第4章 插值法

4.1 引言

4.1.1 插值问题及代数多项式插值

1 插值 已知某些(有限)点的函数值求其余点的函数值。

定义 函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有函数值 $y_i = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$

即

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \end{array}$$

其中$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$是区间$[a,b]$上的互异点，要构造一个简单的函数$\varphi(x)$作为$f(x)$的近似表达式，使满足

$$\varphi(x_i) = y_i, i = 0,1,\cdots,n \quad \text{(插值条件)}$$

这类问题称为插值问题。

$f(x)$ -----被插值函数 $\varphi(x)$-----$f(x)$的插值函数,

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ -----插值节点， $[a,b]$称为插值区间

求插值函数的方法称为插值法。

若$x \in [a,b]$，可计算$f(x)$ 的近似值$\varphi(x)$, 则 x 称为插值点。

2　代数多项式插值　当选择代数多项式作为插值函数时，称为代数多项式插值。

定义(代数多项式插值)　设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上已知$n+1$个点　$a \le x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n \le b$上的函数值

$$y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n$$

求一个次数不高于n的代数多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

使满足插值条件　$P(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0,1,\cdots,n$

称$P(x)$为 $f(x)$ 的n次插值多项式。

代数插值的特点：n次代数多项式插值满足在$n+1$个节点上插值多项式$P(x)$ 和被插值函数$y=f(x)$相等，而且插值多项式$P(x)$的次数不超过n次。

4.1.2 代数多项式插值的唯一性

定理 $n+1$个互异节点处满足插值条件 $P(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n$ 的n次代数多项式 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是唯一的。

证 由 $P(x_i)=y_i \quad ,i=0,1,\cdots,n$ 得

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

其系数行列式

$$V(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^n \\ & \cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)\neq 0$$

方程组有唯一解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ ，因此$P(x)$存在且唯一。

唯一性说明不论用那种方法构造的插值多项式只要满足相同的插值条件，其结果都是互相恒等的。

推论　当$f(x)$是次数不超过n的多项式时，其n次插值多项式就是$f(x)$本身。

例　在直线上取两个点进行插值，插值多项式就是这条直线。在二次抛物线上取三个点进行插值，插值多项式就是这条二次抛物线。

在直线上取三个点进行插值，插值多项式还是这条直线。在二次抛物线上取四个点进行插值，插值多项式也是这条二次抛物线。

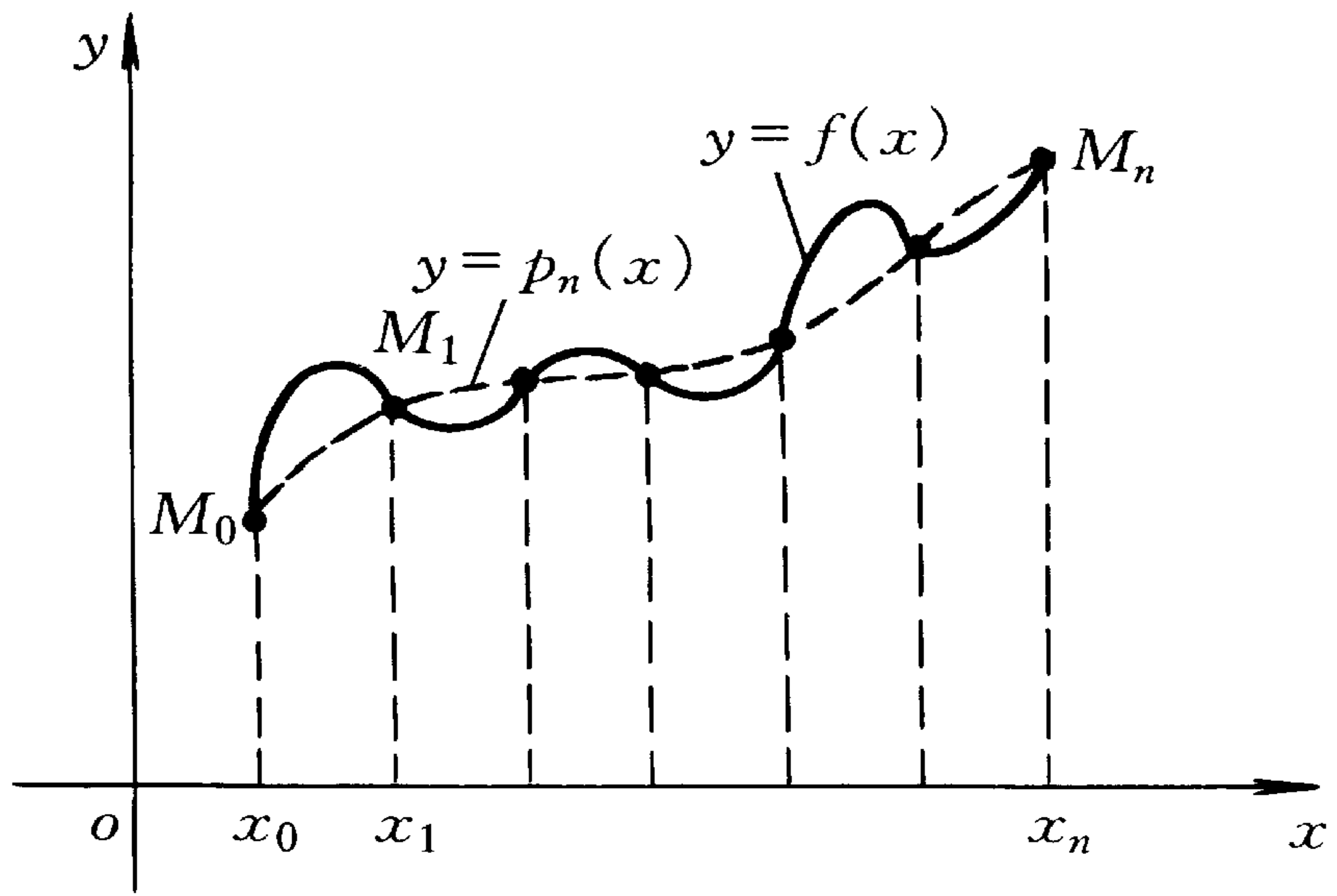
例　已知函数 $f(x)=56x^3+24x^2+5$ 在点 $2^0,2^1,2^5,2^7$ 的函数值，求其三次插值多项式。

解　对于次数不大于 n 的多项式，其 n 次插值多项式就是其本身。所以其三次插值多项式 $P(x)=f(x)=56x^3+24x^2+5$

4.1.3 插值的几何意义

几何意义是一条经过平面上 **n+1**个节点 $M_i(x_i, y_i), i=0,1,\cdots,n$

的***n***次抛物线 ***y=P (x)***,近似代替曲线 ***y=f(x)***。



4.2 拉格朗日插值

4.2.1 线性插值(二点一次插值)

1 定义

已知$f(x_0)=y_0$，$f(x_1)=y_1$, $x_0 \neq x_1$

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

要构造线性函数 $P(x)=a_0+a_1x$ ，

使满足插值条件 $P(x_0)=y_0$，$P(x_1)=y_1$.

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$P(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

2 表达式

拉格朗日插值多项式

$$P(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

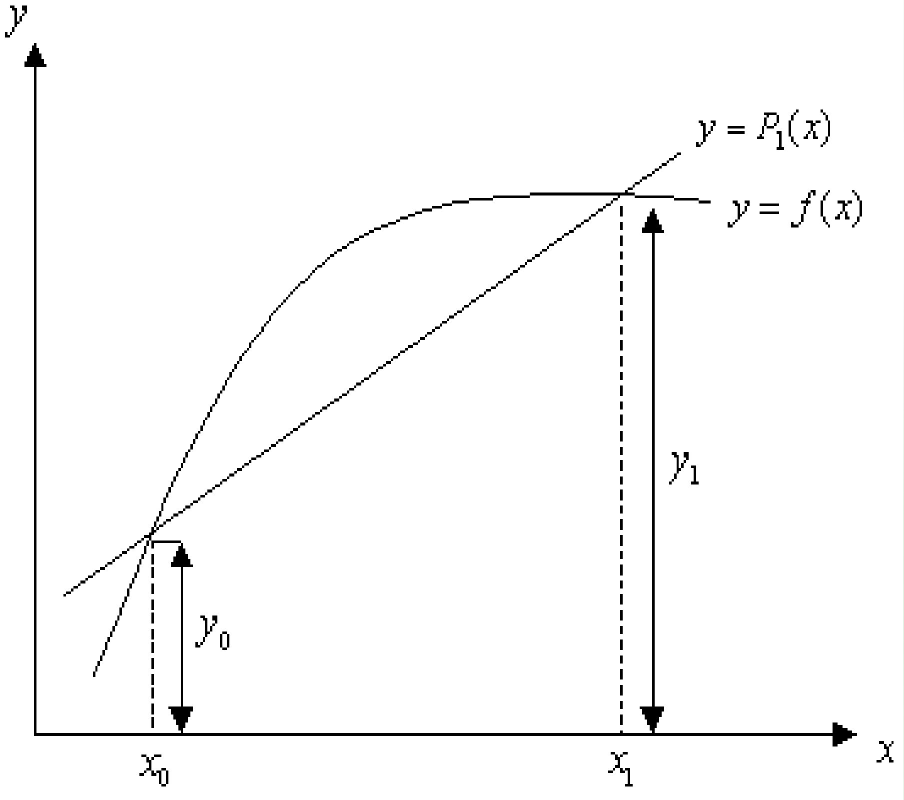
公式的结构：它是两个一次函数的线性组合

线性插值基函数

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

3　线性插值的几何意义

用直线 $P(x)$ 近似代替被插值函数 $f(x)$。



例　造数学用表。平方根表

给定函数在100、121两点的平方根如下表，试用线性插值求115的平方根。

x	*100*	*121*
y	*10*	*11*

解　$x_0=100$, $x_1=121$, $x=115$

$$P(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

$$\sqrt{115}\approx P(115)=\frac{115-121}{100-121}\times 10+\frac{115-101}{121-100}\times 11=10.914$$

抛物线（二次）插值: (三点二次插值)

1 定义　已知$f(x)$在三个互异点x_0, x_1, x_2的函数值y_0, y_1, y_2

构造一个次数不超过二次的多项式

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

使满足插值条件

$$P(x_i) = y_i \quad , \quad (i = 0, 1, 2)$$

2 公式的构造：拉格朗日二次插值多项式

$$P(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

满足插值条件 $P(x_i) = y_i$ ， $(i = 0,1,2)$

$$l_0 = A(x - x_1)\cdot(x - x_2)$$

$$l_0(x_0) = A(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2) = 1$$

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)}$$

$$l_0 = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)}$$

插值基函数	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

$$l_0 = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)} \quad l_1 = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)} \quad l_2 = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)}$$

例 **造**平方根表 已知100，121，144的平方根，计算115的平方根的近似值。

x	100 121 144
y	10 11 12

解

$$P(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\times 10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\times 11$$

$$+\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\times 12$$

$$f(115)\approx P(115)=10.7228$$

二次插值也称为抛物插值。

当三点$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$位于一条直线上时，显然插值函数的图形是直线。

4.2.2 拉格朗日插值多项式

定理　若

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\qquad k=0,1,\cdots,n$$

则

$$\begin{cases}l_k(x_i)=1\ (k=i), & \\ l_k(x_i)=0\ (k\neq i), & i、k=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

$l_k(x)$称为关于节点x_i(i=0,1,…,n)的***n*次插值基函数。**

基函数的特点

1. 基函数的个数等于节点数。
2. $n+1$个节点的基函数是n次代数多项式。
3. 基函数和每一个节点都有关。节点确定，基函数就唯一的确定。
4. 基函数和被插值函数无关。
5. 基函数之和为1。

定理　***n*次拉格朗日插值多项式**

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+\cdots+y_n l_n(x)$$

$$\text{其中} l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

证　基函数是关于*x*的*n*次多项式，所以*p*(*x*)是关于*x*的不超过*n*次的多项式。

又

$$p(x_i)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x_i)=y_i$$

满足插值条件。

拉格朗日三次多项式

$$P(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

4.2.3 插值余项和误差估计：

余项(截断误差) $R(x)=f(x)-P(x)$

定理 设函数$f(x)$在包含节点$x_0, x_1,\ldots, x_n$的区间$[a,b]$上有$n+1$阶导数，则

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

其中 $\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ $,\xi\in(a,b)$

证 令x是区间$[a,b]$上任一固定点，当$x=x_i\ (i=0,1,\ldots,n)$时，由插值条件知$R(x_i)=0$，左=右，结论显然成立。

当x是$[a,b]$上除节点外任一个固定点时，作辅助函数

$$F(t)=f(t)-P(t)-\frac{\omega(t)}{\omega(x)}R(x)$$

当$t=x, x_0, x_1, \ldots, x_n$时 $F(t)=0$，$F(t)$在区间$[a,b]$上至少有$n+2$个互异的零点$x, x_0, x_1, \ldots, x_n$。

根据罗尔定理， $F'(t)$在连续函数$F(t)$每两个零点之间有一个零点。即$F'(t)$在(a,b)内至少有$n+1$个互异的零点，$F''(t)$ 在(a,b)内至少有n个互异零点。依此类推，可知$F^{(n+1)}(t)$在(a,b)内至少有一个零点ξ，即$F^{(n+1)}(\xi)=0$，辅助函数两端对t求$n+1$阶导数，并比较其两端，有

$$F^{(n+1)}(\xi)=0=f^{(n+1)}(\xi)-0-\frac{(n+1)!}{\omega(x)}R(x)$$

从而

$$\boxed{R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)}$$

结论成立。

当插值点$x \in (a,b)$时称为内插，否则称为外插。

内插的精度高于外插的精度。

线性插值多项式的截断误差为

$$R_1(x)=f(x)-P_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

ξ是在包含x, x_0, x_1的区间内某数。

例1 给定函数$y=\ln x$在两点10、11的值如下表，试用线性插值求ln10.5的近似值，并估计截断误差。

x	10	11
y	2.303	2.398

$$P_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

解 $f(x)=\ln x$，$x_0=10$，$x_1=11$，$x=10.5$

$$\ln 10.5\approx P_1(10.5)=\frac{10.5-11}{10-11}\times 2.303+\frac{10.5-10}{11-10}\times 2.398=2.3505$$

$$f'(x)=\frac{1}{x},\qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}\qquad \max_{10\le\xi\le 11}\left|f''(\xi)\right|\le 1/10^2=0.01$$

$$\left|R_1(10.5)\right|\le\frac{0.01}{2!}\left|(10.5-10)(10.5-11)\right|=0.00125$$

例 设 $f(x)=x^4$**，用拉格朗日余项定理写出以**$-1,0,1,3$ **为节点的三次插值多项式。**

解

$$R(x)=f(x)-P(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)=\frac{4!}{4!}(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)$$

$$P(x)=x^4-x(x+1)(x-1)(x-3)=x^4-(x^3-x)(x-3)$$

三次插值多项式 $P(x)=3x^3+x^2-3x$