线性规划与单纯形算法

吉林大学附属中学高中部 吴一凡

March 3, 2015

大家在高中阶段都学过线性规划.也大概了解线性规划是个什么东西.
总的来说就是有一些变量,需要在满足一些限制的情况下,求出一个关于这些变量的函数最值.
当然,限制以及函数都是线性的.
一些线性规划的题目如果是画图去做的话,简直痛不欲生.
让我们拿单纯形法去艹爆他们吧!
(另外由于本人太弱,不要太过于较真某些证明.

我们给一个线性规划定义一个标准型.
即:

$$Maximize\ c^T x$$

$$S.T.\ Ax \leq b, x \geq 0$$

其中我们假定有n个变量,m个限制条件,则x表示一个列向量,c表示目标函数的系数向量,A表示限制条件的系数矩阵,b表示限制的常数项列向量.$x \geq 0$意味着x中的每一个元素均≥ 0.
这些东西的行数和列数如下(用$[n, m]$表示n行m列):
$c^T[1, n]$ $x[n, 1]$ $A[m, n]$ $b[m, 1]$

当然,大多数时候线性规划并不是这种形式.
我们考虑如何将一个一般的线性规划转化为标准型.

目标函数不是最大化,而是最小化:
将所有系数取反,转化为最大化线性规划,然后将答案取反.

首先线性规划的限制条件应该都是带等号的,这个应该不难理解.
于是有以下的两种情况:
限制条件为$\geq$.
直接将系数取反就可以转化为$\leq$.
限制条件为$=$.
比如是$a = b$,那么转化为两个限制:$a \leq b, b \leq a$.

变量自身的限制条件.
如果变量的限制条件为$x \le a$,则用变量$x' = a - x$代替x,其中$x' \ge 0$.
如果变量的限制条件为$x \ge a$,则用变量$x' = x - a$代替x,其中$x' \ge 0$.
如果变量无限制,用变量x', x''代替x,其中$x = x' - x'', x' \ge 0, x'' \ge 0$.

通过如上的变换,我们能够将任意的线性规划转化为标准型,并且容易发现线性规划的最优值是不变的.

通过将标准型线性规划的不等式转化为等式,我们能够得到线性规划的松弛型.
这是为了方便利用单纯形算法.
比如第i个限制如下:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j \leq b_i$$

我们给第i个限制添加辅助变量x_{n+i}:

$$x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j = b_i$$

其中$x_{n+i} \geq 0$.

这样整个线性规划的限制条件就变成了等式.
同时现在共有$n+m$个变量,这些变量的限制条件均为≥ 0.
我们就是在松弛型中进行单纯形算法的.

<u>基变量</u>:在每个限制等式中写在最前面的那个变量.
例如一开始的松弛型中,$x_{n+1} - x_{n+m}$就是基变量.显然基变量有m个.
<u>非基变量</u>:(偷个懒)除了基变量之外剩下的变量.
一开始的松弛型中,$x_1 - x_n$是非基变量.非基变量有n个.
目标函数只与非基变量有关.
<u>基变量集合</u>B以及<u>非基变量集合</u>N并不是一成不变的.
<u>可行解</u>:使得m个限制条件能够满足的一组非基变量.
<u>最优解</u>:使得目标函数最优的一组可行解.
线性规划的目标显然就是求出一组最优解.
(以上定义理解就好,纯属本傻叉口胡)

我们假定基本解(即所有的非基变量均为0)是一组可行解.
之后再讨论不满足这个条件的情况.
那么现在已经有一组解了.不过看起来它不一定是最优的.
考虑我们的目标函数中的某个非基变量,如果他的系数大于0,那么我们增大它就会使得目标函数的值增大.
如果所有非基变量的系数均≤ 0,则可以证明当前已经是一组最优解.此时我们令所有的非基变量为0,则最优解就是后面的常数.(不要问为什么
否则我们就找到了一个非基变量,现在我们要增大它辣!
假定它是第e个非基变量x_{N_e}.

显然这家伙不能无限制的增大.
回到我们的第i个限制:

$$x_{B_i} + \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_{N_j} = b_i$$

那么如果$A_{i,e} > 0$,显然:

$$x_{N_e} \leq \frac{b_i}{A_{i,e}}$$

我们找到最紧的一个限制.假设是第l个,也就是说对应着第l个基变量x_{B_l}.
如果最紧的限制是INF,证明这个变量可以无限增大,因此直接返回这个线性规划是无界的.

由于限制是最紧的,因此这个等式关系真的是成立的.
然后我们进行转轴操作,交换x_{B_l}和x_{N_e}两个变量,使得x_{B_l}成为第e个非基变量,x_{N_e}成为第l个基变量.也就是把这两个变量交换一下位置.
注意此时基变量集合B以及非基变量集合N也都发生了变化.
下面举例说明一下转轴操作.

考虑如下线性规划:

$$Maximize\ 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$S.T. x_4 + x_1 + x_2 + 3x_3 = 30$$

$$x_5 + 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 24$$

$$x_6 + 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 36$$

目前的基变量集合:$\{4, 5, 6\}$,非基变量集合:$\{1, 2, 3\}$.
现在我们选中了非基变量x_1,我们要增大它.
然后对于限制1,我们得到$x_1 \leq 30$.
对于限制2,我们得到$x_1 \leq 12$.
对于限制3,我们得到$x_1 \leq 9$.
于是我们决定交换第3个基变量以及第1个非基变量.

将第三个限制变形得到:

$$x_1 = 9 - \frac{x_6}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2}$$

然后我们将所有的x_1全部换成后面一坨奇怪的东西.
然后我们得到了一个新的线性规划:

$$\begin{aligned}
Maximize \quad & -\frac{3x_6}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} + 27 \\
S.T. x_4 - \frac{x_6}{4} + \frac{3x_2}{4} + \frac{5x_3}{2} &= 21 \\
x_5 - \frac{x_6}{2} + \frac{3x_2}{2} + 4x_3 &= 6 \\
x_1 + \frac{x_6}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} &= 9
\end{aligned}$$

注意现在基变量集合是$B = \{4, 5, 1\}$,非基变量集合是$N = \{6, 2, 3\}$,不要乱了顺序.

怎么样,常数是不是增大了?
于是我们不断重复这个过程,最终就一定能得到一组最优解或返回无界区域.
这就是单纯形算法的主干.

转轴操作简洁的代码.

```
inline void pivot(int l,int e){
    int i,j,k;
    b[l]/=A[l][e];
    for(i=1;i<=n;++i)if(i!=e)A[l][i]/=A[l][e];
    A[l][e]=1/A[l][e];

    for(i=1;i<=m;++i)if(i!=l&&fabs(A[i][e])>eps){
        b[i]-=A[i][e]*b[l];
        for(j=1;j<=n;++j)if(j!=e)A[i][j]-=A[i][e]*A[l][j];
        A[i][e]=-A[i][e]*A[l][e];
    }

    v+=c[e]*b[l];
    for(i=1;i<=n;++i)if(i!=e)c[i]-=c[e]*A[l][i];
    c[e]=-c[e]*A[l][e];

    swap(B[l],N[e]);
}
```

有一点注意事项:一个叫做**Bland法则**的东西.
就是说当选择非基变量的时候要选择系数大于0且标号最小的.
否则容易被特殊数据卡出死循环.

我们发现每一次转轴操作的复杂度是$O(nm)$的.
而且单纯形算法并不是多项式算法,能够被卡到指数级.
但是如果不充分发挥人类智慧,是很难卡掉的.
所以放心用吧!

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.

单纯形算法(线性规划)能拿来干什么?
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
刷裸题.
不错,只能刷裸题.不过在强大的线性规划面前,不裸的题并不是很多.

比如说我们考虑网络流问题.
事实上任何最大流,最小费用流,上下界网络流都是在解决一个线性规划问题.
具体是什么模型由于时间关系就不说了.
可以参考曹钦翔的《线性规划与网络流》.

回忆题意ing...
网络流建模?都去死吧!
直接套用线性规划.
令第i条有向边通过次数为x_i.
同时建立超级源向1号点连边,每个点向超级汇连边.
于是对于所有中间点有进入次数等于出去的次数.并且$x_i \geq 1$,这里不包括后加的边.
注意我们这里是将单个限制也放在大限制里的.原因之后再说.
然后目标函数也很显然.
然后这个问题就解决了?并没有!

这个问题是最小化,于是我们要将系数取反变成最大化.
蛋疼的是限制.有一些是≥ 1,于是取反后变成≤ -1.
而常数是负数没有基本可行解!
有方法构造初始可行解,但是不会怎么办?
我们有一个大杀器:**对偶原理**!

线性规划1如下:

$$Maximize\ c^T x$$

$$S.T.\ Ax \leq b, x \geq 0$$

线性规划2如下:

$$Minimize\ b^T y$$

$$S.T.\ A^T y \geq c, y \geq 0$$

两个线性规划的最优解相同!(不要问为什么

于是直接将原来的线性规划对偶一下,转化为求最大值的线性规划.
我们发现这个线性规划是由初始基本可行解的!
这样就不用再找基本可行解了.

于是这样做光荣TLE.
因为变量与限制个数都有$O(n+m)$,在这种情况下时间也仅是ZKW费用流的约3倍.是不是非常不科学.还是能骗到不少分的.

事实上刚才我们非常傻逼的把单个元素的限制一起塞到总的限制中.
我们只需用$x' = x - 1$之类的变量替换掉,原规划的限制数就能减少到$O(n)$.
这样对偶之后就会有$O(n)$个变量,$O(n+m)$个限制条件.应该接近于秒出...
可惜这时候有可能没有初始可行解了.

线性规划的用途很多,而且单纯形算法实现复杂度低,不易被人工卡掉,也不失为一种高性价比的算法.
谢谢大家!

BZOJ1061
BZOJ3112
BZOJ3265
BZOJ3876