多项式的多点求值与快速插值

May 25, 2015 (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-multipoint-eval-and-interpolation) miskcoo (http://blog.miskcoo.com/author/miskcoo) Algorithm (http://blog.miskcoo.com/category/algorithm), Math (http://blog.miskcoo.com/category/math), Programming (http://blog.miskcoo.com/category/programming) 9 views Edit (http://blog.miskcoo.com/wp-admin/post.php?post=946&action=edit)

多项式的多点求值（multi-point evaluation）是给出一个多项式 $A(x)$，和 n 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$，要求求出 $A(x_0), A(x_1), \cdots, A(x_{n-1})$

相反的，多项式的插值（interpolation）是给出 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$，求出一个 n 次多项式，使得这些点都在这个多项式上

这两个问题实际上是在多项式的点值表示（point-value representation）和系数表示（coefficient representation）之间转换的方法，在快速傅里叶变换中由于带入值的特殊性质，可以在 $\mathcal{O}(n \log n)$ 的之间内将两种东西互相转换，但是，如果是任意给定点要求求值或者插值，就没有比较好的性质可以利用，但是仍然有比较快速的方法来计算它们

多项式的多点求值

给出一个多项式 $A(x)$，和 n 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$，如果要求 $A(x)$ 在各个点处的值直接处理肯定是比较慢的，而且似乎也没有什么优化的空间，现在试试看能不能像在进行快速傅里叶变换的时候一样，用分治来把问题规模减少

有两种方法，一是先把系数分成两半，另一种是先把要求的值分成两半，但是最后要求的是两个都要分成两半才可以把问题的规模减半。我们把要求的值分成两半

$$
\begin{aligned}
X^{[0]} &= \{x_0, x_1, \cdots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\} \\
X^{[1]} &= \{x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \cdots, x_{n-1}\}
\end{aligned}
$$

现在考虑的是如何才可以把系数减半，我们来想想倒过来的过程，现在已经求出了这 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个值，如果插值回来的话，得到的多项式的次数是 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，我们记用 $X^{[0]}, X^{[1]}$ 插值得到的多项式为 $A^{[0]}(x), A^{[1]}(x)$，这样的话如果可以求出它们，就可以把整个问题的规模减半了

考虑这两个多项式

$$
\begin{aligned}
P^{[0]}(x) &= \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (x - x_i) \\
P^{[1]}(x) &= \prod_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-1} (x - x_i)
\end{aligned}
$$

这两个多项式分别在 $x \in X^{[0]}$ 和 $x \in x^{[1]}$ 的时候为 0，而且次数都是我们要求的 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，现在可以把 $A(x)$ 表示成这样

$$A(x)=D(x)P^{[0]}(x)+A^{[0]}(x)$$

这样得到的 $A^{[0]}(x)$ 满足在 $x \in x^{[0]}$ 的时候 $D(x)P^{[0]}(x)$ 是 0，这样的话 $A(x)=A^{[0]}(x)$，因此就表示出了 $A^{[0]}(x)$

再看这个式子，相当于是多项式的求模（不会看我这篇 (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-division)文章），也就是

$$A^{[0]}(x) \equiv A(x) \pmod{P^{[0]}(x)}$$

对于 $X^{[1]}$ 的部分，处理方法也是一样的

最后多项式求模的时间复杂度是 $\mathcal{O}(n\log n)$，那么多项式多点求值的时间复杂度就是

$$T(n)=2T(\frac{n}{2})+\mathcal{O}(n\log n)=O(n\log^2 n)$$

多项式的快速插值

好，现在来看多项式的插值，给出了 $n+1$ 个点的集合

$$X=\{(x_i,y_i):0\leq i\leq n\}$$

现在要求一个 n 次多项式 $A(x)$ 满足 $\forall(x,y)\in X, A(x)=y$

如果直接用 Lagrange 插值公式来进行插值，那么时间复杂度是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的，现在再来考虑分治方法，我们把要插值的点分成两半

$$\begin{aligned}X^{[0]} &= \{(x_i,y_i):0\leq i\leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}\\ X^{[1]} &= \{(x_i,y_i):\lfloor\frac{n}{2}\rfloor < i\leq n\}\end{aligned}$$

现在假设已经求出了 $X^{[0]}$ 的插值多项式 $A^{[0]}(x)$，考虑如何修改它使得它变成 $A(x)$，假设

$$P(x)=\prod_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(x-x_i)$$

那么构造 $A(x)$，使其满足

$$A(x)=A^{[1]}(x)P(x)+A^{[0]}(x)$$

其中 $A^{[1]}(x)$ 是一个未知的多项式，由于 $\forall(x,y)\in X^{[0]}, P(x)=0, A^{[0]}(x)=y$，这样的话就满足 $X^{[0]}$ 的点都在 $A(x)$ 上，问题就变成要将 $X^{[1]}$ 内的点插值，使得

$$\forall(x_i,y_i)\in X^{[1]}, y_i=A^{[1]}(x_i)P(x_i)+A^{[0]}(x_i)$$

化简之后得到

$$A^{[1]}(x_i)=\frac{A^{[0]}(x_i)-y_i}{P(x_i)}$$

这样就得到了新的待插值点，利用同样的方法求出插值出 $A^{[1]}$ 然后合并就可以了

由于每一次都要多点求值求出 $X^{[1]}$ 内 $P(x)$ 和 $A^{[0]}(x)$ 的值，最终复杂度是

$$T(n)=2T(\frac{n}{2})+\mathcal{O}(n\log^2 n)=\mathcal{O}(n\log^3 n)$$

代码？我还没写出来有空再贴QAQ

Related Posts:

1. 多项式求逆元 **(6) (6.000000 is the YARPP match score between the current entry and this related entry. You are seeing this value because you are logged in to WordPress as an administrator. It is not shown to regular visitors.) (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-inverse)**
2. **BZOJ-3557. [Ctsc2014]**随机数 **(6) (6.000000 is the YARPP match score between the current entry and this related entry. You are seeing this value because you are logged in to WordPress as an administrator. It is not shown to regular visitors.) (http://blog.miskcoo.com/2015/05/bzoj-3557)**
3. **BZOJ-3771. Triple (5) (5.000000 is the YARPP match score between the current entry and this related entry. You are seeing this value because you are logged in to WordPress as an administrator. It is not shown to regular visitors.) (http://blog.miskcoo.com/2015/04/bzoj-3771)**
4. 从多项式乘法到快速傅里叶变换 **(5) (5.000000 is the YARPP match score between the current entry and this related entry. You are seeing this value because you are logged in to WordPress as an administrator. It is not shown to regular visitors.) (http://blog.miskcoo.com/2015/04/polynomial-multiplication-and-fast-fourier-transform)**
5. 多项式除法及求模 **(5) (5.000000 is the YARPP match score between the current entry and this related entry. You are seeing this value because you are logged in to WordPress as an administrator. It is not shown to regular visitors.) (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-division)**

fft (http://blog.miskcoo.com/tag/tag-fft) 傅里叶变换 (http://blog.miskcoo.com/tag/tag-fourier-transform)

多项式 (http://blog.miskcoo.com/tag/tag-polynomial)

BZOJ-3435. [Wc2014]紫荆花之恋 (http://blog.miskcoo.com/2015/05/bzoj-3435)

MISKCOO (HTTP://BLOG.MISKCOO.COM/AUTHOR/MISKCOO)

某只高二的 OIer，然后顺便卖个萌 > _ < !

LEAVE A REPLY

Logged in as miskcoo (http://blog.miskcoo.com/wp-admin/profile.php). Log out? (http://blog.miskcoo.com/wp-login.php?action=logout&redirect_to=http%3A%2F%2Fblog.miskcoo.com%2F2015%2F05%2Fpolynomial-

multipoint-eval-and-interpolation&_wpnonce=f23535e01b)

Comment

You may use these HTML (HyperText Markup Language) tags and attributes: `<a href="" title=""> <abbr title=""> <acronym title=""> <b> <blockquote cite=""> <cite> <code class="" title="" data-url=""> <del datetime=""> <em> <i> <q cite=""> <s> <strike> <strong> <pre class="" title="" data-url=""> <span class="" title="" data-url="">`

POST COMMENT

BZOJ-3771. Triple (http://blog.miskcoo.com/2015/04/bzoj-3771)

BZOJ-2001. [HNOI2010]City城市建设 (http://blog.miskcoo.com/2015/04/bzoj-2001)

区间K小问题 (http://blog.miskcoo.com/2015/04/kth-problem)

CATEGORIES

- Algorithm (http://blog.miskcoo.com/category/algorithm) (26)
- Linux (http://blog.miskcoo.com/category/linux) (5)
- Math (http://blog.miskcoo.com/category/math) (23)
- Programming (http://blog.miskcoo.com/category/programming) (18)
  - C++ (http://blog.miskcoo.com/category/programming/cxx) (4)
  - Web (http://blog.miskcoo.com/category/programming/web) (1)
- Uncategorized (http://blog.miskcoo.com/category/uncategorized) (2)

RECENT COMMENTS

多项式的多点求值与快速插值 | Miskcoo's Space (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-multipoint-eval-and-interpolation) on 多项式除法及求模 (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-division#comment-2528)

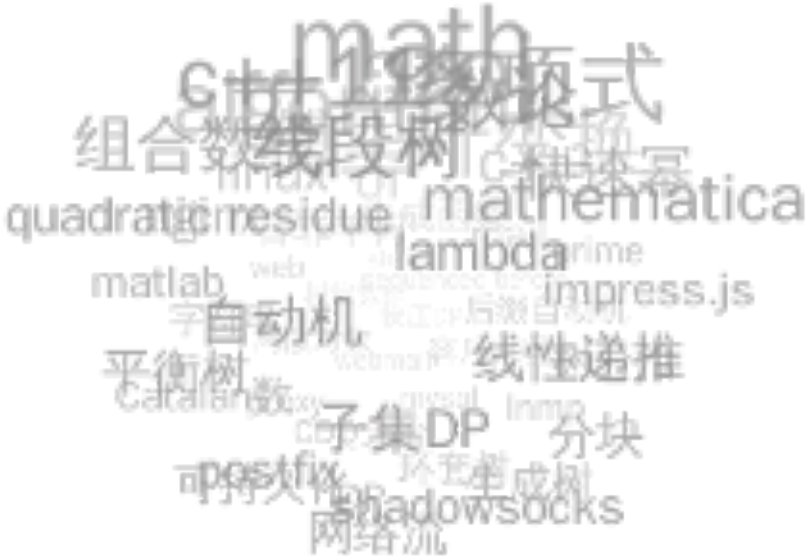
多项式除法及求模 | Miskcoo's Space (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-division) on 多项式求逆元 (http://blog.miskcoo.com/2015/05/polynomial-inverse#comment-2291)

qscqesze on BZOJ-4001. [TJOI2015]概率论 (http://blog.miskcoo.com/2015/04/bzoj-4001#comment-2070)

SCaffrey (http://imcaffrey.github.io) on BZOJ-4002. [JLOI2015]有意义的字符串 (http://blog.miskcoo.com/2015/05/bzoj-4002#comment-1790)

miskcoo (http://www.miskcoo.com) on BZOJ-4001. [TJOI2015]概率论 (http://blog.miskcoo.com/2015/04/bzoj-4001#comment-1717)

TAGS



May 2015

M	T	W	T	F
				1 (http://blog /2015/05/
4	5	6	7	8
11	12	13 (http://blog.miskcoo.com /2015/05/13)	14	15
18	19	20	21 (http://blog.miskcoo.com /2015/05/21)	22 (http://blog /2015/05/
25 (http://blog.miskcoo.com /2015/05/25)	26	27	28	29

« Apr (http://blog.miskcoo.com/2015/04)

FRIEND LINKS

trinkle (http://trinklee.blog.163.com)

97littleleaf11 (http://97littleleaf11.xyz)

hzwer (http://hzwer.com)

META

Site Admin (http://blog.miskcoo.com/wp-admin/)

Log out (http://blog.miskcoo.com/wp-login.php?action=logout&_wpnonce=f23535e01b)

Entries RSS (Really Simple Syndication) (http://blog.miskcoo.com/feed)

Comments RSS (Really Simple Syndication) (http://blog.miskcoo.com/comments/feed)

WordPress.org (https://wordpress.org/)

(http

s://

githu

b.co

m

/mis

kcoo

/)