浅谈环状计数问题

江苏省常州高级中学 高胜寒

摘 要

在数学、信息学中，常会遇到计数问题，其中很多还是环状计数问题。解决此类问题常用到burnside与p ó lya定理，同时需要配合其它算法，如递推等。本文对此进行了简要的分析，并总结出一些经验予以参考。

引言

在信息学的环状计数问题中，常常会有"**旋转**或**翻折**后相同则算同种情况"的条件出现，如：

一个环状n个元素的数列，每个元素都可以染成颜色$1, 2, \cdots, m$，旋转后相同的数列算作同一种方案，求总方案数。

对于这样的计数，常常使用组合数学或者递推解决，而对于的旋转及翻折这些问题，需要推理、优化。如遇到此类问题，在数学推理方面就可以使用本文所提的burnside引理及pólya定理，下面先回顾一下解决此类问题所需要的知识。

1 理论基础

1.1 运算

非空集合S的**运算**(如加法、减法、集合交并等)是从S×S到S的函数$*$[38]，写成a$*$b 或ab，集合S和S的运算记作(S.$*$)。

[38] S×S到S的运算有时称为二元运算，本文所述运算均为此运算。

1. 运算若对$\forall\ a,b \in A$有$a*b \in A$，则称A在$*$下具有**封闭性**。
2. 运算若对$\forall\ a,b,c \in A$有$((a*b)*c) = (a*(b*c))$，则称A在$*$下满足**结合律**。
3. 运算若对$\forall\ a,b \in A$有$a*b = b*a$，则称A在$*$下满足**交换律**。
4. e为S中元素，若对$\forall\ a \in S$有$a*e = e*a = a$则称e为$*$的**单位元**。
5. a,b为S中元素，若$a*b = b*a = e$则称b是在$*$下a的**逆元**(写为a^{-1})。
6. 运算若对$\forall\ a,b,c \in A$当$a*b = a*c$时有$b = c$，则称A在$*$下满足**消去律**

1.2 群

设G是一个具有二元运算的非空集合，若满足

1. 运算满足封闭性
2. 运算满足结合律
3. 单位元属于集合
4. 集合中任一元素的逆元属于集合

则可称G为群。详见1.1。

群G中元素个数记作$|G|$，称为G的**阶**，由此分为**有限群**与**无限群**。

1.2.1 置换

设σ是一个从集合$1,2,\cdots,n$到自身的一一映射，则可称σ为**置换**，形如:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

其中a是一个排列，而其中任意一项$\binom{i}{a_i}$都是独立的映射。

由所有置换所构成的集合记作S_n，显然阶为$n!$，不难发现，S_n是一个群，称之为n阶**对称群**。而**置换群**是对称群的子群[39]，其中所有元素都是一种置换。其中包括了单位元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

任意一种置换有唯一逆元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

置换可以做乘法，如$\binom{a}{b} * \binom{b}{c} = \binom{a}{c}$。因为置换有唯一逆元，所以若a,b,c为任意置换，$a * b = a * c$，则$a^{-1}a * b = a^{-1}a * c$得$b = c$。从而此乘法满足消去律。

1.2.2 burnside引理

定义：

1. k不动置换类：给定置换群G中，对于n阶集合X，$k \in [1, n]$，使k不变(即第k项置换为$\binom{k}{k}$)的置换全体，写作Z_k(容易发现，Z_k是G的一个子群)。
2. 等价类：给定作用在集合X上的置换群G，若存在某置换g把元素k变为元素l，则称k与l属同一个等价类，k所属等价类记为E_k。

由此可见，在解决实际问题时，通常是给出了置换群，需要求出在给定集合X中等价类的数目，注意到k不动置换类较为易求得，可以将等价类数用其他可以求得的量所表示。

定理：$\forall k \in [1, n]$有$|E_k| * |Z_k| = |G|$。

这里简单说明一下：设$E_k = a_1, a_2, \cdots, a_n$，令$t_j$为任意一个G中可将k映射为$a_j$的置换，由于置换的消去律和封闭性，则$t_j * Z_k$可以既不重复亦不遗漏的表示所有第k位为$a_j$的排列。对j求和，即得到以上定理，同时可以发现若$i, j \in E_k$则$|Z_i| = |Z_j|$。

[39]设H是G的子集，若在G的运算下，H是一个群，则称H为G的**子群**

令l为集合X等价类数量，$\sum_{k=1}^{n}|Z_k| = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{|E_k|}Z_{a_i} = \sum_{k=1}^{l}|G| = l|G|$，即可得到**burnside引理**：设所有可能情况集合X，置换群G，对于每个置换$g \in G$，令X_g为g置换后位置不变的元素集合[40]，则等价类的数量

$$l = \frac{1}{|G|}\sum|X_g| \tag{11}$$

2 特殊情况分析

引言部分所说的**旋转**和**翻折**，正是burnside引理的特殊情况，在此具体讨论一下其推导与应用。

2.1 旋转

发现这是burnside引理的一种特殊情况：对于旋转操作，如果旋转一个单位，可得到置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

将此置换自乘k-1次，也就相对应的旋转k格，将得到置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1+k & 2+k & 3+k & \cdots & n+k \end{pmatrix} \tag{12}$$

这里约定$n+1=1, n+2=2, \cdots, n+k=k$。

这样就形成了一个阶为n的置换群。

pólya定理：设G为对n个对象的置换群，每个对象可用m种颜色染，则不同方案数为：

$$l = \frac{1}{|G|} * (m^{c(g_1)} + m^{c(g_2)} + \cdots + m^{c(g_{|G|})}) \tag{13}$$

c(g_i)为g_i的循环节数。

pólya定理可以解决这些问题。

问题所要求的答案l为$\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} X_{\sigma^k}$，$\sigma^k$也就是旋转了k格，而$X_{\sigma^k}$即转过k格后置换为自己，由辗转相除可知其不动元素是循环节为(n,k)的数列。所以整

[40] $\sum_{g\in G} X_g = \sum_{k=1}^{n}|Z_k|$=总不动置换数

理下来为$l = \frac{1}{n} * (\sum_{i=1}^{n} f[(n,i)])$，其中f[i]为递推算出的答案，如pólya染色问题中$f[i] = m^i$，此公式极类似于pólya定理。

继续优化此式子，可以枚举(n,i)情况，n≡0(mod (n,i))，所以枚举n所有因子k，$(n,i) = k$要求

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{k} \\ i \equiv 0 \pmod{k} \\ (\frac{n}{k}, \frac{i}{k}) = 1 \end{cases}$$

观察条件三看起来，结合数论知识，可以发现满足要求的i正好就是有$\phi(\frac{n}{k})$个，所以最终的公式可以被写为：

$$l = \frac{1}{n} * \sum_{n \equiv 0 \pmod{k}} f[k] * \phi(\frac{n}{k}) \tag{14}$$

实际上，在不了解burnside和pólya时可以这样理解：对于一个长为n的环，计算时会在每一个位置上计算这个环一次，答案是$\frac{f[n]}{n}$，但可能在不同位置将环断开来所形成的数列相同，此仅发生在环存在循环节的情况下。若循环节长度为k，则断开后仅会有k种不同的数列，所以要将循环节长度为k的情况加上去。

枚举所有n的因子作为循环节长度k，循环节长为k则有$\frac{n}{k}$次循环。当成链式结构做完一次长为k的递推，也就是将k复制$\frac{n}{k}$遍使其长为n的种类数。假设长为k的数列最短循环节就是k(即不是更短的循环复制而成，后面将处理这一种情况)，那么其方案数为$\frac{f[k]}{k}$。然而显然某些部分多算了一些，也就是之前括号中所提，如：在计算循环节为6的串时，方案中一定会包含循环节为1,2,3的串，那么可以在算循环节为3的串答案容斥掉它，减去$\frac{f[3]}{6}$。需要使用容斥或者莫比乌斯函数计算，设$\frac{n}{k}$=$p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_t^{c_t}$，可以推导出f[k]的系数为

$$\sum_{d_i <= c_i} (-1)^{c_1 - d_1 + c_2 - d_2 + \cdots + c_n - d_n} \frac{p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_t^{d_t}}{n}$$

仔细观察发现其实上述公式所表达的就是$\frac{\phi(\frac{n}{k})}{n}$，最终得到的答案正好是之前推出的公式。

事实上此方法本质上和pólya定理推导相同。

2.2 翻折

同理可以写出翻转操作的置换，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

其逆元即为单位元(一个数列翻转数字不变)。

同样，可以理解翻转时的特殊情况：对于长n的链，通常来说每个串都被计算了恰好两次。当原串为回文串时正反相同事实上只计算了一次，加上回文串的情况即可，其实就是把长为

$$\begin{cases} \frac{n}{2}, & \texttt{n}\equiv\texttt{0(mod 2)} \\ \frac{n+1}{2}, & \texttt{n}\equiv\texttt{1(mod 2)} \end{cases}$$

的短链翻折至另一边变为长为n的数列。由于n为奇数时在置换的第$\frac{n+1}{2}$项中自己置换自己，所以奇偶略有些差异。

所以可以写出公式：

$$l = \frac{1}{2} * (f[n] + f[\frac{n + odd(n)}{2}]) \tag{16}$$

这里暂定odd(n)为判断奇偶的函数，奇数为1，偶数为0。

2.3 翻折+旋转

此情况将会在以下的具体问题中分析。

3 实例

3.1 Codeforces93D Flags

题意描述

给定一串长为n的数列，用四种颜色（白黄红黑）染。要求相邻位置颜色不同，白黄、红黑不能相邻，且不存在连续黑、红、白所形成的三元组。翻转后相同的数列算为同一种，询问长度在l到r之间的数列有多少种，取模输出。$1 <= l <= r <= 10^9$

算法分析

首先可以把此题转化为求长度在1到n之间数列的种类数。此问题可以用递推解决，因为要解决不存在连续黑、红、白三元组，所以至少要记录最近两项的颜色，从而可以完成转移，递推可以使用矩阵乘法进行优化。根据2.2的总结，需要考虑回文串情况。可以发现，奇数与偶数情况有所差异。

本题较为特殊，显然可以发现当n为偶数时最中间两项颜色相同，为不符合的情况。所以偶数时答案为$\frac{f[n]}{2}$，奇数时答案为$\frac{f[n]+f[\frac{n+1}{2}]}{2}$，最终全部转化为长度在1到n之间不翻转数列的种类数。

3.2 Spoj large

题意描述

t组数据：一张圆桌坐着n个人，人与人之间只考虑性别上的差异，要求不能有超过m个女生连续坐着。圆桌可以旋转，询问排座位方案种类数，取模输出。$1 <= n, m, t <= 1000$

算法分析

考虑此旋转模型，其置换群阶为n，通俗地描述下来就是分别为转$1, 2, 3, \cdots, n$格。先考虑不加旋转操作的情况，暂且忽视圆桌首尾相接，可以记录状态g[i]表示长为i的序列且i为男生方案数，易发现可以部分和优化转移。

下面加上环的性质，首尾相接后不能超过m个女生相连。根据已经算好的g[i]，这里可以采用容斥法，加以递推可得到最终数列f[i]，表示在环大小为i、不能有m个女生连续坐的方案数。接下来可以考虑旋转在其中的作用了，利用2.1推导的公式，枚举n的因子k 由预处理的数组f可统计出答案。

3.3 加强-自创题ring

题意描述

简化题意：求长为n的环状01串，其包含给定长为k的字符串s的数量，取模输出。$1 <= k <= n <= 10^9, k <= 30$

算法分析

考虑此题和上题的区别，给定的串不再有原来那么有规律，可能在解决这个问题时遇到一些麻烦。

可以模仿其做法，但会发现求f[i]时不得不记录第二维状态，这可以利用kmp失配指针可以写出转移。然而加上环的性质后，问题变得更加复杂，如果再采用容斥可能会给计算带来很大麻烦，所以需另辟蹊径。对于一个解，考虑在环拆开后，如果不存在字符串s则必然会有：数列首是s某后缀，数列末是s某前缀。考虑上题，发现只需数列后、前相拼接时女生个数等于k+1即可，并且对于任意这样的的情况，中间n-k-1个座位的可安排方案数均相同。

考虑本题，并不满足以上性质，但可以k^2预处理出一个二维bool数组p记录s的每个后缀与前缀拼接起来是否形成s，对于所有可能的前后缀拼接情况都要做一次递推。由于可能出现某后缀是另一个后缀的前缀这种情况，导致重复计算所以需去重。状态可以记为后缀长度恰为a，前缀长度恰为b。用已有的p数组可以统计相接后形成s的方案数，可以用矩阵乘法快速幂实现。

至此，本题已经基本解决了。但是仍需加上旋转公式以算出答案。考虑旋转的特征，可以注意到一个重要的细节，即当因子长度$l < k$时的处理，考虑到之前所说$f[k]$在公式(5)中的意义，在计算时所得f[l]的答案是将l重复写$\frac{n}{l}$遍的方案数，考虑到$k <= n$，所以可以认为是把长为l的字符串重写了足够多遍。然而字符串s可以被包括在里面，这就是一个经典的字符串循环节问题。利用已经算好的kmp失配指针，可以在几个if内解决此细节。

3.4 继续加强

加强方向

1. 加上翻转操作。

2. 改为多串问题：给定多个串，长为n的环不能包含任意一个字符串。

解决方案

1. 题目如果形成了翻转和旋转的结合，就会出现一些复杂的情况。其实最好的办法还是写出所有可能的置换，在2.1中的n 个置换及其公式。在理解翻转时，可以理解为翻转后再旋转共有n种置换，这样在具体操作起来较为复杂，不如着眼于环，把翻转后在旋转看作是一次翻转，但由于奇偶性的问题产生了两种情况，如：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

可以看作以4为中心的翻转，在这样奇数情况下n种置换正是分别以n个元素为中心的翻转。若要是能形成不动置换，则环要关于中心元素对称，n种置换其$\frac{n+1}{2}$个元素均决定了另外的元素，方案数为$n*f[\frac{n+1}{2}]$，再加上旋转部分最终除以$|G|$即2n即可。

但偶数时如：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

出现两种情况，其一为以两元素间为轴翻转，n个两元素间轴中两两同等，如上面例子中既可以以12间为轴，又可从34间翻转，所以有$\frac{n}{2}$种翻转。仅需其中一半，$\frac{n}{2}$个元素即可决定另外的元素。再者，可以以元素为轴，同元素间轴之理可发现有$\frac{n}{2}$种翻转，其中每种置换都可由两个位置翻转，如例子中可以以2或4为轴，所以要由$\frac{n}{2}+1$个元素(因为包含了两个轴)才可决定整个串。方案数是$\frac{n}{2}*(f[\frac{n}{2}]+f[\frac{n}{2}+1])$，加上旋转除以2n得到最终答案。

至于递推部分和加强前相差不大，状态不做修改，依然记录a与b表示后缀与前缀。旋转和翻折操作分开处理，由于翻折操作改变了旋转的拼接方式，所以需改变拼接规则，修改二维bool数组p的值即可完成此题。

至于原题所说的$l<k$的细节问题，翻折操作也是同样处理。由于此部分的效率与总复杂度无关，所以可以使用任意方法判断是否存在长为l的串翻折后包含k，实现起来只是略比旋转困难一些。

此题仍然能很轻松的解决。

2. 单串到多串，很显然递推与前后缀部分只需把kmp算法改为ac自动机即可。因为可能出现因子长度l小于某些串长度k_i，所以可以发现对于每个因子长度l都要重新构建自动机。

   这里提供一种简单的解决方案：对于每个字符串，类似于原题，如果存在一个长为l的串覆盖k_i的长度则将此长为k_i的串砍为长度l，表示不能出现这一个字符串。

4 总结

在竞赛中可能会遇到很多有类似条件的题目，很可能会让人感觉难以入手，甚至可能会有些怪异而难于解决，但是只要把握好置换的本质，及公式背后的每个数字的深层意义，许多看似很难的题目在思考的力量中可能就迎刃而解了。

参考文献

[1] 杨斌斌,《两类环状六角系统的计数》,厦门大学硕士学论文

[2] 董金辉,《正十二面体的旋转群诱导出的置换群的轮换指标》,黄冈师范学院数学信息科学学院学报

[3] Seymour Lipschutz,Marc Lars Lipson 著,曹爱文,曹坤译《Schaum's Outline of Discrete Mathematics》(离散数学)清华大学出版社

[4] 符文杰,《pólya原理及其应用》,2001集训队论文

[5] 陈瑜希,《pólya计数法的应用》,2008集训队论文