莫比乌斯反演

中山纪念中学 宋新波

例1.[HAOI2011]Problem b

- **题目描述:**

对于给出的T个询问,每次求有多少个数对(x, y),满足$a \le x \le b, c \le y \le d$,且$\gcd(x, y) = k$, $\gcd(x, y)$函数为x和y的最大公约数。

- **输入格式:**

第一行一个整数T,接下来T行每行五个整数，分别表示a, b, c, d, k。

- **输出格式:**

共T行，每行一个整数表示满足要求的数对(x, y)的个数。

- **样例输入:**

2

2 5 1 5 1

1 5 1 5 2

- **样例输出:**

14

3

- **数据范围:**

$20\%: 1 \le T \le 100, 1 \le a \le b \le 100, 1 \le c \le d \le 100, 1 \le k \le 100$

$50\%: 1 \le T \le 1000, 1 \le a \le b \le 1000, 1 \le c \le d \le 1000, 1 \le k \le 1000$

$70\%: 1 \le T \le 1000, 1 \le a \le b \le 10000, 1 \le c \le d \le 10000, 1 \le k \le 10000$

$100\%: 1 \le T \le 50000, 1 \le a \le b \le 50000, 1 \le c \le d \le 50000, 1 \le k \le 50000$

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法一：**
- 枚举$[a,b]$中的每一个数x,再枚举$[c,d]$中的每一个数y，判断$\gcd(x,y)$是否等于k,

单次询问的时间复杂度为$O(nm\ln n)$(其中$n=b-a,m=d-c$)

- 以上方法可以优化,令$x=k*x',y=k*y'$,则：

$a\le k*x'\le b$得$\left\lceil\frac{a}{k}\right\rceil\le x'\le\left\lfloor\frac{b}{k}\right\rfloor$，同理得$\left\lceil\frac{c}{k}\right\rceil\le y'\le\left\lfloor\frac{d}{k}\right\rfloor$,

枚举x',y'，判断$\gcd(x',y')$是否等于1即可。

- 询问的时间复杂度为$O(T\frac{nm\ln\frac{n}{k}}{k^2})$，预计得分20分。

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法二：**
- 设$Ans(n,m)$表示有多少个数对(x,y)满足$1\le x\le n, 1\le y\le m$且$\gcd(x,y)=k$，则原问题的答案$=Ans(b,d)-Ans(a-1,d)-Ans(b,c-1)+Ans(a-1,c-1)$
- 计算$Ans(n,m)$时，先枚举1到$\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$中的每一个数$x$，再枚举1到$\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor$的每一个数$y$，判断$\gcd(x,y)$是否等于1
- 设$f(x)$等于1到$\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor$中与$x$互质的数的个数，则$Ans(n,m)=\sum_{x=1}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}f(x)$

设$x=p_1^{a_1}*p_2^{a_2}*\ldots*p_t^{a_t}$（$p_i$是$x$的互异质因子）

用A_i表示“1到$\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor$中含有因子$p_i$的数”

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法二：**
- 利用容斥原理得：

$$f(x)=\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor-\left|\bigcup_{i=1}^{t}A_i\right|=\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor-\sum_{i=1}^{t}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le t}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le t}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\dots+(-1)^t|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_t|$$

$$=\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor+\sum_{r=1}^{t}(-1)^r\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le t}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_r}\right|=\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor+\sum_{r=1}^{t}(-1)^r\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_r\le t}\frac{\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor}{p_{i_1}*p_{i_2}*\dots*p_{i_r}}$$

- 如$x=30,\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor=100$时，$x=2*3*5$

$$f(30)=100-\left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2*3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2*5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3*5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{2*3*5}\right\rfloor=26$$

- 计算$f(x)$的时间复杂度为$O\left(2^{g(x)}\right)$，$g(x)$为x的质因子的个数。
- 对于题目50%的数据,$b,d\le 1000, 2*3*5*7*11=2310>1000$,这里的$g(x)$最多为4，此方法预计得分50分。

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法三：**
- 设$f(k)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m$且$\gcd(x,y)=k$的数对$(x,y)$的个数，假设$n \le m$,如果$n > m$可以先进行交换。直接计算$f(k)$很难。
- 设$g(k)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m$且$k|\gcd(x,y)$的数对$(x,y)$的个数,$g(k)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} f(k*d)$
- $g(k)$的求解是很容易的，符合$x = k * x_1\left(1 \le x1 \le \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right), y = k * y_1\left(1 \le y1 \le \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor\right)$的数对$(x,y)$的个数就是答案。所以$g(k)=\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$
- 由此得：$f(k*i)=g(k*i)-\sum_{j=2}^{\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor} f(k*i*j)$，其中$1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$,单次询问的时间复杂度$=\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor - 1\right) = O\left(\frac{n}{k} * \ln\left(\frac{n}{k}\right)\right)$。可以得50分。

例1.[HAOI2011]Problem b

$70\%:1 \le T \le 1000, 1 \le a \le b \le 10000, 1 \le c \le d \le 10000, 1 \le k \le 10000$

怎么解决?

$100\%:1 \le T \le 50000, 1 \le a \le b \le 50000, 1 \le c \le d \le 50000, 1 \le k \le 50000$

怎么解决?

一、莫比乌斯反演的引入

- $f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数，并满足：

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)$$

- **根据定义，我们可以知道：**

$f(1)=g(1)$
$f(2)=g(1)+g(2)$
$f(3)=g(1)+g(3)$
$f(4)=g(1)+g(2)+g(4)$
$f(5)=g(1)+g(5)$
$f(6)=g(1)+g(2)+g(3)+g(6)$
$f(7)=g(1)+g(7)$
$f(8)=g(1)+g(2)+g(4)+g(8)$
$f(9)=g(1)+g(3)+g(9)$
$f(10)=g(1)+g(2)+g(5)+g(10)$
$f(11)=g(1)+g(11)$
$f(12)=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(6)+g(12)$

- **观察左边的等式，可以根据f(n)推出g(n):**

$g(1)=f(1)$
$g(2)=f(2)-f(1)$
$g(3)=f(3)-f(1)$
$g(4)=f(4)-f(2)$
$g(5)=f(5)-f(1)$
$g(6)=f(6)-f(3)-f(2)+f(1)$
$g(7)=f(7)-f(1)$
$g(8)=f(8)-f(4)$
$g(9)=f(9)-f(3)$
$g(10)=f(10)-f(5)-f(2)+f(1)$
$g(11)=f(11)-f(1)$
$g(12)=f(12)-f(6)-f(4)+f(2)$

一、莫比乌斯反演的引入

- 继续观察下面的式子：

$g(1)=f(1)$

$g(2)=f(2)-f(1)$

$g(3)=f(3)-f(1)$

$g(4)=f(4)-f(2)$

$g(5)=f(5)-f(1)$

$g(6)=f(6)-f(3)-f(2)+f(1)$

$g(7)=f(7)-f(1)$

$g(8)=f(8)-f(4)$

$g(9)=f(9)-f(3)$

$g(10)=f(10)-f(5)-f(2)+f(1)$

$g(11)=f(11)-f(1)$

$g(12)=f(12)-f(6)-f(4)+f(2)$

- 观察左边的等式，发现 以下规律：

$$g(n)=\sum_{d|n} f(d)*?$$

- 继续观察发现：

上面的？部分与d没有直接的关系，而是与$\frac{n}{d}$有关系，

是$\frac{n}{d}$对应的某函数值，记为$\mu\left(\frac{n}{d}\right)$,

则：$g(n)=\sum_{d|n} f(d)*\mu\left(\frac{n}{d}\right)$

令$d'=\frac{n}{d}, g(n)=\sum_{d'|n} f\left(\frac{n}{d'}\right)*\mu(d')$

$\therefore$ 也可以写成：$g(n)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)*\mu(d)$

二、莫比乌斯反演

- **公式：**

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)*\mu(d)$$

- **观察前面的例子，发现部分 μ(d)的值如下：**

$\mu(1)=1, \mu(2)=-1, \mu(3)=-1, \mu(4)=0, \mu(5)=-1, \mu(6)=1$

$\mu(7)=-1, \mu(8)=0, \mu(9)=0, \mu(10)=1, \mu(11)=-1, \mu(12)=0$

- **μ(d)为莫比乌斯函数，定义如下：**

(1)若$d=1$,则$\mu(d)=1$

(2)若$d=p_1*p_2*\ldots*p_k$，其中$p_i(1\le i\le k)$为互异的素数，则$\mu(d)=(-1)^k$

(3)其余情况$\mu(d)=0$

三、莫比乌斯函数的性质

- **性质一**：对于任意正整数n，有：$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1,若n=1\\0,若n>1\end{cases}$

- **证明：**

$(1)n=1$时，$\sum_{d|n}\mu(d)=\mu(1)=1$，成立；

$(2)n>1$时，设$n=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}$，其中$p_i(1\le i\le k)$为$n$的互异质因子。

设$d=p_1^{y_1}*p_2^{y_2}*\ldots*p_k^{y_k}$，其中$0\le y_i\le x_i(1\le i\le k)$，当存在某一个$y_i\ge 2$时，对应的$\mu(d)=0$，我们只需考虑$y_i=0$或1的情况，假设$d$中含有$r$个$n$的互异质因子，且质因子的指数为1，则对应的$\mu(d)=(-1)^r$，这样的$d$有$C_k^r$个。

所以，$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r*(-1)^r=(1-1)^k=0$。

三、莫比乌斯函数的性质

- **性质二：** 莫比乌斯函数$\mu(n)$是积性函数

算术函数：又称数论函数，指定义域为正整数、陪域为复数的函数。

数论中的积性函数：对于正整数n的一个算术函数$f(n)$,若$f(1)=1$,当a,b互质时$f(ab)=f(a)f(b)$,在数论上就称它为积性函数。

若对于某积性函数$f(n)$,就算a,b不互质，也有$f(ab)=f(a)f(b)$，则称它为完全积性的。

- **证明：**

(1)当$\mathrm{n}=1$时， $\mu(1)=1$

(2)当a,b互质时，让 a,b分别取 $\mu(n)$的定义中的三种情况时 ,易知： $\mu(ab)=\mu(a)\mu(b)$

$\mu(n)$是积性函数 ,设$n=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\dots*p_k^{x_k}$,其中 $p_i(1\le i\le k)$为n的互异质因子

则有 $\mu(n)=\prod_{i=1}^{k}\mu\left(p_i^{x_i}\right)$

四、莫比乌斯函数的计算

由于$\mu(n)$是积性函数，可以用线性筛法在$O(n)$内完成。

```
fillchar(flag,sizeof(flag),true);
prime[0] := 0;
mu[1] := 1;
for i := 2 to n do begin
    if flag[i] then begin
        inc(prime[0]);
        prime[prime[0]] := i;
        mu[i] := -1;
    end;
    for j := 1 to prime[0] do begin
        t := i * prime[j];
        if t > maxn then break;
        flag[t] := false;
        if i mod prime[j] = 0 then begin
            mu[t] := 0;
            break;
        end;
        mu[t] := -mu[i];
    end;
end;
```

2到n之间的每个素数都被存储起来，并且它们的莫比乌斯函数值只被计算了一次。

这段代码保证了每个合数的莫比乌斯函数值只被计算了一次。

设合数t的最小质因子为$p, t = p * t_1$，t的另一个大于p的质因子q，则有

$t = p * t_1 = q * t_2$，由于p, q互质，所以$p | t2$，

当$i = t_1$时，会计算$\mu(t)$的值

而$i = t_2$时，当j循环枚举到素数p时，由于$p | t2$，循环会中途退出，j循环是不可能枚举到素数q的，$\mu(t)$也就没有在此处被计算，因此每一个数的μ只被更新一次，时间复杂度为$O(n)$。

五、莫比乌斯反演的证明

- **证明：** $f(n)=\sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) * \mu(d)$

证明：$g(n)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) * \mu(d)=\sum_{d|n} \mu(d) \sum_{i|\frac{n}{d}} g(i)$（该式是以$\mu(d)$为主体的，接下来考虑以$g(i)$为主体的等价形式）

$=\sum_{i|n} g(i) \sum_{i*d|n} \mu(d)=\sum_{i|n} g(i) \sum_{d|\frac{n}{i}} \mu(d)$

根据莫比乌斯函数的性质一：对于任意正整数n，有$\sum_{d|n} \mu(d)=\begin{cases}1, 若n=1 \\ 0, 若n>1\end{cases}$，考虑$\sum_{d|\frac{n}{i}} \mu(d)$的值：

(1)当$i=n$时，$\sum_{d|\frac{n}{i}} \mu(d)=1$，$g(i) \sum_{d|\frac{n}{i}} \mu(d)=g(n)$

(2)当i取小于n的约数时，$\sum_{d|\frac{n}{i}} \mu(d)=0$，$g(i) \sum_{d|\frac{n}{i}} \mu(d)=0$

综上：$g(n)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) * \mu(d)=g(n)$。得证！

六、莫比乌斯反演的变形

- **变形：**

写法一： $f(i)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} g(d*i) \Rightarrow g(i)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} f(d*i)\mu(d)$

写法二： $f(i)=\sum_{i|d,d\le n} g(d) \Rightarrow g(i)=\sum_{i|d,d\le n} f(d)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$

- **证明：** $g(i)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} f(d*i)\mu(d)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor}\mu(d)\sum_{d_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{di} \right\rfloor} g(d_1*d*i)$

令$d_1*d=T$,则有：上式$=\sum_{T=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} g(T*i)\sum_{d|T}\mu(d)$，根据莫比乌斯函数的性质一有：

(1)当$T=1$时,$\sum_{d|T}\mu(d)=1$，$g(T*i)\sum_{d|T}\mu(d)=g(i)$

(2)当$T>1$时,$\sum_{d|T}\mu(d)=0$，$g(T*i)\sum_{d|T}\mu(d)=0$

综上,$\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} f(d*i)\mu(d)=\sum_{T=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} g(T*i)\sum_{d|T}\mu(d)=g(i)$。得证！

七、莫比乌斯反演的性质

- **性质：** $f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数，并满足$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$，“$g(n)$是积性函数”的充分必要条件是“$f(n)$是积性函数”。

- **证明：** 根据莫比乌斯反演得：$g(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d)$。

- **先证充分性：“f(n)是积性函数”⇒“g(n)是积性函数”**

设a,b互质，$a=p_1^{a_1}*p_2^{a_2}*\ldots*p_k^{a_k},b=q_1^{b_1}*q_2^{b_2}*\ldots*q_x^{b_x}$，其中所有的$p_i,q_j$都互不相同。

$$g(a)=\sum_{d_1|a}\mu\left(\frac{a}{d_1}\right)f(d_1)\quad g(b)=\sum_{d_2|b}\mu\left(\frac{b}{d_2}\right)f(d_2)\quad g(a)*g(b)=\sum_{d_1|a}\mu\left(\frac{a}{d_1}\right)f(d_1)\cdot\sum_{d_2|b}\mu\left(\frac{b}{d_2}\right)f(d_2)$$

令$d=d_1*d_2$，因为$d_1|a,d_2|b$，所以$d|ab$

另外满足“$d=d_1*d_2,d_1|a,d_2|b$”这三个条件的d_1,d_2是唯一的

则：$g(a)*g(b)=\sum_{d|ab}\mu\left(\frac{a}{d_1}\right)\mu\left(\frac{b}{d_2}\right)f(d_1)f(d_2)$

由于$\frac{a}{d_1}$与$\frac{b}{d_2}$互质，d_1与d_2互质，并且μ与f都是积性函数

所以，$g(a)*g(b)=\sum_{d|ab}\mu\left(\frac{ab}{d}\right)f(d)=g(ab)$，得证！

七、莫比乌斯反演的性质

- **证明：再证必要性：“g(n)是积性函数”$\Rightarrow$“f(n)是积性函数”**

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)$$

设a,b互质：

$$f(a)=\sum_{d_1|a} g(d_1)$$

$$f(b)=\sum_{d_2|b} g(d_2)$$

$$f(a)f(b)=\sum_{d_1|a} g(d_1)\cdot\sum_{d_2|b} g(d_2)$$

设$d=d_1*d_2$

因为a,b互质，$d_1|a,d_2|b$，所以d_1,d_2互质，$d|ab$

满足“$d=d_1*d_2,d|ab,d_1|a,d_2|b$”这三个条件的$d_1,d_2$是唯一的

$$f(a)f(b)=\sum_{d|ab} g(d_1)g(d_2)$$

因为g是积性函数，所以$f(a)f(b)=\sum_{d|ab} g(d)=f(ab)$，得证！

八、莫比乌斯反演的应用

- **应用一**：$g(i)$很难直接求，但$\sum_{d|i} g(d)$很容易求,可以利用以下反演来计算$g(i)$:

$$f(i)=\sum_{d|i} g(d) \Rightarrow g(i)=\sum_{d|i} f\left(\frac{i}{d}\right) * \mu(d)$$

如例1中算法二的容斥原理解法与莫比乌斯反演应用一本质上相同

- **应用二**：$g(i)$很难直接求，但$\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} g(d*i)$很容易求，可以利用以下反演来计算$g(i)$:

$$f(i)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} g(d*i) \Rightarrow g(i)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} f(d*i)\mu(d)$$

- **四大要点：**

①公式推导：利用莫比乌斯反演推导出基本式子；

②等价变换：变量替换、内层外移等技巧；

③线性筛法：线性筛法功能很强大，可以根据需要预处理各种信息；

④分块处理：归结到最后，通过分块处理在$\sqrt{N}$内实现。

例1.[HAOI2011]Problem b

- **题目描述：**

对于给出的T个询问,每次求有多少个数对(x,y),满足$a\le x\le b,c\le y\le d$,且$\gcd(x,y)=k$，$\gcd(x,y)$函数为x和y的最大公约数。

- **输入格式：**

第一行一个整数T,接下来T行每行五个整数，分别表示a,b,c,d,k。

- **输出格式：**

共T行，每行一个整数表示满足要求的数对(x,y)的个数。

- **样例输入：**

2
2 5 1 5 1
1 5 1 5 2

- **样例输出：**

14
3

- **数据范围：**

$20\%:1\le T\le 100,1\le a\le b\le 100,1\le c\le d\le 100,1\le k\le 100$

$50\%:1\le T\le 1000,1\le a\le b\le 1000,1\le c\le d\le 1000,1\le k\le 1000$

$70\%:1\le T\le 1000,1\le a\le b\le 10000,1\le c\le d\le 10000,1\le k\le 10000$

$100\%:1\le T\le 50000,1\le a\le b\le 50000,1\le c\le d\le 50000,1\le k\le 50000$

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法四：**
- 根据$g(k)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} f(k*d)=\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$计算$f(k)$,可以利用莫比乌斯反演的变形得：

$$f(k)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \mu(d)*g(k*d)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \mu(d)*\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{m}{k*d} \right\rfloor$$

- 用线性筛法在$O(n)$内初始化出所有的$\mu(d)$,计算$f(k)$时直接从1到$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$枚举$d$

单次询问的时间复杂度为$O\left(\frac{n}{k}\right)$，可以得到70分。

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法五：**
- 观察$f(k)=\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor}\mu(d)*\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor*\left\lfloor \frac{m}{k*d} \right\rfloor$，以$n=32, m=40, k=2$为例，观察$\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor$和$\left\lfloor \frac{m}{k*d} \right\rfloor$的变化：

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor$	16	8	5	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
$\left\lfloor \frac{m}{k*d} \right\rfloor$	20	10	6	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
$\mu(d)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法五：**
- 如上表中，绿色部分为$\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor$取值相同的区域，蓝色部分为$\left\lfloor \frac{m}{k*d} \right\rfloor$取值相同的区域,而红色部分为$\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor$和$\left\lfloor \frac{m}{k*d} \right\rfloor$同时相同的区域。
- 一共有多少个绿色区域、蓝色区域、红色区域呢？分析$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor (1 \le d \le n)$的取值：

①当$1 \le d \le \lfloor \sqrt{n} \rfloor$时，$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$最多有$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$个不同的取值；

②$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \le d \le n$时，由于$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \le \lfloor \sqrt{n} \rfloor$，所以最多有$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$个不同的取值;

- 综上：$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor (1 \le d \le n)$最多有$2*\lfloor \sqrt{n} \rfloor$种不同的取值，而且相同取值一定是连续的。由于$\left\lfloor \frac{n}{k*d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor}{d} \right\rfloor$，

所以绿色区域最多有$2*\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{k}} \right\rfloor$个，蓝色区域最多有$2*\left\lfloor \sqrt{\frac{m}{k}} \right\rfloor$,红色区域最多就有$2*\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{k}} \right\rfloor + 2*\left\lfloor \sqrt{\frac{m}{k}} \right\rfloor$个。

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法五：**
- 首先在$O(N)$内预处理出$\mu(d)(1 \le d \le n)$和μ的前缀和$S(i)$，接下来采用分块处理，

我们以$\sum_{d=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$为例，当循环到$i$时，我们需要计算出以$i$开始的红色区域的结束位置$j$，分三步：

①计算出以i开始的绿色区域的结束位置j_1，j_1必定是满足$\frac{n}{j_1} \ge \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$的最大值，$j_1 = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$

②计算出以i开始的蓝色区域的结束位置j_2，同上得：$j_2 = \left\lfloor \frac{m}{\left\lfloor \frac{m}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$

③$j = \min(j_1, j_2)$

然后再接着寻找下一个红色区域，这样单次询问的时间复杂度为$O(\sqrt{n} + \sqrt{m})$。100分。

例1.[HAOI2011]Problem b

- **算法五分块处理程序代码：**

$i := 1;$

$ans := 0;$

$while\ i <= n\ do$ begin

$\quad j := \min(n\ div(n\ div\ i), m\ div(m\ div\ i));$

$\quad ans := ans + (s[j] - s[i-1]) * (n\ div\ i) * (m\ div\ i);$

$\quad i := j + 1$

end;

$write\ln(ans);$

例2.YY的GCD

- **题目描述：**

  给定N,M，求$1 \le x \le N, 1 \le y \le M$且$\gcd(x,y)$为质数的$(x,y)$有多少对？

- **输入格式：**

  第一行一个整数T表示数据组数。

  接下来T行，每行两个正整数，表述N，M

- **输出格式：**

  T行，每行一个整数表示第i组数据的结果。

- **样例输入：**

2

10 10

100 100

- **样例输出：**

30

2791

- **数据范围：**

$T \le 10000$；$N, M \le 10000000$

例2.YY的GCD

- **算法一：**

枚举每一个素数p,设$f(p)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m (n \le m)$中满足$\gcd(x,y) = p$的数对数量。

计算方法与上题一样：

$$答案Ans = \sum_{p} f(p) = \sum_{p} \sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{pd} \right\rfloor$$

采用上题的方法，单次询问的时间复杂度为$O\left(\sum_{p} \sqrt{\frac{n}{p}}\right)$，超时。

例2.YY的GCD

- **算法二：**
- 令$T=pd$，则$Ans=\sum_{T=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor\sum_{p|T}\mu\left(\frac{T}{p}\right)$. 设$f(T)=\sum_{p|T}\mu\left(\frac{T}{p}\right)$

如果能预处理出$f(T)$及前缀和S，采用上题的分块处理就可以在$O\left(\sqrt{n}\right)$完成单次询问。

- **预处理f(T)方法一 ：**
- $O(n)$预处理出μ的值和$1\sim n$中的所有素数，枚举每 个素数p，更新p的倍数所对应的f值

$for\ i=1\ to\ prime[0]\ do\ begin$

$\quad for\ j:=1\ to\ n\ div\ prime[i]\ do\ inc(f[prime[i]*j],mu[prime[i]]);$

$end;$

- 由于$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}\approx n\ln n$，每个素数更新时均摊 为$O(\ln n)$，根据素数定理，$1\sim$ n中素数个数接近$\frac{n}{\ln n}$

方法一预处理f的时间复杂度为 $O(n)$。

- 总时间复杂度为$O\left(n+T\sqrt{n}\right)$

例2.YY的GCD

- **预处理f(T)方法二：**
- 设$T=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\dots*p_k^{x_k}$,其中$p_i(1\le i\le k)$为$T$的互异质因子
- $f(T)=\sum_{i=1}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i}\right)$,观察发现：

①设$\underset{1\le i\le k}{Max}(x_i)=x_j\ge 3$时，$f(T)=0$

②存在两个指数x_i,x_j等于2时，$f(T)=0$

③只有一个指数$=2$时，$f(T)=(-1)^{k-1}$

④指数全为1时,$f(T)=k*(-1)^{k-1}$

- 以上方法可以用线筛$O(N)$内预处理

例2.YY的GCD

- **预处理f(T)方法三：**
- 设$T=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}$,其中$p_i(1\le i\le k)$为$T$的互异质因子,设$S=p_1^{x_1-1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}$

$T=S*p_1$，计算$f(T)$分两种情况：

①若$x_1=1$,即$S \bmod p_1\neq 0$时，$f(S)=\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{S}{p_i}\right),f(T)=\sum_{i=1}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i}\right)=\mu\left(\frac{T}{P_1}\right)+\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i}\right)$

$=\mu(S)+\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{S}{p_i}*p_1\right)=\mu(S)+\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{S}{p_i}\right)\mu(p_1)$(积性函数)$=\mu(S)-\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{S}{p_i}\right)=\mu(S)-f(S)$

②若$x_1>1$，即$S \bmod p_1=0$，$\mu\left(p_1^{x_1}\right)=0,f(T)=\sum_{i=1}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i}\right)=\mu\left(\frac{T}{P_1}\right)+\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i}\right)$

$=\mu(S)+\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i*p_1^{x_1}}*p_1^{x_1}\right)=\mu(S)+\sum_{i=2}^{k}\mu\left(\frac{T}{p_i*p_1^{x_1}}\right)\mu\left(p_1^{x_1}\right)=\mu(S)$

- 因此，可以在$O(n)$内利用线性筛法预处理出f的值。

例3.于神之怒

- **题目描述：**

给定n,m,k，计算$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,j)^{k} \bmod \left(10^{9}+7\right)$的值。

- **样例输入1：**

3 3 2

- **样例输出1：**

20

- **样例输入2：**

5000000 5000000 4000000

- **样例输出2：**

913111630

- **数据范围：**

$30\%:1 \le n,m \le 100;$

另有$20\%: k=1;$

$100\%: 1 \le n,m,k \le 5000000$。

- **出题人：成都七中　张耀楠**

例3.于神之怒

- **算法一：**
- $Ans=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,j)^k$
- 直接做肯定超时，可以考虑枚举每一个公约数d
- 设$f\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\right)$为公约数为$d$的数对$(i,j)$数量，也就是$1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,1\le j\le\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor$互质$(i,j)$的数量
- 假设$n\le m$,结合前面所学容易得到：

$$f\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\right)=\sum_{x=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}\mu(x)\left\lfloor\frac{n}{dx}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dx}\right\rfloor \qquad Ans=\sum_{d=1}^{n}d^k*f\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\right)=\sum_{d=1}^{n}d^k\sum_{x=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}\mu(x)\left\lfloor\frac{n}{dx}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dx}\right\rfloor$$

- 计算Ans的值时，可以把d的值最多分成$2\left(\sqrt{n}+\sqrt{m}\right)$个区域,每个区域中$\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$和$\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor$分别相等，$f\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\right)$也就相等;
- 而计算$f\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\right)$同样类似，可以把$x$的值最多分成$2\left(\sqrt{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}+\sqrt{\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor}\right)$个区域，每个区域中$\left\lfloor\frac{n}{dx}\right\rfloor$和$\left\lfloor\frac{m}{dx}\right\rfloor$分别相等。
- 二者都采用分块处理，询问可以在$O(N)$内完成。
- d^k可以在线筛过程中$O(N)$内完成，总时间复杂度为$O(N)$。

例3.于神之怒

- 算法二：
- $Ans=\sum_{d=1}^{n}d^k\sum_{x=1}^{\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor}\mu(x)\left\lfloor\frac{n}{dx}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dx}\right\rfloor$ • 令$T=dx$,则$Ans=\sum_{T=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor\sum_{d|T}d^k\mu\left(\frac{T}{d}\right)$, 令$g(T)=\sum_{d|T}d^k\mu\left(\frac{T}{d}\right)$
- 如果能预处理出$g(T)$，则计算Ans可以在$O\left(\sqrt{n}\right)$内完成
- 设$T=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_t^{x_t},d=p_1^{y_1}*p_2^{y_2}*\ldots*p_t^{y_t}$
- 考虑到式子中的$\mu\left(\frac{T}{d}\right)$,一定有$y_i=x_i$或者$y_i=x_i-1$
- 考虑y_t的值,令$u_t=p_t^{x_t},v_t=p_t^{y_t},d=d'*v_t$，得到以下两种情况：

① $y_t=x_t$时,$u_t=v_t$，则有：$g(T)=\sum_{d|T}d^k\mu\left(\frac{T}{d}\right)=v_t^k\sum_{d'|\frac{T}{u_t}}d'^k\mu\left(\frac{\frac{T}{u_t}}{d'}\right)=p_t^{x_t*k}*g\left(\frac{T}{u_t}\right)$

② $y_t=x_t-1$时,$u_t=v_t*p_t$，则有：$g(T)=\sum_{d|T}d^k\mu\left(\frac{T}{d}\right)=v_t^k\sum_{d'|\frac{T}{u_t}}d'^k\mu\left(\frac{\frac{T}{u_t}}{d'}*p_t\right)=-v_t^k\sum_{d'|\frac{T}{u_t}}d'^k\mu\left(\frac{\frac{T}{u_t}}{d'}\right)=-p_t^{(x_t-1)*k}*g\left(\frac{T}{u_t}\right)$

- 综上：$g(T)=p_t^{x_t*k}*g\left(\frac{T}{u_t}\right)-p_t^{(x_t-1)*k}*g\left(\frac{T}{u_t}\right)=\left(p_t^{x_t*k}-p_t^{(x_t-1)*k}\right)*g\left(\frac{T}{u_t}\right)=\prod_{i=1}^{t}g\left(p_i^{x_i}\right)=\prod_{i=1}^{t}p_i^{(x_i-1)k}\left(p_i^k-1\right)$
- 可以利用线筛在$O(N)$内预处理出$g(T)$及g的前缀和。询问利用分块处理就可以在$O\left(\sqrt{N}\right)$内完成。

例3.于神之怒

- **算法二g(T)的简单求法：**
- $g(T)$的求解也可以利用莫比乌斯反演的积性性质来求
- 因为d^k是积性函数，$g(T)$也是积性函数
- $g(T)=\prod_{i=1}^{t} g\left(p_i^{x_i}\right)$

$$=\prod_{i=1}^{t}\left(p_i^{k*(x_i-1)}*\mu(p_i)+p_i^{k*x_i}*\mu(1)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{t} p_i^{(x_i-1)k}\left(p_i^{k}-1\right)$$

- 该方法更简单。

例4.jzptab

- **题目描述：**

为了研究最小公倍数，他画了一张$N*M$的表格。每个格子里写了一个数字，其中第i行第j列的那个格子里写着数$LCM(i,j)$。$Crash$想知道表格里所有数的和mod 20101009的值。

- **输入格式：**

第一行输入T，表示数据组数。接下来T行，每行输入N和M。

- **输出格式：**

对于每个询问，输出表格中所有数的和mod 20101009的值。

- **样例输入：**

1
4 5

- **样例输出：**

122

- **数据范围：**

100%的数据满足$T <= 10^4, N, M <= 10^7$。

- **出题人：南京外国语学校 贾志鹏**

例4.jzptab

- **算法一：**
- $Ans=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}lcm(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{i*j}{\gcd(i,j)}$
- 令$d=\gcd(i,j)$,枚举d,假设$n<=m$(否则交换):
- $Ans=\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}*\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m,\gcd(i,j)=d}i*j$,设$f(d)=\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m,\gcd(i,j)=d}i*j$, $Ans=\sum_{d=1}^{n}\frac{f(d)}{d}$
- 设$g(d)=\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m,d|\gcd(i,j)}i*j$,则有$g(d)=\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(d*x)=d^2*\frac{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor+1\right)}{2}*\frac{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor\left(\lfloor\frac{m}{d}\rfloor+1\right)}{2}$，根据莫比乌斯反演有 ：
- $f(d)=\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(x)g(dx)=\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\frac{\mu(x)d^2x^2\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor+1\right)\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor\left(\lfloor\frac{mx}{dx}\rfloor+1\right)}{4}$
- $Ans=\sum_{d=1}^{n}d\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\frac{\mu(x)x^2\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor+1\right)\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor\left(\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor+1\right)}{4}$
- $\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\frac{\mu(x)x^2\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor\left(\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor+1\right)\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor\left(\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor+1\right)}{4}$的值取决于$\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$与$\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$,$d$的循环可以按照$\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$与$\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$进行分块处理
- x的循环同样可以按照 $\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor$与$\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor$进行分块处理
- 单次询问的时间复杂度 为$O(N)$

例4.jzptab

- **算法二：**
- $Ans=\sum_{d=1}^{n} d\sum_{x=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d}\right\rfloor}\frac{\mu(x)x^2\left\lfloor \frac{n}{dx}\right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n}{dx}\right\rfloor+1\right)\left\lfloor \frac{m}{dx}\right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{m}{dx}\right\rfloor+1\right)}{4}$
- 令$T=dx$，$Ans=\sum_{T=1}^{n}\frac{T\left\lfloor \frac{n}{T}\right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n}{T}\right\rfloor+1\right)\left\lfloor \frac{m}{T}\right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{m}{T}\right\rfloor+1\right)}{4}\sum_{x|T}\mu(x)x$
- 设$f(T)=\sum_{x|T}\mu(x)x$,预处理出f,就可以在$O(\sqrt{T})$内完成每次询问。
- **预处理f(T)方法一：**
- 枚举x,更新x的每一个倍数，时间复杂度$=\sum_{x=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{x}\right\rfloor\approx n\ln n$。超时。
- **预处理f(T)方法二：**
- 设$g(x)=\mu(x)x$,当a,b互质时，$g(a)*g(b)=ab\mu(a)\mu(b)=ab\mu(ab)=g(a,b)$
- g是积性函数，根据莫比乌斯反演的性质得f也是积性函数
- 设$T=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}, f\left(p_i^{x_i}\right)=1-p_i$
- $f(T)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$ 可以用线筛在$O(n)$内完成初始化。
- 再维护$T*f(T)$的前缀和，就可以通过分块处理在$O\sqrt{N}$内完成每次询问。

例5.Wyx

- **题目描述：**

定义$f(i)$为i所含质因子的最大幂指数,比如$f(18)=f(2*3^2)=2$，现给出正整数$n,m,$求$\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}f(\gcd(a,b))$。

- **输入格式：**

第一行一个正整数$T,$代表数据组数。

接下来T行每行两个正整数n、$m,$代表一组询问。

- **输出格式：**

输出一行代表答案。

- **数据范围：**

对于10%的数据：$\mathrm{T}=1,1\le \mathrm{N},\mathrm{M}\le 1{,}000$

对于另外10%的数据 $1\le \mathrm{T}\le 10{,}000,1\le \mathrm{N},\mathrm{M}\le 1{,}000$

对于另外10%的数据：$\mathrm{T}=1,1\le \mathrm{N},\mathrm{M}\le 100{,}000$

对于另外10%的数据：$\mathrm{T}=1,1\le \mathrm{N},\mathrm{M}\le 10{,}000{,}000$

对于另外10%的数据 $1\le \mathrm{T}\le 10{,}000,1\le \mathrm{N},\mathrm{M}\le 100{,}000$

对于100%的数据 $1\le \mathrm{T}\le 10{,}000,1\le \mathrm{N},\mathrm{M}\le 10{,}000{,}000$

- **出题人：成都七中　钟浩曦**

例5.Wyx

- **分析：**
- $Ans=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}f(\gcd(a,b))$，其中$n\le m$，如果$n>m$，则交换即可
- 设$d=\gcd(a,b)$,枚举d,根据前面所学容易推出：
- $Ans=\sum_{d=1}^{n}f(d)\sum_{d_1=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(d_1)\left\lfloor\frac{n}{dd_1}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dd_1}\right\rfloor$

$$=\sum_{T=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor\sum_{d|T}f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)$$

- 设$g(T)=\sum_{d|T}f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)$
- 如果能预处理出$g(T)$的值以及g的前缀和，Ans的计算就可以在$O(\sqrt{n})$内完成,100分。

例5.Wyx

- **预处理$g(T)=\sum_{d|T} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)$：**
- 设$T=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}, d=p_1^{y_1}*p_2^{y_2}*\ldots*p_k^{y_k}$
- 要使$\mu\left(\frac{T}{d}\right)\neq 0$，必须满足$y_i=x_i$或者$x_i-1$
- 接下来研究$f(d)$的取值，假设$\underset{1\le i\le k}{Max}(x_i)=a$,则$f(d)=a$或者$a-1$
- 假设T中一共有q个素因子的指数是最大值a,根据$f(d)$的取值进行分类来求$g(T)$:
- **一、当$q=k$时**

①$f(d)=a$时，d中T个素因子至少有一个指数$=a$,则：

$$\sum_{f(d)=a} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)=a\cdot\sum_{f(d)=a}\mu\left(\frac{T}{d}\right)=a*\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i=a*\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i-(-1)^k\right)=a*(-1)^{k+1}$$

②$f(d)=a-1$时,d中这k个素因子的指数都是$a-1$，则：

$$\sum_{d=a\text{-}1} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)=(a-1)\cdot\sum_{f(d)=a-1}\mu\left(\frac{T}{d}\right)=(a-1)*(-1)^k$$

- 所以：当$q=T$时，$g(T)=a*(-1)^{k+1}+(a-1)*(-1)^k=(-1)^{k+1}$

例5.Wyx

- **预处理** $g(T)=\sum_{d|T} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)$ ：
- **二、当** $q<k$ **时**

①$f(d)=a$时，d中这q个素因子至少有一个指数$=a$,则：

$$\sum_{f(d)=a} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)=a\cdot\sum_{f(d)=a}\mu\left(\frac{T}{d}\right)=a*\sum_{i=1}^{q}(-1)^{q-i}C_q^i\cdot\sum_{j=0}^{k-q}(-1)^j C_{k-q}^j$$

因为$\sum_{j=0}^{k-q}(-1)^j C_{k-q}^j=0$，所以$\sum_{f(d)=a} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)=0$

②$f(d)=a-1$时,d中这q个素因子的指数都是$a-1$，则：

$$\sum_{d=a\text{-}1} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)=(a-1)\cdot\sum_{f(d)=a-1}\mu\left(\frac{T}{d}\right)=(a-1)*(-1)^q*\sum_{j=0}^{k-q}(-1)^j C_{k-q}^j=0$$

- 所以：当$q<T$时，$g(T)=0$
- $g(T)$可以用线筛在$O(n)$预处理完成

例6.[SDOI2014]数表

- **题目描述：**

有一张$n*m$的数表，其第i行第j列$(1\le i\le n, 1\le j\le m)$的数值为能同时整除$i$和$j$的所有自然数之和。给定$a$,计算数表中不大于$a$的数之和。

- **输入格式：**

输入包含多组数据。

输入的第一行一个整数Q表示测试点内的数据组数，接下来Q行，每行三个整数$n,m,a(|a|\le 10^9)$描述一组数据。

- **输出格式：**

对每组数据,输出一行一个整数，表示答案模2^{31}的值。

- **样例输入：**

2
4 4 3
10 10 5

- **样例输出：**

20
148

- **数据范围：**

30%的数据:$1\le n,m\le 400, 1\le Q\le 200$;

另30%的数据:$1\le n,m\le 10^5, 1\le Q\le 10$;

100%的数据:$1\le n,m\le 10^5, 1\le Q\le 2*10^4$。

例6.[SDOI2014]数表

- **分析：**
- 设$f(i)=i$的约数和，题目答案$Ans=\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m,\ f(\gcd(i,j))\le a} f(\gcd(i,j)) \bmod 2^{31}$
- 先假设没有a限制，$Ans=\sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} f(\gcd(i,j)) \bmod 2^{31}$
- 令$d=\gcd(i,j)$,假设$n\le m$,如果不满足则交换n,m的值
- 枚举d得：$Ans=\sum_{d=1}^{n} f(d)\sum_{d_1=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d}\right\rfloor}\mu(d_1)\left\lfloor \frac{n}{d\,d_1}\right\rfloor\left\lfloor \frac{m}{d\,d_1}\right\rfloor=\sum_{T=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{T}\right\rfloor\left\lfloor \frac{m}{T}\right\rfloor\sum_{d|T} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)$
- 令$g(T)=\sum_{d|T} f(d)\mu\left(\frac{T}{d}\right)$,如果能预处理出$g$的前缀和，询问可以在$O(\sqrt{n})$内完成
- 设$T=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}$,$d=p_1^{y_1}*p_2^{y_2}*\ldots*p_k^{y_k}$
- $f(d)$是积性函数,$f(d)=\prod_{i=1}^{k} f\left(p_i^{y_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_k^{y_k+1}-1}{p_k-1}$,可以用线筛$O(n)$内完成
- **预处理g(T)方法一：** 枚举d,更新d的倍数所对应的g值，时间复杂度$O(n\ln n)$
- **预处理g(T)方法二：** 利用莫比乌斯反演的积性性质：f是积性函数，g也是积性函数：

$$g(T)=\prod_{i=1}^{k} g\left(p_i^{x_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{p_i^{x_i}-1}{p_i-1}*\mu\left(p^{i}\right)+\frac{p_i^{x_i+1}-1}{p_i-1}*\mu(1)\right)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}=T$$

。可以在$O(n)$线筛完成。

例6.[SDOI2014]数表

- **分析：**
- 有了a限制后，可以对询问进行离线处理，把询问按照a升序排好序
- 这样一来$g(T)$就不能采用方法二来更新。
- 把$f(d)$进行排序，对于第i次询问，把没有添加的$\le a_i$的$f(d)$，进行插入，用方法一更新$g(T)$的值，由于最终需要求一段连续的g的和，采用树状数组来解决。
- 时间复杂度为$O\left(n(\ln n)^2+q\sqrt{n}\ln n\right)$

- **插入操作：**

```
procedure insert(d : longint);
begin
  for k := 1 to maxn div d do
    if mu[k] <> 0 then update(k * d, f[d] * mu[k]);
end;
```

- **更新操作：**

```
procedure update(x, value : longint);
begin
    while x <= maxn do begin
        s[x] := s[x] + value;
        x := x + lowbit(x);
    end;
end;
```

例7.[SDOI2015]约数个数和

- **题目描述：**

设$d(x)$为x的约数个数，给定N,M，求$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}d(ij)$的值。

- **输入格式：**

输入文件包含多组测试数据。

第一行，一个整数T，表示测试数据的组数。

接下来T行，每行两个整数N,M。

- **输出格式：**

T行，每行一个整数，表示你所求的答案。

- **样例输入：**

2
7 4
5 6

- **样例输出：**

110
121

- **数据范围：**

20%的数据:$1 \le N,M \le 100, 1 \le T \le 50000$;

另30%的数据:$1 \le N,M \le 1000, 1 \le T \le 10$;

另20%的数据:$1 \le N,M \le 50000, 1 \le T \le 10$;

100%的数据:$1 \le N,M \le 50000, 1 \le T \le 50000$。

例7.[SDOI2015]约数个数和

- **方法一：**
- 设$x = {p_1}^{a_1} * {p_2}^{a_2} * \ldots * {p_k}^{a_k}$
- $d(x)$是积性函数,
- $d(x) = \prod_{i=1}^{k} d\left({p_i}^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1)$
- 可以利用线筛在$O(NM)$内计算出d
- 枚举i, j直接做即可,时间复杂度$O(TNM)$
- 注意20%的数据中，一共只有5050种不同的数据组数，把求过的存起来即可
- 该方法可以得50分。

例7.[SDOI2015]约数个数和

- **方法二：**
- 首先给出一个式子：$d(nm)=\sum_{i|n}\sum_{j|m}[\gcd(i,j)=1]$
- **证明：** 设$nm=p_1^{a_1}*p_2^{a_2}*\ldots*p_k^{a_k}, d(nm)=\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)$

设$n=p_1^{b_1}*p_2^{b_2}*\ldots*p_k^{b_k}$,则$m=p_1^{a_1-b_1}*p_2^{a_2-b_2}*\ldots*p_k^{a_k-b_k}$

设$i=p_1^{x_1}*p_2^{x_2}*\ldots*p_k^{x_k}, j=p_1^{y_1}*p_2^{y_2}*\ldots*p_k^{y_k}$

- 要想使得$\gcd(i,j)=1$，对于p_1来说，必须满足$x_1=0$或者$y_1=0$

①当$x_1=0$时，y_1可以取0到a_1-b_1

②当$y_1=0$时，x_1可以取0到b_1

- 因此第一个因子p_1在i和j中符合条件的组合就有$a_1-b_1+1+b_1+1-1=a_1+1$种

以此类推p_2在i和j中符合条件的组合就有a_2+1种。。。

- $\sum_{i|n}\sum_{j|m}[\gcd(i,j)=1]=\prod_{i=1}^{k}(a_i+1)=d(nm)$，得证！

例7.[SDOI2015]约数个数和

- **方法二：**
- 设$N \le M$，如果输入不满足，则进行交换
- $Ans = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} d(ij) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{p|i}\sum_{q|j}[\gcd(p,q)=1]$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{p|i}\sum_{q|j}\sum_{x|\gcd(p,q)}\mu(x) \quad \{\text{莫比乌斯反演}\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{p|i}\sum_{q|j}\sum_{x|p,x|q}\mu(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{x|\gcd(i,j)} d\left(\frac{i}{x}\right)d\left(\frac{j}{x}\right)\mu(x) \quad \{\text{先枚举x,p的取值有}d\left(\frac{i}{x}\right)\text{种，q的取值有}d\left(\frac{j}{x}\right)\text{种}\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{x|i,x|j} d\left(\frac{i}{x}\right)d\left(\frac{j}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{N}\mu(x)\sum_{x|i,i\le N} d\left(\frac{i}{x}\right)\sum_{x|j,j\le M} d\left(\frac{j}{x}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{N}\mu(x)\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{x}\right\rfloor} d(i)\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{x}\right\rfloor} d(j)$$

预处理出d后，就可以对x进行分块处理，在$O(\sqrt{N})$完成每次询问。总时间复杂度为$O(N+T\sqrt{N})$。

九、总结

- **三步学习法：**

①理解知识点

②熟练代码

③灵活应用

- **莫比乌斯反演应用四大要点：**

①公式推导：利用莫比乌斯反演推导出基本式子；

②等价变换：变量替换、内层外移等技巧；

③线性筛法：线性筛法功能很强大，可以根据需要预处理各种信息；

④分块处理：归结到最后，通过分块处理在$\sqrt{N}$内实现。