3.122 – Резонанс напряжений в последовательном контуре.

Цель работы. Исследование резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, включающее получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, а также определение основных параметров контура.

В работе используются: генератор сигналов, источник напряжения, нагруженный на последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью, двулучевой осциллограф, цифровые вольтметры.

Теоретическая часть. В данной работе исследуется явление резонанса в «обычной» одномерной физической системе. Величиной, характеризующей систему, является заряд – мы рассматриваем электрическую цепь, идеальный RLC-контур[1]. Вся математика рассматривамого процесса сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \mathscr{E}_0 \sin\omega t, \tag{1}$$

получаемого из того факта, что алгебраическая сумма падений напряжений вдоль всего контура равна внешней ЭДС. Решать такое удобно над полем комплексных чисел; общее решение[2] есть сумма некоторого частного решения и решения соотв. однородного уравнения:

$$q = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} + e^{-\gamma t}(C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t); \tag{2}$$

Второе слагаемое есть собственные колебания системы, они достаточно быстро затухают, в результате устанавливаются колебания на частоте внешней вынуждающей силы. Мы исследуем здесь поведение системы в установившемся режиме.

Физический смысл имеет лишь вещественная часть полученного решения. По формуле Эйлера получаем выражение для амплитуды и фазы установившегося колебания:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \\ \tan\delta &= \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

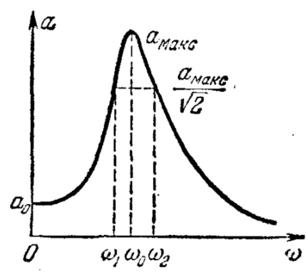

Рис. 1: Резонансная кривая

Максимум[3] амплитуды достигается при $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Практически важен случай, когда трение в системе мало, потому можно считать, что резонанс достигается при $\omega = \omega_0$; он и реализуется в нашей установке и рассматривается далее.

Важная характеристика систем с трением – *добротность*. Определим её следующим образом:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – энергия запасенная в системе, а ΔW – потери энергии (на трение) за один период. Итак, выше добротность = меньше потери на трение, меньше затухание колебаний. Смысл

[1] В механике все аналогично. Резистор выражает трение в системе, катушка индуктивности – инертность (массу), а конденсатор – упругость. Вся математика совпадает.

[2] q здесь есть заряд конденсатора. В механике – координата точки.

[3] Почему увеличение трения смещает максимум на АЧХ влево? Из тех же соображений, по которым частота свободных колебаний в системе с трением меньше, что ясно из механической аналогии – при горизонтальном движении груза на пружине при наличии трения он остановится (= отклонение достигнет максимума) раньше, чем при отсутствии трения. Впрочем, нужно обратить внимание на то, что частота свободных колебаний есть $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$; максимум же АЧХ достигается при несколько меньшей частоте. Т. о. неверно утверждение, что резонанс достигается при равенстве частоты свободных колебаний системы и частоты внешней силы.

такого определения будет сейчас прояснен. Если мы хотим описать затухание в системе, то вместо энергии, вообще говоря, удобнее смотреть сразу на амплитуду. И действительно, вводят понятие *логарифмического декремента затухания*:

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)},$$

где T – период колебаний. Для свободных колебаний получаем $\delta = \gamma T$. Используя тот факт, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды, и считая трение малым[4], мы легко получаем связь добротности и логарифмического декремента: $Q \approx \pi/\delta$. Если $\omega = 0$, то на систему действует постоянная сила, вызывающее статическое смещение $a_0 = \mathscr{E}_0/\omega_0$. Амплитуда при резонансе же $a_{\max} = \mathscr{E}_0/(2\omega_0\gamma)$; т. о. получаем, что добротность $Q = a_{\max}/a_0$[5]. Итак, выше добротность контура – выше максимум резонансной кривой! В частности, если трения нет, то максимума нет в принципе, амплитуда может быть сколь угодно большой.

Пусть ω_1 и ω_2 – значения частоты, при которых энергия колебаний вдвое меньше энергии в максимуме. Снова используя известное отношение амплитуды и энергии и считая, что отклонение указанных частот от частоты резонанса на порядки меньше, чем, собственно, сами частоты, получаем приближенно

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = Q/\omega_0.$$

Стало быть, добротность характеризует ещё и ширину резонансной кривой! Чем выше добротность, тем выше максимум АЧХ и уже ширина резонансной кривой. Это даёт нам и способ её экспериментального измерения – ширина АЧХ при амплитуде $a_{\max}/\sqrt{2}$. Напоследок приведём выражение для добротности через параметры контура (легко получаемое из выражения связи добротности и логарифмического декремента): $Q = R\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Смещение (заряд) отстаёт по фазе от внешней силы на величину δ. Как сразу видно из выражения 3, ФЧХ контура имеет вид, представленный на рис. 2.

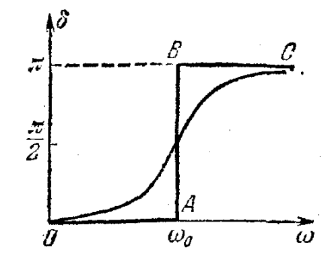

Рис. 2: Фазово-частотная характеристика

[4] В общем случае получается менее красивое выражение с экспонентой.
[5] Сивухин вообще определяет так добротность. Считаю, что это методологически неверно.