Python
遞迴 Recursion

臺北科技大學資訊工程系

遞迴函式(Recursive Function)

- 計算1+2+3+4+5+…+N？
  - 迴圈

```
01  def add(N):
02      sum = 0
03      for i in range(1, N + 1):
04          sum = sum + i
05      return sum
```

遞迴

```
01  def add(N):
02      if N == 1:
03          return 1
04      else:
05          return N + add(N - 1)
```

- 計算1到N的加總
  - 可拆解成計算1到 N-1的加總，然後再加上 N
  - 得出遞迴公式: sum(i) = i + sum(i−1)

$$\begin{cases} sum(1) = 1 \\ sum(n) = sum(n-1) + n,\ n \geq 2 \end{cases}$$

遞迴函式(Recursive Function)

- 函式執行中不斷自己呼叫自己，範例
  - 階層計算(factorial)
    - n! = n×(n-1)!

5! = 5 × 4!
= 5 × 4 × 3!
= 5 × 4 × 3 × 2!
= 5 × 4 × 3 × 2 × 1!
= 5 × 4 × 3 × 2 × 1
=120

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-1) * n, \ n \geq 2 \end{cases}$$

```
01  def factorial (num):
02    if (num == 1):
03      return num
04    else:
05      return num * factorial(num - 1)
06
07  print(factorial(5))                #120
```

```
01  def factorial (num):
02    if (num == 1):
03      return num
04    else:
05      return num * factorial(num - 1)
06
07  print(factorial(5))                #120
```

遞迴函式(Recursive Function)

- 設計遞迴函式兩個重點
  - (1) **(base condition)**，結束呼叫的終止條件。
    - 為避免函式永無止盡自我呼叫 (self-calling)，需設計一個明確終止條件
  - (2)**(general condition)**，遞迴自我呼叫的方式
    - 問題大小減一

```
01  def factorial_loop (n):
02      factor = 1
03      for i in range(1,n+1):
04          factor *= i
05      return factor
06
07  print(factorial_loop(5))   # 120
```

```
01  def factorial (num):
02    if (num == 1):
03      return num
04    else:
05      return num * factorial(num - 1)
06
07  print(factorial(5))                #120
```

終止條件

自我呼叫

Exercise

- 輸入 N，計算 1~N 中，所有偶數相加的總和
  - def f(N: int)，recursive

- 觀察偶數:
  - f(6) = 6 + 4 + 2 = 6 + f(4)
  - f(4) = 4 + 2 = 4 + f(2)
  - f(2) = 2
- 觀察奇數:
  - **f(7) = f(6)** = 6 + 4 + 2 = 6 + f(4)
  - f(4) = 4 + 2 = 4 + f(2)
  - f(2) = 2

```
01  def f(N: int) :
02      if (N<2) return 0
03      elif (N==2) return 2
04      else
05          if (N%2!=0)
06          return N + f(N-2)
07
08  def main():
09      print(f(6))
10      print(f(7))
11      print(f(3))
12      print(f(2))
13      print(f(1))
```

Exercise

- 根據分析:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(n) = f(n-2) + n, \ n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ \text{先將輸入的n變成n-1，再算} \\ f(n) = f(n-2) + n, \ n \geq 2 \end{cases}$$

- Code example:

```
01  def f(N):
02      if N < 2:
03          return 0
04      else:
05          if N % 2 != 0:
06              N = N - 1
07          return N + f(N - 2)
```

```
01  def f(N):
02      sum = 0
03      for i in range(2, N + 1, 2):
04          sum += i
05      return sum
```

Exercise

- 費氏數列 Fibonacci sequence (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)
  - 一個數列，每一項都等於其前兩項的和，
  - 第 n 項等於第 n-1 項以及第 n-2 項的和

編號每一行程式
劃出流程圖
寫下執行編號順序
寫下輸出內容

$$f(0) = 0,$$
$$f(1) = 1,$$
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),\ n>=2$$

時間(月)	初生兔子(對)	成熟兔子(對)	兔子總數(對)
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

```
01  def fibonacci(n):
02      if n == 0:
03          return 0
04      elif n == 1:
05          return [ ]
06      else:
07          return [          ] + fibonacci(n-2)
```

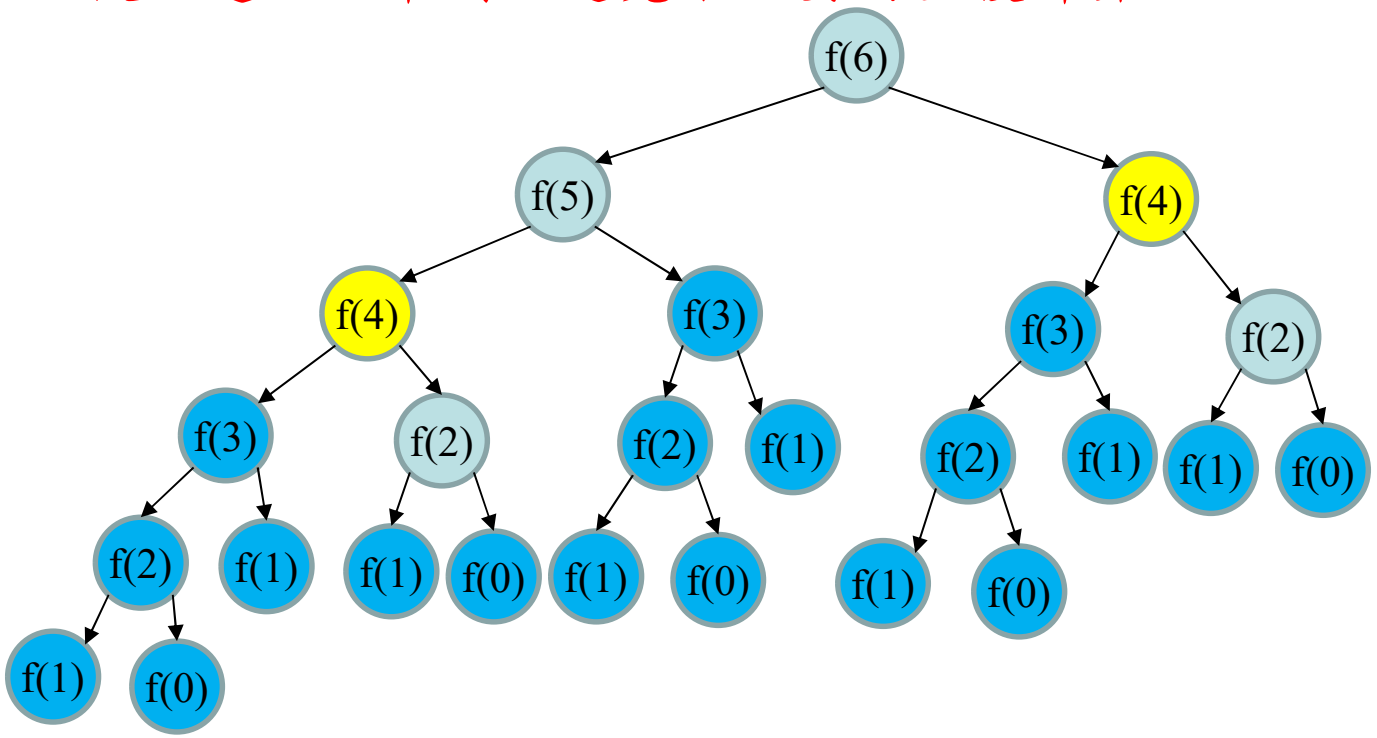
```
print(fibonacci(0))
print(fibonacci(1))
print(fibonacci(2))
print(fibonacci(3))
print(fibonacci(4))
print(fibonacci(5))
```

遞迴函式特性

- 遞迴優點
  - 容易理解，
  - 縮短程式碼長度
- 增加時間複雜度 (time complexity) 與空間複雜度 (space complexity)
  - 要計算 fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2) 時，要先計算並記住 fibonacci(n-1) 及 fibonacci(n-2)，這個「計算」需時間
    - 計算第 n 項的值需計算第 n-1 項及第 n-2 項的值，而第 n-1 項的值又來自於 n-2及 n-3 項，計算第 n-2 項又要用到第 n-3 項及第 n-4 項…
  - 函式回傳值存在記憶體直到同一層函式被執行完為止，因此佔用大量記憶體空間，且曾計算過的又重新計算，浪費時間空間，造成程式效率不佳(inefficiency)

Exercise 改善遞迴效率

- 費式數列 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..
  - 使用迴圈
  - 使用遞迴
  - 使用遞迴＋串列，避免不必要的重複計算



Exercise 改善遞迴效率

- 費式數列 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, .. (以空間list換取時間)
  - 遞迴版本演化

```
#第一版
def h1(n):
    if n==0 or n==1:
        return 1
    else:
        return h1(n-1)+h1(n-2)

#第二版
def h2(n):
    if n==0 or n==1:
        return 1
    else:
        v1 = h2(n-1)
        v2 = h2(n-2)
        return v1 + v2

def test():
    n=7
    print(h1(n))
    print(h2(n))
```

```
# 第三版
def h3(data,n):
    if n==0 or n==1:
        return n
    else:
        if data[n-1]>0:
            v1=data[n-1]
        else:
            v1 = h3(data, n-1)
        if data[n-2]>0:
            v2=data[n-2]
        else:
            v2 = h3(data, n-2)
        return v1 + v2
```

```
# 第四版
def h4(data, n):
    if data[n]==0:
        data[n] = h4(data, n-1) +h4(data, n-2)
    return data[n]

def test():
    data = [0, 1] + [0 for i in range(20)]
    print(h3(data, 7))
    data = [0, 1, 1] + [0 for i in range(20)]
    print(h4(data, 7))
```

Exercise

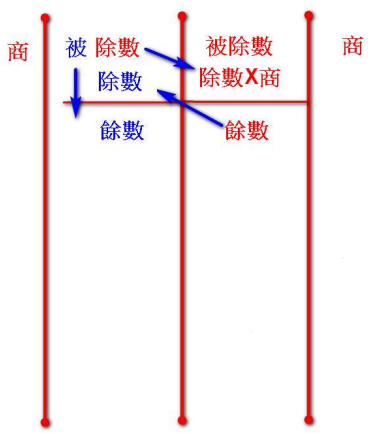
- GCD(60, 36)
  - 短除法
  - 輾轉相除法
- GCD(1112, 695)

Exercise

- 計算最大公因數 GCD

```
def gcd(x, y):
    while (x>0) and (y>0):
        if (x>y):
            x = x%y
        else:
            y = y%x
    return (x if x>y else y)
```

1	123	321	2
	75	246	
1	48	75	1
	27	48	
3	21	27	1
	18	21	
	3	6	2
		6	
		0	



- 使用遞迴函式的方式計算最大公因數 GCD

```
01  def gcd(m, n):
02      if n == 0:
03          return m
04      else:
05          return gcd(n,      )
06
07  print(gcd(18, 24))
```

終止條件

自我呼叫

編號每一行程式
劃出流程圖
寫下執行編號順序
寫下輸出內容

Exercise

- 一個數列 K 的前兩項是 0、1，之後每一項為 $K_n=2*K_{n-1}+3*K_{n-2}$
  - 使用遞迴函式計算K_n，
  - 輸入一個正整數 N，印出該數列的第 N 項。
- 輸入一個字串，計算字串內數字的個數 (noOfDigits(n))
- 輸入一個整數，計算裡面數字的個數 (noOfDigits(n))
- 輸入一個整數，計算數字的加總 (digitSum(n))
- 輸入一字串，判斷是否 palindrome 回文 (checkPalindrome(wordPal, index))
- 輸入字串，輸出字串反轉
- 撰寫binary search

Exercise

```
01  #輸入一個字串，計算字串內數字的個數
02  def f(z):
03      if len(z)==0:
04          return 0
05      elif z[0].isdigit():
06          return 1+f(z[1:])
07      return f(z[1:])
08
09  print(f('1_9f8276xe5432r!1^'))
10  print(f('9'))
```

Exercise Solution

編號每一行程式
劃出流程圖
寫下執行編號順序
寫下輸出內容

```
01  #輸入一個整數，計算數字的加總
02  def digitSum(n):
03      if(n == 0):
04          return 0
05      return ((n%10) + digitSum(n//10)) #呼叫 DigitSum 自己
06  print(digitSum(678))
```

```
01  #判斷迴文
02  def checkPalindrome(x):
03      if len(x) ==0:  return False
04      if x[0]!=x[strLen-1]: return False
05      return check(x[1: strLen-1]) #呼叫自己
06
07  print(checkPalindrome('abcba'))
08  print(checkPalindrome('abba'))
09  print(checkPalindrome('abcdedcba'))
10  print(checkPalindrome('amobma'))
```

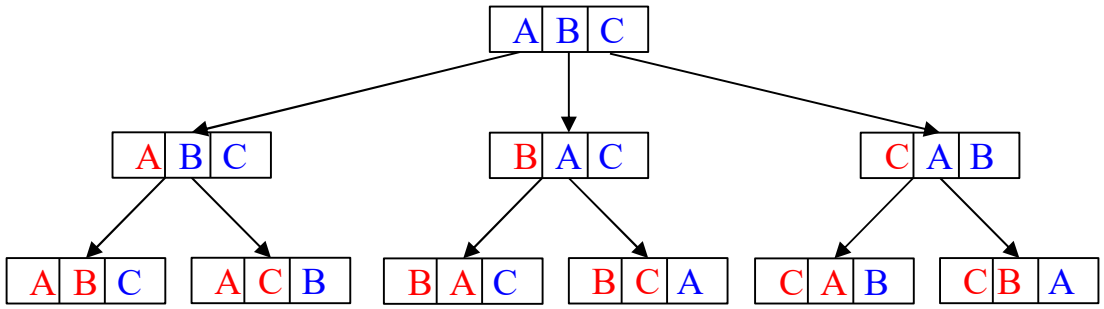
```
01  #輸入一個整數，判斷幾位數
02  def noOfDigits(n):
03      if (n!=0):
04          return 1 + noOfDigits(n//10)
05      else:
06          return 0
07  print(noOfDigits(12301))
```

Exercise 1/2

- permutation(排列)稱為 "arrangement number"
  - 'AB'排列 'AB', 'BA'

P(AB) = A P(B) + B P(A)
P(B) = ? ， P(A) = ?

  - f('ABC')
    - 'A'+f('BC')
    - 'B'+f('AC')
    - 'C'+f('AB')



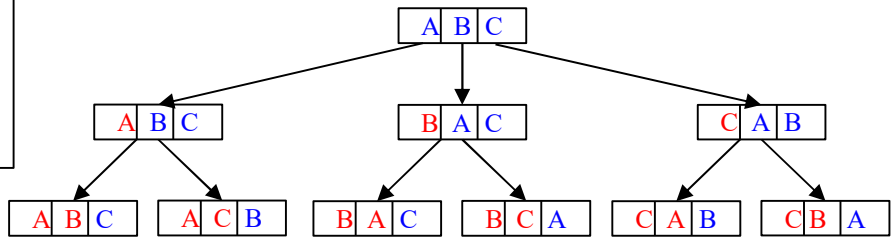
Exercise 1/2

- 'ABC' 切割，減小問題
  - 'A' + 'BC'、'B'+'AC'、'C'+'AB'

```
01  data = 'ABC'
02
03  x=data[0]
04  y=data[:0]+data[0+1:]
05  print(x,y)
06
07  x=data[1]
08  y=data[:1]+data[1+1:]
09  print(x,y)
10
11  x=data[2]
12  y=data[:2]+data[2+1:]
13  print(x,y)
```

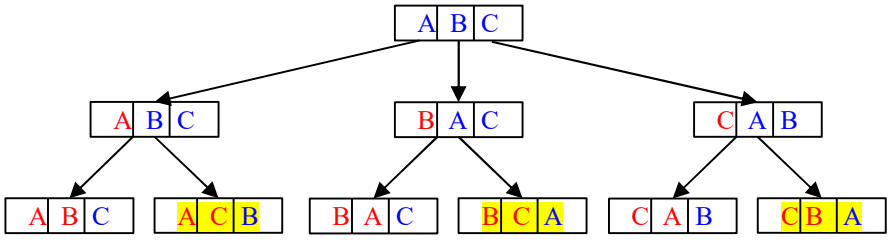
```
01  data = 'ABC'
02  for i in range(len(data)):
03      x = data[i]
04      y=data[:i]+data[i+1:]
05      print(x,y)
```

```
A BC
B AC
C AB
```



Exercise 1/3

- 遞迴第一版
  - 回傳一個字串(不夠，用list)
  - 使用一個迴圈(不夠，2個迴圈)



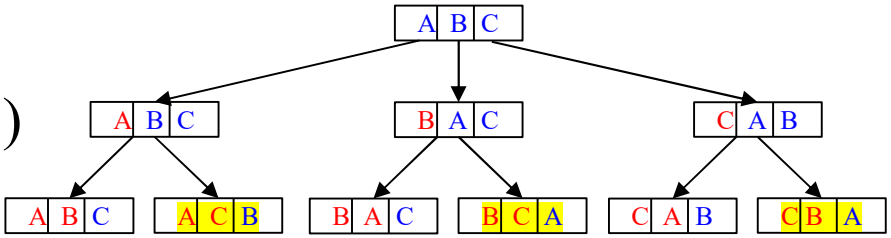

```
01  def f(data):
02      if len(data) <=1:
03          return data
04      print('---')
05      for i in range(len(data)):
06          x=data[i]
07          y=data[0:i]+data[i+1:]
08          r = x + f(y)  #一個字串
09          print(i, r)
10      print('---')
11      return r            #回傳一個字串
12          # 排列結果應該不只一個
13  f('ABC')
```

```
---
---
0 BC
1 CB
---
0 ACB
---
0 AC
1 CA
---
1 BCA
---
0 AB
1 BA
---
2 CBA
---
```

#一個字串

Exercise 2/3

- 遞迴第一版
  - 使用一個迴圈(不夠，兩個迴圈)
  - 回傳一個字串(不夠，用list)




```
01  def f(data):
02      if len(data)<=1:
03          return [data]
04      r = []
05      for i in range(len(data)):
06          x = data[i]
07          y = data[:i]+data[i+1:]
08          z = f(y)                # 用一個變數存結果
09          for sub in z:
10              r = r + [x+ sub]  # 排列個數不只一個，要加總
11      return r
12
13  print(f('ABC'))
```

['ABC', 'ACB', 'BAC', 'BCA', 'CAB', 'CBA']

Exercise 3/3

- 輸入字串，輸出字串排列

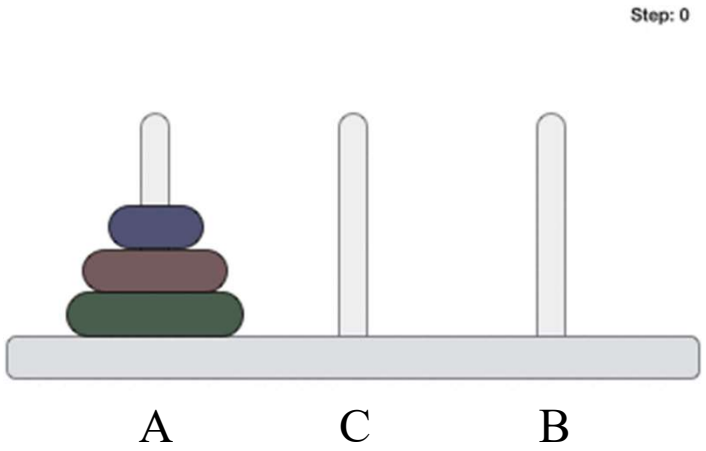
```
01  def f(s):
02      if len(s)==1:
03          return [s]
04      result = []
05      for i in range(len(s)):
06          result += [s[i]+ sub for sub in f(s[:i]+s[i+1:])]
07          # 使用list 產生器得到所有排列結果
08      return result
09
10  print(f('ABC'))
11  print(f('ABCD'))
```

編號每一行程式
劃出流程圖
寫下執行編號順序
寫下輸出內容

```
['ABC', 'ACB', 'BAC', 'BCA', 'CAB', 'CBA']
['ABCD', 'ABDC', 'ACBD', 'ACDB', 'ADBC', 'ADCB', 'BACD', 'BADC', 'BCAD',
'BCDA', 'BDAC', 'BDCA', 'CABD', 'CADB', 'CBAD', 'CBDA', 'CDAB', 'CDBA',
'DABC', 'DACB', 'DBAC', 'DBCA', 'DCAB', 'DCBA']
```

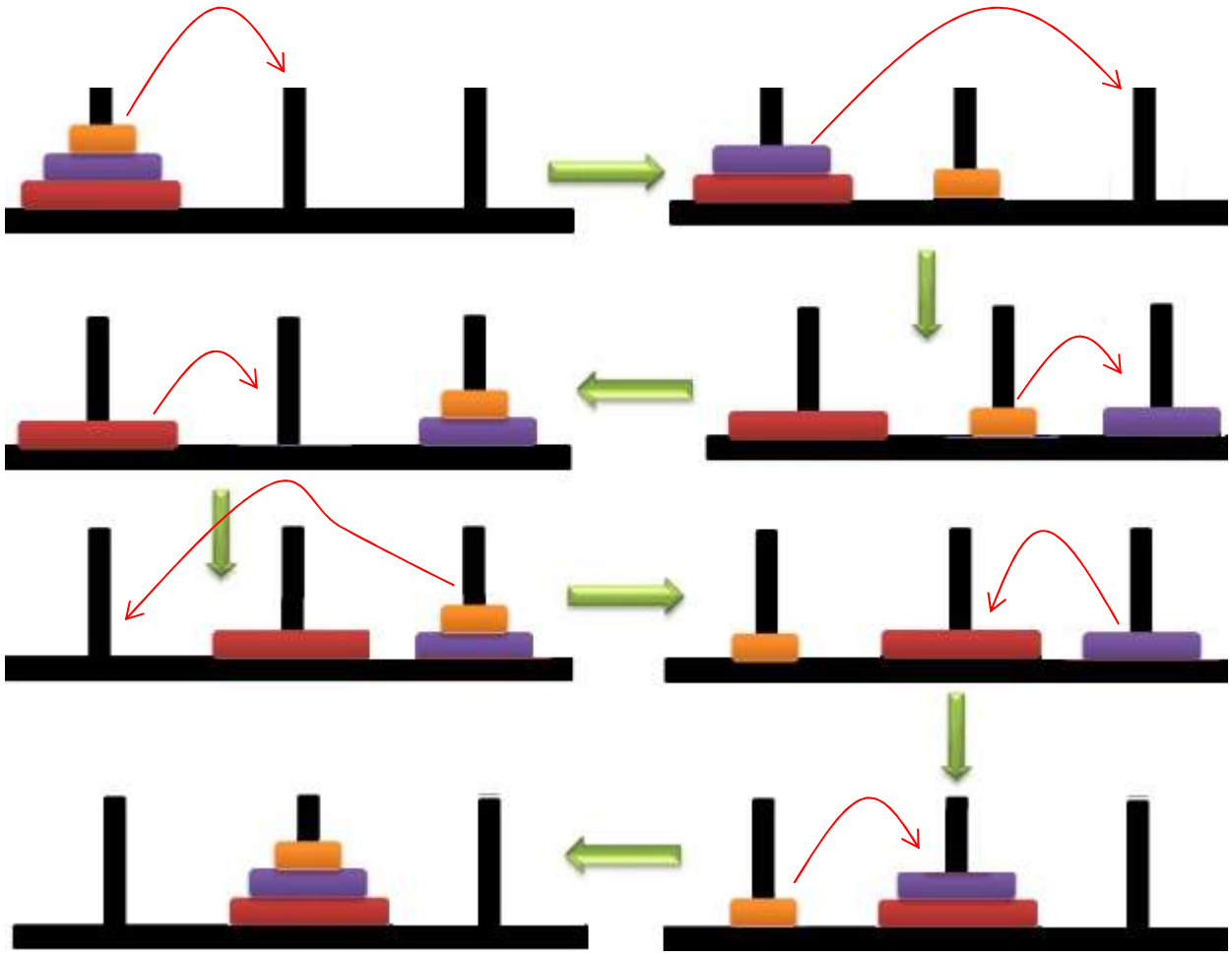
河內塔

- 問題
  - 有三根竿子A，B，C。A竿上有 N 個 (N>1) 穿孔圓盤，尺寸由下到上依次變小。按下列規則將所有圓盤移至 C 杆：
    - 每次只能移動一個圓盤。
    - 大盤不能疊在小盤上面。
    - 圓盤可以在任意一個竿子上。
  - 可將圓盤臨時置於 B竿，也可將從 A竿移出的圓盤重新移回 A竿，但都須遵循上述規則。



河內塔

- 問題

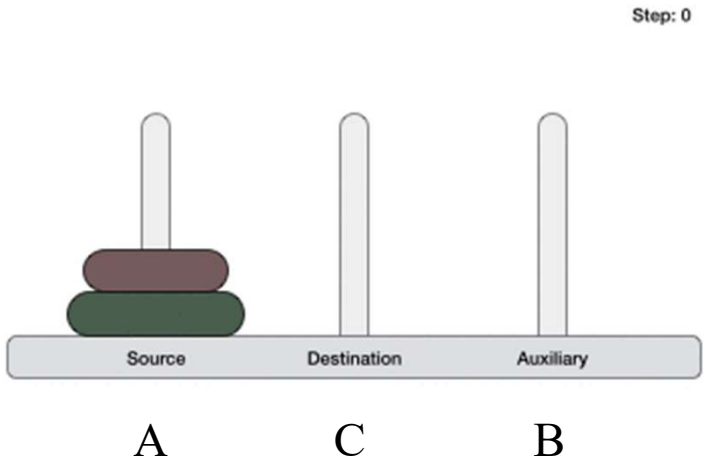


Exercise 河內塔

- 解決
  - 將較小的(頂部)圓盤移動到輔助竿子B。
  - 將較大的(底部)圓盤移動到目標竿子C。
  - 將較小的圓盤從輔助竿子B移動到目標竿子C 。
  - 請寫出執行流程與編號

```
01  def move(n, x, y):
02      print(n,':' , x,'->' , y)
03
04  def hanoi(n, A, C, B):
05      if(n ==1): move(n , A , C)
06      else:
07          hanoi(n-1, A, B, C)
08          move(n , A , C)
09          hanoi(n-1 , B , C , A)
10
11  hanoi(3, 'A', 'C', 'B')
```

```
1 : A -> C
2 : A -> B
1 : C -> B
3 : A -> C
1 : B -> A
2 : B -> C
1 : A -> C
```



實作搜尋(Search)串列

- 二元搜尋(Binary Search)
  - 資料須要排序
  - 每次都從範圍(left~right)的中間點mid=(left+right)/2找
  - 中間點太大，往左找，中間點太小，往右找

假設找9

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	2	5	7	9	14	23	26
left=0			mid = 3 7<9 left = 3				right=7
					mid = 5 (7+3)/2 14>9 right= 5		
				mid = 4 (3+5)/2			

Exercise二元搜尋

- 請寫出執行流程與編號
- 請寫出遞迴程式

```
01  def binarySearch(data, left, right, key):
02      while left<=right:
03          mid = (left+right)//2
04          if data[mid]==key: return mid
05          elif data[mid]>key: right = mid-1
06          else: left = mid+1
07      return -1
08
09  data=[1, 2, 5, 7, 9, 14, 23, 26]
10  print(binarySearch(data, 0, 7, 9))
11  data=[11, 23, 49, 57, 66, 78, 84, 91]
12  print(binarySearch(data, 0, 7, 84))
```

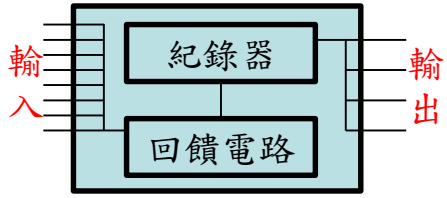
```
01  def binarySearch(data, left, right, key):
02      mid = (left+right)//2
03      if data[mid]==key:
04      if left==right:
05      if data[mid]>key: right = mid-1
06      else: left = mid+1
07      return binarySearch(data,
08
09  data=[1, 2, 5, 7, 9, 14, 23, 26]
10  print(binarySearch(data, 0, 7, 9))
11  data=[11, 23, 49, 57, 66, 78, 84, 91]
12  print(binarySearch(data, 0, 7, 84))
```

Exercise 數位電路模擬

- 模擬一個數位電路。
  - 輸入 n 是二進位 8 位元，輸出是二進位 4 位元。
  - 輸入範圍從 00000000 到 11111111 (十進位 0~255).
  - 此數位電路內具有回饋迴路，其功能如下:
    - C(m) = m　　if m = 0 or m = 1
    - C(m) = C(m/2)　　if m is even 偶數
    - C(m) = C((m+1)/2)　if m is odd 奇數
  - 此電路有一個紀錄器，會記錄跑過幾次回饋迴路，最後輸出為回饋電路跑過的次數。
    - 例如 m=00001010(十進位 10)，則電路內部運算回饋電路輸入依序為十進位 5, 3, 2, 1。
    - C(10)= C(5)=C(3)=C(2)=C(1)=1
    - 共跑過 4 次。則此電路輸出為 0100 (十進位 4)。

Exercise 數位電路模擬I

- 模擬一個數位IC，內有回饋電路與紀錄器電路。
  - 輸入m 是二進位 8 位元，輸出是二進位 4 位元。
  - 輸入範圍從 00000000 到 11111111 (十進位 0~255).
  - 數位IC內有一個回饋電路，回饋方式:
    - C(m) = m if m = 0 or m = 1 (十進位)
    - C(m) = C(m/2) if m 偶數(十進位)
    - C(m) = C((m+1)/2) if m 奇數(十進位)
    - 例如 m=00001010(十進位 10)，則電路回饋依序為十進位 5, 3, 2, 1。
    - C(10)= C(5)=C(3)=C(2)=C(1)=1，共回饋 4 次。



  - 數位IC內有一個紀錄器，會記錄回饋電路的回饋次數。
    - R(m) = [C(m) 的回饋次數]，例如 R(10) = 4。
  - 數位IC的輸出為紀錄器所記錄之回饋電路的回饋次數。
    - 若數位IC的輸入為m=00001010(十進位 10)，因回饋電路的回饋次數為4，則此數位IC輸出為 0100 (十進位 4)。

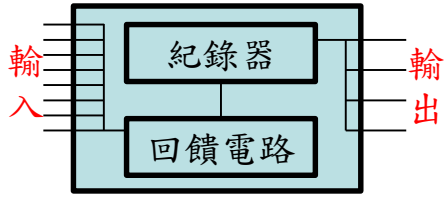
Exercise 數位電路模擬I

- 模擬一個數位IC，內有回饋電路與紀錄器電路。

輸入說明:
二進位 8 bit 位元
第一行是第一個測試案例資料
接著是一行 0 分隔測試資料
第三行是第二個測試案例資料
....
最後 -1 結束

輸出說明:
二進位 4 bit 位元
每一行是一個測試案例資料的結果

Sample Input:
00000000
0
11111111
0
00000001
0
10000000
0
00111111
-1
Sample Output:
0000
1000
0000
0111
0110



快速排序法(Quick sort)

- 概念
  - 選取某個元素做為基準值，令此基準值為target。
  - 將所有比target小的資料，都放在target左邊；
  - 所有不比target小的資料都放在target右邊。
- 步驟
  - 選取第0個元素 69為基準
  - 從最右邊往左找比基準69還小的元素32
  - 從最左邊往又找比基準69還大的元素81
  - 兩個元素交換

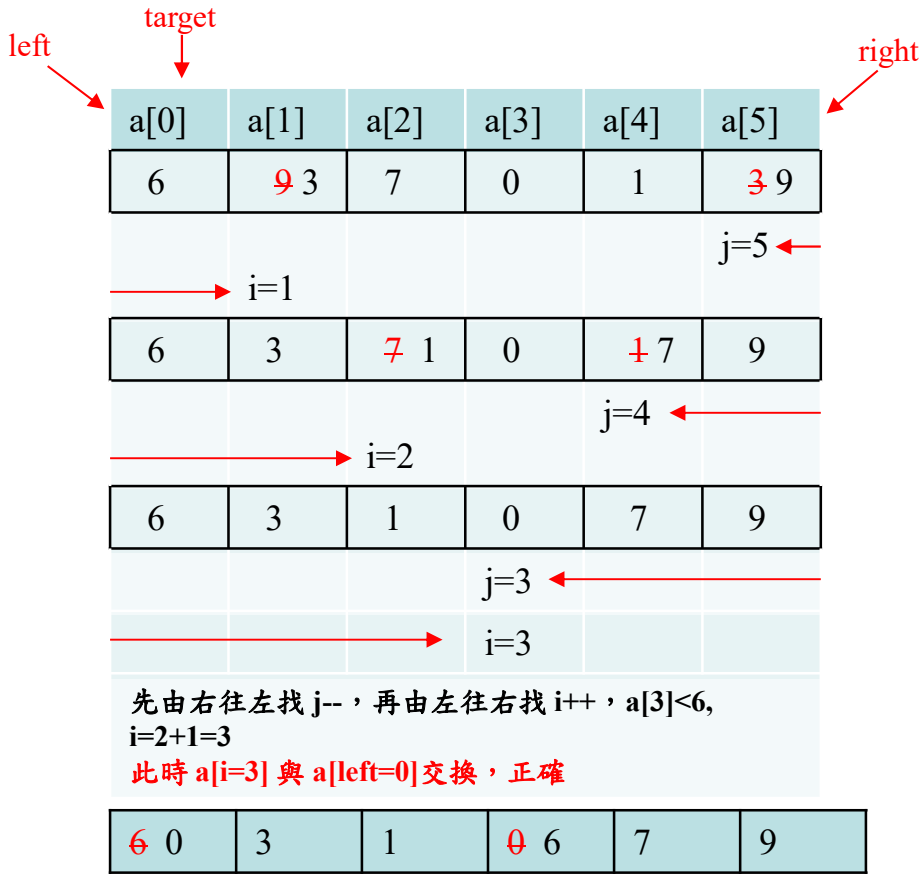
索引	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數值	69	81	30	38	9	2	47	61	32	79

快速排序法(Quick sort)

```
01  def QuickSort (data, left, right):
02      if (left>=right): return data
03      i = left
04      j = right
05      target = data[left]
06      while i!=j:
07          while (data[j]>target) and (i<j):
08              j = j-1  #從右邊開始找
09          while (data[i]<=target) and (i<j):
10              i = i+1  #從左邊開始找比基準點大，
11                       #如果有找到又沒與從右邊的相遇
12                       #表示 data[i]一定可以換到比較小的
13                       #否則 data[i]一定是小的最邊緣，可以跟中間值交換
14          if(i<j):
15              data[i], data[j] =data[j], data[i]  #左右沒相遇則可交換
16          print(data)
17      data[left], data[i] = data[i], data[left]   #i是中間值
18      data= QuickSort(data, left, i-1)  #處理左半邊
19      data = QuickSort(data, i+1, right) #處理右半邊
20      return data
21
22  print(QuickSort([34, 23, 52], 0, 2))
```

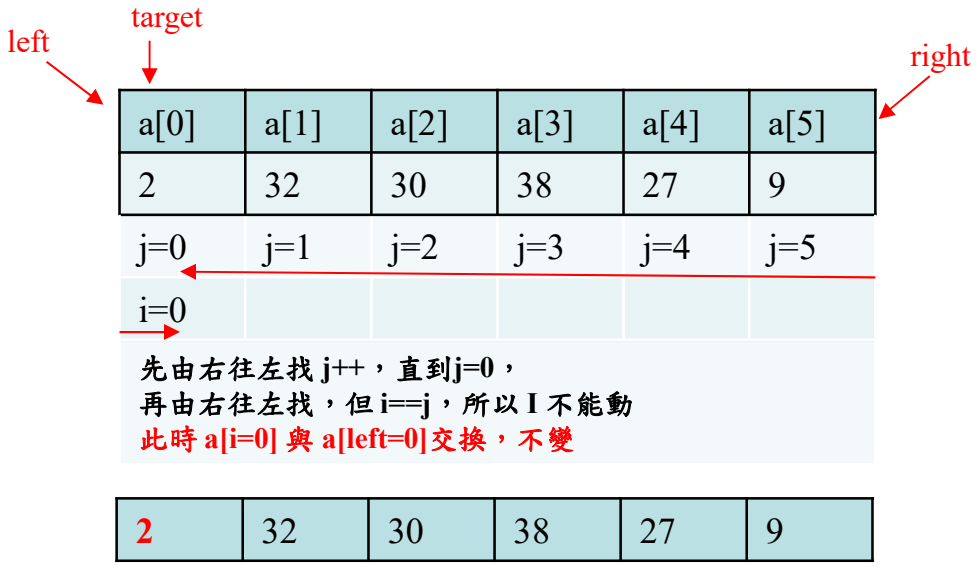
快速排序法(Quick sort)

- 須從右邊right開始往左找 j--，找比中間點<=的準備交換
  - 之後才可以左邊left開始往右找 i++，找>中間點的交換



快速排序法(Quick sort)

- 從右邊right開始往左找 j--，找比中間點<=的準備交換，
- 之後左邊left開始往右找 i++，找>中間點的交換



快速排序法(Quick sort)

- 若先left往右找，必停在比a[0]大地方(i=4)，接著right往左找，可能停在i==j==4 (a[4]=7)，就會把比a[0]大 (7)，換到a[0]地方，造成錯誤

Exercise

- 輸入一串數字(1~9)，及一正整數N，輸出是否有剛好N個總和相等的子集(需包含所有元素)**請用遞迴**

Input	Output
4 3 2 3 5 2 1 4	True (1+4 = 3+2 = 3+2 = 5 , 共4組)
4 3 2 3 5 2 1 2	True 1+4+3+2 = 3+2+5, 共2組
4 3 2 3 5 2 1 6	False

- 基本概念
  - 假設每一個總和是value，有N個value，所有輸入數字加總sum
    - N個總和相等， N × value = sum
  - 若輸入 data = [4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], N=4，有4組，每組加總是5
    - value = sum(data)/N， (4+3+2+3+5+2+1)/4 = 5
  - 4組，都有加總value=5，一次檢查一組，再把這組數字從data移除

Exercise

- 計算步驟(演算法)，若data = [4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], N = 4
  - 迴圈檢查四組，都要找到一組數字加總 value=5，放進bag
    - 一次檢查一組，找出數字存入bag，再把這組數字(bag)從data移除
      - 第一次
        - » data = [4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], N = 4, value = 5, bag = [4, 1]
        - » data移除 bag，data = [3, 2, 3, 5, 2]
      - 第二次
        - » data = [3, 2, 3, 5, 2], N = 4, value = 5, bag = [3, 2]
        - » data移除 bag，data = [3, 5, 2]
      - 第三次
        - » data = [3, 5, 2], N = 4, value = 5, bag = [3, 2]
        - » data移除 bag，data = [5]
      - 第四次
        - » data = [5], N = 4, value = 5, bag = [5]

Exercise

- findBag：每次檢查找出一組數字的計算步驟
  - data = [4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], N = 4, value = 5, bag = [4, 1]
    - 設置index，從0開始，value每次試著減掉data[index]，最後剛好減完，成功。
      - 第1次，index=0: value-4 (data[0]) = 5 - 4 = 1
      - 第2次，index=1， (data[1]) = 3，value – data[1]=1-3≠0，不符合
      - 第3, 4, 5, 6次，2, 3, 5, 2，都不符合
      - 第7次，index=6，data[5]=1， value – data[1]=0，成功
    - data移除 bag=[4, 1]後，data = [3, 2, 3, 5, 2]

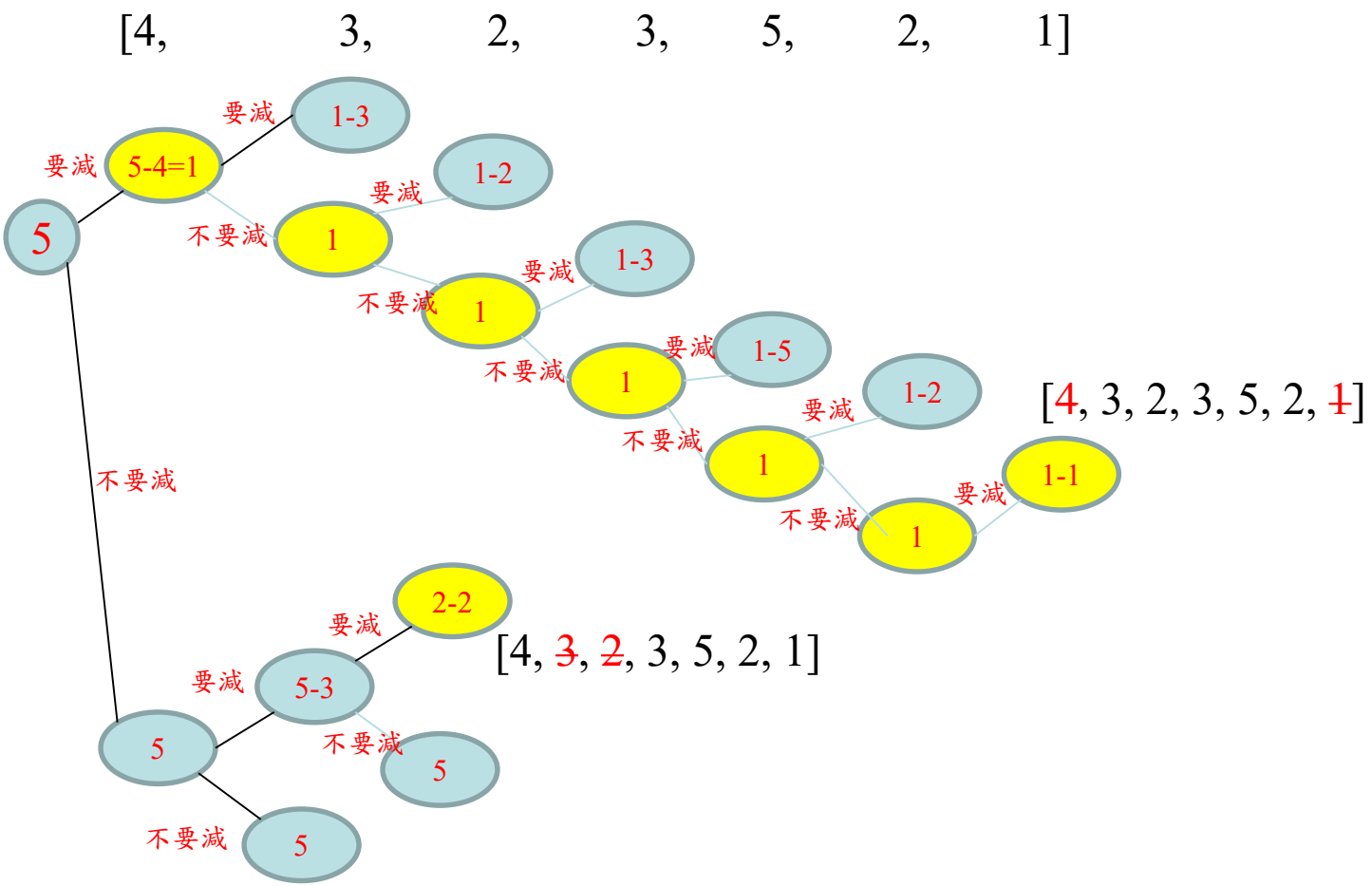
[4, 3, 2, 3, 5, 2, 1]

Exercise

- findBag：遞迴的計算步驟
  - 基本/結束條件1: data全找了(index-0~6)找不到，
    - index>len(data)，False
  - 基本/結束條件2:data[index]==剩下的value，成功找到，把data[index]加入bag，True
  - 一般情況
    - 目前遇到的這個要加入bag，value-data[index]，遞迴呼叫，往下找(index+1)
      - 把data[index]加入bag
    - 目前遇到的這個不要加入bag ，value不減data[index]，遞迴呼叫，往下找(index+1)
  - 輸入參數
    - data, index, value, bag

Exercise

- findBag：遞迴的演算法計算步驟



Exercise – findBag遞迴+ compute迴圈

```
def remove(data, bag):
    for i in bag:
        data.remove(i)

def findBag(data, index, value, bag):
    if index>=len(data) :
        return False
    elif data[index]>value:
        return False
    elif data[index]==value:
        bag.append(data[index])
        return True
    elif findBag(data, index+1, value, bag)==True:
        return True
    elif findBag(data, index+1, value-data[index], bag)==True:
        bag.append(data[index])
        return True
```

```
def compute(data, N):
    if sum(data)%N!=0:
        return False
    value = sum(data)//N
    for i in range(N):              #迴圈找N次
        bag = []
        if findBag(data, 0, value, bag) ==False:
            return False
        print('bag=', bag, end=', ')
        remove(data, bag)
    return True

print(compute([4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], 4))
print(compute([4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], 2))
print(compute([1, 2, 3, 5], 2))
print(compute([1, 5, 11, 5], 2))
```

```
bag= [5], bag= [2, 3], bag= [2, 3], bag= [1, 4], True
bag= [2, 5, 3], bag= [1, 2, 3, 4], True
False
bag= [11], bag= [5, 5, 1], True
```

Exercise – findBag遞迴+ compute遞迴

- compute遞迴計算步驟
  - 停止條件
    - N=0，停止找，成功
    - 找bag，找不到，失敗
  - 一般情況
    - 找到bag，移除bag，繼續N-1尋找
- findBag遞迴的計算步驟(每次找第0個，找完刪除第0個)
  - 停止條件
    - data空的，False
    - 找到，value找齊，True
  - 一般情況
    - 找到目前第0個，第0個加入bag，刪除第0個，往後找True
    - 找到目前第0個，第0個不加入bag，刪除第0個，往後找True
  - 輸入參數: data, value, bag

Exercise – 遞迴版2

- compute遞迴演算步驟

```
def remove(data, bag):
    for e in bag:
        data.remove(e)

def findBag(data, value, bag):
  if data[0]== value :
      bag.append(data[0])
      return True
  elif len(data)==0 or value <0:
      return False
  if findBag(data[1:], value-data[0], bag)==True:
      bag.append(data[0])
      return True
  if findBag(data[1:], value, bag)==True:
      return True
```

```
def compute(data, N, value):
    if N==0: return True
    bag = []
    if findBag(data, value, bag)==False:
        return False
    print('bag=',bag, end=', ')
    remove(data, bag)
    return compute(data, N-1, value)

def process(data, N):
    if sum(data)%N!=0:
        return False
    value = sum(data)//N
    return     compute(data, N, value)

print(process([4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], 4))
print(process([4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], 2))
print(process([1, 2, 3, 5], 2))
print(process([1, 5, 11, 5], 2))
```

```
bag= [1, 4], bag= [2, 3], bag= [2, 3], bag= [5], True
bag= [1, 2, 3, 4], bag= [2, 5, 3], True
False
bag= [5, 5, 1], bag= [11], True
```

Exercise – 2進位編碼迴圈版

- findBag：

value = 4

	i =	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	data =	[4,	3,	2,	3,	5,	2,	1]
		index是第i個元素的二進位編碼						
code = 0,	index =	0	0	0	0	0	0	0
code = 1,	index =	0	0	0	0	0	0	1
code = 2,	index =	0	0	0	0	0	1	1
code = 3,	index =	0	0	0	0	1	0	0
code = 4,	index =	0	0	0	0	1	0	1
code = 5,	index =	0	0	0	0	1	1	0

Exercise – 2進位編碼迴圈版

- 計算步驟
  - 找出所有可能組合，測試哪一種組合，總和是value

```
def remove(data, bag):
    for e in bag:
        data.remove(e)

def findBag(data, code, value):
    N = len(data)
    bag = []
    for i in range(N):
        index = code%2      #data第i個元素2進位編碼
        code = code//2
        if index==1:        # 1取，0不取
            value = value-data[i]
            bag.append(data[i])
    if value!=0: bag=[]
    return bag
```

```
def compute(data, N):
    if sum(data)%N!=0:
        return False
    value = sum(data)//N
    for i in range(2**len(data)):
        bag = findBag(data, i, value)
        if (len(bag)>0):
            print('bag=', bag, end=', ')
            remove(data, bag)
    return True

print(compute([4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], 4))
print(compute([4, 3, 2, 3, 5, 2, 1], 2))
print(compute([1, 2, 3, 5], 2))
print(compute([1, 5, 11, 5], 2))
```

```
bag= [3, 2], bag= [3, 2], bag= [4, 1], bag= [5], True
bag= [4, 3, 3], bag= [2, 5, 2, 1], True
False
bag= [11], bag= [1, 5, 5], True
```

END