利用互相牵制减少枚举

Token

November 11, 2011

Contents

Abstract

枚举是简单而实用的方法，效率不高是它的主要缺点。采用此方法，往往要通过分析减少枚举量。本文只看因素相互制约的角度。

1 典型的例子

求一个数的约数个数显然是一个简单的例子。我们知道如果d是数n的约数，那么$d' = \frac{n}{d}$也是数n约数。由于$dd' = n$，我们看到d和d'相互牵制。因而可以设计这样的算法：如果$d \le \sqrt{n}$，那么枚举d。如果$d > \sqrt{n}$，那么$d' < \sqrt{n}$，这时枚举d'。

枚举量只有$O(\sqrt{n})$。

2 类似的例子

给定奇数n，求最大的奇数x，使得$n = kx^2$。[1]

考虑到k和x^2有牵制关系。如果$x \le n^{\frac{1}{3}}$，也就是$x^2 \le n^{\frac{2}{3}}$，那么我们可以直接枚举x。如果$x > n^{\frac{1}{3}}$，也就是$x^2 > n^{\frac{2}{3}}$。这种情形下，$k < n^{\frac{1}{3}}$，那么枚举k。

枚举量只有$O(n^{\frac{1}{3}})$。

3 估计上界的例子

有些问题不像前两例一样，有一个明确的界n。我们需要估计它的上界。

给a, b, c，求正整数a', b', c'满足$a' \times b' = c'$，且$|a-a'|+|b-b'|+|c-c'|$最小。[2]

这里有一个明显的牵制：$a' \times b' = c'$。但在这里，c'不是给定的。难以使用一般的方法。

[1] Ural1854

[2] SRM 522 Div 1 Level 2

这个时候，我们注意到，如果$a' = b' = c' = 1$，那么上式显然成立。因此答案最多是$a+b+c-3$。也就是说$|a-a'|+|b-b'|+|c-c'| \le a+b+c-3$。这样，我们知道$c' \le a+b+2c-3$。

从而，我们有$\min\{a', b'\} \le \sqrt{a+b+2c-3}$。我们枚举$a', b'$中较小的数。不妨假设枚举$a'$，我们只要取合适的$b'$，让$c'$尽量接近$c$。

枚举量是$O(\sqrt{a+b+2c-3})$。

4 复杂的例子

白特兰移动是一个移动电话服务供应商. 通常情况下对每条信息收费10分. 另外它提供月套餐, 以一个特定的费用让你可以每月发一定数目的短信. 你可以买任意数目的套餐. 如果你发的短信超过你买的月套餐, 超出的部分按正常收费. 一共有两种月套餐. 一种价格pay_1, 有$pack_1$条短信. 一种价格pay_2, 有$pack_2$条短信. 你希望每月发$totSMS$条短信. 最小化你每月的支出. [3]

首先我们要把简单的情形解决。不买任何套餐的。只买一种套餐的。

只买一种套餐的情况，肯定是买跟短信数尽量接近，剩下用10分补。或者直接买超出数目。

现在就是买两种套餐的情况了。这两个套餐的包短信数存在着制约关系。如果包的短信数多，那么我们可以直接枚举买了几个。如果包的短信数少，那么我们更愿意买性价比高的。因为包得少的话还很灵活。

考虑到如果$pack_1$和$pack_2$中有一个超过了10^6次方，就可以直接枚举了。否则，由于我们肯定可以不多耗钱地得到$pack_1 * pack_2$条短信，因此只要考虑短信数模$pack_1 * pack_2$的余数。这样，要枚举的数目少于10^6次方。

[3]SRM 314 Div 1 Level 3