# 期望与 DP

九条可怜

杭州天水幼儿园

# 随机游走系列

- 给出一张图，一个人从起点开始随机游走直到走到终点。

# 随机游走系列

- 给出一张图，一个人从起点开始随机游走直到走到终点。
- 问到每一个点的期望次数，到每一条边的期望次数，走到终点的期望步数..

# HNOI2015 游走

一个无向连通图，顶点从 1 编号到 $N$，边从 1 编号到 $M$。

小 Z 在该图上进行随机游走，初始时小 Z 在 1 号顶点，每一步小 Z 以相等的概率随机选择当前顶点的某条边，沿着这条边走到下一个顶点，获得等于这条边的编号的分数。当小 Z 到达 $N$ 号顶点时游走结束，总分为所有获得的分数之和。

现在，请你对这 M 条边进行编号，使小 Z 获得的总分的期望值最小。

$n \leq 500$

- 只要求出每一条边经过的期望次数，从小到大编号一定最优。

- 只要求出每一条边经过的期望次数，从小到大编号一定最优。
- 求经过边的期望次数只要知道经过点的期望次数就好了。

# HNOI2015 游走

- 只要求出每一条边经过的期望次数，从小到大编号一定最优。
- 求经过边的期望次数只要知道经过点的期望次数就好了。
- 设 $x_i$ 为经过第 $i$ 个点的期望次数，那么可以列出方程。

- 只要求出每一条边经过的期望次数，从小到大编号一定最优。
- 求经过边的期望次数只要知道经过点的期望次数就好了。
- 设 $x_i$ 为经过第 $i$ 个点的期望次数，那么可以列出方程。
- 高斯消元 $O(n^3)$。

# JC 的小苹果

有一个迷宫，这个迷宫以联通无向图的形式给出，有一个初始血量为 $hp$ 的人进入迷宫中随机游走，从 1 开始到 $n$ 结束。

迷宫中有一些怪兽，这个人走到第 $i$ 个节点时会掉 $A_i$ 滴血。当血量小于等于 0 时会被弹出迷宫再也无法进入。

问他到达 $n$ 号点的概率。保证 $A_1$ 和 $A_n$ 为 0。

$n \leq 150, hp \leq 10000, m \leq 5000$。

# JC 的小苹果

- 把点根据血量拆开进行高斯消元，$O(n^3hp^3)$。

# JC 的小苹果

- 把点根据血量拆开进行高斯消元，$O(n^3hp^3)$。
- 根据 $hp$ 可以把图分成 $hp$ 层，第 $i$ 层对 $j(i>j)$ 层是没有影响的。每层之间高斯消元，层与层之间递推，$O(n^3hp)$。

# JC 的小苹果

- 把点根据血量拆开进行高斯消元，$O(n^3hp^3)$。
- 根据 $hp$ 可以把图分成 $hp$ 层，第 $i$ 层对 $j(i>j)$ 层是没有影响的。每层之间高斯消元，层与层之间递推，$O(n^3hp)$。
- 每一次高斯消元的系数矩阵都是相同的，可以先高斯消元一次预处理，之后消元的时候带入就行了，$O(n^2hp+n^3)$。

# DZY Loves Games

有一个迷宫，这个迷宫以联通无向图的形式给出，有一个初始血量为 $k$ 的人进入迷宫中随机游走，从 1 开始到 $n$ 结束。

迷宫中有一些陷阱，这个人走到有陷阱的房间时会掉一滴血，保证陷阱数不超过 100 个。当血量小于等于 0 时会被弹出迷宫再也无法进入。

当这个人在 1 滴血到达 $n$ 号房间时，他会开启隐藏房间，因此他想知道开启隐藏房间的概率。

$n \le 500, k \le 10^9$。

构造一张 $n$ 个点的图，使得从 1 开始随机游走走到 $n$ 的期望步数大于等于 $d$。

$n = 200, d = 10^6$

# 杜老师题

- $n$ 个点的链，$O(n^2)$

# 杜老师题

- $n$ 个点的链，$O(n^2)$
- $n$ 个点的团，$O(n)$

# 杜老师题

- $n$ 个点的链，$O(n^2)$
- $n$ 个点的团，$O(n)$
- $\frac{n}{2}$ 个点的团接 $\frac{n}{2}$ 个点的链，$O(n^3)$。

# TorusSailing

$n \times m$ 的网格图，$(x, y)$ 等概率走向 $((x+1) \mod n, y)$ 和 $(x, (y+1) \mod n)$，问 $(0,0)$ 走到 $(gx, gy)$ 的期望步数。

$n, m \le 150$

# TorusSailing

- 设最后一行最后一列的期望，前面的期望都可以用这些变量表示。

# TorusSailing

- 设最后一行最后一列的期望，前面的期望都可以用这些变量表示。
- 递推出第一行和第一列，解方程。

- 设最后一行最后一列的期望，前面的期望都可以用这些变量表示。
- 递推出第一行和第一列，解方程。
- $O(n^3)$。

# Fox Rocks

$n$ 个点的有向图，$a$ 和 $b$ 之间有有向边当且仅当 $0 \le \lfloor \frac{b}{4} \rfloor - \lfloor \frac{a}{4} \rfloor \le 1$。每条边都有一个权值，选择一条边的概率和权值成正比。

$m$ 次操作，修改某一条边的权值，询问从 $x$ 开始随机游走经过 $y$ 的概率。

$n \le 5 \times 10^5, m \le 2 \times 10^5$

# Fox Rocks

- 四个点分一块，每块预处理从第 $i$ 个点进去第 $j$ 个点走出的概率。

## Fox Rocks

- 四个点分一块，每块预处理从第 $i$ 个点进去第 $j$ 个点走出的概率。
- 线段树，每一个区间维护左边第 $i$ 个点进去右边第 $j$ 个点走出的概率。

# Fox Rocks

- 四个点分一块，每块预处理从第 $i$ 个点进去第 $j$ 个点走出的概率。
- 线段树，每一个区间维护左边第 $i$ 个点进去右边第 $j$ 个点走出的概率。
- $O(n \log n)$。

# 期望的线性性

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

# 期望的线性性

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- 分开计算期望，把期望转化成概率。

# Constellation

$n$ 个点，每个点有一定概率出现，问凸包的期望面积。

保证没用重点和三点共线。

$n \leq 50$。

# Constellation

- 凸包面积可以拆成相邻两个点坐标的叉积。

# Constellation

- 凸包面积可以拆成相邻两个点坐标的叉积。
- 如果两个点同时出现在凸包上，那么剩下的点一定坐落在直线的一侧。

# Constellation

- 凸包面积可以拆成相邻两个点坐标的叉积。
- 如果两个点同时出现在凸包上，那么剩下的点一定坐落在直线的一侧。
- $O(n^2)$

用一个 $n \times m$ 的网格给出一棵四联通树，树上有不超过 300 个关键点，随机选取 $k$ 个关键点，求通过这 $k$ 个关键点的最短路径长度的期望。

$n, m \leq 50$。

# Orienteering

- 答案是 $2\times$ 虚树大小 - 直径的期望。

# Orienteering

- 答案是 $2\times$ 虚树大小 - 直径的期望。
- 虚树大小的期望可以按照 DFS 序排序然后 DP。

# Orienteering

- 答案是 $2\times$ 虚树大小 - 直径的期望。
- 虚树大小的期望可以按照 DFS 序排序然后 DP。
- 枚举直径，那么能取的节点到两个端点的距离都必须不大于直径长度。

# BitToggler

给你一个长度为 $n$ 的 01 串，以及一个初始位置在 $i0$ 上的指针。

每回合随机一个数 $j$，如果之前指针在 $i$ 上，就花费 $|i-j|$ 的代价把指针移动到 $j$ 上并把第 $j$ 位取反。

不停的随机直到全部变成 0 或 1 为止，问终止时的期望代价和。

$n \leq 20$

# BitToggler

- 暴力高斯消元是 $O((2^n n)^3)$ 的。

# BitToggler

- 暴力高斯消元是 $O((2^n n)^3)$ 的。
- 考虑从 $i$ 移动到 $j$ 的期望次数，只需要记录 $i, j$ 的颜色和剩余 0 和 1 的个数以及指针是否在 $i$ 上就好了，高斯消元的状态数就减少到了 $n^2$ 级别。

# BitToggler

- 暴力高斯消元是 $O((2^n n)^3)$ 的。
- 考虑从 $i$ 移动到 $j$ 的期望次数，只需要记录 $i, j$ 的颜色和剩余 0 和 1 的个数以及指针是否在 $i$ 上就好了，高斯消元的状态数就减少到了 $n^2$ 级别。
- 时间复杂度 $O(n^6)$。

给定一个长度为 $n$ 的排列 $A$，每次在所有 $A[i] > A[i+1]$ 的 $i$ 中等概率随机一个 $i$ 交换 $A[i]$ 和 $A[i+1]$，这一步的代价是 $i$。在整个排列升序后结束。

问结束时的期望代价。

$n \leq 18$

# random

- 只考虑每一个数向右移动产生的代价，这样剩下的位置只需要保留与当前数的大小关系，状态数就变成了 $O(n2^n)$，递推即可。

- 只考虑每一个数向右移动产生的代价，这样剩下的位置只需要保留与当前数的大小关系，状态数就变成了 $O(n2^n)$，递推即可。
- $O(2^n n^2)$。

# ZJOI2015 地震后的幻想乡

给出一张图，每一条边的权值都是一个 $[0,1]$ 的随机数，问最小生成树中最长边的期望长度。

$n \leq 10$

提示：对于 $n$ 个 $[0,1]$ 之间的随机变量，第 $k$ 小的期望是 $\frac{k}{n+1}$。

# ZJOI2015 地震后的幻想乡

- 考虑求最长边是第 $k$ 小的概率。

- 考虑求最长边是第 $k$ 小的概率。
- 考虑模拟最小生成树算法的过程，从小到大把边加进去。

# ZJOI2015 地震后的幻想乡

- 考虑求最长边是第 $k$ 小的概率。
- 考虑模拟最小生成树算法的过程，从小到大把边加进去。
- 令 $f[S][i]$ 为 $S$ 的最小生成树中最大边是 $i$ 的概率，每一次枚举一个点集和使它联通的最后一条边，进行转移就可以了。

# 小技巧

- 如果 $X$ 一定是整数，那么 $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$。

# 小技巧

- 如果 $X$ 一定是整数，那么 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$。
- 容斥

# 黑暗森林

给出一棵树，每条边的边权 01 随机。

问期望直径。

$n \leq 100$

# 黑暗森林

- 枚举 $r$，算直径小于等于 $r$ 的概率。

# 黑暗森林

- 枚举 $r$，算直径小于等于 $r$ 的概率。
- 令 $dp[i][j]$ 为以 $i$ 为根的子树深度为 $j$ 的概率，合并的时候要保证直径的不超过 $r$。

# 黑暗森林

- 枚举 $r$，算直径小于等于 $r$ 的概率。
- 令 $dp[i][j]$ 为以 $i$ 为根的子树深度为 $j$ 的概率，合并的时候要保证直径的不超过 $r$。
- 每次 $O(n^2)$，总 $O(n^3)$。

# All Critical

有 $n$ 首个，每首歌每轮都有 $p$ 的概率听到，问听到所有歌的期望轮数。

$n \leq 10^6$

# All Critical

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然没有听到所有歌的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。

# All Critical

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然没有听到所有歌的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举有 $i$ 首歌没听到，那么概率是 $(1-p)^{it}$，在求和中这是一个等比数列，可以算贡献。

# All Critical

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然没有听到所有歌的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举有 $i$ 首歌没听到，那么概率是 $(1-p)^{it}$，在求和中这是一个等比数列，可以算贡献。
- 容斥。

# All Critical

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然没有听到所有歌的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举有 $i$ 首歌没听到，那么概率是 $(1-p)^{it}$，在求和中这是一个等比数列，可以算贡献。
- 容斥。
- $O(n)$。

$n \times m$ 的棋盘，每个位置有 $p_{i,j}$。

$(i,j)$ 被选中的概率为 $\frac{p_{i,j}}{S}$。

至少几轮后每一行一列至少一个被选中。

$nm \le 150, 0 \le p_{i,j} \le 9$

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然有行列没有被选的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。

# RandomPaintingOnABoard

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然有行列没有被选的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举行列进行容斥，时间复杂度 $O(2^{n+m})$。

# RandomPaintingOnABoard

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然有行列没有被选的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举行列进行容斥，时间复杂度 $O(2^{n+m})$。
- 设 $n \le m$，那么 $n \le 12$

# RandomPaintingOnABoard

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然有行列没有被选的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举行列进行容斥，时间复杂度 $O(2^{n+m})$。
- 设 $n \leq m$，那么 $n \leq 12$
- 枚举哪些行没有放，然后 $DP$ 出有奇数（偶数）行不能放，权值和为 $i$ 的方案数，累加答案。

# RandomPaintingOnABoard

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然有行列没有被选的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举行列进行容斥，时间复杂度 $O(2^{n+m})$。
- 设 $n \le m$，那么 $n \le 12$
- 枚举哪些行没有放，然后 $DP$ 出有奇数（偶数）行不能放，权值和为 $i$ 的方案数，累加答案。
- $O(2^n n^2 m)$。

# 合唱队形

给出一个长度为 $n$ 的字符集序列，初始所有字符集为空。有一些操作，每个操作是在某一个字符集中插入一个小写字符，保证所有操作都不相同。同时给出一个长度为 $m$ 的字符串。

每次等概率随机一个操作进行，直到存在一个长度为 $m$ 的区间可以匹配这个字符串为止。能匹配值第 $i$ 个字符集中存在字符串第 $i$ 位的字符。

问期望步数，对一个质数取模。

$T \leq 10, n, m \leq 30$

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然不能匹配的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。

# 合唱队形

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然不能匹配的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举哪些位置能被满足，容斥出都不能匹配的概率，$O(2^{n-m}n)$

# 合唱队形

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然不能匹配的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举哪些位置能被满足，容斥出都不能匹配的概率，$O(2^{n-m}n)$
- 贡献只和满足位置的奇偶性以及哪些位置必须放有关，可以得到一个 $O(2^m n^3)$ 的 DP。

# 合唱队形

- 令 $f_t$ 为 $t$ 时刻仍然不能匹配的概率，那么答案就是 $\sum_{i=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举哪些位置能被满足，容斥出都不能匹配的概率，$O(2^{n-m}n)$
- 贡献只和满足位置的奇偶性以及哪些位置必须放有关，可以得到一个 $O(2^m n^3)$ 的 DP。
- $O(2^{\frac{n}{2}} n^2)$。

# 小技巧 II

- $E(XY) \neq E(X)E(Y)$，只有在 $XY$ 独立的时候才成立。

# 小技巧 II

- $E(XY) \neq E(X)E(Y)$，只有在 $XY$ 独立的时候才成立。
- $E(\sum a_i \sum b_i) = \sum E(a_i b_j)$

# Year of More Code Jam

有若干次比赛，每次比赛的开始时间在前 $n$ 天等概率随机。每次比赛都有若干次测试，其中第 $j$ 次测试在比赛开始后的第 $d_{i,j}$ 天。

一天的愉悦值为这一天测试个数的平方，问所有天的愉悦值之和的期望。

$n \le 10^9$，测试数总和不超过 2500。

## Year of More Code Jam

- 枚举两次测试，求它们在同一天举行的概率。累加贡献。

# EASYEX

有一个 $K$ 面骰子，投到 $[1,K]$ 的每一个数的概率是相同的。同时给出两个数字 $L,K$ ，现在将这个骰子投 $N$ 次，令 $a_i$ 为投出数字为 $i$ 的次数，求 $\prod_{i=0}^{L} a_i^F$ 的期望，对大质数取模。

$N,K \le 10^9, F \le 1000, L \times F \le 50000$

- 令 $x_{i,j}$ 为第 $j$ 次投骰子是否投出 $i$，那么答案就是 $\prod_i(\sum_j x_{i,j})^F$

# EASYEX

- 令 $x_{i,j}$ 为第 $j$ 次投骰子是否投出 $i$，那么答案就是 $\prod_i(\sum_j x_{i,j})^F$
- 展开，每一项的次数都是 $LF$，其中涉及到每一个数的次数都是 $F$。这一项的贡献只有当涉及到每一个时刻的变量只有一个时，才是 $\frac{1}{K^m}$，否则是 0，其中 $m$ 是涉及到的时刻数。

# EASYEX

- 令 $x_{i,j}$ 为第 $j$ 次投骰子是否投出 $i$，那么答案就是 $\prod_i(\sum_j x_{i,j})^F$
- 展开，每一项的次数都是 $LF$，其中涉及到每一个数的次数都是 $F$。这一项的贡献只有当涉及到每一个时刻的变量只有一个时，才是 $\frac{1}{K^m}$，否则是 0，其中 $m$ 是涉及到的时刻数。
- DP 出涉及 $i$ 个时刻贡献为正的项数的系数和，快速幂 FFT 优化，累加答案。

# EASYEX

- 令 $x_{i,j}$ 为第 $j$ 次投骰子是否投出 $i$，那么答案就是 $\prod_i(\sum_j x_{i,j})^F$
- 展开，每一项的次数都是 $LF$，其中涉及到每一个数的次数都是 $F$。这一项的贡献只有当涉及到每一个时刻的变量只有一个时，才是 $\frac{1}{K^m}$，否则是 0，其中 $m$ 是涉及到的时刻数。
- DP 出涉及 $i$ 个时刻贡献为正的项数的系数和，快速幂 FFT 优化，累加答案。
- 时间复杂度 $O(F^2 + FL\log^2 F)$。

# DP 套 DP

- 给出一个 DP 题，问有多少种输入能产生特定的输出。

# DP 套 DP

- 给出一个 DP 题，问有多少种输入能产生特定的输出。
- 状压 DP 数组进行转移。

# Hero meet devil

给出一个只由 $ACTG$ 组成的字符串 $S$，问有多少个长度为 $m$ 的字符串 $T$，满足 $LCS(S,T)=i$，对每一个 $i \in [0,|S|]$ 都输出。

对一个大质数取模。

$|S| \leq 15, m \leq 1000$

- DP 求最长公共子序列，$f_{i,j}$ 表示 $T$ 中前 $i$ 个字符和 $S$ 中前 $j$ 个字符的 $LCS$.

# Hero meet devil

- DP 求最长公共子序列，$f_{i,j}$ 表示 $T$ 中前 $i$ 个字符和 $S$ 中前 $j$ 个字符的 $LCS$.
- 性质 $0 \leq f_{i,j} - f_{i,j-1} \leq 1$。

- DP 求最长公共子序列，$f_{i,j}$ 表示 $T$ 中前 $i$ 个字符和 $S$ 中前 $j$ 个字符的 $LCS$.
- 性质 $0 \leq f_{i,j} - f_{i,j-1} \leq 1$。
- 对于同一个 $i$，不同的数组只有 $2^m$ 种。

- DP 求最长公共子序列，$f_{i,j}$ 表示 $T$ 中前 $i$ 个字符和 $S$ 中前 $j$ 个字符的 $LCS$.
- 性质 $0 \leq f_{i,j} - f_{i,j-1} \leq 1$。
- 对于同一个 $i$，不同的数组只有 $2^m$ 种。
- $dp_{i,j}$ 为 $T$ 中前 $i$ 个字符，$f$ 数组为 $j$ 的方案数。

# Hero meet devil

- DP 求最长公共子序列，$f_{i,j}$ 表示 $T$ 中前 $i$ 个字符和 $S$ 中前 $j$ 个字符的 $LCS$.
- 性质 $0 \le f_{i,j} - f_{i,j-1} \le 1$。
- 对于同一个 $i$，不同的数组只有 $2^m$ 种。
- $dp_{i,j}$ 为 $T$ 中前 $i$ 个字符，$f$ 数组为 $j$ 的方案数。
- $O(n2^m)$

# StringPath

给出一个 $n \times m$ 的路径，再给你两个长度为 $n+m-1$ 的小写字符串 $A$ 和 $B$。问有多少种给矩阵的每个格子里填小写字母的方法，使得矩阵存在两条从左上角到右下角只能向右向下的路径，经过的字符分别组成 $A$ 和 $B$。

$n, m \leq 8$

# StringPath

- 轮廓线 DP，每次只需要状压轮廓线上 $m$ 个位置，是否存在到这些位置的字符串是 $A(B)$ 的前缀。

# StringPath

- 轮廓线 DP，每次只需要状压轮廓线上 $m$ 个位置，是否存在到这些位置的字符串是 $A(B)$ 的前缀。
- 状态数为 $2^{2m} = 2^{16}$。

# StringPath

- 轮廓线 DP，每次只需要状压轮廓线上 $m$ 个位置，是否存在到这些位置的字符串是 $A(B)$ 的前缀。
- 状态数为 $2^{2m} = 2^{16}$。
- 时间复杂度为 $O(n2^{2m})$。

# Jigsaw Puzzle

给定一个 $n \times m$ 的棋盘，你可以在上面删去一些格子，但你要保证删去这些格子后，剩下的格子可以用 $1 \times 2$ 的骨牌完全覆盖。

问删除格子的方案数。

$n \le 6, m \le 1000$

# Jigsaw Puzzle

- 状压 DP 判断一个状态是否能覆盖，$O(m2^n)$。

- 状压 DP 判断一个状态是否能覆盖，$O(m2^n)$。
- 直接状压状态数有 $2^{2^n} = 2^{64}$ 种，不可行。

# Jigsaw Puzzle

- 状压 DP 判断一个状态是否能覆盖，$O(m2^n)$。
- 直接状压状态数有 $2^{2^n} = 2^{64}$ 种，不可行。
- 可以发现连续两个格子被上一行占用的状态一定不优于两行都横着放，这样只有 21 种状态。

# Jigsaw Puzzle

- 状压 DP 判断一个状态是否能覆盖，$O(m2^n)$。
- 直接状压状态数有 $2^{2^n} = 2^{64}$ 种，不可行。
- 可以发现连续两个格子被上一行占用的状态一定不优于两行都横着放，这样只有 21 种状态。
- 一个棋盘对应的所有可行状态中，空白位置的奇偶性一定相同，状态数缩小到了 $2^{10} + 2^{11}$。

# Turn Game

一个 $n \times m$ 的棋盘，初始全白，每一次可以选定一个 $a \times b$ 的联通块把这个联通块中的所有数反色，其中满足 $a = 1$ 或 $b = 1$。问 $k$ 步之内能达到的本质不同的棋盘有多少个。

$n \le 4, m \le 10, 0 \le k \le nm, T \le 600$

## Turn Game

- 判断一个状态的最短步数，枚举列，令 $dp_{i,S}$ 为 $i$ 列中 $S$ 这些格子会被之前的行翻转影响的最少操作数。

# Turn Game

- 判断一个状态的最短步数，枚举列，令 $dp_{i,S}$ 为 $i$ 列中 $S$ 这些格子会被之前的行翻转影响的最少操作数。
- 对于 $S$ 和 $T$，如果 $|S| = |T| + 1$，那么 $0 \le dp_{i,S} - dp_{i,T} \le 1$，所以状态数不超过 $2^{2^n}$ 种。

# Turn Game

- 判断一个状态的最短步数，枚举列，令 $dp_{i,S}$ 为 $i$ 列中 $S$ 这些格子会被之前的行翻转影响的最少操作数。
- 对于 $S$ 和 $T$，如果 $|S| = |T| + 1$，那么 $0 \le dp_{i,S} - dp_{i,T} \le 1$，所以状态数不超过 $2^{2^n}$ 种。
- 时间复杂度 $O(2^{2^n} m)$

一个 $n \times m$ 的棋盘，每一个格子都是 1 或 $-1$，棋盘的左上角是入口，下边界和右边界是出口，其中在一些出口上放了篮子，从这些出口出来的东西会被接住，剩下的会掉到地上。

现在依次放入 $K$ 个小球，如果当前格子是 1 小球会从这个格子的右边界出去，否则会从下边界出去。小球离开这个格子后这个格子的权值会取反。第 $i+1$ 个小球只有在第 $i$ 个小球掉出棋盘后才会被放入。

给出 $n, m, K$ 和每一个出口是否有篮子，接着有 $Q$ 组询问，给出 $[L_i, R_i]$，问接住的小球在 $[L_i, R_i]$ 间的不同的网格有多少个。对一个大质数取模。

$n, m \leq 10, K \leq 10^{18}, Q \leq 100000$

# 量子态的棋盘

- 有 $n$ 个球到达了格子，那么一定有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个小球到了右边，$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个小球到了下边，最多只有 1 个小球的去向和权值有关。

## 量子态的棋盘

- 有 $n$ 个球到达了格子，那么一定有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个小球到了右边，$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个小球到了下边，最多只有 1 个小球的去向和权值有关。
- 先递推一遍，这样最多只有 $n^2$ 个小球还残留在网格中，所以接住的小球数最多只有 $n^2$ 种。

# 量子态的棋盘

- 有 $n$ 个球到达了格子，那么一定有 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 个小球到了右边，$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 个小球到了下边，最多只有 1 个小球的去向和权值有关。
- 先递推一遍，这样最多只有 $n^2$ 个小球还残留在网格中，所以接住的小球数最多只有 $n^2$ 种。
- 轮廓线 DP，状压到达轮廓线上每一个位置的小球有多少个。

# 谢谢大家