# 小车单级倒立摆稳定控制技术报告

**18340013 陈琮昊**

## 1.倒立摆系统原理与建模

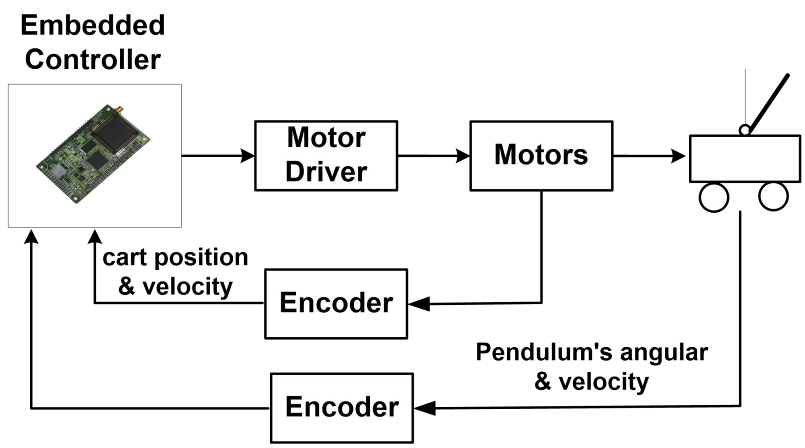



图1. 小车倒立摆系统控制原理图。

小车倒立摆系统的原理框图如图1所示。系统包括嵌入式控制器、电机驱动、伺服电机、倒立摆和光电码盘几大部分，组成一个闭环系统。光电码盘将连杆的角度、角速度信号反馈给嵌入式控制器，摆杆的角度、角速度信号亦由光电码盘反馈回嵌入式控制器。嵌入式控制器读取实时数据，确定控制决策 ，并实现该控制决策，产生相应的控制量，驱动电机转动，带动连杆运动，保持摆杆的平衡。

在忽略了空气阻力，各种摩擦之后，可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统，如下图2所示。

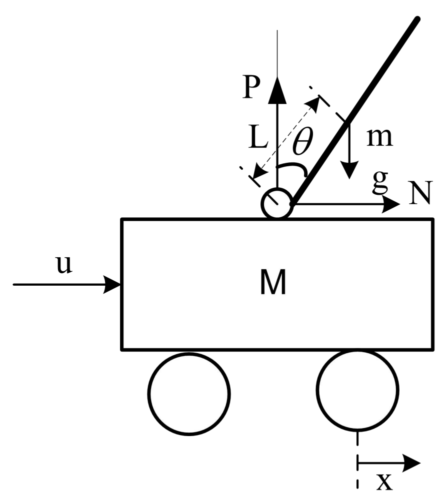


图2. 小车倒立摆系统。

其中：

| | |
|---|---|
| $M$ | 小车质量 |
| $m$ | 摆杆质量 |
| $L$ | 摆杆转动轴心到杆质心的长度 |
| $I$ | 摆杆惯量 |
| $u$ | 加在小车上的力 |
| $x$ | 小车位置 |
| $\theta$ | 摆杆与垂直向上方向的夹角（考虑到摆杆初始位置为竖直向上） |

对系统中小车和摆杆进行受力分析，其中$N$和$P$为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = u - N \,. \tag{1}$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式：

$$N = m\frac{d^2}{dt^2}\left(x + L\sin\theta\right) = m\ddot{x} + mL\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - mL\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 \,. \tag{2}$$

把（2）代入（1），可得：

$$(M+m)\ddot{x} + mL\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - mL\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 = u \,. \tag{3}$$

对摆杆竖直方向上的合力进行分析，可以得到如下等式：

$$P - mg = m\frac{d^2}{dt^2}\left(L\cos\theta\right) = -mL(\sin\theta\cdot\ddot{\theta} + \cos\theta\cdot\dot{\theta}^2) \,. \tag{4}$$

摆杆质心的力矩平衡方程如下：

$$PL\sin\theta - NL\cos\theta = I\ddot{\theta} \,. \tag{5}$$

将（2）和（4）代入（5），约去P和N，可得：

$$\left(I + mL^2\right)\ddot{\theta} - mgL\sin\theta + mL\cos\theta\ddot{x} = 0 \,. \tag{6}$$

假设$\theta$（$\theta$是摆杆与垂直向上方向之间的夹角，单位为弧度）与1相比很小，即$\theta << 1$，可进行近似处理：$\cos\theta \approx 1$，$\sin\theta \approx \theta$，$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \approx 0$。线性化后，运动方程（3）和（6）化简如下：

$$\begin{cases}\left(I+mL^2\right)\ddot{\theta}-mgL\theta+mL\ddot{x}=0,\\ \left(M+m\right)\ddot{x}+mL\ddot{\theta}=u.\end{cases} \tag{7}$$

对等式（7）重新整理，可得：

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{m^2L^2g}{I(M+m)+mML^2}\theta+\dfrac{I+mL^2}{I(M+m)+mML^2}u,\\ \ddot{\theta}=\dfrac{mgL(m+M)}{I(M+m)+mML^2}\theta-\dfrac{mL}{I(M+m)+mML^2}u.\end{cases} \tag{8}$$

令 $\mathbf{x}=[\theta,\dot{\theta},x,\dot{x}]^T$，则小车倒立摆系统的状态空间方程为：

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+Bu(t),\\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+Du(t).\end{cases} \tag{9}$$

即，系统的动力学模型：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\\ \dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \dfrac{mgL\left(M+m\right)}{I\left(M+m\right)+MmL^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{m^2L^2g}{I\left(M+m\right)+MmL^2} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ x\\ \dot{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{mL}{I\left(M+m\right)+MmL^2}\\ 0\\ \dfrac{\left(I+mL^2\right)}{I\left(M+m\right)+MmL^2}\end{bmatrix}u, \tag{10}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\theta\\ x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u.$$

系统由数字控制器实现稳定，因此我们对连续时间系统（8）进行采样，采样时间为$T_s$，则小车倒立摆系统的离散时间状态方程为：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1]&=G\mathbf{x}[k]+Hu[k],\\ \mathbf{y}[k]&=C\mathbf{x}[k]+Du[k].\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$G=e^{AT_s}$，$H=\int_0^{T_s}e^{A(T_s-\tau)}Bd\tau$。

## 2.倒立摆系统的极点配置法和LQR控制器设计

最优控制理论主要是依据庞德里亚金的极值原理，通过对性能指标的优化寻找可以使目标极小的控制器。其中线性二次型性能指标因为可以通过求解Riccatti方程得到控制器参数，并且随着计算机技术的进步，求解过程变得越来越简便，因而在线性多变量系统的控制器设计中应用较广。利用线性二次型性能指标设计的控制器

称作LQR控制器。前面我们已经得到了小车倒立摆系统的比较精确的动力学模型，下面我们针对小车倒立摆系统应用极点配置法和LQR法设计与调节控制器，控制摆杆保持倒立平衡。

实际系统的模型参数如下:

| | |
|---|---|
| $M$ | 小车质量 1.77 Kg |
| $M$ | 摆杆质量 0.25 Kg |
| $L$ | 摆杆转动轴心到杆质心的长度0.25m |
| $I$ | 摆杆惯量0.0052 kg*m*m, $I = mL^2/3$ |
| T | 采样时间20毫秒 |

由倒立摆系统的连续时间状态方程（10），可得：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 32.4413 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.0038 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.6371 \\ 0 \\ 0.5457 \end{bmatrix} u,$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \tag{12}$$

对连续时间系统进行采样，采样时间为$T_s = 20\text{ms}$，则小车倒立摆系统的离散时间状态方程为：

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 1.0037 & 0.0150 & 0 & 0 \\ 0.4872 & 1.0036 & 1 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 1 & 0.015 \\ -0.0151 & -0.0001 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0246 \\ 0.0001 \\ 0.0082 \end{bmatrix} u[k], \tag{13}$$

$$\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k].$$

系统连续时间状态方程矩阵 A 的极点为：

$$\text{eig(A)=[0,0,5.6957,-5.6957]}.$$

系统有开环极点位于右半 S 平面，说明小车倒立摆系统为不稳定系统。

考虑离散时间系统的状态方程矩阵 G 的极点：

$$\text{eig(G)=[1, 1, 1.0892,0.9181]}.$$

系统有开环极点位于 Z 域的单位圆上及单位圆外，说明开环系统不稳定。

考虑系统的初始状态 $\mathbf{x}=[0.5,0,0,0]^T$，开环系统中摆的角度和小车的位移如图 3 所示，可见开环系统的状态随时间发散。

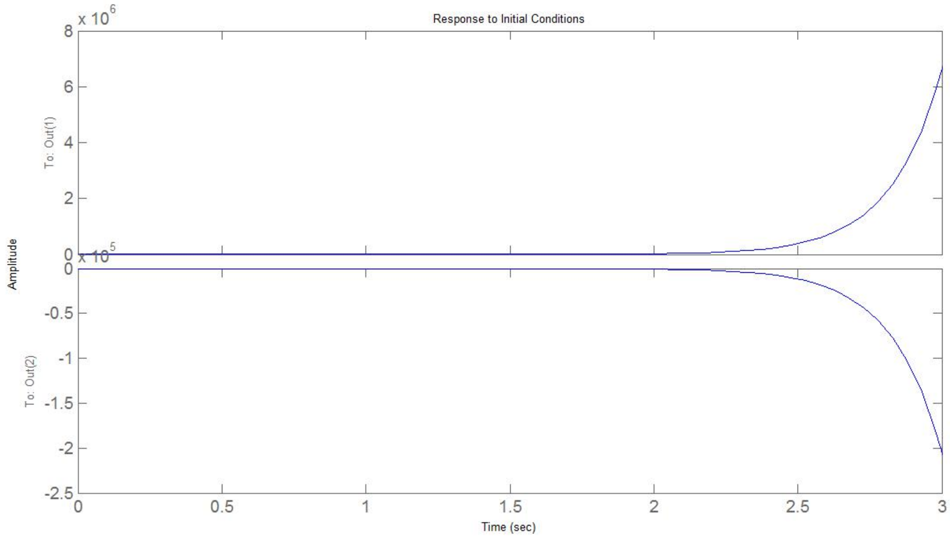



图3. 开环系统摆的角度和小车的位移.

离散时间系统的可控矩阵 Mc =[H,GH,$G^2$H,$G^3$H] 满秩，原系统可控。对此不稳定但可控的系统，设计线性反馈控制器 u[k]=-K**x**[k]，以实现倒立摆的稳定，状态反馈闭环控制系统结构如图 4 所示。

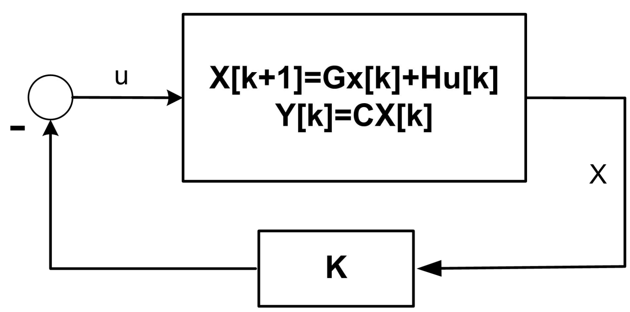



图4. 状态反馈闭环控制系统.

图中，$u$ 是控制量，四个状态量 $\theta$，$\vartriangle\theta$，$x$，$\vartriangle x$，分别代表摆杆角度、摆杆角速度、小车位移和小车速度，输出 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\theta & x\end{bmatrix}^T$ 包括摆杆角度与小车位移。设计控制器使得当系统的初始位置不在平衡位置时，小车会左右移动，摆杆随之左右摆动，然后仍然回到竖直位置。

摆的角度、角速度，小车的位移与速度可通过编码器测量信息获取，即小车可实现全状态反馈，藉此确定反馈控制律 K。

**（1） 极点配置法**

考虑极点配制方法，使闭环控制系统的极点配置在期望位置：

$$[\,0.9708+0.1449i, 0.9708-0.1449i, 0.9850, 0.9742\,].$$

用 Matlab 中的 place 函数，可以得到反馈状态向量

$$K=[\,-154.9207, -19.9912, -45.0147, -47.9853\,].$$

考虑系统的初始状态 $\mathbf{x}=[0.5,0,0,0]^T$，闭环控制系统的各状态如图 5 所示，反馈控制量如图 6 所示。

**（2） 线性二次调节器**

考虑线性二次调节器的目标函数：

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^*[k]\mathbf{Q}\mathbf{x}[k]+u^*[k]\mathbf{R}u[k]], \tag{14}$$

其中 **Q** 为正定矩阵或半正定实对称矩阵， **R** 为正定实对称矩阵。

求解使线性二次调节器目标函数 J 最小的控制律，考虑离散时间系统（13），用 Matlab 中的 dlqr 函数，可以得到最优控制器对应的反馈状态向量 K。dlqr 函数允许选择两个矩阵 $R$ 和 $Q$，这两个矩阵用来平衡输入量和状态量。设置：

$$Q=\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R=1.$$

用 Matlab 中的 dlqr 函数，可以得到反馈状态向量

$$K=[\,-64.1916, -11.2873, -12.2933, -11.1509\,].$$

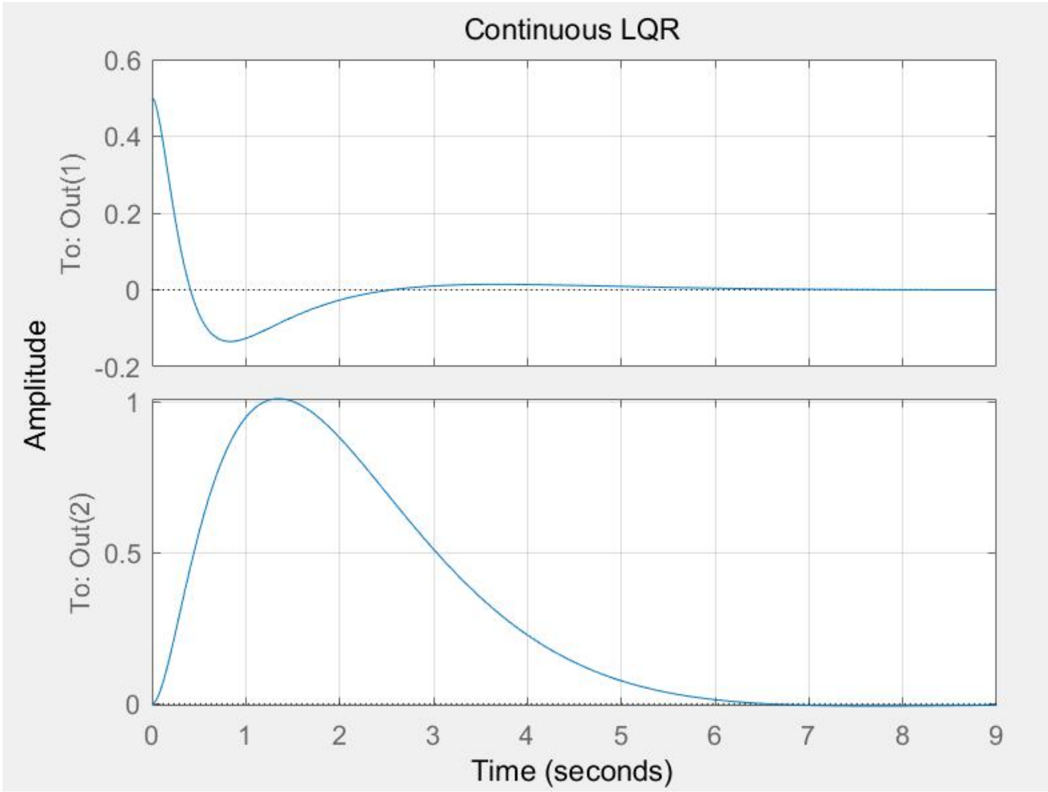
考虑系统的初始状态 $\mathbf{x}=[0.5,0,0,0]^T$，闭环控制系统的各状态如图 7 所示，反馈控制量如图 8 所示。

**（3） PD / PID 控制器**

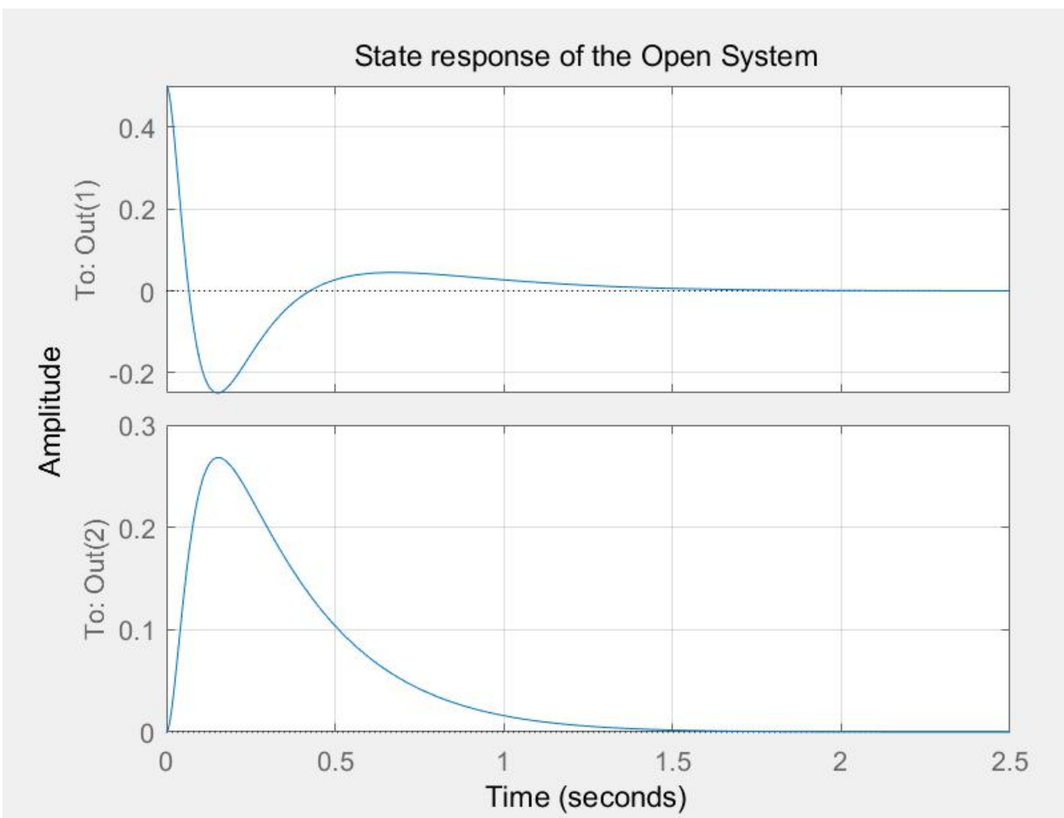
$$u_{PD}(k)=\mathbf{K}_p\mathbf{e}(k)+\mathbf{K}_d(\mathbf{e}(k)-\mathbf{e}(k-1))$$

**3. 实验结果：**

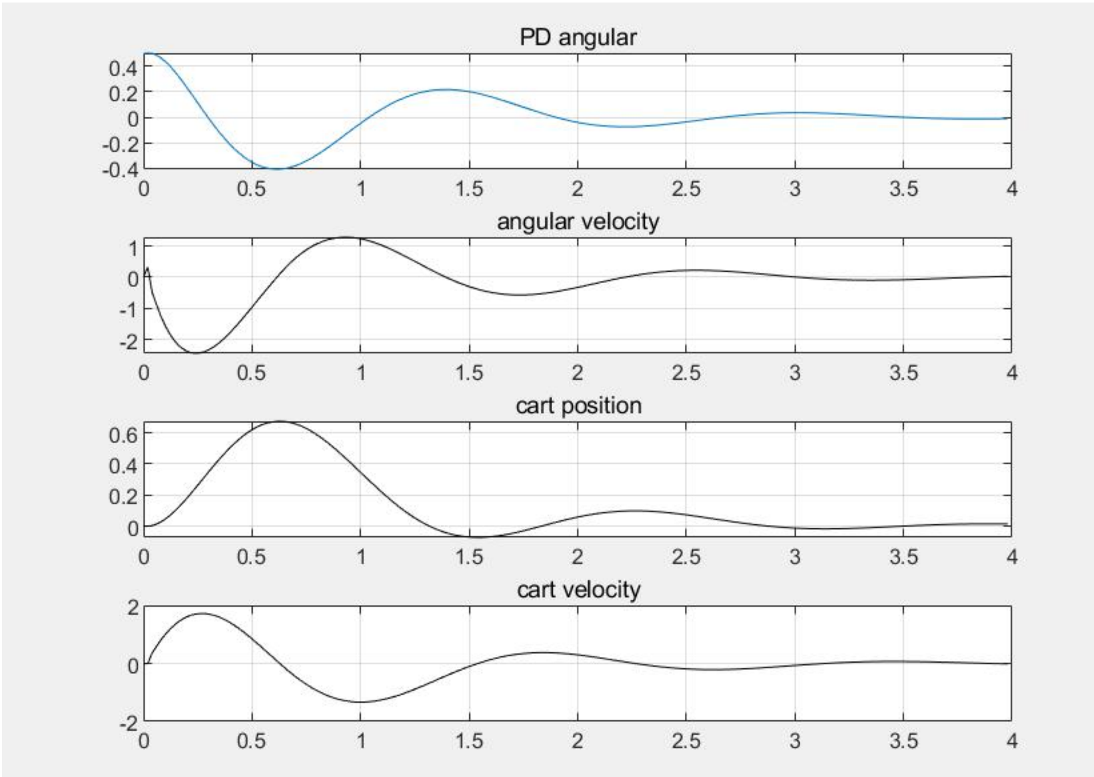
**本次实验的参数均以 word 内前面部分给出的参数为主。**


Continuous LQR
Amplitude
To: Out(1)
To: Out(2)
Time (seconds)
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

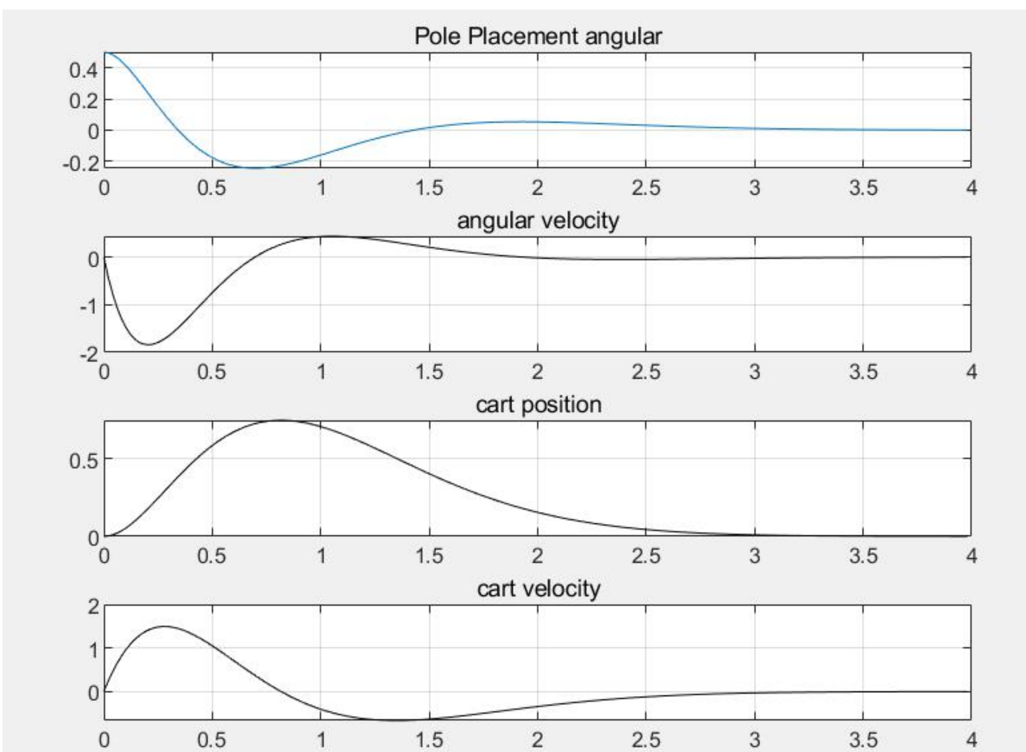
LQR


State response of the Open System
Amplitude
To: Out(1)
To: Out(2)
Time (seconds)
0.4
0.2
0
-0.2
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5

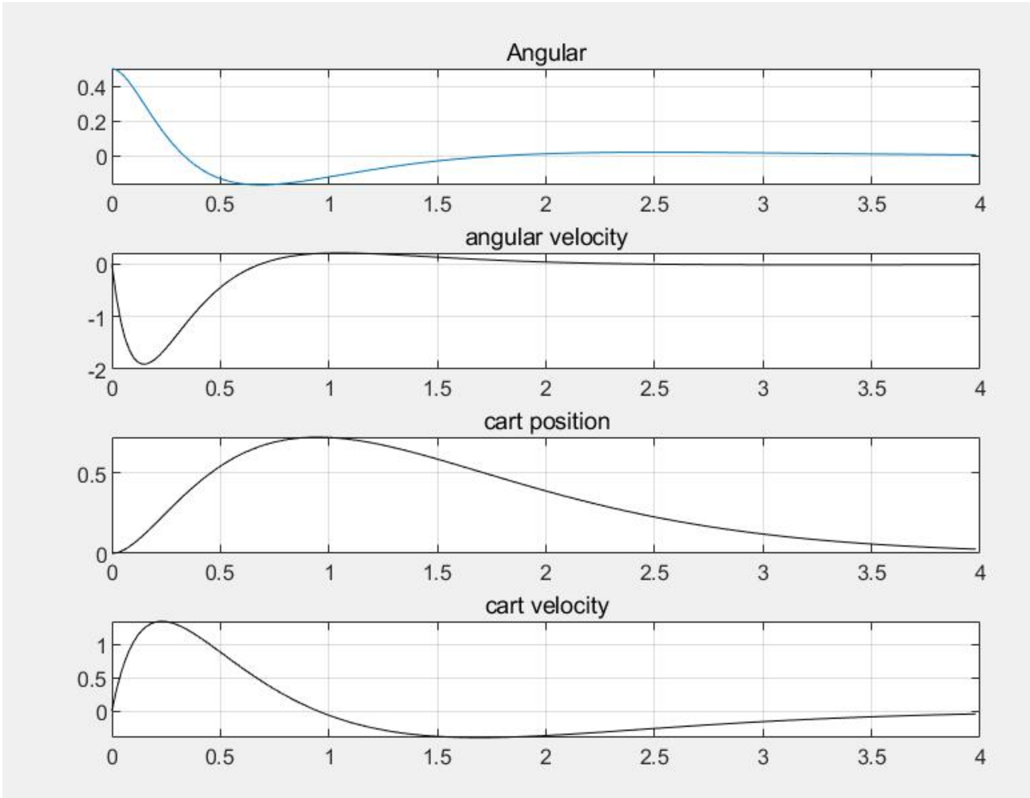
开环系统



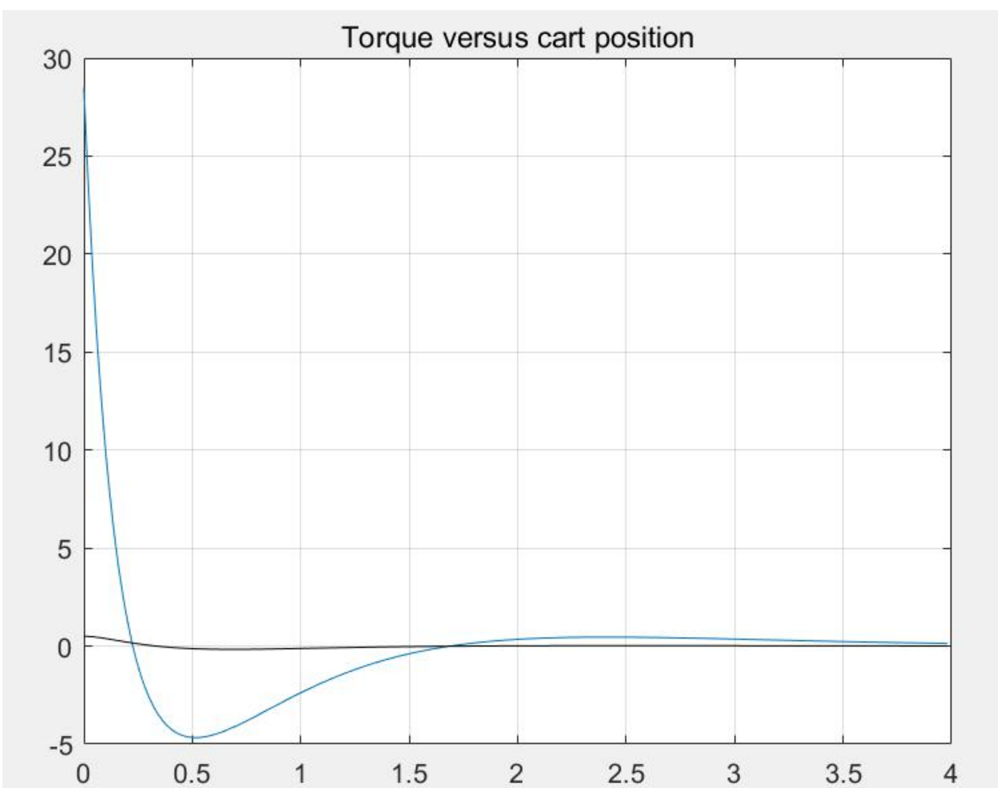

PD 各参量状态



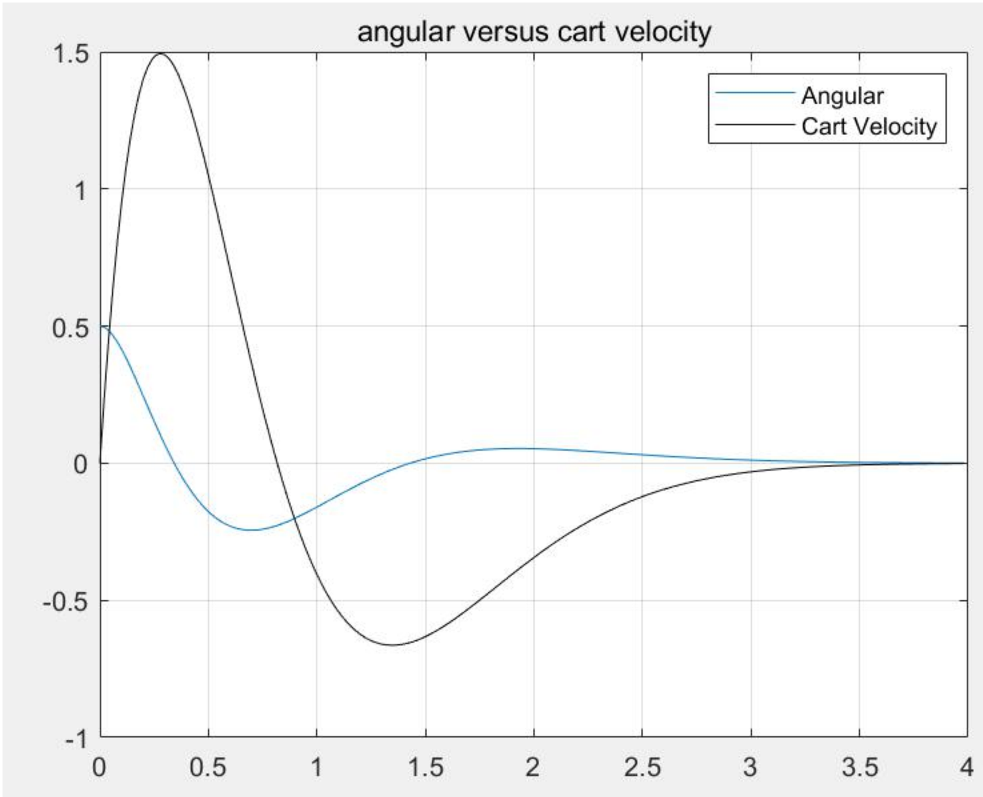

极点法各参量状态


Angular
angular velocity
cart position
cart velocity

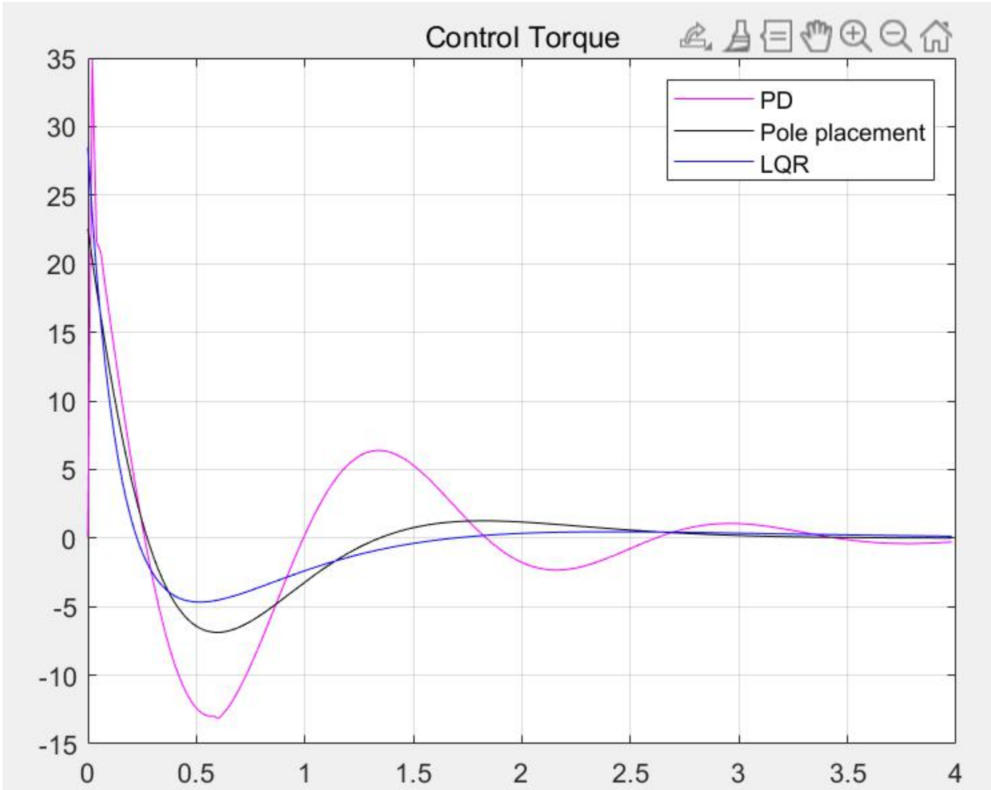
LQR 各参量状态


Torque versus cart position

参量对比


angular versus cart velocity
Angular
Cart Velocity
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

参量对比




三种方法对比

可以看到最终都趋于收敛。

4. **实验心得：**

通过修改并运行所给 matlab 代码，可以观察到使用不同方法所得到的控制量的结果。其实整个过程比较麻烦的就是看懂所给的 matlab 代码，在梳理了 matlab 代码层次过后，并且理解课上所讲的三种方法（PID、极点、LQR）（关于这三种方法前面已经有介绍。），就能看懂整个程序的实现过程并得到正确的结果图。可以说通过这次实验对这三种方法有了更直观的认识，不单单只是停留在理论层次上。倒立摆这个例子更好的帮助我理解了关于三种方法的理论介绍。