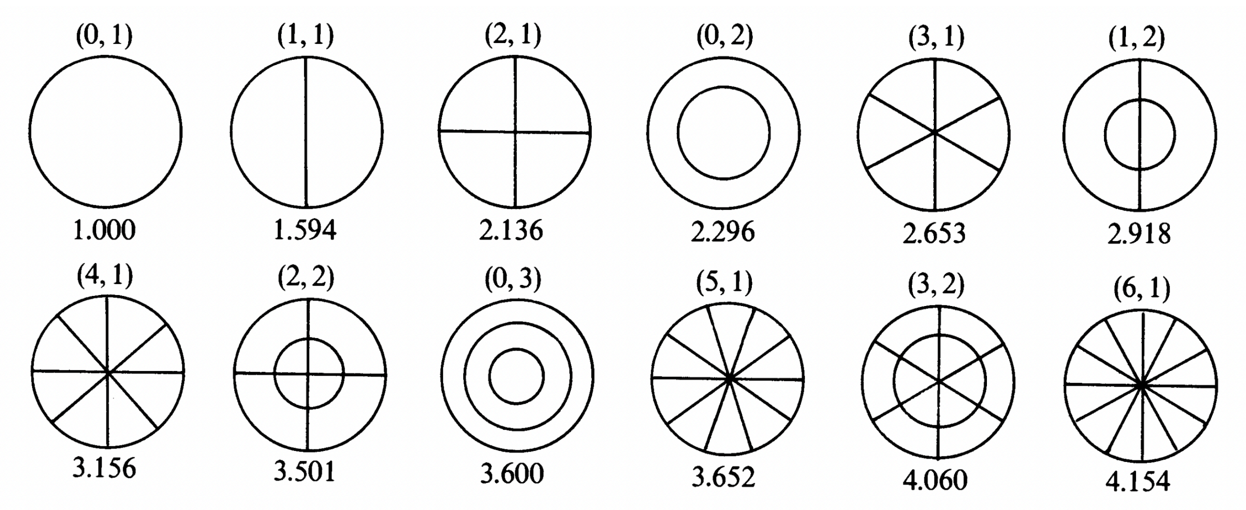

图 2: 前 14 个膜振动模态[1]。以 $f_{0,1} = \frac{j_{0,1}}{2\pi a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \frac{2.40483}{2\pi a}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ 为基频，其他模态 $(n,k) = \frac{f_{n,k}}{f_{0,1}}$

以 (1,1)=1.594 作基频，由上表作一些计算，(1,1):(2,1):(3,1)=1.00:1.34:1.66。但是实际测量发现经过调节后的定音鼓中的 (1,1)、(2,1) 和 (3,1) 模式的频率几乎为 1:1.5:2[2]。(4,1)

[2]数值解仍旧参见吴书。

和 (5,1) 模式的比例通常为基本 (1,1) 模式的 2.44 倍和 2.90 倍（在 2.5 和 3 的半音范围内）。因此，1 至 5 级的模态频率比接近 2:3:4:5:6，这就是定音鼓有一种“音高感”的部分原因，即鼓面的振动频率本身就近似是简单整数比。

2.3 空气的影响

上面我们把 (1,1) 作为基频，实际上这是图2中画出的第二个模态。那为什么 (0,1) 模态不是基频？实际上，在一个封闭的鼓腔内，(0,1) 的振动依赖于空气的压缩、膨胀而不是鼓面的振动（从图中它是唯一没有图案的可以直观地看出这一点）。我们知道，空气自带质量，其惯性会降低振动频率，这种效应在振动模态的级数比较低时尤为明显。所以人耳难以觉察这个频率，反而是比它高一级的 (1,1) 频率成为了事实上的基频[3]。虽然也有理论认为，Timpani 鼓的底部小孔才是使 (0,1) 模式急剧衰减的重要因素，但这个理论已经被实验所否定。

还有关于 (1,1)、(2,1) 和 (3,1) 三者频率比的问题，之所以理论上膜的频率比和实际鼓的频率的测量值有较大差距，空气起了重要调音作用。我们可以粗略地说：

（1）腔内空气的弹性恢复力提高了同心模式 [(0,1)、(0,2)、(0,3) 等] 的频率；

（2）腔内空气的质量降低了其它模式 [(1,1)、(2,1)、(3,1) 等] 的频率；

理论推导见下。

先估算一下量级，考虑频度 $f = 300$ Hz，尺度 $a = 0.25$ m，$v = 300$ m/s，故空气对应波长较长，采取近场近似。对 (0,k)：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{\delta p}{\sigma}$$

$$\delta p = -\gamma \frac{p_0}{V_0}\delta V = -\gamma \frac{p_0}{V_0} S x_{0k} A_{0k}$$

其中

$$x_{0k} = \frac{\int J_0(x) x \mathrm{d}x}{\int x \mathrm{d}x} = \frac{2}{\mu_{0k}} J_1\left(\mu_{0k}\right)$$

代入

$$z = A_{0k} J_0\left(\omega_{0k} t/c\right)\sin(\omega t)$$

得到

$$\omega^2 = \omega_{0k}^2 + \gamma \frac{p_0 S}{\sigma V_0} x_{0k}$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_{0k}^2} - 1 = \frac{\gamma p_0 \pi a^4 x_{0k}}{T V_{0k}} \sim \frac{p_0 a^4}{T V_0} \sim \frac{p_0 a}{T}$$

对 (1,1)，将空气视作低速流体：

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{1/2\left(\int \rho_a \omega z x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2/\rho V_0}{1/2\int \sigma\omega^2 z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{\rho_a a^4}{\sigma V_0}\frac{\left(\int J_1(x) x^2 \mathrm{d}x\right)^2}{\int J_1^2(x) x \mathrm{d}x}$$

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ok}^2} \sim \frac{\rho_a a^4}{\sigma V_0} \sim \frac{\rho_a a}{\sigma}$$

容易发现，对的不同 n 频率，同样有附加质量效应，随着 n 的增大，空气位移逐渐减小，附加质量逐渐减小。在较低的几个频率，空气的附加质量较大，于是通过控制定音鼓参数，可以调节其频率比率 (1,1):(2,1):(3,1)=1.00:1.34:1.66。调节附加质量后比值 (1,1):(2,1):(3,1)=1:1.5:2，此时构成协和音程。关于不同模态的表格参见图3。

除此之外，空气的一个重要作用是防止鼓上表面的振动通过它传递到下表面，后者形状和发声性质都未知，会引入其他的杂音。故空气层保证绝大多数能量都用于上表面振动发声，使鼓声从上表面向四周辐射开去，同时确保频率的“单一性、纯粹性”[4]。

Figure 3g is the set of frequencies that was reported by Benade for Duff's instrument which was tuned to C3 130.8 Hz. The letters (beginning with P for the principal tone) represent the sequence of modes starting with P=mode (1,1). Q=mode (2,1), R=mode (0,2), S=mode (3,1), T=mode (1,2), U=mode (4,1), V=mode (2,2), W=mode (0,3), X=mode (5,1) and Y=mode (6,1). The preferred modes are P, Q, S, U, X and Y. Modes R, V, and W are the more damped non-preferred modes and so their respective theoretical ratios are not shown.

Fig. 3g

Mode	Theoretical Ratio	Measured Ratio
P	1.00	1.00 (130.8 Hz)
Q	1.35	1.504
R	...	1.742
S	1.67	2.00
T	...	2.245
U	1.99	2.494
V	...	2.800
W	...	2.852
X	2.30	2.979
Y	2.61	3.462

The missing fundamental effect might then give you the pitch C2 for the instrument under certain conditions and dynamic levels. 15

图 3: 不同模态[5]

2.4 打击点的影响

敲击边缘和中心对频率的激发存在一定的影响。例如敲击标准打击位置（从边缘起，到中央连线上的第一个四分点），可以保证 (1,1)、(2,1) 和 (3,1) 模态非常突出，而 (0,0) 仅仅和高级次的（4,1）差不多一样不显著，(0,2) 更是比 (5,1) 稍弱（见图4(a)(b)）。打击中央点，虽然 (0,1)、(0,2) 较上次明显许多（图4(c)(d)），但两者衰减得也快。经过多次实验，研究者发现 (1,1)、(2,1) 等衰减最慢，故在 Timpani 的特例下，频率的激发几乎总是那么几个音高，故可以达到“定音”的效果。

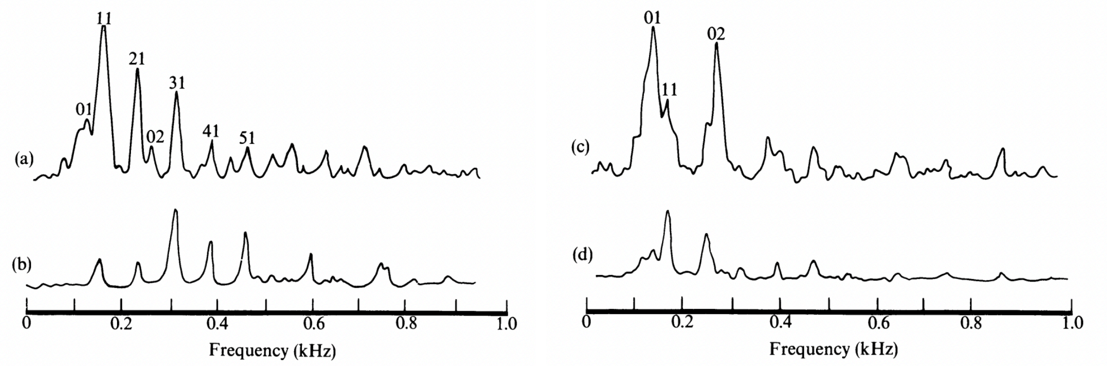

图 4: 打击点影响，(a)：敲击标准点后 0.03 s；(b)：敲击标准点后 1 s；(c)：敲击中央点后 0.03 s；(d)：敲击中央点后 1 s。

2.5 其他可能的影响因素

空腔/鼓体的形状可以微调频率的高低，而包裹空腔的材质主要改变了音色。例如，形状相似的铜制的 Timpani 和合成材料制作的 Timpani 听起来差别巨大。膜的材料不同在声音性质层面可能也有些微的不同，例如小牛皮的音色更加悦耳，这可能与 (0,1) 频在小牛皮和其他材料上衰减速度不同有关。

3 固定音高乐器和无固定音高乐器的本质区别

在以上的讨论中，我们总是试图依据乐器的物理性质（材质、形状、边界条件等）来解出固定的振动模态。其实, 不管是什么类型的乐器，它们都有自己一定的振动模态。但是，**固定音高乐器**一个重要的是特点是其模态在敲击（或者摩擦振动，这是弦乐器的情况）后保持一定，且除了泛音列和和声列之外不太会存在其他的杂波。而**无固定音高乐器**（如很多噪音乐器）一方面设计时并没有像固定音高乐器一样严格确定尺寸、边界形状等等，另一方面实际演奏时就存在各种振动频率的随机叠加，而且某些情形下，波的频率还会随时间而改变。波形非常复杂，故人听不出一个固定的音高。

所以，两者本质区别在于能否发出频率固定的简单振动波形，并且允许与之频率比成近于简单整数比的其他固定频率波存在。

参考文献

[1] Neville H Fletcher and Thomas D Rossing. *The physics of musical instruments.* Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Thomas D Rossing and Garry Kvistad. *Acoustics of timpani: Preliminary studies.* 1976.

[3] Dave Benson. *Music: A mathematical offering.* Cambridge University Press, 2006.

[4] Gareth Loy. *Musimathics, Volume 1: The Mathematical Foundations of Music*, volume 1. MIT press, 2011.

[5] AH Benade. Fundamentals of musical acoustics. *Oxford University Press, New York*, 1976.