类欧几里得算法

洪华敦

浙江省绍兴市第一中学

需要用的的一些数学符号

- $[a]$ 若表达式a为真，则$[a]=1$，否则$[a]=0$
- 例如$[1+1=2]=1$
- % 取模
- $S_d(n)=\sum_{x=1}^{n} x^d$
- $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ $\frac{a}{b}$下取整

欧几里得算法

欧几里得算法

- 对于$b \neq 0$，有$gcd(a, b) = gcd(b, a\%b)$

复杂度证明

复杂度证明

- 为了更好地讲后面的东西，我们来证明下欧几里得算法的复杂度

复杂度证明

- 为了更好地讲后面的东西，我们来证明下欧几里得算法的复杂度
- 考虑最坏情况，$a \le 2 * b - 1$

复杂度证明

- 为了更好地讲后面的东西，我们来证明下欧几里得算法的复杂度
- 考虑最坏情况，$a \le 2 * b - 1$
- 那么有$gcd(a, b) = gcd(b, a - b)$

复杂度证明

- 为了更好地讲后面的东西，我们来证明下欧几里得算法的复杂度
- 考虑最坏情况，$a \le 2 * b - 1$
- 那么有$gcd(a, b) = gcd(b, a - b)$
- 将a, b设为比较接近的斐波那契数，那么$a = F_n$，$b = F_{n-1}$，则有$gcd(F_n, F_{n-1}) = gcd(F_{n-1}, F_{n-2})$

复杂度证明

- 为了更好地讲后面的东西，我们来证明下欧几里得算法的复杂度
- 考虑最坏情况，$a \le 2*b-1$
- 那么有$gcd(a,b)=gcd(b,a-b)$
- 将a,b设为比较接近的斐波那契数，那么$a=F_n$，$b=F_{n-1}$，则有$gcd(F_n,F_{n-1})=gcd(F_{n-1},F_{n-2})$
- 显然n是$O(\log(F_n))$的

复杂度证明

- 为了更好地讲后面的东西，我们来证明下欧几里得算法的复杂度
- 考虑最坏情况，$a \leq 2 * b - 1$
- 那么有$gcd(a, b) = gcd(b, a - b)$
- 将a, b设为比较接近的斐波那契数，那么$a = F_n$，$b = F_{n-1}$，则有$gcd(F_n, F_{n-1}) = gcd(F_{n-1}, F_{n-2})$
- 显然n是$O(\log(F_n))$的
- 所以这个算法的复杂度是$O(\log(a))$的

【清华集训2014】Sum

【清华集训2014】Sum

- 我们来看这样一个问题

【清华集训2014】Sum

- 我们来看这样一个问题
- $\sum_{d=1}^{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{d*r*d}\rfloor}$

做法

做法

- 显然只要知道有多少$\left\lfloor \sqrt{d*r*d} \right\rfloor$是奇数就行了

做法

- 显然只要知道有多少$\left\lfloor \sqrt{d*r*d} \right\rfloor$是奇数就行了
- 于是就变成了求$\sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{d*\sqrt{r}}{2} \right\rfloor \%2$

做法

- 显然只要知道有多少$\left\lfloor \sqrt{d*r*d} \right\rfloor$是奇数就行了
- 于是就变成了求$\sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{d*\sqrt{r}}{2} \right\rfloor \%2$
- 考虑这个问题的一般形式$\sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$

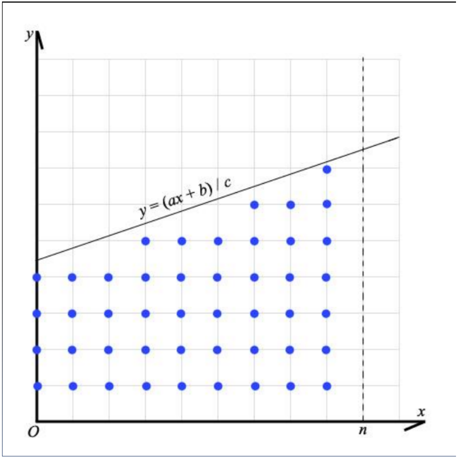
传统做法

传统做法

- 有一种传统的几何做法

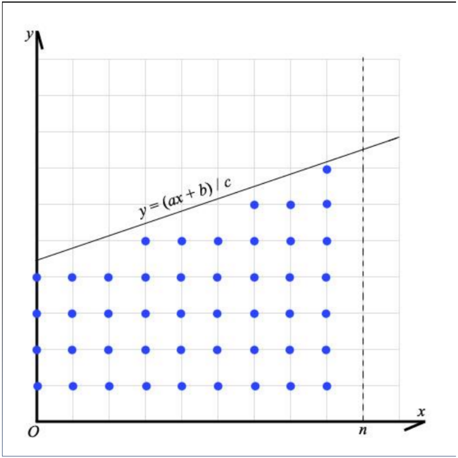
传统做法

- 有一种传统的几何做法
- 我们要求的是这个



传统做法

- 有一种传统的几何做法
- 我们要求的是这个

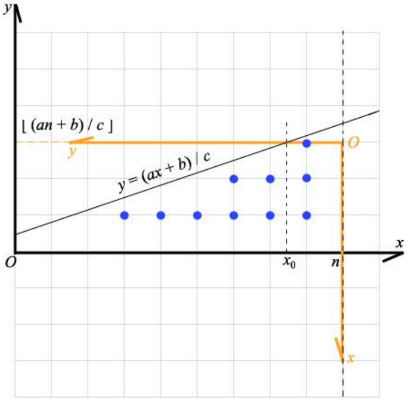


- (PS:图片选自其他课件)

传统做法

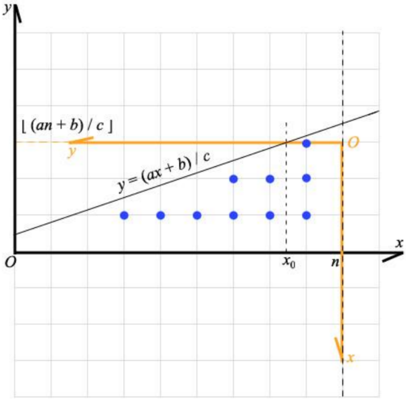
传统做法

- 我们先把下面的整块矩形直接计算掉



传统做法

- 我们先把下面的整块矩形直接计算掉



- 我们以点$(n, \left\lfloor \frac{a*n+b}{c} \right\rfloor)$为原点重建坐标轴

传统做法

传统做法

- 然后重新推导下这个直线的解析式

传统做法

- 然后重新推导下这个直线的解析式
- 显然斜率是变成了倒数了的，所以a与c互换了

传统做法

- 然后重新推导下这个直线的解析式
- 显然斜率是变成了倒数了的，所以a与c互换了
- 可以发现复杂度和计算gcd类似，都是$O(logn)$

传统做法

- 然后重新推导下这个直线的解析式
- 显然斜率是变成了倒数了的，所以a与c互换了
- 可以发现复杂度和计算gcd类似，都是$O(log n)$
- 这种做法虽然直观，但是有很大的局限性，下面介绍另一种做法

做法

做法

- 首先，如果$a >= c$，设$d = \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor$则有：

做法

- 首先，如果$a >= c$，设$d = \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor$则有：
- $\sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor = \sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{(a\%c)x+b}{c} \right\rfloor + d * x$

做法

- 首先，如果$a >= c$，设$d = \lfloor \frac{a}{c} \rfloor$则有：
- $\sum_{x=0}^{n} \lfloor \frac{ax+b}{c} \rfloor = \sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{(a\%c)x+b}{c} \right\rfloor + d*x$
- $= d*S_1(n) + \sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{(a\%c)x+b}{c} \right\rfloor$

做法

做法

- 同理，如果有$b >= c$，设$d = \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor$则有：

做法

- 同理，如果有$b >= c$，设$d = \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor$则有：
- $\sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor = \sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+(b\%c)}{c} \right\rfloor + d$

做法

- 同理，如果有$b >= c$，设$d = \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor$则有：
- $\sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor = \sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+(b\%c)}{c} \right\rfloor + d$
- $= d * S_0(n) + \sum_{x=0}^{n} \left\lfloor \frac{ax+(b\%c)}{c} \right\rfloor$

做法

做法

- 经过上面两个计算后，我们有$a < c$，$b < c$

做法

- 经过上面两个计算后，我们有$a < c$，$b < c$
- 于是我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(a\%c, c, b\%c, n)$

做法

做法

- 令$M = \lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor$

做法

- 令$M = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$
- 原式=$\sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor]$

做法

- 令$M = \lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor$
- 原式$=\sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{M} [y < \lfloor \frac{ax+b}{c} \rfloor]$
- 我们来化简下这个式子$y < \lfloor \frac{ax+b}{c} \rfloor$

做法

- 令$M = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$
- 原式$=\sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor]$
- 我们来化简下这个式子$y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$
- $c * (y+1) \leq a * x + b$

做法

- 令$M = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$
- 原式$=\sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor]$
- 我们来化简下这个式子$y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$
- $c * (y+1) \leq a * x + b$
- $c * y + c - b \leq a * x$

做法

- 令$M = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$
- 原式=$\sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor]$
- 我们来化简下这个式子$y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$
- $c * (y+1) \leq a * x + b$
- $c * y + c - b \leq a * x$
- $c * y + c - b - 1 < a * x$

做法

- 令$M = \left\lfloor \frac{an+b}{c} \right\rfloor$
- 原式$=\sum_{x=0}^{n} \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor]$
- 我们来化简下这个式子$y < \left\lfloor \frac{ax+b}{c} \right\rfloor$
- $c * (y+1) \leq a * x + b$
- $c * y + c - b \leq a * x$
- $c * y + c - b - 1 < a * x$
- $x > \left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor$

做法

做法

- 所以原式$=\sum_{y=0}^{M}\sum_{x=0}^{n}[x > \left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor]$

做法

- 所以原式$= \sum_{y=0}^{M} \sum_{x=0}^{n} [x > \left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor]$
- $=\sum_{y=0}^{M} n - \left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor$

做法

- 所以原式$= \sum_{y=0}^{M} \sum_{x=0}^{n} [x > \lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor]$
- $= \sum_{y=0}^{M} n - \lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor$
- $= n*(M+1) - \sum_{y=0}^{M} \lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor$

做法

- 所以原式$=\sum_{y=0}^{M}\sum_{x=0}^{n}[x>\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor]$
- $=\sum_{y=0}^{M} n-\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor$
- $=n*(M+1)-\sum_{y=0}^{M}\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor$
- 于是我们的问题规模从$(a\%c,c,b\%c,n)$变成了$(c,a\%c,c-b\%c-1,M)$

复杂度

复杂度

- 经过上面一番转化，我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(c, a\%c, c - b\%c - 1, M)$

复杂度

- 经过上面一番转化，我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(c, a\%c, c - b\%c - 1, M)$
- 显然当a为0时，我们可以很轻松地计算答案

复杂度

- 经过上面一番转化，我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(c, a\%c, c-b\%c-1, M)$
- 显然当a为0时，我们可以很轻松地计算答案
- 所以问题规模每次都从(a, c)变成$(c, a\%c)$

复杂度

- 经过上面一番转化，我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(c, a\%c, c - b\%c - 1, M)$
- 显然当a为0时，我们可以很轻松地计算答案
- 所以问题规模每次都从(a, c)变成$(c, a\%c)$
- 这和计算gcd的时间复杂度是一样的

复杂度

- 经过上面一番转化，我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(c, a\%c, c - b\%c - 1, M)$
- 显然当a为0时，我们可以很轻松地计算答案
- 所以问题规模每次都从(a, c)变成$(c, a\%c)$
- 这和计算gcd的时间复杂度是一样的
- 所以时间复杂度是$O(log(a))$

复杂度

- 经过上面一番转化，我们的问题规模从(a, c, b, n)变成了$(c, a\%c, c - b\%c - 1, M)$
- 显然当a为0时，我们可以很轻松地计算答案
- 所以问题规模每次都从(a, c)变成$(c, a\%c)$
- 这和计算gcd的时间复杂度是一样的
- 所以时间复杂度是$O(log(a))$
- 看上去这种做法更加的麻烦，但是这种方法是可以扩展到高维情况的

WINDOW

WINDOW

- 简化题意：

WINDOW

- 简化题意：
- 给定N, A, B, K, L，计算:

$$\sum_{x=1}^{n} \binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} \binom{n-x}{L}$$

WINDOW

- 简化题意:
- 给定N, A, B, K, L，计算:

$$\sum_{x=1}^{n} \binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} \binom{n-x}{L}$$

- $N, A, B \leq 10^{18}$，$K, L \leq 10$

WINDOW

- 简化题意：
- 给定N, A, B, K, L，计算:

$$\sum_{x=1}^{n} \binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} \binom{n-x}{L}$$

- $N, A, B \leq 10^{18}$，$K, L \leq 10$
- 答案对一个大质数取模

做法

做法

- 首先我们知道，$\binom{x}{k}$是一个关于x的k次多项式

做法

- 首先我们知道，$\binom{x}{k}$是一个关于x的k次多项式
- 设$\binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} = \sum_{i=0}^{K+1} c_i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^i$

做法

- 首先我们知道，$\binom{x}{k}$是一个关于x的k次多项式
- 设$\binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} = \sum_{i=0}^{K+1} c_i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^i$
- 设$\binom{n-x}{L} = \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i$

做法

- 首先我们知道，$\binom{x}{k}$是一个关于x的k次多项式
- 设$\binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} = \sum_{i=0}^{K+1} c_i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^i$
- 设$\binom{n-x}{L} = \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i$
- 那么原式$= \sum_{x=1}^{n} \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i \sum_{j=0}^{K+1} c_j * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^j$

做法

- 首先我们知道，$\binom{x}{k}$是一个关于x的k次多项式
- 设$\binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} = \sum_{i=0}^{K+1} c_i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^i$
- 设$\binom{n-x}{L} = \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i$
- 那么原式$= \sum_{x=1}^{n} \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i \sum_{j=0}^{K+1} c_j * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^j$
- 等于$\sum_{i=0}^{L} \sum_{j=0}^{K+1} d_i * c_j \sum_{x=1}^{n} x^i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^j$

做法

- 首先我们知道，$\binom{x}{k}$是一个关于x的k次多项式
- 设$\binom{\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor}{K+1} = \sum_{i=0}^{K+1} c_i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^i$
- 设$\binom{n-x}{L} = \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i$
- 那么原式$= \sum_{x=1}^{n} \sum_{i=0}^{L} d_i * x^i \sum_{j=0}^{K+1} c_j * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^j$
- 等于$\sum_{i=0}^{L} \sum_{j=0}^{K+1} d_i * c_j \sum_{x=1}^{n} x^i * (\lfloor \frac{Ax}{b} \rfloor)^j$
- d_i和c_i我们可以预处理用拉格朗日插值公式或者高斯消元算出来，那么问题就变成了求后面那些东西

做法

做法

- 我们令$f(a,c,b,i,j)$表示$\sum_{x=0}^{n} x^i * (\lfloor \frac{a*x+b}{c} \rfloor)^j$

做法

- 我们令$f(a,c,b,i,j)$表示$\sum_{x=0}^{n} x^i * (\lfloor \frac{a*x+b}{c} \rfloor)^j$
- 首先我们可以用二项式定理，让$a,b < c$

做法

- 我们令$f(a,c,b,i,j)$表示$\sum_{x=0}^{n} x^i * (\lfloor \frac{a*x+b}{c} \rfloor)^j$
- 首先我们可以用二项式定理，让$a,b<c$
- 令$M = \lfloor \frac{a*n+b}{c} \rfloor$

做法

- 我们令$f(a,c,b,i,j)$表示$\sum_{x=0}^{n} x^i * (\lfloor \frac{a*x+b}{c} \rfloor)^j$
- 首先我们可以用二项式定理，让$a,b<c$
- 令$M=\lfloor \frac{a*n+b}{c} \rfloor$
- $$\sum_{x=0}^{n} x^U * (\left\lfloor \frac{a*x+b}{c} \right\rfloor)^V$$

做法

- 我们令$f(a, c, b, i, j)$表示$\sum_{x=0}^{n} x^i * (\lfloor \frac{a*x+b}{c} \rfloor)^j$
- 首先我们可以用二项式定理，让$a, b < c$
- 令$M = \lfloor \frac{a*n+b}{c} \rfloor$
- $$\sum_{x=0}^{n} x^U * (\left\lfloor \frac{a*x+b}{c} \right\rfloor)^V$$
- $$= \sum_{x=0}^{n} x^U * \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{a*x+b}{c} \right\rfloor]((y+1)^V - y^V)$$

做法

- 我们令$f(a,c,b,i,j)$表示$\sum_{x=0}^{n} x^i * (\lfloor \frac{a*x+b}{c} \rfloor)^j$
- 首先我们可以用二项式定理，让$a,b<c$
- 令$M=\lfloor \frac{a*n+b}{c} \rfloor$
- $$\sum_{x=0}^{n} x^U * (\left\lfloor \frac{a*x+b}{c} \right\rfloor)^V$$
- $$=\sum_{x=0}^{n} x^U * \sum_{y=0}^{M} [y < \left\lfloor \frac{a*x+b}{c} \right\rfloor]((y+1)^V - y^V)$$
- $$=\sum_{y=0}^{M} ((y+1)^V - y^V) \sum_{x=0}^{n} x^U * [x > \left\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \right\rfloor]$$

做法

做法

- 我们可以把$(y+1)^U-y^U$二项式展开

做法

- 我们可以把$(y+1)^U - y^U$二项式展开
- 原式等于

做法

- 我们可以把$(y+1)^U-y^U$二项式展开
- 原式等于
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*\sum_{x=0}^{n}x^U*[x>\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor]$

做法

- 我们可以把$(y+1)^U-y^U$二项式展开
- 原式等于
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*\sum_{x=0}^{n}x^U*[x>\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor]$
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*(S_U(n)-S_U(\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor))$

做法

- 我们可以把$(y+1)^U-y^U$二项式展开
- 原式等于
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*\sum_{x=0}^{n}x^U*[x>\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor]$
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*(S_U(n)-S_U(\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor))$
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*S_U(n)-\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*S_U(\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor)$

做法

- 我们可以把$(y+1)^U-y^U$二项式展开
- 原式等于
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*\sum_{x=0}^{n}x^U*[x>\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor]$
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*(S_U(n)-S_U(\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor))$
- $=\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*S_U(n)-\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M}y^i*S_U(\left\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\right\rfloor)$
- 前者等于$\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}S_i(M)*S_U(n)$，于是问题就变成了求后者

做法

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式
- 设$S_d(x) = \sum_{i=0}^{d+1} a[d][i] * x^i$

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式
- 设$S_d(x)=\sum_{i=0}^{d+1} a[d][i]*x^i$
- 数组a可以用高斯消元预处理，或者直接带伯努利数进去

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式
- 设$S_d(x)=\sum_{i=0}^{d+1} a[d][i]*x^i$
- 数组a可以用高斯消元预处理，或者直接带伯努利数进去
- 原式等于$\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式
- 设$S_d(x)=\sum_{i=0}^{d+1} a[d][i]*x^i$
- 数组a可以用高斯消元预处理，或者直接带伯努利数进去
- 原式等于$\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$
- 等于$\sum_{i=0}^{V-1}\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式
- 设$S_d(x)=\sum_{i=0}^{d+1} a[d][i]*x^i$
- 数组a可以用高斯消元预处理，或者直接带伯努利数进去
- 原式等于$\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$
- 等于$\sum_{i=0}^{V-1}\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$
- 于是我们再次完成了a,c的互换，这样递归下去只有$O(log(A))$层

做法

- 我们可以发现$S_d(x)$是一个关于x的$d+1$次多项式
- 设$S_d(x)=\sum_{i=0}^{d+1} a[d][i]*x^i$
- 数组a可以用高斯消元预处理，或者直接带伯努利数进去
- 原式等于$\sum_{i=0}^{V-1}\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$
- 等于$\sum_{i=0}^{V-1}\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j]*\binom{V}{i}\sum_{y=0}^{M} y^i*(\lfloor\frac{c*y+c-b-1}{a}\rfloor)^j$
- 于是我们再次完成了a,c的互换，这样递归下去只有$O(log(A))$层
- 我们可以对于每个(a,b,c,n)求出对于所有(i,j)的答案，具体方法就是递归下去，然后用返回的那些答案更新

小优化

小优化

- 然而裸着直接做好像是$O((K+L)^4 logn)$的，我们可以优化一下

小优化

- 然而裸着直接做好像是$O((K+L)^4 logn)$的，我们可以优化一下
- 对于每一个i，计算出$\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] \sum_{y=0}^{M} y^i * (\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor)^j$，这个是$(K+L)^3$的

小优化

- 然而裸着直接做好像是$O((K+L)^4 logn)$的，我们可以优化一下
- 对于每一个i，计算出$\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] \sum_{y=0}^{M} y^i * (\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor)^j$，这个是$(K+L)^3$的
- 然后对于每个V直接计算即可

小优化

- 然而裸着直接做好像是$O((K+L)^4 logn)$的，我们可以优化一下
- 对于每一个i，计算出$\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] \sum_{y=0}^{M} y^i * (\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor)^j$，这个是$(K+L)^3$的
- 然后对于每个V直接计算即可
- 时间复杂度$O((K+L)^3 logn)$

小优化

- 然而裸着直接做好像是$O((K+L)^4 logn)$的，我们可以优化一下
- 对于每一个i，计算出$\sum_{j=0}^{U+1} a[U][j] \sum_{y=0}^{M} y^i * (\lfloor \frac{c*y+c-b-1}{a} \rfloor)^j$，这个是$(K+L)^3$的
- 然后对于每个V直接计算即可
- 时间复杂度$O((K+L)^3 logn)$
- 当然如果你用FFT的话复杂度会继续降下来

感谢

感谢

- 感谢CCF给了我这次交流的机会

感谢

- 感谢CCF给了我这次交流的机会
- 感谢绍兴一中的任之洲和叶菁菁同学为本文审稿

感谢

- 感谢CCF给了我这次交流的机会
- 感谢绍兴一中的任之洲和叶菁菁同学为本文审稿
- 感谢清华大学的张恒捷和杭州学军中学的金策在这个知识上对我的启发