

色彩科學導論與應用

程式設計練習

組合數字系統

授課教師：王宗銘

2021/02/22

1.問題背景說明

欲由 n 個物件，選取 k 個，有 C_k^n 種選法。例如 $n=5, k=3, C_3^5 = 10$ ，代表由 5 個物件，取 3 個，有 10 種選法。我們將 n 個物件以 $0, 1, \dots, (n-1)$ 索引(Index)代表。第 1 個物件索引為 0，第 2 個物件索引為 1，依此類推，第 n 個物件索引為 $(n-1)$ 。我們以索引序列 $\text{element}(e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ 代表選取的 k 個物件之索引值。例如 $\text{element}(1, 3, 4)$ 代表選取物件之索引值分別為 $e_0=1, e_1=3, e_2=4$ ，物件為第 2、4、5 個。

何謂組合數字系統？組合數字系統是一種計數系統。我們已知給定 (n, k) ，利用組合公式可算出 C_k^n 之數值，故 $[0, C_k^n - 1]$ 可代表數線上的一個封閉範圍。據此，對任意一個正整數 m ，若其位於此範圍內， $0 \leq m \leq (C_k^n - 1)$ ，組合系統以式(1)將 m 對應到唯一的表示方式，其中 $n > s_k > s_{k-1} > \dots > s_1 \geq 0$ 。我們以 $\text{cobidic}(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ 代表數字 m 的組合序列(combinadics)。在組合數字系統中，若 $n < k$ ，則我們定義 $C_k^n = 0$ 。例如 $C_3^2 = 0, C_1^0 = 0$ 。舉例而言，給定 $(n, k, m) = (5, 3, 4)$ ，則由於 $C_3^4 + C_2^1 + C_1^0 = 4 + 0 + 0 = 4$ ，故 $m = 4$ 的組合序列為 $\text{cobidic}(4, 1, 0)$ 。表 1 列出 $(5, 3, m)$ 的組合序列與對應的索引序列(element)。我們後續會詳加說明索引序列。

$$m = C_k^{s_k} + C_{k-1}^{s_{k-1}} + \dots + C_1^{s_1} \quad (1)$$

表 1、 C_3^5 之組合序列與索引序列之關係

m	expression	cobidic	element	0	1	2	3	4
0	$C_3^2 + C_2^1 + C_1^0$	(2, 1, 0)	(0, 1, 2)					
1	$C_3^3 + C_2^1 + C_1^0$	(3, 1, 0)	(0, 1, 3)					
2	$C_3^3 + C_2^2 + C_1^0$	(3, 2, 0)	(0, 1, 4)					
3	$C_3^3 + C_2^2 + C_1^1$	(3, 2, 1)	(0, 2, 3)					
4	$C_3^4 + C_2^1 + C_1^0$	(4, 1, 0)	(0, 2, 4)					
5	$C_3^4 + C_2^2 + C_1^0$	(4, 2, 0)	(0, 3, 4)					
6	$C_3^4 + C_2^2 + C_1^1$	(4, 2, 1)	(1, 2, 3)					
7	$C_3^4 + C_2^3 + C_1^0$	(4, 3, 0)	(1, 2, 4)					
8	$C_3^4 + C_2^3 + C_1^1$	(4, 3, 1)	(1, 3, 4)					
9	$C_3^4 + C_2^3 + C_1^2$	(4, 3, 2)	(2, 3, 4)					

承上所述，n 個物件選取 k 個之情況中，我們希望 m 的組合序列與選取的物件能有字典順序(lexicographic order)表示。以表 1 來說明之。例如：

- (1). $m=0$ ，組合序列為 cobidic(2, 1, 0)，此時我們由最小索引起始 0 開始，選取索引序列 element(0, 1, 2)，代表我們選了第 1、2、3 個物件，如表 1 最右欄之顏色區塊所示。
- (2). $m=1$ ，組合序列為 cobidic(3, 1, 0)，我們選取 element(0, 1, 3)，意即第 1、2、4 個物件。以此類推到 $m=2, 3, 4$ 。
- (3). 當 $m=5$ ，組合序列為 cobidic(4, 2, 0)，我們選取 element(0, 3, 4)，意即第 1、4、5 個物件。
- (4). 當 $m=6$ 時，組合序列為 cobidic(4, 2, 1)，但索引起始最小 0 已無法有其他可供選擇，故我們由次小的索引 1 開始，選取 element(1, 2, 3)，意即第 2、3、4 個物件。由表 1 的最右欄，我們可以看出選取是依據字典順序，由索引 0 開始，若相同，則選索引 1，若又相同，則選索引 2。依此類推，此即為字典順序。

2. 問題

2.1 組合序列

給定 (n, k, m) ，請寫一個程式 program_1，可求出組合序列 $\text{cobidic}(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ 。

1. 注意事項：

- (1) 由於給定 (n, k, m) ，故組合序列 $\text{cobidic}(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ 有 k 個元素，其下標由 k 遞減到 1。
- (2) 組合序列必須滿足 $n > s_k > s_{k-1} > \dots > s_1 \geq 0$ 。注意 s_1 之數值可以為 0。

2. 方法：

我們可利用貪婪演算法一(Greedy Algorithm)，求出組合序列 $\text{cobidic}(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ 。

貪婪演算法一：求出組合序列

輸入： (n, k, m)

輸出： $\text{cobidic}(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$

Step 1: Let 餘數 $R=m$ 。Then, 變數 i 由 $i=n-1, n-2, \dots, (k-1)$ 遞減順序，找出滿足

$$C_k^i \leq R \text{ 且 } C_k^i \text{ 最接近 } R \text{ 之 } i, \text{ let } s_k = i。$$

Step 2: 此時 s_k 已知，故計算剩餘之餘數 $R=m-C_k^{s_k}$ 。Then, 變數 i 由 $i=(s_k -$

$$1), (s_k - 2), \dots, (k-2) \text{遞減順序，找出滿足 } C_{k-1}^i \leq R \text{ 且 } C_{k-1}^i \text{ 最接近 } R \text{ 之變數 } i,$$

$$\text{令 } s_{k-1} = i。$$

Step 3: 此時 s_{k-1} 已知，故計算剩餘之餘 $R=R-C_{k-1}^{s_{k-1}}$ 。Then, 變數 i 由 $i=(s_{k-1} -$

$$1), (s_{k-1} - 2), \dots, (k-3) \text{遞減順序，找出滿足 } C_{k-2}^i \leq R \text{ 且 } C_{k-2}^i \text{ 最接近 } R \text{ 之變數}$$

$$i, \text{ 令 } s_{k-2} = i。$$

依此類推，經過 k 個 steps，我們可以找到 s_1 。

...

Step (k+1): 當 $R=R-C_1^{s_1} = 0$ 時，我們終止演算法。

輸出組合序列 $\text{cobidic}(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ 。

3. 演算法一範例：

給定 $(n, k, m) = (5, 3, 6)$

Step 1: $R=6$. $i=4, 3, 2$ 。 C_3^4 、 C_3^3 、 C_3^2 中， $C_3^4=4 \leq 6$ 且最接近 $R=6$ ，let $s_3=4$ 。

Step 2: $R=6-C_3^4=2$. $i=3, 2, 1$ 。 C_2^3 、 C_2^2 、 C_2^1 中， $C_2^2=1 \leq 2$ 且最接近 $R=2$ ，let $s_2=2$ 。

Step 3: $R=2-C_2^2=1$. $i=2, 1, 0$ 。 C_1^2 、 C_1^1 、 C_1^0 中， $C_1^1=1 \leq 1$ 且最接近 $R=1$ ，let $s_1=1$ 。

Step 4: $R=1-C_1^1=0$ 我們終止計算。

輸出組合序列 $\text{cobidic}(s_3, s_2, s_1) = \text{cobidic}(4, 2, 1)$ 。

4. 程式輸出與數入範例

輸入

5 3 6

輸出

4 2 1

2.2 索引序列(Element)

我們已說明 n 個物件選取 k 個，有 C_k^n 種選法與組合序列之關係。由 n 個物件選取 k 個時，我們除了求出正整數 m 的組合序列外，選取的物件與之有字典順序外，也希望能瞭解被選取的物件為何，這就需要藉助索引序列。我們以範例討論之。

給定 $(n, k, m) = (5, 3, 6)$ ，參照表 2，由於 $m=6$ ，我們可根據貪婪演算法一求出組合序列 $\text{cobidic}(4, 2, 0)$ 。但我們希望也能求出其索引序列 $\text{element}(1, 2, 3)$ ，意即

選取為第 2、3、4 個物件。

由表 2，我們觀察 $m=6$ 與 $d=3$ 相加得到之數值為 $C_3^5 - 1 = 9$ 。同理， $m=4$ 與 $d=5$ 相加也是 9。我們稱 d 為 m 的雙數(Dual Number)。若給定 $(n, k, \mathbf{d}) = (5, 3, 3)$ ，則由貪婪演算法一可求出組合序列為 $\text{cobidic}(3, 2, 1)$ ，如表 2 所示。接著，如果以 $(n-1)=4$ 減去上述組合序列內的每個元素 3, 2, 1，則可得到 $4-3=1, 4-2=2, 4-1=3$ ，恰巧是 $m=6$ 的索引序列 $\text{element}(1, 2, 3)$ 。

再舉另個範例，欲求 $m=4$ 的索引序列 $\text{element}(0, 2, 4)$ 。我們可以使用以下三個步驟來完成。**首先**，求出 $m=4$ 的雙數 \mathbf{d} ，根據 $m+d=C_3^5 - 1$ 之關係，我們可得 $d=C_3^5 - 1 - m=10-1-4=5$ 。**接著**，我們利用貪婪演算法一求出雙數 $d=5$ 之的組合序列 $\text{cobidic}(4, 2, 0)$ 。**最後**，我們以 $n-1=4$ 減去每個元素，即可得到 $m=4$ 的索引序列 $\text{element}(0, 2, 4)$ 。

表 2、 C_3^5 之在組合系統 m 與其對應的雙數 \mathbf{d}

m	expression	cobidic	element	0	1	2	3	4
0	$C_3^2 + C_2^1 + C_1^0$	(2, 1, 0)	(0, 1, 2)					
1	$C_3^3 + C_2^1 + C_1^0$	(3, 1, 0)	(0, 1, 3)					
2	$C_3^3 + C_2^2 + C_1^0$	(3, 2, 0)	(0, 1, 4)					
3	$C_3^3 + C_2^2 + C_1^1$	(3, 2, 1)	(0, 2, 3)					
4	$C_3^4 + C_2^1 + C_1^0$	(4, 1, 0)	(0, 2, 4)					
5	$C_3^4 + C_2^2 + C_1^0$	(4, 2, 0)	(0, 3, 4)					
6	$C_3^4 + C_2^2 + C_1^1$	(4, 2, 1)	(1, 2, 3)					
7	$C_3^4 + C_2^3 + C_1^0$	(4, 3, 0)	(1, 2, 4)					
8	$C_3^4 + C_2^3 + C_1^1$	(4, 3, 1)	(1, 3, 4)					
9	$C_3^4 + C_2^3 + C_1^2$	(4, 3, 2)	(2, 3, 4)					

根據上述說明，給定 (n, k, m) ，請寫一個程式 `program_2`，求出索引序列 $\text{element}(e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ 。

1. 注意事項：

由於給定 (n, k, m) ，故索引序列 $\text{element}(e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ 也有 k 個，但下標由 0

增加到 $k-1$ ，且索引序列必須滿足 $e_0 < e_1 < \dots < e_{k-1} < n$ 。

2. 方法：

我們可利用原有的組合序列演算法、考慮 m 的雙數 d ，利用減法來求索引序列。

演算法二：索引序列

輸入：(n, k, m)

輸出：element(e_0, e_1, \dots, e_{k-1})

Step 1: 求出 m 的雙數 $d = C_k^n - 1 - m$ 。

Step 2: 使用貪婪演算法一來求出 d 的組合序列 cobidic(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)。

Step 3: 將 $n-1$ 減去每個組合序列內之元，即可得索引序列，意即 $\text{element}(e_0, e_1, \dots, e_{k-1}) = (n-1, n-1, \dots, n-1) - (s_k, s_{k-1}, \dots, s_1)$ 。

3. 演算法二範例：

給定 $(n, k, m) = (5, 3, 7)$

Step 1: $m=7$ ， $d = C_3^5 - 1 - m = 2$ 。

Step 2: 使用貪婪演算法一，並帶入參數 $(n, k, d) = (5, 3, 2)$ ，求出組合序列 cobidic(s_k, s_{k-1}, \dots, s_1) = (3, 2, 0)。

Step 3: 將 $5-1=4$ 減去每個組合序列元素，即得 $\text{element}(e_0, e_1, e_2) = (5-1, 5-1, 5-1) - (3, 2, 0) = (1, 2, 4)$ 。

4. 程式輸出與數入

輸入

5 3 7

輸出

1 2 4