位运算简介及实用技巧

---N 皇后问题二进制优化

n 皇后问题位运算版

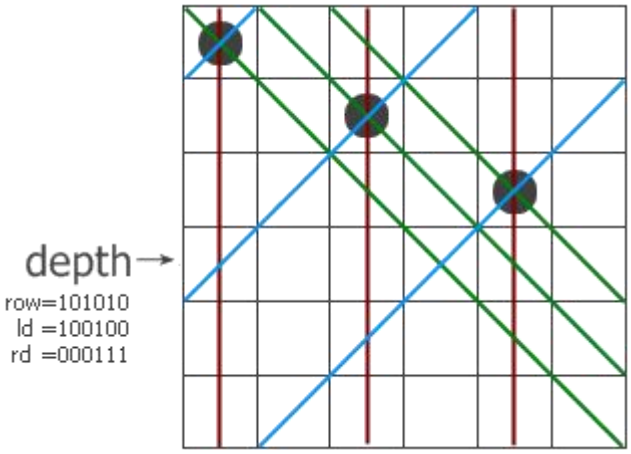
n 皇后问题是啥我就不说了吧，学编程的肯定都见过。下面的十多行代码是 n 皇后问题的一个高效位运算程序，看到过的人都夸它牛。初始时，upperlim:=(1 shl n)-1。主程序调用 test(0,0,0)后 sum 的值就是 n 皇后总的解数。拿这个去交 USACO，0.3s，暴爽。

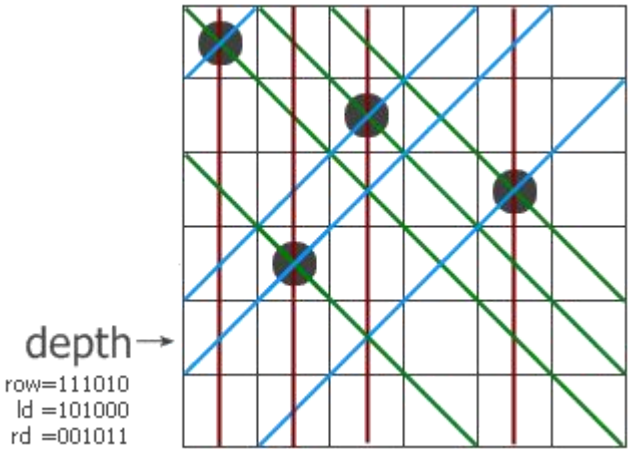
```
procedure  test(row,ld,rd:longint);
var
     pos,p:longint;
begin


{ 1} if  row<>upperlim  then
{ 2} begin
{ 3}     pos:=upperlim  and  not  (row  or  ld  or  rd);
{ 4}     while  pos<>0  do
{ 5}     begin
{ 6}       p:=pos  and  -pos;
{ 7}       pos:=pos-p;
{ 8}       test(row+p,(ld+p)shl  1,(rd+p)shr  1);
{ 9}     end;
{10} end
{11} else  inc(sum);
```

```
end;
```

乍一看似乎完全摸不着头脑，实际上整个程序是非常容易理解的。这里还是建议大家自己单步运行一探究竟，实在没研究出来再看下面的解说。





和普通算法一样，这是一个递归过程，程序一行一行地寻找可以放皇后的地方。过程带三个参数，row、ld 和 rd，分别表示在纵列和两个对角线方向的限制条件下这一行的哪些地方不能放。我们以 6×6 的棋盘为例，看看程序是怎么工作的。假设现在已经递归到第四层，前三层放的子已经标在左图上了。红色、蓝色和绿色的线分别表示三个方向上有冲突的位置，位于该行上的冲突位置就用 row、ld 和 rd 中的 1 来表示。把它们三个并起来，得到该行所有的禁位，取反后就得到所有可以放的位置（用 pos 来表示）。前面说过-a 相当于 not a + 1，这里的代码第 6 行就相当于 pos and (not pos + 1)，其结果是取出最右边的那个 1。这样，p 就表示该行的某个可以放子的位置，把它从 pos 中移除并递归

调用 test 过程。注意递归调用时三个参数的变化，每个参数都加上了一个禁位，但两个对角线方向的禁位对下一行的影响需要平移一位。最后，如果递归到某个时候发现 row=111111 了，说明六个皇后全放进去了，此时程序从第 1 行跳到第 11 行，找到的解的个数加一。

~~~~~~~~~~~~~~~~~~ 华丽的分割线 ~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Gray 码

假如我有 4 个潜在的 GF，我需要决定最终到底和谁在一起。一个简单的办法就是，依次和每个 MM 交往一段时间，最后选择给我带来的“满意度”最大的 MM。但看了 dd 牛的理论后，事情开始变得复杂了：我可以选择和多个 MM 在一起。这样，需要考核的状态变成了 2^4=16 种（当然包括 0000 这一状态，因为我有可能是玻璃）。现在的问题就是，我应该用什么顺序来遍历这 16 种状态呢？

传统的做法是，用二进制数的顺序来遍历所有可能的组合。也就是说，我需要以 0000->0001->0010->0011->0100->...->1111 这样的顺序对每种状态进行测试。这个顺序很不科学，很多时候状态的转移都很耗时。比如从 0111 到 1000 时我需要暂时甩掉当前所有的 3 个 MM，然后去把第 4 个 MM。同时改变所有 MM 与我的关系是一件何等巨大的工程啊。因此，我希望知道，是否有一种方法可以使得，从没有 MM 这一状态出发，每次只改变我和一个 MM 的关系（追或者甩），15 次操作后恰好遍历完所有可能的组合（最终状态不一定是 1111）。大家自己先试一试看行不行。

解决这个问题的方法很巧妙。我们来说明，假如我们已经知道了 n=2 时的合法遍历顺序，我们如何得到 n=3 的遍历顺序。显然，n=2 的遍历顺序如下：

00
~~~~~~~~~~~~~~~~~~

01

11

10

你可能已经想到了如何把上面的遍历顺序扩展到 n=3 的情况。n=3 时一共有 8 种状态，其中前面 4 个把 n=2 的遍历顺序照搬下来，然后把它们对称翻折下去并在最前面加上 1 作为后面 4 个状态：

000

001

011

010 ↑

——

110 ↓

111

101

100

用这种方法得到的遍历顺序显然符合要求。首先，上面 8 个状态恰好是 n=3 时的所有 8 种组合，因为它们是在 n=2 的全部四种组合的基础上考虑选不选第 3 个元素所得到的。然后我们看到，后面一半的状态应该和前面一半一样满足“相邻状态间仅一位不同”的限制，而“镜面”处则是最前面那一位数不同。再次翻

折三阶遍历顺序，我们就得到了刚才的问题的答案：

0000

0001

0011

0010

0110

0111

0101

0100

1100

1101

1111

1110

1010

1011

1001

1000

这种遍历顺序作为一种编码方式存在，叫做 Gray 码（写个中文让蜘蛛来抓：格雷码）。它的应用范围很广。比如，n 阶的 Gray 码相当于在 n 维立方体上的 Hamilton 回路，因为沿着立方体上的边走一步，n 维坐标中只会有一个值改变。再比如，Gray 码和 Hanoi 塔问题等价。Gray 码改变的是第几个数，Hanoi 塔就该移动哪个盘子。比如，3 阶的 Gray 码每次改变的元素所在位置依次为 1-2-1-3-1-2-1，这正好是 3 阶 Hanoi 塔每次移动盘子编号。如果我们可以快

速求出 Gray 码的第 n 个数是多少，我们就可以输出任意步数后 Hanoi 塔的移动步骤。现在我告诉你，Gray 码的第 n 个数（从 0 算起）是 n xor (n shr 1)，你能想出来这是为什么吗？先自己想想吧。

下面我们把二进制数和 Gray 码都写在下面，可以看到左边的数异或自身右移的结果就等于右边的数。

二进制数	Gray 码
000	000
001	001
010	011
011	010
100	110
101	111
110	101
111	100

从二进制数的角度看，“镜像”位置上的数即是对原数进行 not 运算后的结果。比如，第 3 个数 010 和倒数第 3 个数 101 的每一位都正好相反。假设这两个数分别为 x 和 y，那么 x xor (x shr 1)和 y xor (y shr 1)的结果只有一点不同：后者的首位是 1，前者的首位是 0。而这正好是 Gray 码的生成方法。这就说明了，Gray 码的第 n 个数确实是 n xor (n shr 1)。

; 今年四月份 mashuo 给我看了这道题，是二维意义上的 Gray 码。题目大意是说，把 0 到 2^(n+m)-1 的数写成 2^n * 2^m 的矩阵，使得位置相邻两数的二进制表示只有一位之差。答案其实很简单，所有数都是由 m 位的 Gray 码和 n 位 Gray 码拼接而成，需要用左移操作和 or 运算完成。完整的代码如下：

```
var
  x,y,m,n,u:longint;
```

```
begin
  readln(m,n);
  for x:=0 to 1 shl m-1 do begin
    u:=(x xor (x shr 1)) shl n; //输出数的左边是一个 m 位的 Gray 码
    for y:=0 to 1 shl n-1 do
      write(u or (y xor (y shr 1)),' '); //并上一个 n 位 Gray 码
    writeln;
  end;
end.
```