Priv.-Doz. Dr. Jens Wirth
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart

Mikrolokale Analysis

Masterseminar

—

Sommersemester 2015

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Analysis von Differentialoperatoren

1. Einleitung

Die folgenden Abschnitte basieren im wesentlichen auf Hörmanders Arbeit [Hör55]. In dieser Einleitung sollen die verwendete Notation festgelegt und die wichtigsten operatortheoretischen Konzepte zusammengefaßt werden.

1.1. Funktionalanalytische Grundlagen

Seien V und W Banachräume und $\mathcal{D}_T \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Ein (im allgemeinen unbeschränkter) *Operator* T mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_T$ ist eine lineare Abbildung $T : V \supset \mathcal{D}_T \to W$. Er heißt *beschränkt*, falls es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\forall v \in \mathcal{D}_T \quad : \quad \|Tv\|_W \leq C\|v\|_V \tag{1.1}$$

gibt. Weiter heißt

$$\mathcal{R}_T = \{Tv : v \in \mathcal{D}_T\} \subseteq W \tag{1.2}$$

der *Wertebereich* und

$$\mathcal{G}_T = \{(v, Tv) : v \in \mathcal{D}_T\} \subseteq V \times W \tag{1.3}$$

der *Graph* von T. Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subseteq V \times W$ ist genau dann Graph eines Operators, wenn $\mathcal{G}$ linear ist und aus $(0, w) \in \mathcal{G}$ stets $w = 0$ folgt. Wir versehen $V \times W$ mit der Norm $\|(v, w)\|^2_{V\times W} = \|v\|^2_V + \|w\|^2_W$.

Der Operator T wird als *abgeschlossen* bezeichnet, falls der Graph $\mathcal{G}_T$ ein abgeschlossener Teilraum des Produktraumes $V \times W$ ist. Weiter heißt T *abschließbar*, falls der Abschluß von $\mathcal{G}_T$ in $V \times W$ Graph eines Operators ist. Dieser wird als Abschluß von T bezeichnet.

Satz 1.1. *Sei T_1 abgeschlossen und T_2 abschließbar und gelte $\mathcal{D}_{T_1} \subseteq \mathcal{D}_{T_2}$. Dann existiert eine Konstante C mit*

$$\|T_2u\|^2_W \leq C(\|T_1u\|^2_W + \|u\|^2_V). \tag{1.4}$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\mathcal{G}_{T_1} \ni (u, T_1u) \mapsto T_2u \in W$. Diese ist linear und überall definiert. Wir zeigen, daß sie auch abgeschlossen ist. Angenommen, $u_n \to u$ und $T_1u_n \to T_1u$ und T_2u_n sei konvergent. Da T_2 abschließbar ist, konvergiert $T_2u_n \to T_2u$. Also ist die Abbildung abgeschlossen, nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig und somit beschränkt. □

Ist T injektiv, so bestimmt $\mathcal{G}_{T^{-1}} = \{(w, v) : (v, w) \in \mathcal{G}_T\}$ einen Graphen. Der zugehörige Operator wird als T^{-1} bezeichnet. Dieser ist genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist. Ist T^{-1} beschränkt, gilt also

$$\forall u \in \mathcal{D}_T \quad : \quad \|u\|_W \leq C\|Tu\|_V \tag{1.5}$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C, so sagen wir T ist *beschränkt invertierbar*.

Im folgenden sei $V = W = H$ ein Hilbertraum. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir immer $\|\cdot\|$ für die Norm in H. Weiter sei das Innenprodukt in H durch (u, v) bezeichnet und

$H \times H$ mit dem entsprechenden Innenprodukt $\big((u_0,u_1),v_0,v_1)\big) = \big(u_0,v_0\big) + \big(u_1,v_1\big)$ versehen. Auf $H \times H$ sei der Operator J mit $J(v,w) = (-w,v)$ definiert. Dann ist zu jedem dicht definierten Operator T mit Graphen $\mathcal{G}_T$ durch $\mathcal{G}_{T^*} = (J\mathcal{G}_T)^\perp$ ein Graph gegeben. Der zugehörige Operator T^* wird als zu T *adjungiert* bezeichnet. Er ist immer abgeschlossen und es gilt

$$\big(Tu,v\big) = \big(u,T^*v\big) \tag{1.6}$$

für $u \in \mathcal{D}_T$ und $v \in \mathcal{D}_{T^*}$.

Satz 1.2. *Sei T ein dicht definierter Operator. Dann gilt $\mathcal{R}_T = H$ genau dann, wenn T^* beschränkt invertierbar ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{R}_T = H$. Dann existiert zu jedem $u \in H$ ein $w \in H$ mit $Tw = u$. Damit folgt

$$\big(u,v\big) = \big(Tw,v\big) = \big(w,T^*v\big), \qquad |\big(u,v\big)| \le C_u\|T^*v\| \tag{1.7}$$

für alle $u \in H$ und $v \in \mathcal{D}_{T^*}$ und mit dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit die Behauptung.

Angenommen, T^* erfüllt die Ungleichung (1.5). Dann ist der selbstadjungierte Operator TT^* wegen

$$\big(TT^*v,v\big) = \big(T^*v,T^*v\big) \ge C^{-2}\big(v,v\big) \tag{1.8}$$

strikt positiv und stetig invertierbar. Dann ist aber $TT^*(TT^*)^{-1} = I$ und somit $\mathcal{R}_T = H$. □

Korollar 1.3. *Ein dicht definierter Operator T besitzt eine Rechtsinverse S genau dann, wenn T^* beschränkt invertierbar ist.*

Beweis. Wenn T eine Rechtsinverse S besitzt, impliziert $RS = I$ schon $\mathcal{R}_T = I$ und mit obigem Satz folgt die beschränkte Invertierbarkeit von T^*. Gilt umgekehrt (1.5), so ist $S = T^*(TT^*)^{-1}$ das gesuchte. Da $T^*(TT^*)^{-1/2}$ eine Isometrie ist, ist S stetig. □

1.2. Differentialoperatoren

Wir nutzen im folgenden Multiindexschreibweise. Für Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \qquad \alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \qquad (\alpha+\beta)_j = \alpha_j + \beta_j. \tag{1.9}$$

Weiter sei zu $\zeta \in \mathbb{C}^n$ durch

$$\zeta^\alpha = \prod_{j=1}^n \zeta_j^{\alpha_j} \tag{1.10}$$

das Monom, sowie durch

$$\mathrm{D}^\alpha = \prod_{j=1}^n \left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} \tag{1.11}$$

ein formaler Differentialoperator definiert. Sei nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein Differentialoperator der Ordnung m ist ein formaler Ausdruck der Form

$$\mathcal{P} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha \tag{1.12}$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_\alpha \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. Er agiert in natürlicher Weise auf $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ (oder auf $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ in distributionellem Sinne).

Versieht man $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ durch

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \tag{1.13}$$

mit einem L^2-Innenprodukt, so kann man zu $\mathcal{P}$ den formal adjungierten Operator $\overline{\mathcal{P}}$ betrachten. Dieser erfüllt

$$\forall u, v \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \quad : \quad (\mathcal{P}u, v) = (u, \overline{\mathcal{P}}v) \tag{1.14}$$

und ist durch

$$\overline{\mathcal{P}}v(x) = \sum_{|\alpha|\le m} \mathrm{D}^\alpha\big(\overline{a_\alpha(x)}v(x)\big) \tag{1.15}$$

gegeben.

Lemma 1.4. *Der Differentialoperator $\mathcal{P}$ versehen mit Definitionsbereich*

$$\mathcal{D} = \{u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) \cap \mathrm{L}^2(\Omega) : \mathcal{P}u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\} \tag{1.16}$$

ist L^2-L^2-abschließbar.

Beweis. Sei $u_n \in \mathcal{D}$ eine Folge mit $u_n \to 0$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ und $\mathcal{P}u_n \to w \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Dann gilt für jedes $v \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$

$$(w, v) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{P}u_n, v) = \lim_{n\to\infty} (u_n, \overline{\mathcal{P}}w) = 0 \tag{1.17}$$

somit $w = 0$. □

Die Aussage gilt allgemeiner, es ergibt sich L^p-L^q-, C-C sowie L^p-C-Abschließbarkeit bei entsprechend gewähltem $\mathcal{D}$. Insbesondere ist $\mathcal{P}$ mit Definitionsbereich $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ abschließbar als Operator auf $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Definition 1.1. Sei $\mathcal{P}$ ein Differentialausdruck und Ω ein Gebiet. Dann wird der L^2-L^2-Abschluß des durch $\mathcal{P}$ auf $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ definierten Operators mit P_0 und als *minimaler Operator* zum Differentialausdruck $\mathcal{P}$ und Gebiet Ω bezeichnet. Weiterhin heißt $P := (\overline{P}_0)^*$ *maximaler Operator* zu $\mathcal{P}$ und Ω.

Der so definierte maximale Operator besitzt den Definitionsbereich

$$\mathcal{D}_P = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \mathcal{P}u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}, \tag{1.18}$$

wobei die Anwendung von $\mathcal{P}$ im distributionellen Sinne zu verstehen ist. Wir betrachten ein einfaches Beispiel. Dazu sei $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{P} = \mathrm{D}^2 = -\partial^2$ die Zuordnung der zweiten Ableitung. Dann ist besitzt der minimale Operator den Definitionsbereich

$$\{u \in \mathrm{H}^2(\Omega) : u(a) = \partial u(a) = u(b) = \partial u(b) = 0\} = \mathrm{H}_0^2(\Omega), \tag{1.19}$$

also den Sobolevraum $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$ der am Rand verschwindenden Funktionen, und der maximale Operator gerade den gesamten Sobolevraum $\mathrm{H}^2(\Omega)$ als Definitionsbereich. Im Falle höherer Raumdimensionen wird der Definitionsbereich des maximalen Operators in der Regel echt größer als der Sobolevraum passender Ordnung sein. Der Unterschied zwischen minimalen und maximalen Operatoren besteht in der Wahl von Randbedingungen.

Satz 1.5. *Die Gleichung $Pu = f$ hat genau dann für jedes $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ eine Lösung $u \in \mathcal{D}_P$, wenn $\overline{P}_0$ beschränkt invertierbar ist, also wenn für den formal adjungierten Differentialausdruck*

$$\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|u\| \leq C\|\overline{\mathcal{P}}u\| \tag{1.20}$$

gilt.

Beweis. Folgt aus Satz 1.2 in Verbindung mit der Definition des maximalen Operators P. □

Solche und allgemeinere Ungleichungen stehen im Zusammenhang mit Enthaltentseinsbeziehungen zwischen Definitionsbereichen minimaler Operatoren. Dazu definieren wir zuerst:

Definition 1.2. Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Differentialausdrücke und Ω ein Gebiet. Gilt dann $\mathcal{D}_{P_0} \subseteq \mathcal{D}_{Q_0}$, so heiße $\mathcal{P}$ *stärker* als $\mathcal{Q}$ bzw. $\mathcal{Q}$ *schwächer* als $\mathcal{P}$. Gilt $\mathcal{D}_{P_0} = \mathcal{D}_{Q_0}$, so heißen beide *gleich stark*.

Die Definition hängt im Falle konstanter Koeffizienten nicht von der Wahl des Gebietes ab. Im Falle variabler Koeffizienten (siehe später) sind die Gebiete hinreichend klein zu wählen um eine sinnvolle Definition erhalten.

Lemma 1.6. *Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ Differentialausdrücke auf einem Gebiet Ω.*

(1) $\mathcal{Q}$ ist genau dann schwächer als $\mathcal{P}$, wenn

$$\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|\mathcal{Q}u\|^2 \leq C\big(\|\mathcal{P}u\|^2 + \|u\|^2\big) \tag{1.21}$$

gilt.

(2) $Q_0 u$ besitzt für jedes $u \in \mathcal{D}_{P_0}$ genau dann einen stetigen Repräsentanten, wenn

$$\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \sup_{x\in\Omega} |\mathcal{Q}u(x)|^2 \leq C\big(\|\mathcal{P}u\|^2 + \|u\|^2\big) \tag{1.22}$$

gilt.

Beweis. (1) Die Hinrichtung folgt direkt aus Satz 1.1. Für die Rückrichtung nehmen wir an, die Ungleichung gilt. Dann existiert zu $u \in \mathcal{D}_{P_0}$ eine Folge $u_n \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \to u$ und $\mathcal{P}u_n \to P_0 u$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Dann ist aber $\mathcal{Q}(u_n - u_m)$ Cauchy und da Q_0 abgeschlossen ist folgt $u \in \mathcal{D}_{Q_0}$. • (2) Für die Hinrichtung betrachtet man $\mathcal{Q}$ als Operator $\mathcal{G}_{P_0} \to \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ und wendet Satz 1.1 an. Für die Rückrichtung sei $u \in \mathcal{D}_{P_0}$ beliebig und $u_n \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ eine Folge mit $u_n \to u$ und $\mathcal{P}u_n \to P_0 u$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Dann konvergiert $\mathcal{Q}u_n$ gleichmäßig und Behauptung folgt. □

1.3. Randwertprobleme

Sei im folgenden $\mathcal{P}$ und Ω fixiert. Dann sind $\mathcal{G}_P$ und $\mathcal{G}_{P_0}$ abgeschlossene Teilräume von $\mathrm{L}^2 \times \mathrm{L}^2$. Da $\mathcal{G}_P \subseteq \mathcal{G}_{P_0}$ gilt, kann man den Quotientenraum

$$\mathcal{C} = \mathcal{G}_P / \mathcal{G}_{P_0} \tag{1.23}$$

betrachten. Dieser wird als *Cauchyraum* des Differentialausdrucks $\mathcal{P}$ auf dem Gebiet Ω bezeichnet. Für $u \in \mathcal{D}_P$ sei

$$\Gamma u := [(u, Pu)]_{\mathcal{G}_{P_0}} \in \mathcal{C} \tag{1.24}$$

das zugeordnete Cauchydatum. Man kann sich Γu als eine Charakterisierung der Randwerte von u auf Ω vorstellen, unterscheiden sich zwei Funktionen u und v nur in einer kompakten Teilmenge $\Omega' \Subset \Omega$, so gilt $\Gamma u = \Gamma v$. Sei nun $B \subseteq \mathcal{C}$ ein linearer Unterraum. Dann heißt

$$Pu = f, \qquad \Gamma u \in B, \tag{1.25}$$

für gegebenes $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ das zugeordnete *Randwertproblem* mit homogener *Randbedingung* $\Gamma u \in B$. Die Randbedingung B bestimmt damit eine Einschränkung $\widehat{P}$ des Operators P auf den Definitionsbereich

$$\mathcal{D}_{\widehat{P}} = \{u \in \mathcal{D}_P : \Gamma u \in B\}. \tag{1.26}$$

Das Randwertproblem heißt *korrekt gestellt*, falls $\widehat{P}$ stetig invertierbar ist.

Satz 1.7. *Zu einem Differentialausdruck $\mathcal{P}$ existieren auf einem Gebiet Ω genau dann korrekt gestellte Randwertprobleme, wenn P_0 und $\overline{P}_0$ beschränkt invertierbar sind.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein korrekt gestelltes homogenes Randwertproblem $\widehat{P}$. Da $P_0 \subseteq \widehat{P}$ gilt, muß dann P_0^{-1} beschränkt sein. Weiterhin ist $\widehat{P}^{-1}$ rechtsinvers zu P, damit muß $\overline{P}_0^{-1}$ nach Korollar 1.3 beschränkt sein.

Seien nun P_0 und $\overline{P}_0$ beschränkt invertierbar. Da P_0^{-1} beschränkt ist, ist $\mathcal{R}_{P_0} \subseteq \mathrm{L}^2(\Omega)$ abgeschlossen. Bezeichne nun π den Orthogonalprojektor auf $\mathcal{R}_{P_0}$. Ist nun S eine Rechtsinverse zu P (die nach Korollar 1.3 existiert), so gilt für den durch

$$Tf = P_0^{-1}\pi f + S(I - \pi)f, \qquad f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \tag{1.27}$$

definierten Operator T nach Konstruktion $PTf = \pi f + (I - \pi)f = f$ und T besitzt eine Inverse $\widehat{P} \subseteq P$. Weiter ist $T \supset P_0^{-1}$ und $\widehat{P} \supset P_0$, so daß $P_0 \subseteq \widehat{P} \subseteq P$. Da $\widehat{P}^{-1}$ beschränkt und auf ganz $\mathrm{L}^2(\Omega)$ definiert ist, ist der Satz bewiesen. $\square$

1.4. Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten

Im folgenden sollen vorerst nur Operatoren mit konstanten Koeffizienten betrachtet werden. Diese gehörden zu Differentialausdrücken der Form

$$P(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha \tag{1.28}$$

mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Für diese gilt

$$P(\mathrm{D})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\zeta} = P(\zeta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\zeta} \tag{1.29}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$ und mit $x \cdot \zeta = \sum_{j=1}^n x_j\zeta_j$. Das Polynom $P(\zeta)$ heißt das *Symbol* des Differentialausdrucks $\mathcal{P}(\mathrm{D})$. Ist nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, so ist die Fourier–Laplace-transformierte von u

$$\widehat{u}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\zeta} u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n \tag{1.30}$$

eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$. Die Anwendung des Operators $P(\mathrm{D})$ entspricht im Fourierbild der Multiplikation mit $P(\zeta)$.

Eine erste Anwendung ist folgender Satz. Ein Beweis ergibt sich später nochmals in allgemeinerer Form.

Satz 1.8. *Der Operator P_0 ist beschränkt invertierbar, es existiert also eine Konstante C mit*

$$\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|u\| \leq C \|P(\mathrm{D})u\|. \tag{1.31}$$

Der Beweis basiert auf folgendem Lemma der Funktionentheorie.

Lemma 1.9. *Sei $g \in \mathfrak{A}(\overline{\mathbb{D}})$ analytisch in einer Umgebung der Kreisscheibe $|z| \leq 1$ und r ein Polynom mit höchstem Koeffizienten A. Dann gilt*

$$|Ag(0)|^2 \leq (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta. \tag{1.32}$$

Beweis. Seien z_j die Nullstellen von r innerhalb der Kreisscheibe $|z| < 1$ und

$$r(z) = q(z) \prod_j \frac{z_j - z}{\overline{z_j} z - 1}. \tag{1.33}$$

Dann gilt auf der Kreislinie $|r(z)| = |q(z)|$ und $q(z)$ ist analytisch in $\mathbb{D}$. Also folgt

$$(2\pi)^{-1} \int |g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) r(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta = (2\pi)^{-1} \int |g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta \geq |g(0)q(0)|^2. \tag{1.34}$$

Nun ist aber $q(0)/A$ gerade das Produkt der Nullstellen von $r(z)$ außerhalb des Einheitskreises und damit $|q(0)| \geq |A|$ und das Lemma folgt. □

Beweis zu Satz 1.8. Bezeichne $p(\zeta)$ den homogenen Hauptteil von $P(\zeta)$. Sei weiter $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $p(\xi_0) \neq 0$. Wendet man nun obiges Lemma auf die Funktion $\widehat{u}(\zeta + t\xi_0)$ und das Polynom $P(\zeta + t\xi_0)$ (verstanden als Funktionen von t) an, so erhält man

$$|\widehat{u}(\zeta) p(\xi_0)|^2 \leq (2\pi)^{-1} \int |\widehat{u}(\zeta + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\xi_0) P(\zeta + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\xi_0)|^2 \,\mathrm{d}\theta. \tag{1.35}$$

Speziell mit $\zeta = \xi \in \mathbb{R}^n$ und Integration bezüglich ξ ergibt sich

$$\begin{aligned} |p(\xi_0)|^2 \int |\widehat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi &\leq (2\pi)^{-1} \iint |\widehat{u}(\xi + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\xi_0) P(\xi + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\xi_0)|^2 \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\theta \\ &= (2\pi)^{-1} \iint |\widehat{u}(\xi + \mathrm{i}\xi_0 \sin\theta) P(\xi + \mathrm{i}\xi_0 \sin\theta)|^2 \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{1.36}$$

und unter Ausnutzung der Parseval-Identität

$$|p(\xi_0)|^2 \int |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq (2\pi)^{-1} \iint |P(D)u(x)|^2 \mathrm{e}^{2x\cdot\xi_0 \sin\theta} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\theta \tag{1.37}$$

und mit $C = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{e}^{|x\cdot\xi_0|}/|p(\xi_0)|$ folgt die Behauptung. □

2. Minimale Operatoren

3. Maximale Operatoren

4. Operatoren von reellem Haupttyp

[Hör60b]

5. Ein unlösbarer Operator

[Lew57] [Hör60a]

Teil II.

Untere Schranken an Pseudodifferentialoperatoren

6. Einleitung

Hier sollen die Grundlagen dafür gelegt werden, auch Operatoren mit variablen Koeffizienten richtig behandeln zu können. Die Darstellung basiert auf [Hör65], [Hör66], sowie [Hör85, Kapitel 18]. Zuerst verallgemeinern wir den Begriff des Differentialoperators soweit, daß wir auch Inverse und allgemeinere Funktionen von solchen Operatoren behandeln können.

6.1. Operatoren und Symbole

Sei Ω eine Mannigfaltigkeit. Differentialoperatoren auf Ω können dann in lokalen Karten definiert werden oder global durch ihre Eigenschaften charakterisiert werden. Die bekannteste davon ist, daß eine stetige lineare Abbildung $P : \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ genau dann Differentialoperator ist, wenn P lokal ist, also wenn

$$\forall f \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \operatorname{supp} Pf \subseteq \operatorname{supp} f \tag{6.1}$$

gilt. Für Verallgemeinerungen brauchbarer ist folgende Charakterisierung:

Lemma 6.1. *Eine lineare Abbildung $P : \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ ist genau dann ein Differentialoperator der Ordnung m, wenn für alle $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ und alle $g \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ die Funktion*

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda g} P(f \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda g}) = \sum_{j=0}^{m} P_j(f,g)\lambda^j \tag{6.2}$$

ein Polynom vom Grad m in λ ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist klar. Zum Beweis der Rückrichtung sei $x' \in \Omega$ ein Punkt und $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $f = 1$ in einer Umgebung ω von x'. Sei weiter $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $g(x) = x \cdot \xi$. Dann folgt aus (6.2)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x\cdot\xi} P(f \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x\cdot\xi}) = \sum_{j=0}^{m} p_j(f; x, \xi)\lambda^j \tag{6.3}$$

mit C^∞-Funktionen auf $\omega \times \mathbb{R}^n$ als Koeffizienten $p_j(f; x, \xi)$. Da auch $p_j(f; x, \lambda\xi) = p_j(f; x, \xi)\lambda^j$ gilt, ist $p_j(f; x, \xi)$ homogen vom Grad j. Die einzigen auf ganz $\mathbb{R}^n$ glatten homogenen Funktionen sind Polynome, $p_j(f; x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(f; x)\xi^\alpha$. Sei nun $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\omega)$. Dann gilt mit der Fourierschen Inversionsformel

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \widehat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{6.4}$$

und da $u = fu$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned} Pu(x) = P(fu)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int P(f \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}) \widehat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{j=0}^{m} (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} p_j(f; x, \xi) \widehat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(f; x) \mathrm{D}^\alpha u. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Mit Linearität folgt die Behauptung. □

Im folgenden sollen die Polynome in λ durch asymptotische Entwicklungen ersetzt werden. Die folgende Definition geht auf [Hör65] zurück.

Definition 6.1. Sei $P : \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ linear. Dann heißt P (klassischer) *Pseudodifferentialoperator* der Ordnung $m \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ und alle $g \in K \Subset \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ mit $\mathrm{d}g \neq 0$ auf $\operatorname{supp} f$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda g} P(f \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda g}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j(f,g)\lambda^{m-j} \tag{6.6}$$

in $\mathrm{C}^\infty(G)$ gleichmäßig in K gilt.[1]

Satz 6.2. *Sei P ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung m auf Ω und $\omega \Subset \Omega$. Dann existiert eine Funktion $p \in \mathrm{C}^\infty(\omega \times \mathbb{R}^n)$ mit*

$$\sup_{x\in\omega} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left| \langle\xi\rangle^{|\alpha|-m} \mathrm{D}_x^\beta \mathrm{D}_\xi^\alpha p(x,\xi) \right| < \infty \tag{6.8}$$

für alle Multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, so daß für jede $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\omega)$

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{6.9}$$

gilt.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $f = 1$ auf ω. Dann gilt $u = uf$ für $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\omega)$ und mit

$$p(x,\xi) = p(f;x,\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} P(f\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}) \tag{6.10}$$

folgt die Darstellung (6.9). Damit genügt es, (6.8) zu zeigen. Wir betrachten zuerst den Fall $\alpha = 0$. Dann besagt (6.7) mit $N = 0$

$$\sup_{\lambda>1} \sup_{|\xi|=1} \sup_{x\in\omega} \left| \lambda^{-m} \mathrm{D}_x^\beta p(x,\lambda\xi) \right| < \infty \tag{6.11}$$

für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Die Abschätzungen für $\alpha \neq 0$ folgen nun per Induktion. Die Funktion $p(x,\xi)$ ist glatt und Differenzieren liefert

$$\mathrm{D}_{\xi_j} p(f;x,\xi) = p(x_j f;x,\xi) - x_j p(f;x,\xi), \tag{6.12}$$

beide Terme haben nach Voraussetzungen asymptotische Entwicklungen. Also folgt, daß

$$\lambda^{-m} \left(\mathrm{D}_\xi^\alpha p(x,\lambda\xi) - \mathrm{D}_\xi^\alpha \sum_{j=0}^{|\alpha|} p_j(x,\lambda\xi) \right) \tag{6.13}$$

in $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ beschränkt ist.

$\boxed{\textbf{ZU ERGÄNZEN}}$ □

[1] D.h., für jedes N ist

$$\lambda^{N-m} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda g} P(f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda g}) - \sum_{j=0}^{N-1} P_j(f,g)\lambda^{m-j} \right) \tag{6.7}$$

gleichmäßig in $\lambda > 1$ und $g \in K$ in $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ beschränkt.

Definition 6.2. Eine Funktion $p \in \mathrm{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, welche (6.7) für jedes $\omega \Subset \Omega$ erfüllt, wird als *Symbol* der Ordnung m bezeichnet. Die Menge aller solchen Symbole sei $\mathcal{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Ein Symbol $p \in \mathcal{S}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ heißt *klassisch*, falls es eine Folge homogener Funktionen $p_j(x, \xi)$ vom Grad $m - j$, also mit $p_j(x, \lambda\xi) = \lambda^{m-j} p_j(x, \xi)$ für $\lambda > 0$, gibt, so daß

$$p(x, \xi) \sim \sum_j p_j(x, \xi), \qquad |\xi| \to \infty, \tag{6.14}$$

gilt.[2]

6.2. Kalkül

6.3. Littlewood–Paley-Zerlegung

[2] D.h., mit einer Abschneidefunktion χ gilt $p - \sum_{j=1}^{N-1} \chi p_j \in \mathcal{S}^{m-N}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ für jedes $N \in \mathbb{N}$.

7. Die Ungleichung von Gårding

[Går53] [LN66]

8. Die Ungleichung von Melin

[Mel71]

9. Die Ungleichung von Feffermann und Phong

Literaturverzeichnis

[Går53] Lars Gårding. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. *Math. Scand.*, 1:55–72, 1953.

[Hör55] Lars Hörmander. On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.*, 94:161–248, 1955.

[Hör60a] Lars Hörmander. Differential equations without solutions. *Math. Ann.*, 140:169–173, 1960.

[Hör60b] Lars Hörmander. Differential operators of principal type. *Math. Ann.*, 140:124–146, 1960.

[Hör65] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18:501–517, 1965.

[Hör66] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. *Ann. of Math. (2)*, 83:129–209, 1966.

[Hör85] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Pseudodifferential operators.

[Lew57] Hans Lewy. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann. of Math. (2)*, 66:155–158, 1957.

[LN66] Peter D. Lax and Louis Nirenberg. On stability for difference schemes: A sharp form of Gårding's inequality. *Comm. Pure Appl. Math.*, 19:473–492, 1966.

[Mel71] Anders Melin. Lower bounds for pseudo-differential operators. *Ark. Mat.*, 9:117–140, 1971.

Index