

## ÁLGEBRA LINEAL 2024-2DO (LM - PM - LCC)

### PRÁCTICA 3: TRANSFORMACIONES LINEALES

- Para cada una de las siguientes funciones  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo: obtener  $\text{nul}(T)$  y  $\text{img}(T)$ , calcular su dimensión y determinar si  $T$  es inversible.
  - $T((x, y)^t) = (y, x)^t$ .
  - $T((x, y)^t) = (x^2, y^2)^t$ .
  - $T((x, y)^t) = (x, -y)^t$ .
  - $T((x, y)^t) = (x, 0)^t$ .

- Sea  $V = \mathbb{R}^n$ , fijamos la base canónica  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Para cada  $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  hallar  $A_i$  tal que  $A_i x = T_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, 4$ .

- $T_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $T_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $T_3(x) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $T_4(x) = y$ , donde  $y = (y_k)_{k=1}^n$  con  $y_k = x_k, i \neq k \neq j, y_k = x_i, k = j$  y  $y_k = x_j, k = i$

- Consideremos la base canónica de  $V = \mathbb{R}^2$  dada por  $B = \{e_1, e_2\}$  y la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que aplica los vectores  $e_1$  y  $e_2$  como sigue:

$$T(e_1) = e_1 + e_2, \quad T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2.$$

Obtener:

- $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$  y  $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ ,
  - las matrices asociadas a  $T$  y  $T^2$  en la base  $B$ ,
  - $T(v), \forall v \in V$ .
- Sean  $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T_1((x, y, z)^t) = (x, y, 0)^t$  y  $T_2((x, y, z)^t) = (x, y, y)^t$ . Hallar  $T_1 \circ T_2$  y  $T_2 \circ T_1$ . Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.
  - Definimos  $\mathbb{R}_n[x] = \{p : p \text{ polinomio a coeficientes reales } \text{grad}(p) \leq n, x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ . Sea

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto T \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d).$$

- Probar que  $T$  es lineal.
  - Hallar una base para  $\text{nul}(T)$  y una para  $\text{img}(T)$ .
  - Determinar si  $T$  es un isomorfismo.
- Sea  $T_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/T_w(z) = z + w\bar{z}$ , donde  $w = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
    - Considerar  $w = 1 + i$  y calcular  $T_w(2 + 3i)$ .
    - Comprobar que  $T_w$  es una transformación lineal entre espacios vectoriales.
    - Si  $B = \{1, i\}$  es base de  $\mathbb{C}$ , hallar la matriz de  $T_w$  en dicha base.
    - Probar que  $T_w$  es isomorfismo si y sólo si  $a^2 + b^2 \neq 1$ .
  - Sea  $T : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  tal que  $T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_n(x+1)^n$ . Probar que  $T$  es isomorfismo.
  - Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(v) = (x+y, x+z, \alpha(v))^t$ , donde  $v = (x, y, z)^t$  y  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Determinar, si es posible,  $\alpha$  de modo que  $T$  resulte lineal.

ÁLGEBRA LINEAL 2024-2DO (LM - PM - LCC)

9. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)^t) = (2,3,5)^t, \quad T((0,1,1)^t) = (1,0,0)^t, \quad T((1,1,1)^t) = (0,1,-1)^t.$$

- Probar que con esta información es posible obtener  $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$ .
  - Determinar, fijada la base canónica en  $\mathbb{R}^3$ , la matriz de  $T$ .
  - Utilizando (9b), obtener  $\dim(\text{nul}(T))$  y  $\text{rang}(T)$ .
  - Determinar si  $T$  es inversible.
10. Determinar, si existe, una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que verifique:  $T((1,-1,1)^t) = (1,0)^t$  y  $T((1,1,1)^t) = (0,1)^t$ .
11. Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$  y  $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W : T \text{ transformación lineal}\}$ . Probar que para  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$
- $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \subset V$ .
  - Si  $V = \langle U \rangle$  y  $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$ , entonces  $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$ .
12. Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita y  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ . Probar que:
- Si  $T$  inyectiva, entonces  $T$  transforma conjuntos l.i. de  $V$  en conjuntos l.i. de  $W$ .
  - Si  $T$  sobreyectiva, entonces  $T$  transforma conjuntos generadores de  $V$  en conjuntos generadores de  $W$ .
  - $T$  isomorfismo si y solo si  $T$  transforma bases de  $V$  en bases de  $W$ .
13. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  y supongamos que existe una aplicación lineal  $T \in \mathcal{L}(V)$  tal que tanto  $\text{nul}(T)$  como  $\text{img}(T)$  son subespacios de dimensión finita. Probar que  $V$  también debe ser de dimensión finita.
14. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{K}$  y  $S, T \in \mathcal{L}(V)$ . Probar que:
- $T \circ S$  es inversible si y solo si  $S$  y  $T$  son inversibles.
  - Para  $I$ , la función identidad en  $V$ ,  $T \circ S = I$  si y solo si  $S \circ T = I$ .
15. Sea  $V$  el espacio vectorial de los números complejos y  $\mathbb{K}$  el cuerpo de los números reales. Con las operaciones usuales,  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con  $\mathbb{R}^2$ .
16. Una matriz  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  con entradas en  $\mathbb{C}$  tal que  $A = \overline{A}^t$ , i.e.  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ , para todos  $i, j = 1, \dots, n$ , se dice *Hermitiana*.  
Sea  $W$  el conjunto de todas las matrices Hermitianas  $2 \times 2$ .
- Verificar que  $W$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
  - Verificar que la aplicación

$$(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

es un isomorfismo de  $\mathbb{R}^4$  en  $W$ .

17. Mostrar que  $\mathbb{K}^{m \times n}$  es isomorfo a  $\mathbb{K}^{mn}$ .
18. Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{K}$ . Probar que  $V$  y  $W$  son isomorfos si y sólo si  $\dim V = \dim W$ .
19. Sea  $T$  la transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

- Si  $\mathcal{B}$  es la base ordenada estándar de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B}'$  es la base ordenada estándar para  $\mathbb{R}^2$ , determinar la matriz de  $T$  relativa al par  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ .
  - Si  $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (1,1,1), (1,0,0)\}$  y  $\mathcal{B}' = \{(0,1), (1,0)\}$  ¿Cuál es la matriz de  $T$  relativa a al par  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ?
20. Sea  $T$  un operador lineal sobre  $\mathbb{K}^n$  y sea  $A$  la matriz de  $T$  relativa a la base estándar de  $\mathbb{K}^n$ . Sea  $W$  el subespacio de  $\mathbb{K}^n$  generado por los vectores columnas de  $A$ . ¿Qué relación existe entre  $W$  y  $T$ ?

ÁLGEBRA LINEAL 2024-2DO (LM - PM - LCC)

21. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo  $\mathbb{K}$  y sean  $S$  y  $T$  operadores lineales sobre  $V$ . Probar que existen dos bases ordenadas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  en  $V$  tales que  $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'}$  si y sólo si existe un operador lineal inversible  $U$  sobre  $V$  tal que  $T = USU^{-1}$ .
22. Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios vectoriales tales que  $V_1 \times \dots \times V_m$  tiene dimensión finita. Probar que  $V_j$  es de dimensión finita para cada  $j = 1, \dots, m$ .
23. Sean  $V_1, \dots, V_m, W$  espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ . Probar que  $\mathcal{L}((V_1 \times \dots \times V_m, W))$  y  $\mathcal{L}(V_1, W) \times \dots \times \mathcal{L}(V_m, W)$  son espacios vectoriales isomorfos.
24. Sea  $V$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  y sea  $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ ,  $\phi \neq 0$ . Probar que  $\dim(V/\ker(\phi)) = 1$ .
25. En  $\mathbb{R}^3$ , sean  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 2)$  y  $v_3 = (-1, -1, 0)$ .
  - i) Si  $f$  es un funcional lineal sobre  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f(v_1) = 1$ ,  $f(v_2) = -1$  y  $f(v_3) = 3$  y si  $v = (a, b, c)$ , hallar  $f(v)$ .
  - ii) Describir explícitamente un funcional lineal  $f$  sobre  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f(v_1) = f(v_2) = 0$  pero  $f(v_3) \neq 0$ .
  - iii) Sea  $f$  cualquier funcional lineal tal que  $f(v_1) = f(v_2) = 0$  pero  $f(v_3) \neq 0$ . Si  $v = (2, 3, -1)$ , muestre que  $f(v) \neq 0$ .
26. Sea  $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$  una base de  $\mathbb{C}^3$ . Hallar la base dual de  $\mathcal{B}$ .
27. Sean  $v_1 = (1, 0, -1, 2)$  y  $v_2 = (2, 3, 1, 1)$  y sea  $W = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$ . ¿Qué funcionales lineales de la forma  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$  están en el anulador de  $W$ ?
28. Sea  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  y sean

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea  $W$  el subespacio de  $V$  que consiste de todas las matrices  $A$  tales que  $AB = 0$ . Sea  $f$ , un funcional lineal sobre  $V$  que está en el anulador de  $W$ . Supongamos que  $f(I) = 0$  ( $I$  matriz identidad) y  $f(C) = 3$ . Hallar  $f(B)$ .

29. Sean  $W_1$  y  $W_2$  subespacios de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita.
  - i) Probar que  $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ .
  - ii) Probar que  $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$ .
30. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{K}$  y sea  $W$  un subespacio de  $V$ . Si  $f$  es un funcional lineal sobre  $W$ , pruebe que existe un funcional lineal  $g$  sobre  $V$  tal que  $g(v) = f(v)$ ,  $\forall v \in W$ .
31. Sea  $v \in V$  espacio vectorial, entonces  $v$  induce un funcional lineal  $L_v$  en  $V^*$  definido por

$$\begin{aligned} L_v : V^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto L_v(f) = f(v) \end{aligned}$$

- a) Mostrar que  $L_v$  es lineal.
- b) Probar que si  $V$  es de dimensión finita y  $v \neq 0$ , entonces existe un funcional lineal  $f$  tal que  $f(v) \neq 0$ .
- c) Probar que si  $V$  es de dimensión finita, la aplicación  $v \mapsto L_v$  es un isomorfismo de  $V$  en  $V^{**}$ .  $V^{**}$  se conoce como el *doble dual* de  $V$ .
- d) Probar que si  $L$  es un funcional lineal sobre el espacio dual  $V^*$  del espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, entonces existe un único vector  $v \in V$  tal que  $L(f) = f(v)$  para todo  $f \in V^*$ .
- e) Mostrar que en un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, toda base de  $V^*$  es la dual de alguna base de  $V$ .