信息学竞赛中的线性代数

董克凡

kefandong@gmail.com
清华大学交叉信息研究院

序

讲稿与课件有些不同，以讲课课件为准

序

讲稿与课件有些不同，以讲课课件为准
由于本人水平有限，这节课内容比较简单，希望大家放松心情，~~不要冬眠~~认真听讲

目录

矩阵与行列式

此课件中使用的记号：

- 矩阵：A_{m*n}
- 行列式(矩阵A为方阵)：$|A|$
- 矩阵中元素：a_{ij}
- 向量：$\mathbf{x}$
- 矩阵的转置：A^T

行列式

行列式的定义:

$$|A| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

其中σ为n阶排列，$sign(\sigma)$根据排列逆序对的奇偶性不同，奇数为-1，偶数为$+1$

等价定义：

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \forall 1 \le i \le n$$

其中M_{ij}为矩阵A将第i行与第j列删去之后的$n-1$阶矩阵的行列式的值，称为A的余子式

行列式

$$|A| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

Example

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1*4-2*3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2*\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3*\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1*(5*9-6*8) - 2*(4*9-6*7)$$

$$+ 3*(4*8-5*7) = 0$$

行列式

行列式的性质：

- $|I| = 1$
- $|AB| = |A||B|$
- $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

行列式

行列式求值：消元时的行操作对应原矩阵左乘一个特殊矩阵

- 交换ij两行，行列式取相反数
- 将第i行乘以c加到第j行，行列式不变

行列式

Codechef APRIL 15 Black-white Board Game

设一个排列P是合法的,当且仅当$\forall 1 \le i \le n, l_i \le P_i \le r_i$
求合法排列中,逆序对为奇数的排列个数与逆序对为偶数的排列个数的大小关系。

行列式

Codechef APRIL 15 Black-white Board Game

设一个排列P是合法的,当且仅当$\forall 1 \le i \le n, l_i \le P_i \le r_i$
求合法排列中,逆序对为奇数的排列个数与逆序对为偶数的排列个数的大小关系。

$$|A| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

行列式

Codechef APRIL 15 Black-white Board Game

设一个排列P是合法的,当且仅当$\forall 1 \le i \le n, l_i \le P_i \le r_i$
求合法排列中,逆序对为奇数的排列个数与逆序对为偶数的排列个数的大小关系。

$$|A| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

构造$n * n$矩阵A，A的第i列$l_i \sim r_i$为1，其余位置为0
这个矩阵的行列式的值即为偶排列个数减奇排列个数

行列式

Codechef APRIL 15 Black-white Board Game

设一个排列P是合法的,当且仅当$\forall 1 \le i \le n, l_i \le P_i \le r_i$
求合法排列中,逆序对为奇数的排列个数与逆序对为偶数的排列个数的大小关系。

$$|A| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

构造$n * n$矩阵A，A的第i列$l_i \sim r_i$为1，其余位置为0
这个矩阵的行列式的值即为偶排列个数减奇排列个数
为保证消元过程中不出现$0, 1$之外的元素，主元选取右端点最小的行
可并堆维护所有行

matrix tree theorem

设无向图$G=(V,E)$的度数矩阵为D_G，邻接矩阵为A_G，G的基尔霍夫矩阵定义为$L_G=D_G-A_G$，且G的生成树的个数等于其基尔霍夫矩阵中任何一个$n-1$阶主余子式的行列式，即M_{ii}

行列式

生成树计数　证明

记B_{m*n}为图G的边矩阵，第i行对应图G的边(u_i, v_i)，且$b_{iu_i} = 1, b_{iv_i} = -1$，$B$中其他元素为0

行列式

生成树计数 证明

记B_{m*n}为图G的边矩阵，第i行对应图G的边(u_i, v_i)，
且$b_{iu_i} = 1, b_{iv_i} = -1$，$B$中其他元素为0
验证$L_G = B^T B$：

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} b_{kj} = \begin{cases} deg_i, & i = j \\ -1, & (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

行列式

考虑基尔霍夫矩阵的性质：

- $|L_G| = 0$
- 若G不联通，那么$M_{ii} = 0(\forall i \leq n)$
- 若G是树，那么$M_{ii} = 1(\forall i \leq n)$
- $M_{ii} = |B_i^T B_i|$，其中B_i为把B把第i列删掉后的矩阵

cauchy-binet theorem

$$|AB| = \sum_{|s|=n} |A_{s*}B_{*s}|$$

其中s是$1 \sim m$的集合的一个子集且大小为n，A_{s*}表示矩阵A选择只属于s的行形成的$n * n$的矩阵，B_{*s}表示矩阵B选择只属于s的列形成的$n * n$的矩阵

行列式

生成树计数　证明

$$M_{ii} = |B_i^T B_i| = \sum_{|s|=n-1} |(B_i^T)_{s*}(B_i)_{*s}|$$

$|(B_i^T)_{s*}(B_i)_{*s}|$就是只选s中的$n-1$条边构成的图G_s的M_{ii}，当且仅当s中的边构成树时，该式等于1，否则为0

行列式

生成树计数　证明

$$M_{ii}=|B_i^TB_i|=\sum_{|s|=n-1}|(B_i^T)_{s*}(B_i)_{*s}|$$

$|(B_i^T)_{s*}(B_i)_{*s}|$就是只选s中的$n-1$条边构成的图G_s的M_{ii}，当且仅当s中的边构成树时，该式等于1，否则为0

所以M_{ii}就等于图G的生成树个数

行列式

生成树计数

可以扩展到有向图上

D_G, A_G只入度相关，M_{ii}即为以**点i为根时**的有向生成树个数

$L_G = S_G^T T_G$，其中，对于$e_k = (i, j) \in E$，

令$s_{ki} = 1, t_{kj} = s_{kj} = -1$，其余位置为0

行列式

生成树计数

可以扩展到有向图上

D_G, A_G只入度相关，M_{ii}即为以**点i为根时**的有向生成树个数

$L_G = S_G^T T_G$，其中，对于$e_k = (i,j) \in E$，

令$s_{ki} = 1, t_{kj} = s_{kj} = -1$，其余位置为0

验证$L_G = S_G^T T_G$：

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{m} s_{ki} t_{kj} = \begin{cases} deg_i, & i = j \\ -1, & (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

行列式

maple

求一个有向无环图G增加一条边(x, y)后的生成树个数

行列式

maple

求一个有向无环图G增加一条边(x,y)后的生成树个数

L_G为上三角矩阵改变两个位置的值，其中有一个位置在主对角线上

不妨假设$l_{ij}(i>j)$被改变

行列式

maple

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & + & + & + & + & + \\
0 & \cdots & + & + & + & + & + \\
0 & \cdots & 0 & + & + & + & + \\
0 & \cdots & 0 & 0 & + & + & + \\
0 & \cdots & a_{ij} & 0 & 0 & + & + \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}\cdots a_{i-1\,i-1}
\begin{vmatrix}
+ & + & + & + \\
0 & + & + & + \\
0 & 0 & + & + \\
a_{ij} & 0 & 0 & +
\end{vmatrix}
a_{j+1\,j+1}\cdots a_{nn}
$$

行列式

maple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & + & \cdots & + \\ 0 & a_{22} & \cdots & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_{12} & + & \cdots & + & + \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & + & + \\ 0 & a_{33} & \cdots & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

行列式

maple

$$
\begin{pmatrix}
+ & + & + & \cdots & + & + \\
+ & + & + & \cdots & + & + \\
0 & + & + & \cdots & + & + \\
0 & 0 & + & \cdots & + & + \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & + & +
\end{pmatrix}
$$

行列式

maple

$$\begin{pmatrix} + & + & + & \cdots & + & + \\ + & + & + & \cdots & + & + \\ 0 & + & + & \cdots & + & + \\ 0 & 0 & + & \cdots & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & + & + \end{pmatrix}$$

Hessenberg矩阵： $a_{ij} = 0(\forall i > j + 1)$

行列式

maple

$$
\begin{aligned}
g_n = l_{n\,n} g_{n-1} & - l_{n\,n-1}(l_{n-1\,n} g_{n-2} \\
& - l_{n-1\,n-2}(l_{n-2\,n} g_{n-3} \\
& - l_{n-2\,n-3}(\cdots)))
\end{aligned}
$$

行列式

maple

$$
\begin{aligned}
g_n = l_{n\,n} g_{n-1} &- l_{n\,n-1}\Big(l_{n-1\,n} g_{n-2} \\
&- l_{n-1\,n-2}\Big(l_{n-2\,n} g_{n-3} \\
&- l_{n-2\,n-3}(\cdots)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

矩阵中非零元素个数为$n+m$个，所以最后的复杂度为$\mathcal{O}(n+m)$

特征值与特征多项式

定义

Definition

对于方阵A，若非零向量$\mathbf{x}$满足$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$，则称$\mathbf{x}$为$A$的特征向量，$\lambda$为$A$的特征值

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\
A\mathbf{x} &= \lambda * I\mathbf{x} \\
(A - \lambda I)\mathbf{x} &= 0 \\
|A - \lambda I| &= 0
\end{aligned}
$$

$f(x) = |A - xI|$称为方阵A的特征多项式

特征值与特征多项式

例子

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x) = |A - xI| &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(1-x) - 4 \\ &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

特征值与特征多项式

例子

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x) = |A - xI| &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(1-x) - 4 \\ &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

λ是特征多项式$f(x)$的根，所以$\lambda = -1, 3$
解方程组$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$可以得到对应的特征向量

$$\mathbf{x} = (1, -1), (1, 1)$$

特征多项式

特殊矩阵

观察特殊矩阵的特征多项式：

- 上三角矩阵
- Hessenberg矩阵

特征多项式

Hessenberg matrix

$$p_n(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-x & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

特征多项式

Hessenberg matrix

$$
p_n(x) = \begin{vmatrix}
a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
0 & a_{32} & a_{33}-x & \cdots & a_{3n} \\
0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-x
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = (a_{nn}-x)p_{n-1}(x) & - a_{n\,n-1}\Big(a_{n-1\,n}p_{n-2}(x) \\
& - a_{n-1\,n-2}\Big(a_{n-2\,n}p_{n-3}(x) \\
& \vdots \\
& a_{21}\big(a_{1n}p_0(x)\big)\cdots\Big)
\end{aligned}
$$

特征多项式

Hessenberg matrix

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = (a_{nn} - x)p_{n-1}(x) & - a_{n\,n-1}(a_{n-1\,n}p_{n-2}(x) \\
& - a_{n-1\,n-2}(a_{n-2\,n}p_{n-3}(x) \\
& \;\vdots \\
& \;a_{21}(a_{1n}p_0(x))\cdots)
\end{aligned}
$$

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^3)$

特征多项式

相似矩阵

相似矩阵

若存在可逆矩阵S，使得$S^{-1}AS=B$，那么称A,B是相似的;
相似矩阵具有相同的特征多项式

相似矩阵

若存在可逆矩阵S，使得$S^{-1}AS=B$，那么称A,B是相似的;
相似矩阵具有相同的特征多项式

Proof.

$$
\begin{aligned}
|B-xI| &= |S^{-1}AS-xI| \\
&= |S^{-1}AS-(xI)S^{-1}S| \\
&= |S^{-1}AS-S^{-1}(xI)S| \\
&= |S^{-1}||A-(xI)||S| \\
&= |A-xI|
\end{aligned}
$$

$\square$

特征多项式

Hessenberg matrix

如何将一个矩阵相似到对应的Hessenberg matrix?

特征多项式

Hessenberg matrix

如何将一个矩阵相似到对应的Hessenberg matrix?

回顾高斯消元：已知矩阵A，求矩阵P满足$PA = I$

通过一系列行操作，把矩阵A变成I

特征多项式

Hessenberg matrix

如何将一个矩阵相似到对应的Hessenberg matrix?
回顾高斯消元：已知矩阵A，求矩阵P满足$PA = I$
通过一系列行操作，把矩阵A变成I
也就是求出初等矩阵$E_1, E_2 \cdots E_t$，使$E_t \cdots E_2 E_1 A = I$，那么$A^{-1} = P = E_t \cdots E2E1$

$$(A|I) \to (I|P)$$

特征多项式

Hessenberg matrix

如何将一个矩阵相似到对应的Hessenberg matrix?
回顾高斯消元：已知矩阵A，求矩阵P满足$PA = I$
通过一系列行操作，把矩阵A变成I
也就是求出初等矩阵$E_1, E_2 \cdots E_t$，使$E_t \cdots E_2 E_1 A = I$，那么$A^{-1} = P = E_t \cdots E2E1$

$$(A|I) \rightarrow (I|P)$$

将这个过程扩展到相似矩阵中

特征多项式

Hessenberg matrix

已知矩阵A，求矩阵P满足$PAP^{-1} = H$，其中H是一个Hessenberg矩阵

特征多项式

Hessenberg matrix

已知矩阵A，求矩阵P满足$PAP^{-1} = H$，其中H是一个Hessenberg矩阵
消元过程的主元选取为$a_{i+1\,i}$
每次进行行操作，即找到初等矩阵E_s，令$A \leftarrow E_s A E_s^{-1}$

特征多项式

Hessenberg matrix

已知矩阵A，求矩阵P满足$PAP^{-1}=H$，其中H是一个Hessenberg矩阵

消元过程的主元选取为$a_{i+1\,i}$

每次进行行操作，即找到初等矩阵E_s，令$A \leftarrow E_s A E_s^{-1}$

行交换、行加减对主元都不造成影响

所以这个过程可以不断进行，直到将$a_{i+2\,i}, a_{i+3\,i}\cdots$都变成0

特征多项式

algorithm

H:=**A**; **P**:=I_n; i:=1 {*ith row is denoted by* L_i, *ith column by* C_i}
while i < n **do** {*treat each column, do not treat the last one.*}
  Search for the first non zero element in column i
  starting at $i+1$. *If such an element exists, let j be the position of that entry*
  if *no such element has been found* **then** i:=i+1 {*that column remains unchanged w*
  else
    with H:
      swap rows $i+1$ and j
      swap columns $i+1$ and j
    with P: swap rows $i+1$ and j
  pivot := 1/**H**[i+1,i]{*pivoting element*}
  for l **from** i+1 **to** n **do**
    c:= pivot∗**H**[l,i]
    with H, $L_l \leftarrow L_l - c \times L_{i+1}$
    with H, $C_{i+1} \leftarrow c \times C_l + C_{i+1}$
    with P, $L_l \leftarrow L_l - c \times L_{i+1}$
  i:=i+1
return(**H**,**P**)

特征多项式

Example

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

特征多项式

Example

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 19 & 26 & 5 \\ 1 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

特征多项式

复杂度分析

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^3)$
对任意矩阵都成立
主元选取不唯一，对应的Hessenberg矩阵也不一定唯一

特征多项式

复杂度分析

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^3)$
对任意矩阵都成立
主元选取不唯一，对应的Hessenberg矩阵也不一定唯一

题外话：不妨设$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$是矩阵$A$的特征多项式
$c_0 = f(0) = |A - 0I| = |A|$
所以求特征多项式包含求行列式

特征多项式

应用

Cayley–Hamilton theorem

$f(x)$为A的特征多项式，那么

$$f(A) = 0$$

其中$f(A)$是一个以矩阵A为变量的多项式，0表示零矩阵。

特征多项式

应用

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特征多项式

应用

$f(x)$为矩阵A的特征多项式，那么

$$g(x) \equiv h(x) \mod f(x) \Rightarrow g(A) = h(A)$$

特征多项式

应用

$f(x)$为矩阵A的特征多项式，那么

$$g(x) \equiv h(x) \mod f(x) \Rightarrow g(A) = h(A)$$

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x^5 \equiv 61x + 60 \mod f(x) \Rightarrow A^5 = 61A + 60I = \begin{pmatrix} 121 & 122 \\ 122 & 121 \end{pmatrix}$$

特征多项式

Example

求有向图G中有多少条长度为i的回路，输出i取遍$1 \sim k$的答案

特征多项式

Example

求有向图G中有多少条长度为i的回路，输出i取遍$1 \sim k$的答案

答案就是A^i的对角线和
暴力求出$1 \sim n$的所有答案，$n+1 \sim k$的答案可以由这些值求出
$\mathcal{O}(n^4 + nk)$

特征值

特征值就是特征多项式的根
求特征值就是在分解特征多项式

特征值

特征值就是特征多项式的根

求特征值就是在分解特征多项式

考虑

$$A = \begin{pmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A的特征多项式就是

$$f(x) = (-1)^n \left(x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right)$$

特征值

Q：为什么要考虑迭代法求特征值的数值解而不是直接解特征多项式的根?

特征值

Q：为什么要考虑迭代法求特征值的数值解而不是直接解特征多项式的根?

A：特征多项式系数可能很大或者精度很差。

特征值

QR algorithm

QR分解：$A = QR$，其中Q是正交矩阵[1]，R是上三角矩阵

[1] 即$QQ^T = I$，也就是$Q^{-1} = Q^T$

特征值

QR algorithm

QR分解：$A = QR$，其中Q是正交矩阵[1]，R是上三角矩阵
迭代过程：令

$$A_i = Q_i R_i$$

$$A_{i+1} = R_i Q_i$$

即

$$A_{i+1} = Q_i^{-1} A_i Q_i$$

与A_i有同样的特征值

[1] 即$QQ^T = I$，也就是$Q^{-1} = Q^T$

特征值

QR algorithm

QR分解：$A = QR$，其中Q是正交矩阵[1]，R是上三角矩阵
迭代过程：令

$$A_i = Q_i R_i$$

$$A_{i+1} = R_i Q_i$$

即

$$A_{i+1} = Q_i^{-1} A_i Q_i$$

与A_i有同样的特征值
A_i最终会收敛于一个上三角矩阵

[1] 即$QQ^T = I$，也就是$Q^{-1} = Q^T$

特征值

QR algorithm

QR分解的复杂度是$\mathcal{O}(n^3)$
若先将A相似到一个Hesenberg矩阵H，单次QR分解的复杂度可以降低至$\mathcal{O}(n^2)$

特征值

shifted QR algorithm

QR算法收敛速度取决于最大特征值λ_1与次大特征值λ_2的比$|\lambda_1/\lambda_2|$
若两个特征值很接近，则收敛速度慢

特征值

shifted QR algorithm

QR算法收敛速度取决于最大特征值λ_1与次大特征值λ_2的比$|\lambda_1/\lambda_2|$
若两个特征值很接近，则收敛速度慢
shifted QR algorithm的迭代过程：令

$$A_i - \delta_i I = Q_i R_i$$

$$A_{i+1} = R_i Q_i + \delta_i I$$

同样有

$$A_{i+1} = Q_i^{-1} A_i Q_i$$

一般取$\delta_i = a_{n\,n-1}$，当δ_i足够小的时候，可以认为找到了一个特征值$a_{n\,n}$，然后删掉第n行以及第n列，化规为$n-1$阶矩阵

矩阵对角化

令$\mathbf{x}$为矩阵A的一个特征向量，对应的特征值为λ，那么$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

矩阵对角化

令$\mathbf{x}$为矩阵A的一个特征向量，对应的特征值为λ，那么$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$

令$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$为$A$的$n$个（不一定互补相同）的特征值，对应的特征向量为$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_2$,考虑矩阵$S=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_n)$,$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$，那么

$$AS=S\Lambda$$

若S可逆，那么$A=S\Lambda S^{-1}$

矩阵对角化

下面不加证明地给出一个定理：

Theorem

如果A是实对称矩阵，那么存在一个正交矩阵S对角化A，即$A = S\Lambda S^{-1}$

矩阵对角化

下面不加证明地给出一个定理：

Theorem

如果A是实对称矩阵，那么存在一个正交矩阵S对角化A，即$A = S\Lambda S^{-1}$

$S\Lambda S^{-1}$中可以看为用矩阵S进行了一个坐标变换

矩阵对角化

下面不加证明地给出一个定理：

Theorem

如果A是实对称矩阵，那么存在一个正交矩阵S对角化A，即$A = S\Lambda S^{-1}$

$S\Lambda S^{-1}$中可以看为用矩阵S进行了一个坐标变换

下面给出矩阵对角化的一些应用：

特征值

Shlw loves matrix III

给定一个d 维空间椭球：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_k$$

求其与原点0 的最近距离。

特征值

Shlw loves matrix III

给定一个d 维空间椭球：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_k$$

求其与原点0 的最近距离。

- 椭圆中心位于原点，只需求椭圆的每一条轴的长度
- 正交矩阵可以看为在空间中进行旋转
- 对应矩阵为对角矩阵的椭圆轴长可以直接求出

奇异值分解

思考：如何保存一个矩阵

奇异值分解

思考：如何保存一个矩阵

空间复杂度$\mathcal{O}(r*m+(n-r)*r)$，其中r为矩阵的秩

奇异值分解

思考：如何保存一个矩阵

空间复杂度$O(r*m+(n-r)*r)$，其中r为矩阵的秩

通过奇异值分解，可以找到一个矩阵的最佳r秩近似，进而对矩阵进行有损压缩

参考资料

- Lay D.C, Linear Algebra and Its Applications
- Massoud Malek, Characteristic Polynomial.
- J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- David S. Watkins, The Matrix Eigenvalue Problem.
- Paul Camion, Daniel Augot, The Minimal polynomials, characteristic subspaces, normal bases and the frobenius form.

扫一扫