



Università
di Genova

DIMA DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA

Teoria e Pratica dell'Omologia Persistente: un'indagine sull'efficacia dell'analisi topologica dei dati

Andrea Di Via 4486604

Relatore interno: Matteo Penegini

Relatore esterno: Ulderico Fugacci

Indice

- 1. Introduzione**
- 2. Complessi Simpliciali**
- 3. Omologia Simpliciale**
- 4. Omologia Persistente**
- 5. Esperimenti e Risultati**
- 6. Conclusione**

Introduzione

L'omologia persistente è uno strumento dell'analisi topologica dei dati e si tratta di un adattamento del concetto di omologia alle nuvole di punti dati

Obiettivo: identificare le caratteristiche topologicamente dominanti all'interno dei dati, come componenti connesse, tunnel, cavità etc.

● **1990**

Pseudo-distanza tra sottovarietà e funzione di grandezza "size function".

Patrizio Frosini



● **1999**

Gruppi di omologia persistenti come immagini degli omomorfismi indotti dalle inclusioni

Vanessa Robins

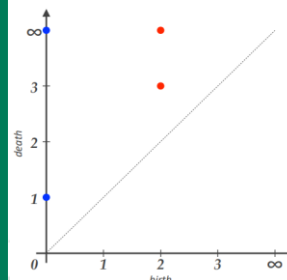


● **2002**

Diagrammi di persistenza

Algoritmo di calcolo

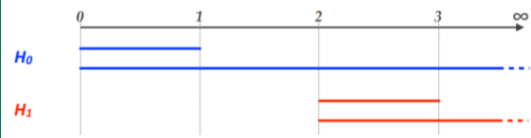
Herbert Edelsbrunner



● **2004**

Riformulazione della definizione Diagrammi a codice a barre.

Gunnar E. Carlsson



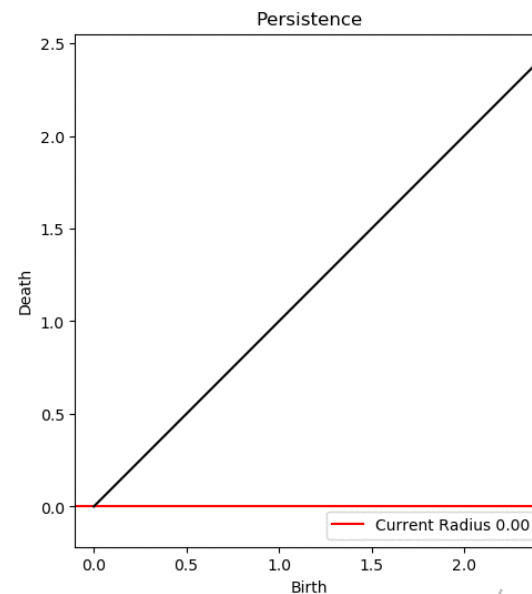
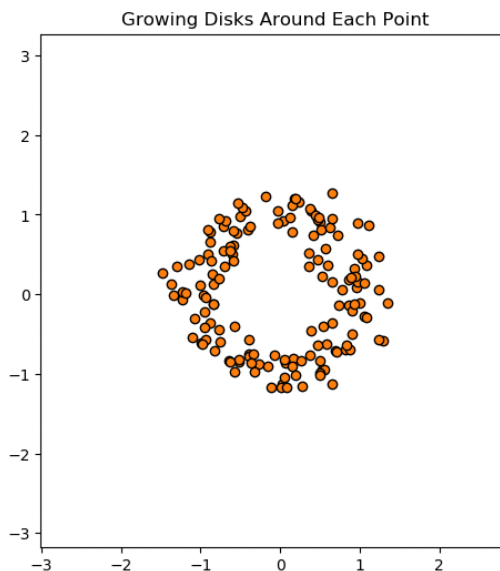
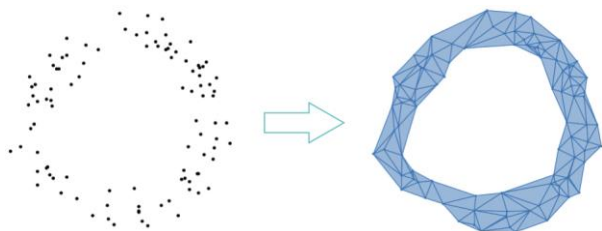
Introduzione

Come associare una forma ad un insieme di dati?

Si considera un ispessimento di una nuvola di punti a diverse scale di risoluzione (definita filtrazione) e se ne analizza l'evoluzione della forma risultante attraverso diverse scale di risoluzione

Significato del termine “persistente”:

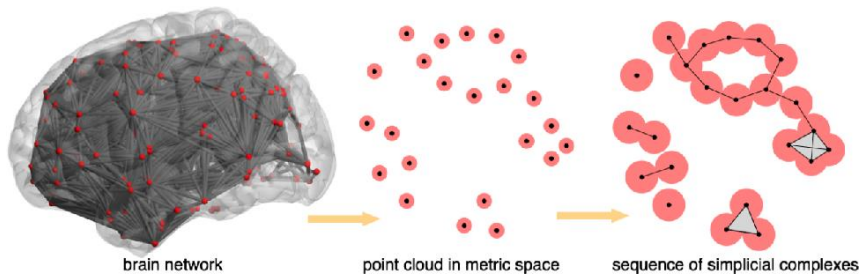
- Informazione → cicli che sopravvivono in molteplici fasi della filtrazione (persistenti)
- Rumore → cicli che spariscono in poche fasi della filtrazione (temporanei)



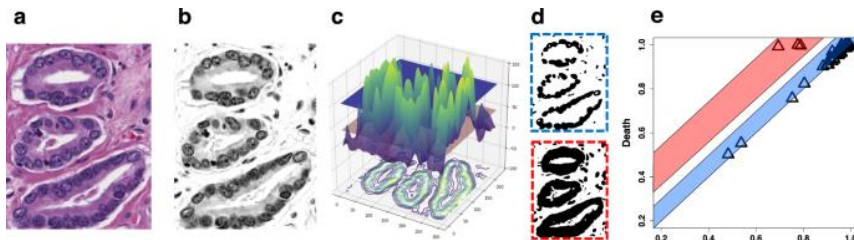
Applicazioni

Imaging Medico

Studio del riconoscimento dei dendrogrammi cerebrali nei bambini con ADHD e autismo

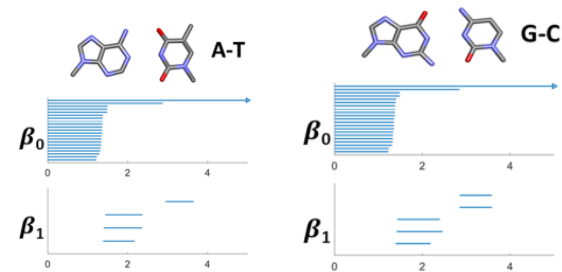


Studio del riconoscimento di tumori



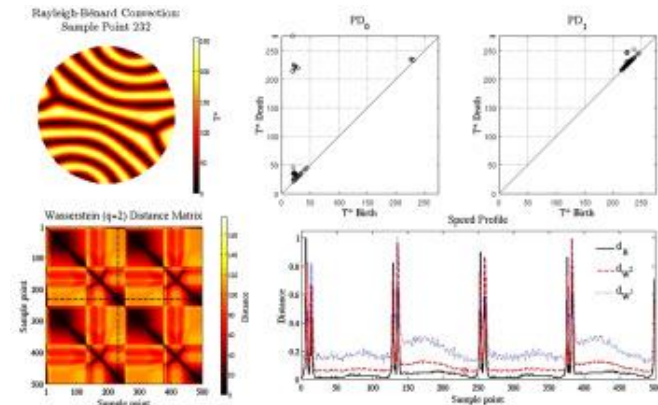
Chimica e Biochimica

Caratterizzazione della struttura proteica



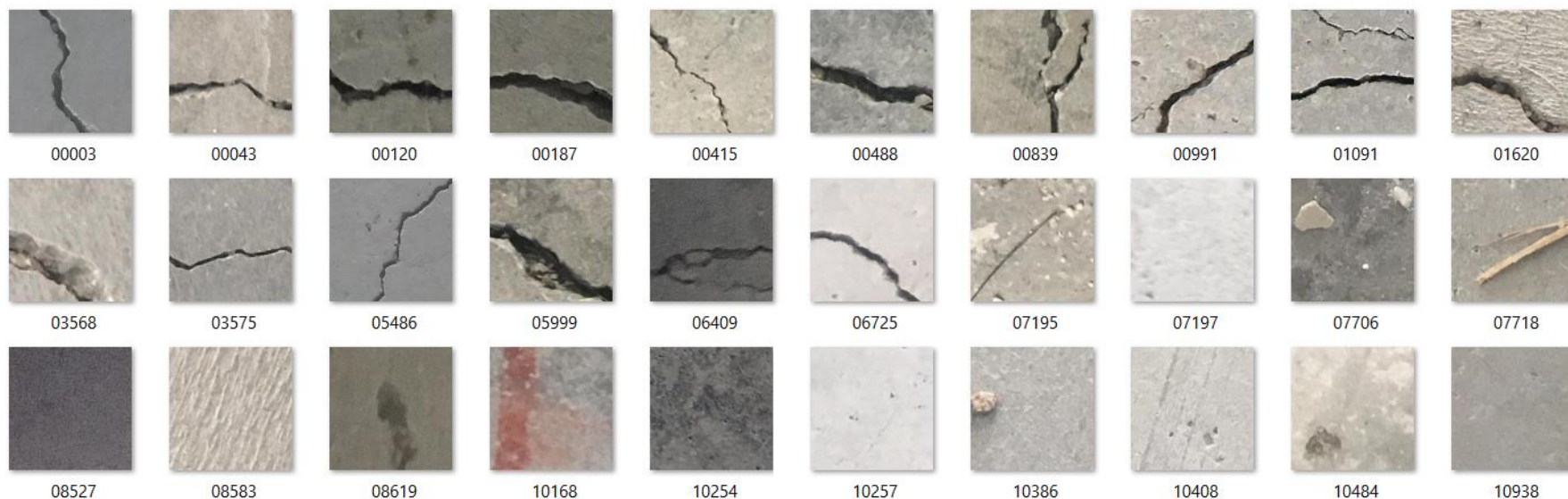
Analisi dei Sistemi Dinamici

Studio della dinamica dei flussi di Kolmogorov e della convezione di Rayleigh-Bernard



Caso studio

Edilizia



Motivazioni Pratiche

- **Risparmio di tempo** nel distinguere superfici crepate
- **Minima dipendenza da operatori**, non si richiede un'ispezione manuale di tutti i dati

Motivazioni Metodologiche

Questo approccio riduce la quantità di dati necessari per far fronte a:

- **complessità dei dati**
- **presenza di rumore**
- **scelta di specifici parametri**

Indice

1. Introduzione
2. **Complessi Simpliciali**
3. Omologia Simpliciale
4. Omologia Persistente
5. Esperimenti e Risultati
6. Conclusione

Simplessi

Indipendenza Geometrica

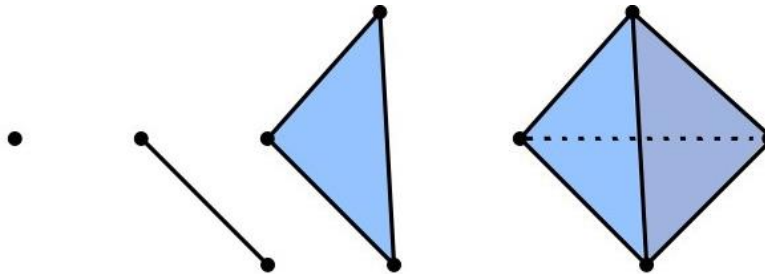
Un insieme $\{a_0, \dots, a_n\}$ di punti di \mathbb{R}^n si dice geometricamente indipendente se, i vettori $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0$ sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^n .

Simplesso

Sia $X = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ un insieme di punti geometricamente indipendenti in \mathbb{R}^n .

Il semplice Δ^n di dimensione n generato da X è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di X

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad t_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \right\}$$



Faccia

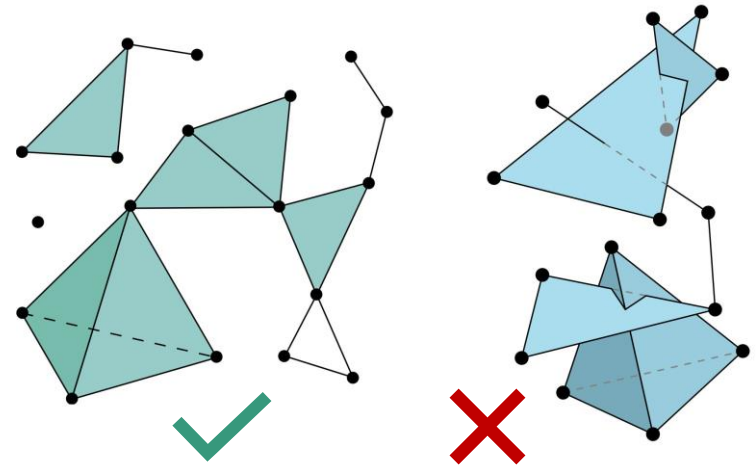
Un semplice Δ^k generato da $\{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subset X$ si dice faccia di Δ^n

Complessi Simpliciali Finiti

Complesso Simpliciale Geometrico

Un complesso simpliciale K in \mathbb{R}^n è una collezione finita di semplici in \mathbb{R}^n tale che

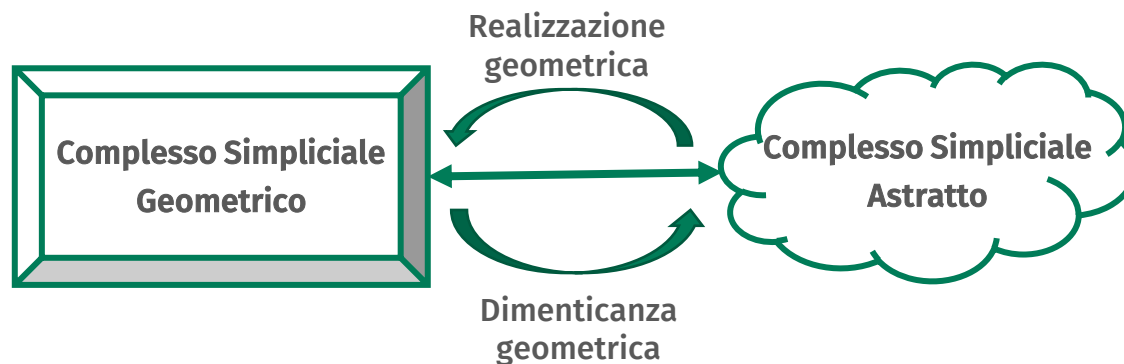
- ogni faccia di un semplice Δ^n di K sia ancora un semplice di K
- L'intersezione di due qualsiasi semplici o è vuota o è una faccia di entrambi i semplici



Complesso Simpliciale Astratto

Un complesso simpliciale astratto è una collezione finita S di insiemi non vuoti tale che

$$A \in S \Rightarrow B \in S \quad \forall B \subseteq A, \quad B \neq \emptyset$$



- **Topologia:** topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea sullo spazio soggiacente 9

Indice

1. Introduzione
2. Complessi Simpliciali
3. **Omologia Simpliciale**
4. Omologia Persistente
5. Esperimenti e Risultati
6. Conclusione

Omologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2

Catena

Una p-catena è una somma formale dei p-simplessi Δ_i^p in K complesso simpliciale

$$c = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Delta_i^p \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{Z}_2$$

Le p-catene di K formano il gruppo abeliano libero $(C_p(K; \mathbb{Z}_2), +)$ la cui base è data dai p-simplessi

Operatore di Bordo

Se $\Delta_p = [v_0, \dots, v_p]$ è un p-simplesso con $p > 0$, si definisce l'operatore di bordo

$$\partial_p: C_p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_{p-1}(K; \mathbb{Z}_2)$$

$$\partial_p \Delta^p = \partial_p [v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$$

dove \hat{v}_i rappresenta il vertice mancante.

L'elemento $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$ rappresenta l'i-esima faccia di Δ_p ottenuta una volta eliminato il suo i-esimo vertice

$$\partial_1 \left(\begin{array}{c} v_5 \\ \hline v_6 \quad v_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cdot \\ v_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 \left(\begin{array}{c} v_5 \\ \triangle \\ v_6 \quad v_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \hline v_6 \quad v_4 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} v_5 \\ \diagdown \\ v_4 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} v_5 \\ \diagup \\ v_6 \end{array} \right)$$

Omologia simpliciale a coefficienti in \mathbb{Z}_2

Cicli e Bordi

Il nucleo di $\partial_p: C_p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_{p-1}(K; \mathbb{Z}_2)$ è detto gruppo di p-cicli e viene denotato $Z_p(K; \mathbb{Z}_2)$

L'immagine di $\partial_{p+1}: C_{p+1}(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_p(K; \mathbb{Z}_2)$ è detta gruppo di p-bordi e viene denotata con $B_p(K; \mathbb{Z}_2)$

Proposizione

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$$

 \Rightarrow

$$\text{Im } \partial_{p+1} \subseteq \text{Ker } \partial_p$$

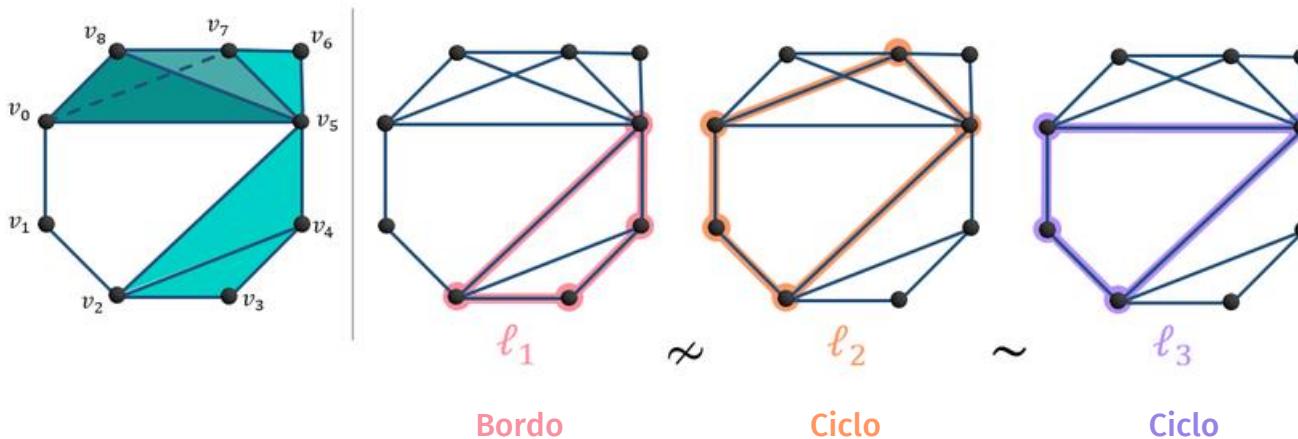
 \Rightarrow

$$B_p(K; \mathbb{Z}_2) \leq Z_p(K; \mathbb{Z}_2)$$

Ogni bordo di una (p+1)-catena è anche un p-ciclo

Gruppo di Omologia

Si definisce il p-esimo gruppo di omologia come: $H_p(K; \mathbb{Z}_2) = Z_p(K; \mathbb{Z}_2) / B_p(K; \mathbb{Z}_2)$



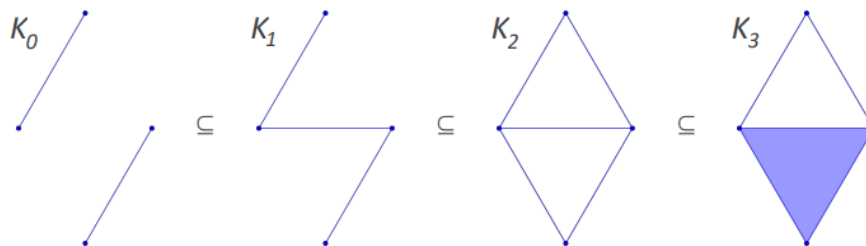
Indice

1. Introduzione
2. Complessi Simpliciali
3. Omologia Simpliciale
- 4. Omologia Persistente**
5. Esperimenti e Risultati
6. Conclusione

Filtrazione

Sia K un complesso simpliciale

Filtrazione: successione crescente $K_0 \subseteq \dots \subseteq K_n = K$ di sottocomplessi di K



Per ogni $i < j$ si ha la mappa dell'inclusione di $\iota_{i,j}: K_i \rightarrow K_j$

Per ogni dimensione p di K , il diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{p+1}(K_0) & \xrightarrow{\iota_{0,1}} & C_{p+1}(K_1) & \xrightarrow{\iota_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & C_{p+1}(K_n) \\
 \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} \\
 C_p(K_0) & \xrightarrow{\iota_{0,1}} & C_p(K_1) & \xrightarrow{\iota_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & C_p(K_n) \\
 \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p \\
 C_{p-1}(K_0) & \xrightarrow{\iota_{0,1}} & C_{p-1}(K_1) & \xrightarrow{\iota_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & C_{p-1}(K_n)
 \end{array}$$

Ogni inclusione induce l'omomorfismo $f_p^{i,j}: H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$ per ogni dimensione p

Omologia Persistente

Si definisce **il p-esimo gruppo di omologia persistente** l'immagine degli omomorfismi

$f_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$ indotti dalle inclusioni di K_i in K_j

$$H_p^{i,j} = \text{Im } f_p^{i,j} \text{ per } 0 \leq i \leq j \leq n$$

I gruppi di omologia persistente consistono delle classi di omologia in K_i sopravvissute in K_j

Coppie di Persistenza

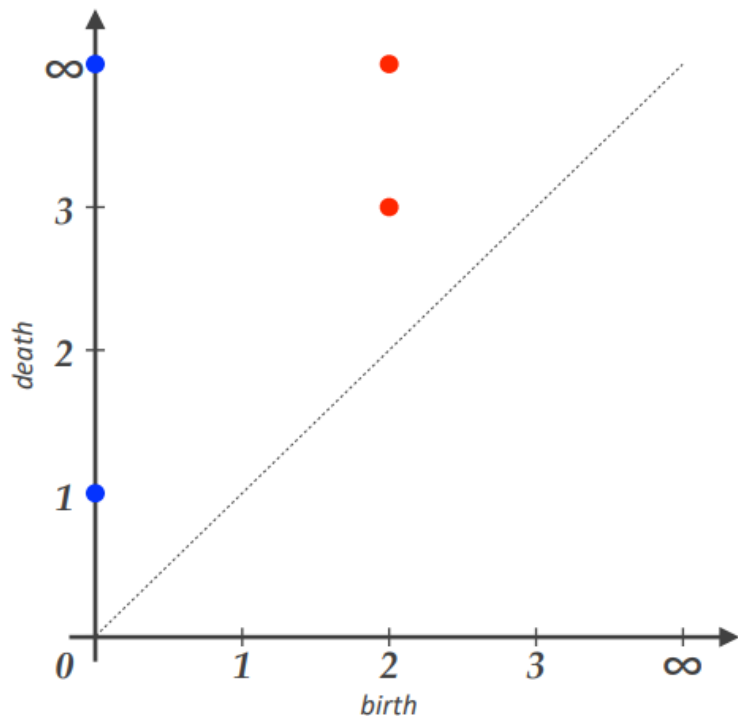
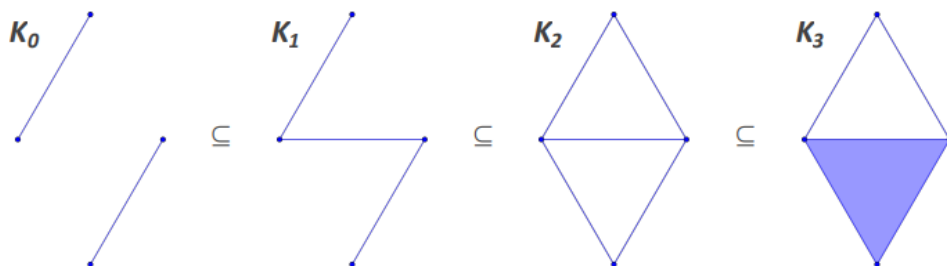
Se una classe γ nasce in K_i e muore in K_j , si definisce $(i, j) \in \mathbb{N} \times \bar{\mathbb{N}}$ la **coppia di persistenza**

Persistenza

Se una classe γ nasce in K_i e muore in K_j , si definisce $\text{pers}(\gamma) = j - i$ la **persistenza**

È possibile caratterizzare i gruppi di omologia persistente attraverso le coppie di persistenza

Rappresentazione Visiva



Rappresentazione delle coppie di persistenza (i, j) con una certa molteplicità

Le caratteristiche che persistono fino all'ultimo valore della filtrazione, presentano coordinate all'infinito

$$\begin{array}{ll}
 H_0 & (0, 1) \\
 & (0, \infty) \\
 H_1 & (2, 3) \\
 & (2, \infty)
 \end{array}$$

Diagramma di Persistenza

Siccome $i < j$, tutti i punti giacciono sopra rispetto alla diagonale

Spazio: $\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{N}}$

Persistenza: distanza verticale dalla diagonale

distanza grande \rightarrow caratteristiche robuste

distanza piccola \rightarrow rumore nei dati

Dai Dati ai Complessi

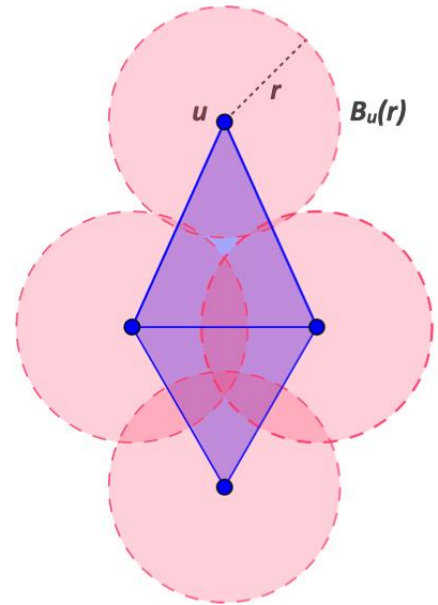
Complesso di Vietoris-Rips

Sia V un insieme di punti in \mathbb{R}^n . Siano $B_u(r)$ delle palle chiuse di centro $u \in V$ e raggio r e sia S la collezione di queste palle.

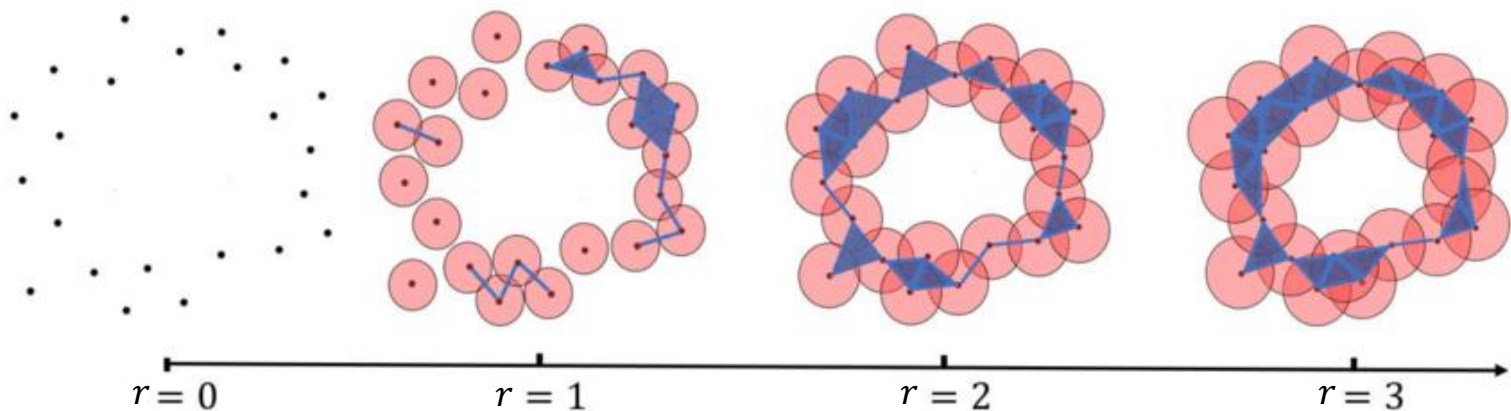
$$VR(r) := \{X \subseteq V \mid d(u, v) \leq 2r \quad \forall u, v \in X\}$$

Realizzazione Geometrica:

- Insiemi \rightarrow vertici
- Intersezioni comuni \rightarrow 1-simplessi che congiungono i vertici
- A ogni n -ciclo viene aggiunto un $(n+1)$ -simpleso, diventando bordo



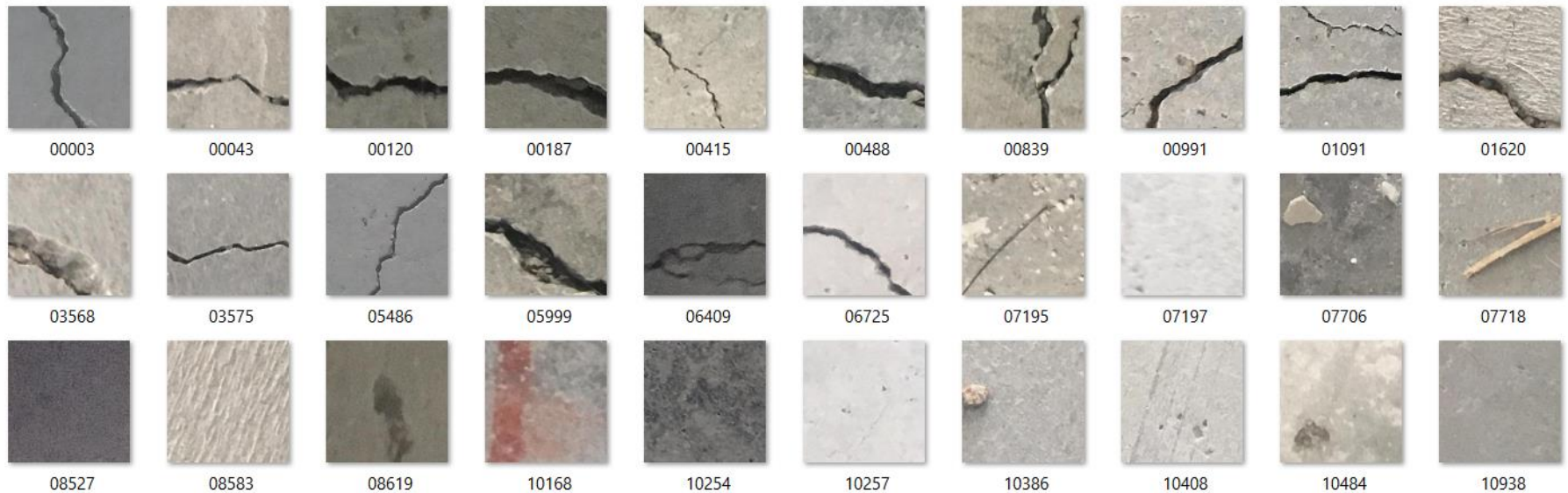
Filtrazione



Indice

1. Introduzione
2. Complessi Simpliciali
3. Omologia Simpliciale
4. Omologia Persistente
5. Esperimenti e Risultati
6. Conclusione

Dataset



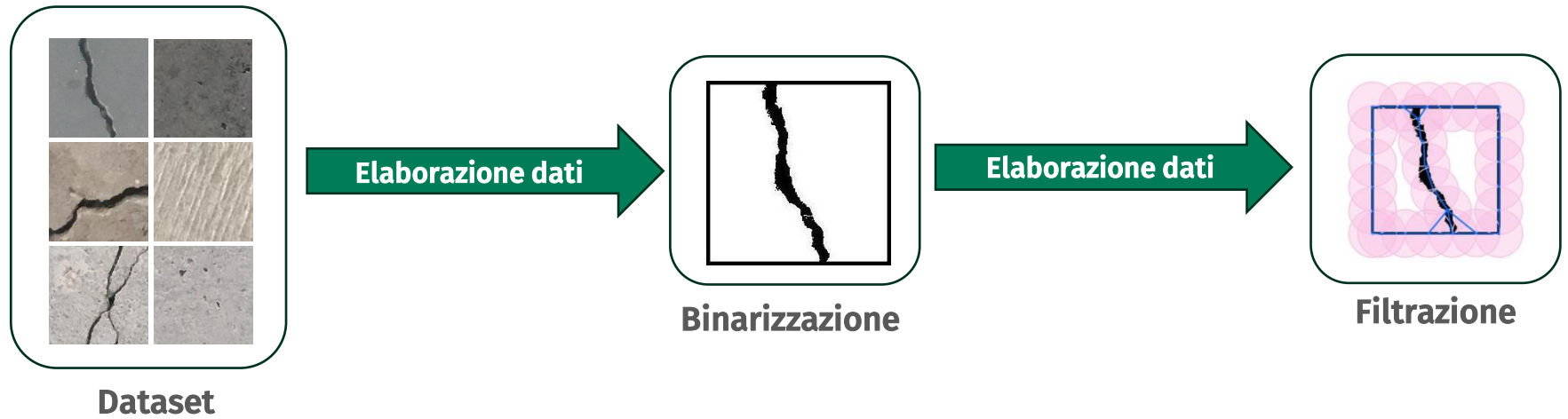
Dataset originale

- **Quantità:** 40.000 → 50% crepate e 50% non crepate
- **Dimensione:** 227x227 pixel con canali RGB
- **Caratteristiche:** variazioni in termini di finitura superficiale o condizione di illuminazione

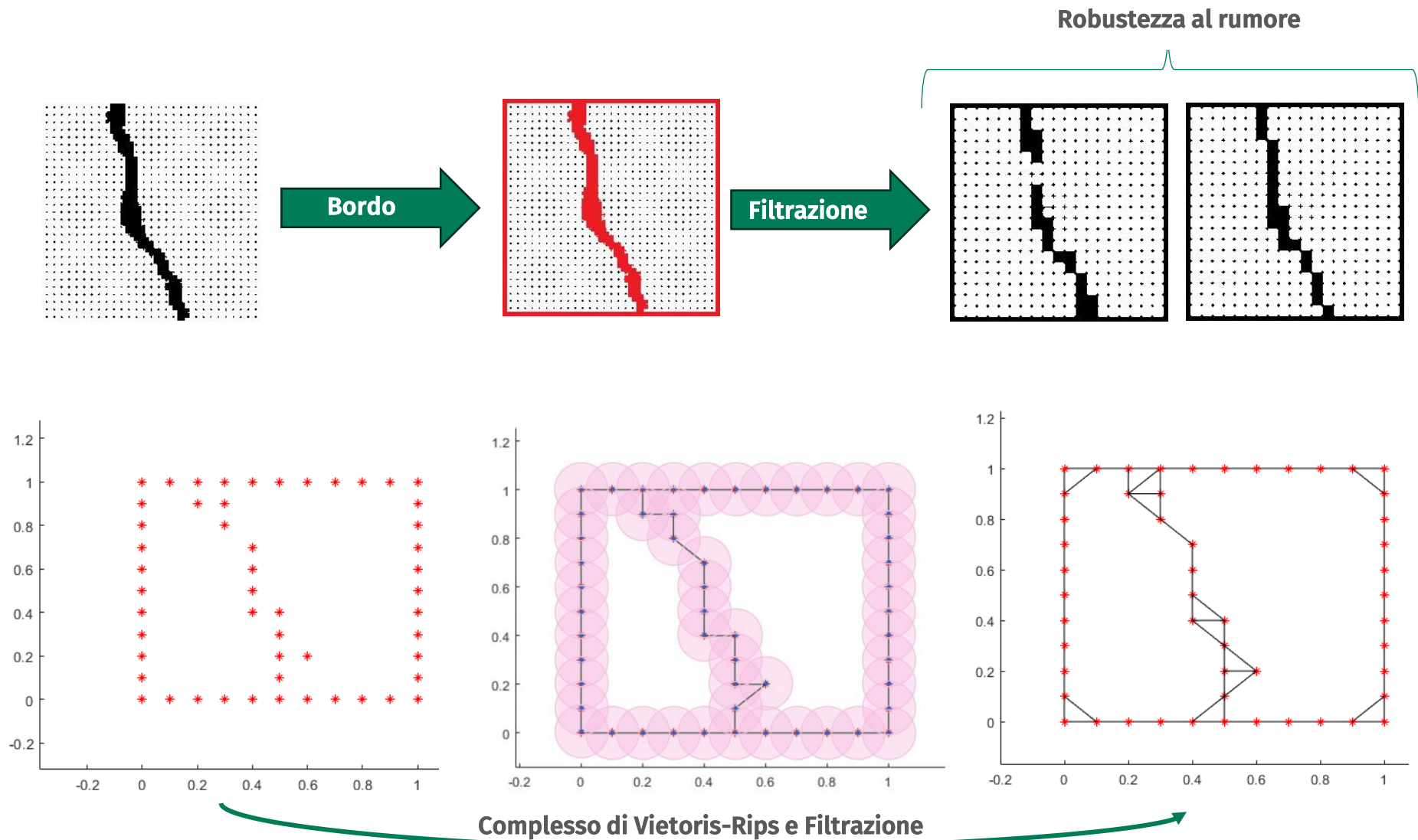
Dataset utilizzato

- **Quantità:** 5000 → 50% crepate e 50% non crepate
- **Dimensione:** 50x50 pixel con canali RGB

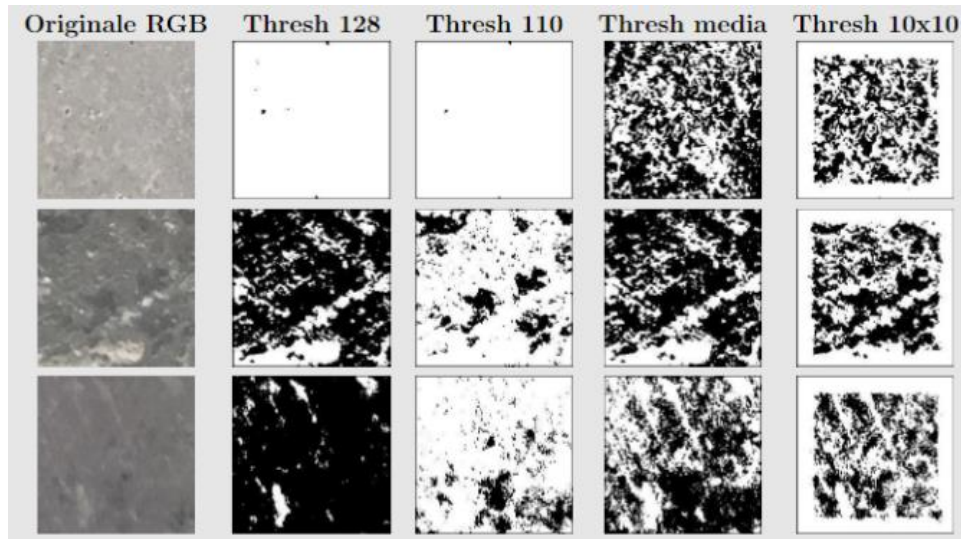
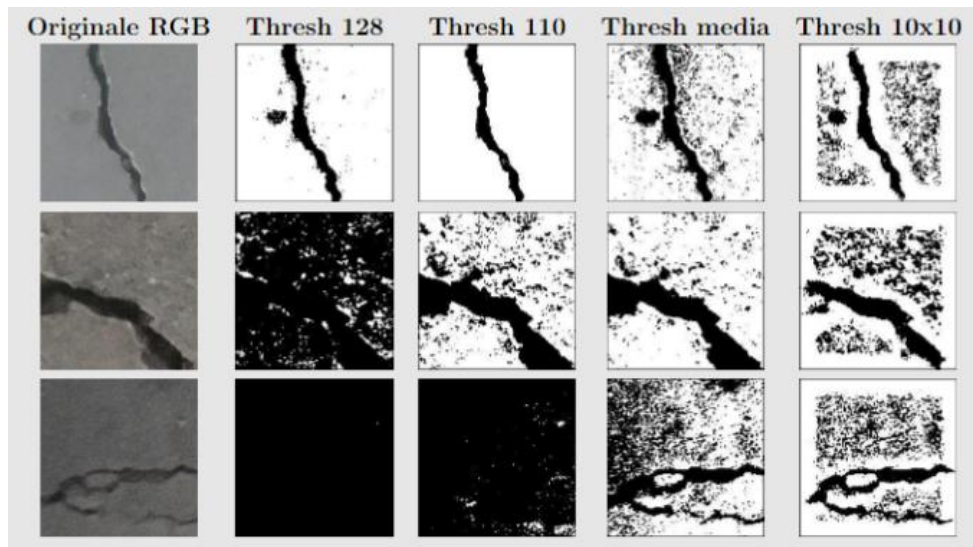
Passo 1: Elaborazione Dati



Nuvole di punti a partire dal dataset



Elaborazione Dati



- **Ridimensionamento a 50x50 pixel**
- **Binarizzazione**

- **Soglie basate su una media**



Ottima individuazione della crepa



Immagine «sporcata» →

Complesso di Vietoris-Rips non efficace

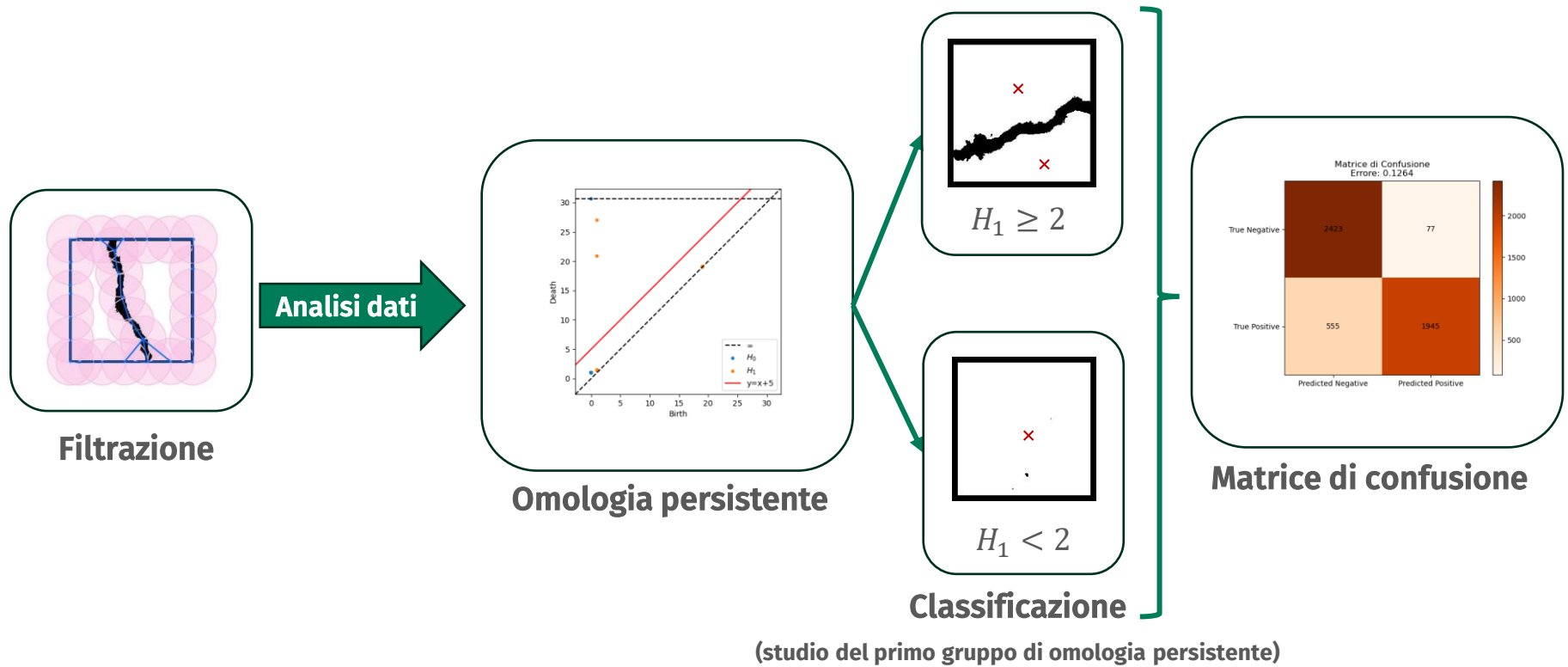
- **Soglie basate su valori fissati a priori**

Soglia 128 → Poco efficace per immagini scure

Soglia 110 → Migliore per il dataset studiato

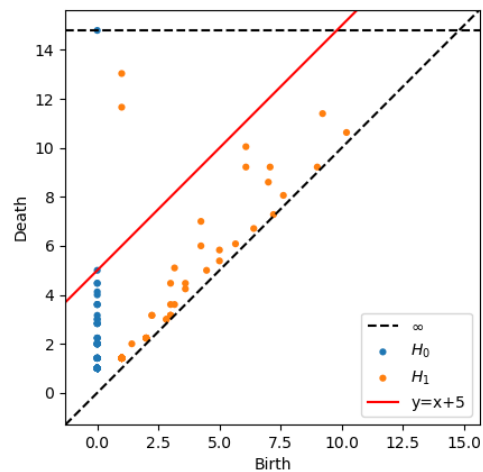
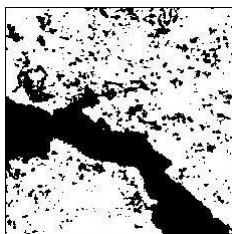
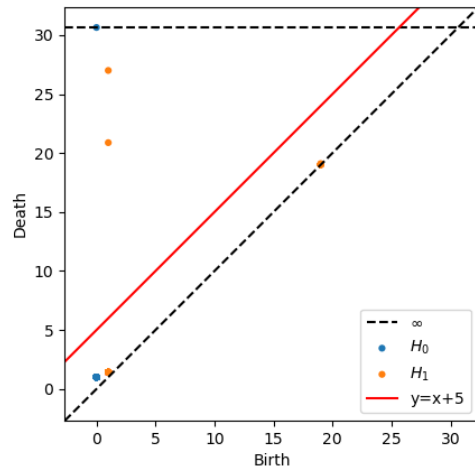
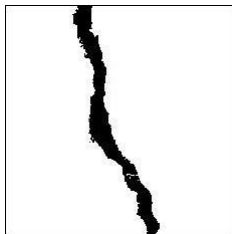
- **Aggiunta di un bordo**

Passo 2: Analisi Dati

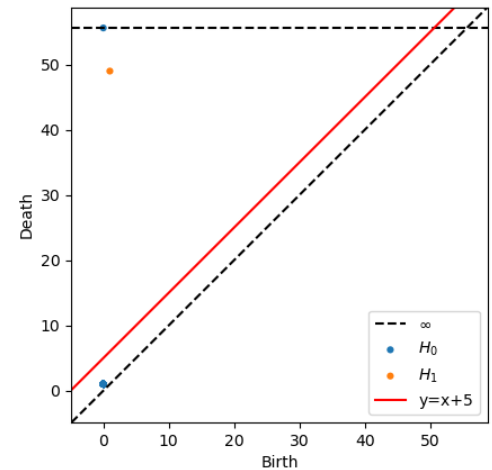
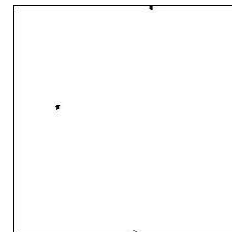
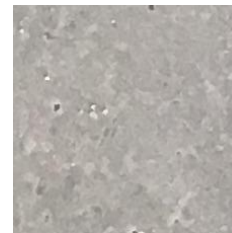
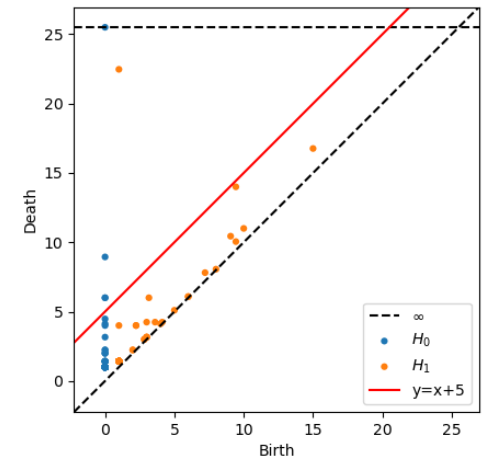
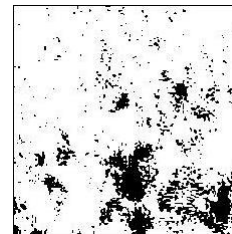
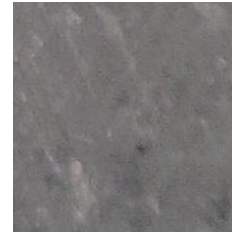


Diagrammi persistenza

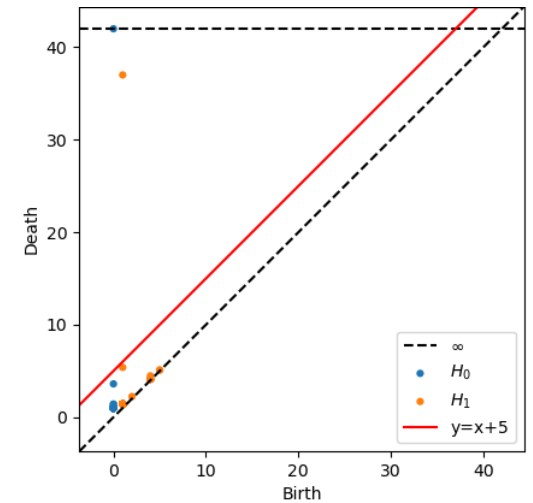
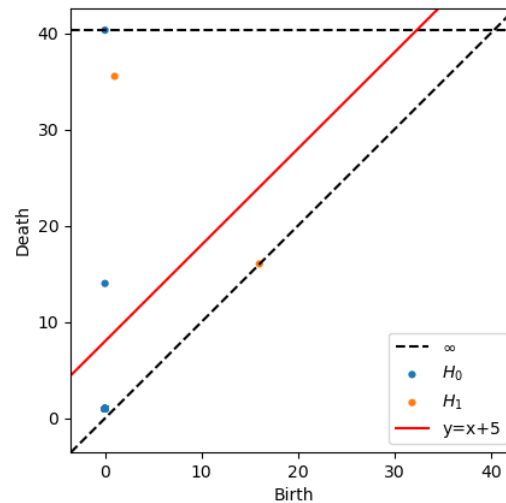
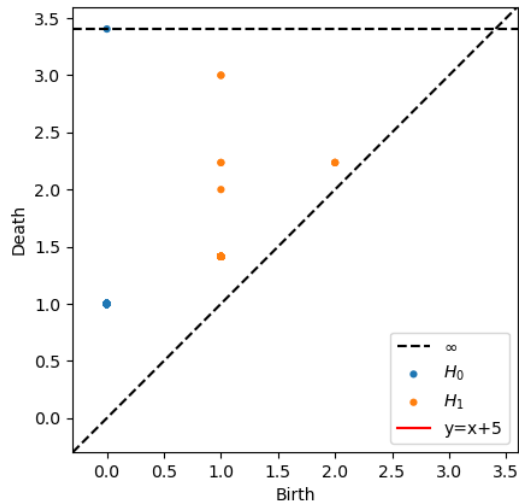
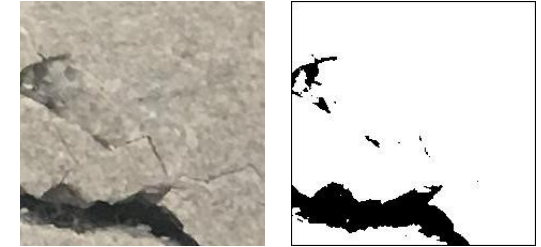
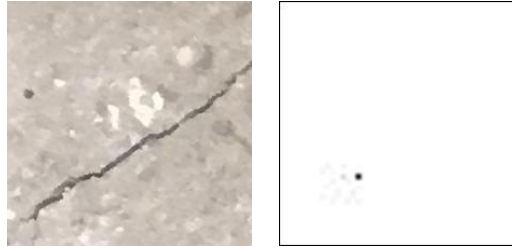
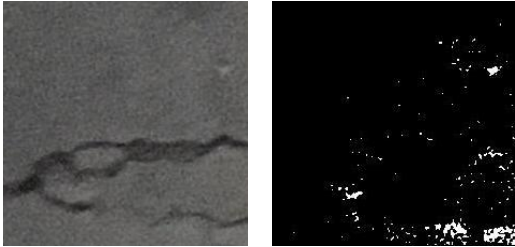
Crepe



Non Crepe

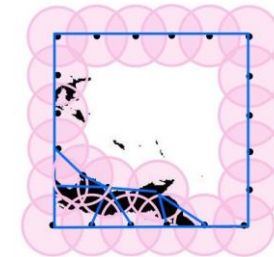


Falsi negativi

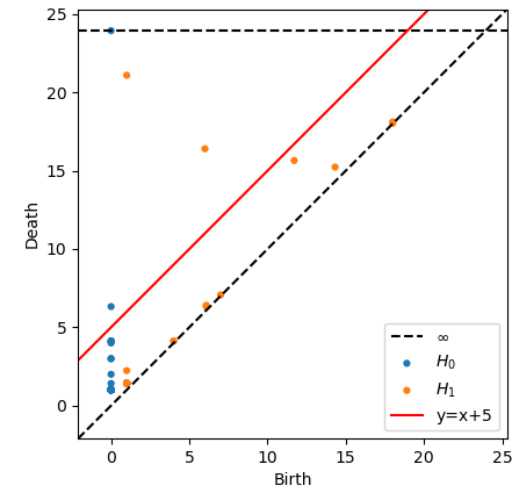
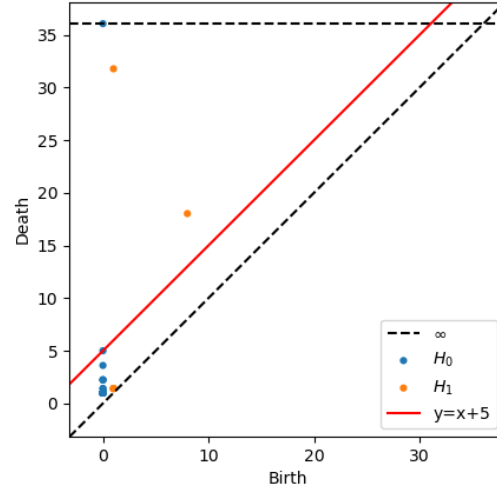
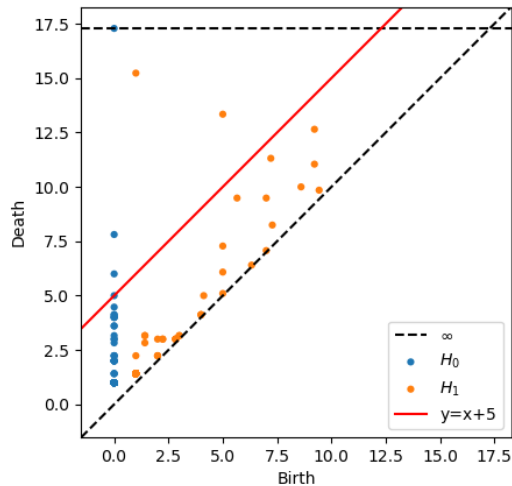
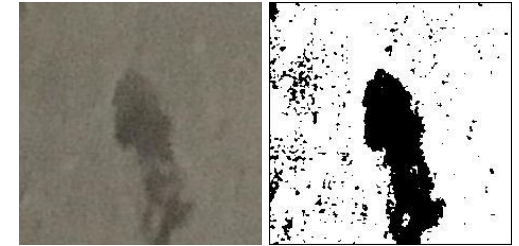
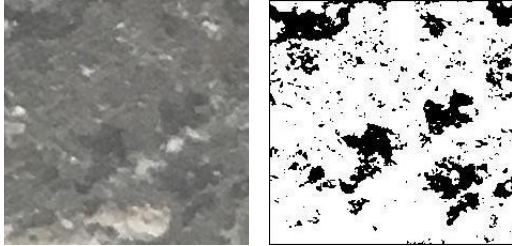


Problema

- Binarizzazione inefficace
- Posizione della crepa → Complesso di Vietoris-Rips compromesso

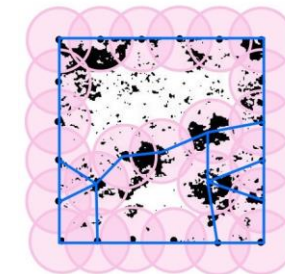


Falsi positivi



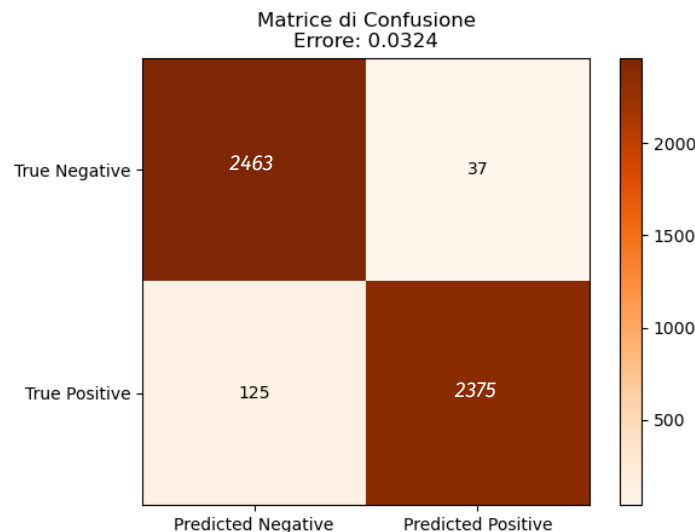
Problema

- Binarizzazione «sporca» → Complesso di Vietoris-Rips compromesso
- Presenza di corpi estranei ineliminabili



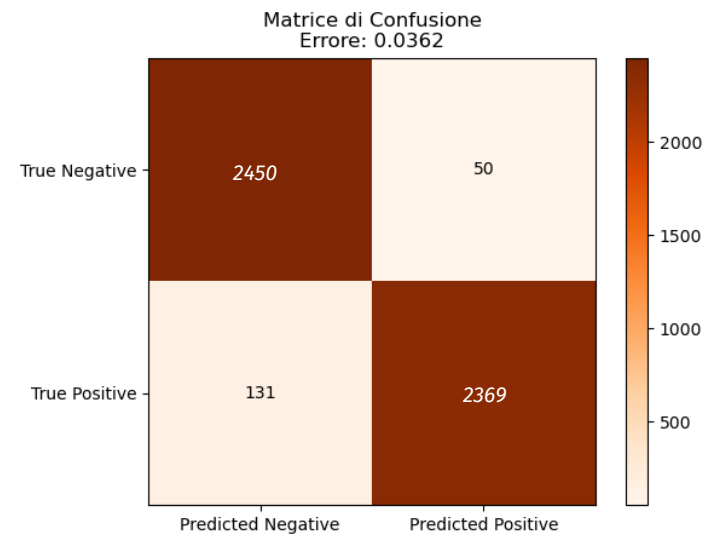
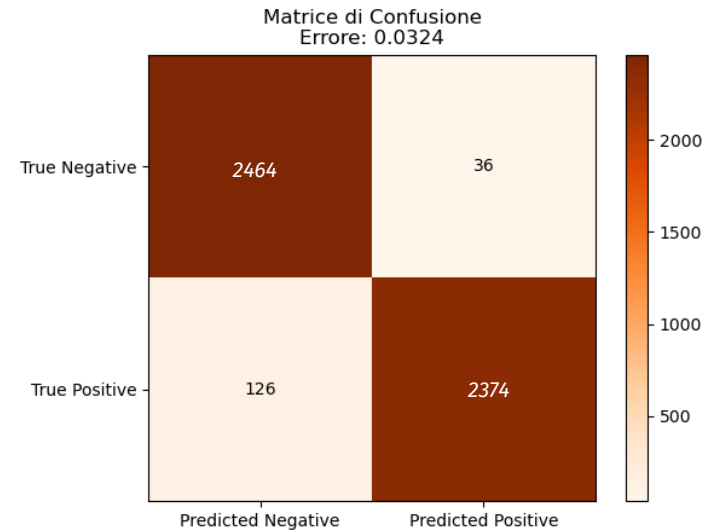
Matrici di confusione con persistenza 5

Addestramento (1:8)



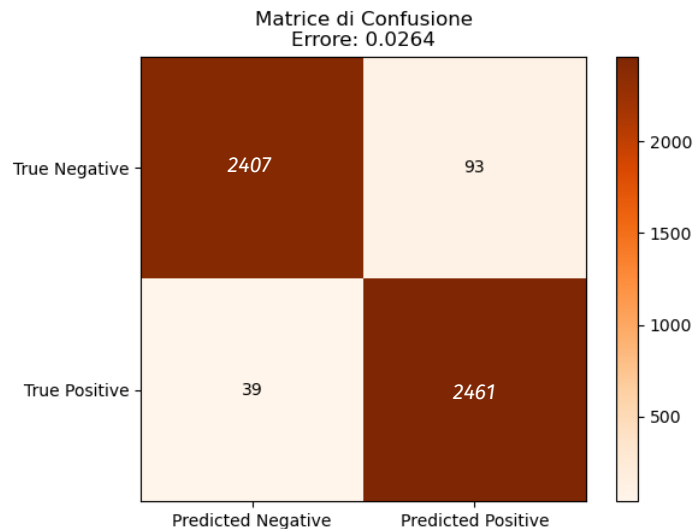
Falsi negativi >> Falsi positivi

Test (random)



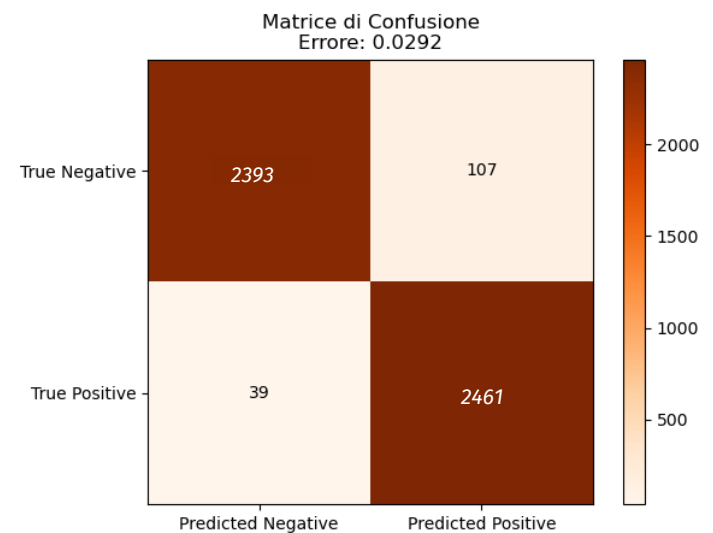
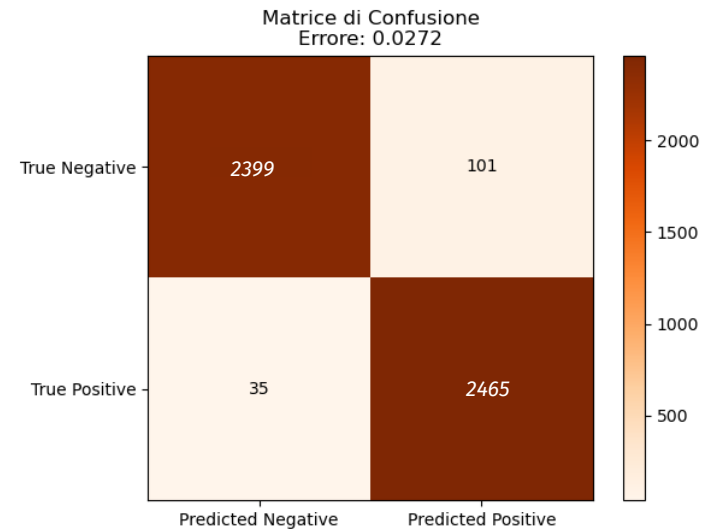
Matrici di confusione con persistenza 1

Addestramento (1:8)



Falsi negativi < Falsi positivi

Test (random)



Confronti con approccio di machine learning

SVM lineare - errore 0.1046

True Class	Negative	2299	201
	Positive	322	2178
		Negative	Positive
		Predicted Class	

Random Forest - errore 0.0480

True Class	Negative	2377	123
	Positive	117	2383
		Negative	Positive
		Predicted Class	

Macchina a Supporto Vettoriale

- Classificatore lineare che individua l'iperpiano che separa due classi con il massimo margine.
- Il margine è la distanza tra l'iperpiano ottimale e i punti più vicini dei dati di addestramento che si trovano da un lato e dall'altro dell'iperpiano

Foresta Casuale

- Classificatore d'insieme ottenuto da insieme di alberi decisionali (foresta) per effettuare classificazioni.
- Ogni albero viene addestrato su un sottoinsieme dei dati e le previsioni vengono combinate per migliorare l'accuratezza complessiva.

Indice

1. Introduzione
2. Complessi Simpliciali
3. Omologia Simpliciale
4. Omologia Persistente
5. Esperimenti e Risultati
6. Conclusione

Conclusione

Obiettivo e Metodologia

- Indagare limiti e vantaggi dell'omologia persistente nella teoria e nella pratica attraverso la classificazione automatica di crepe

Nella teoria:

- Inferire una struttura topologica ai dati
- Calcolo dell'omologia persistente sulla filtrazione data dai complessi
- Analisi dei diagrammi di persistenza

Nella pratica:

- Elaborazione delle immagini per facilitare la costruzione dei complessi di Vietoris-Rips e di una filtrazione
- Calcolo dell'omologia persistente sulla filtrazione
- Classificazione in base al primo gruppo di omologia persistente e calcolo dell'errore sulle previsioni

Valutazioni

- Metodo efficace con ottimi risultati e senza la richiesta di specifici parametri
- Buona robustezza al rumore
- Elevato grado di calcolo per grandi dataset

Lavori Futuri

- Analisi del dataset utilizzando altre strutture topologiche e altri approcci topologici
- Classificazione sfruttando la distanza tra diagrammi di persistenza.
- Collaborazione tra il machine learning e l'omologia persistente

UniGe

DIMA

UniGe

DIMA

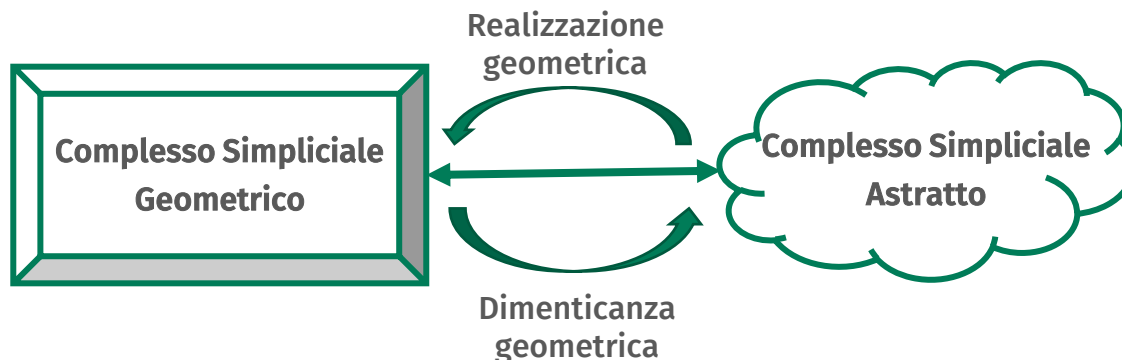
Complessi Simpliciali Astratti

Complesso Simpliciale Astratto

Un complesso simpliciale astratto è una collezione S di insiemi non vuoti tale che

$$A \in S \Rightarrow B \in S \quad \forall B \subseteq A, \quad B \neq \emptyset$$

- **Simplesso:** l'elemento $A \in S$ è detto **simplesso** di S
- **Dimensione:** la dimensione di un complesso S è definita come il massimo delle dimensioni dei suoi semplici
- **Faccia:** ogni sottoinsieme non vuoto di $A \in S$ è detto **faccia** di A
- **Sottocomplesso:** una sottocollezione di S è un complesso e si dice **sottocomplesso** di S
- **Topologia:** topologia di sottospazio indotta dalla topologia euclidea sullo spazio soggiacente



Topologia Complessi Simpliciali

Supporto

Il supporto di un complesso simpliciale K è definito come il sottoinsieme di \mathbb{R}^N determinato dall'unione dei semplici che compongono K e si indica con $|K|$

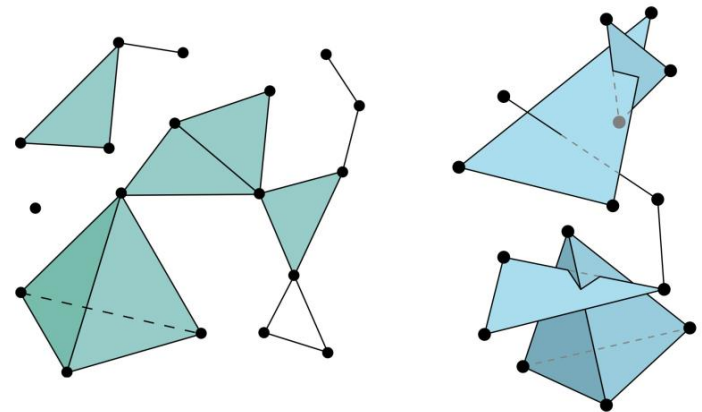
Topologia

- Siccome ogni semplice Δ^n è dotato della sua topologia τ_{Δ^n} indotta dalla topologia euclidea su \mathbb{R}^n si definisce la topologia τ_K su $|K|$ come segue:

$$A \subseteq |K| \text{ è chiuso in } (|K|, \tau_K) \Leftrightarrow A \cap \Delta^n \text{ è chiuso in } (\Delta^n, \tau_{\Delta^n}) \forall \Delta^n \in K.$$

La topologia τ_K su $|K|$ coincide con la topologia che $\tau_{|K|}$ eredita come sottospazio di \mathbb{R}^n

- τ_K è più fine di $\tau_{|K|}$ per ogni complesso simpliciale
- le due topologie coincidono in condizione di finitezza



Operare in \mathbb{Z}_2

Vantaggi:

- Teorico:

Il teorema di struttura per moduli graduati finitamente generati su un PID permette di caratterizzare l'omologia persistente attraverso le coppie di persistenza

$$M := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_p(K_i; \mathbb{F}) \cong \bigoplus_{k=1, \dots, n} \mathbb{F}[x](-r_k) \oplus \bigoplus_{l=1, \dots, m} (\mathbb{F}[x]/(x^{j_l} - x^{i_l}))(-i_l)$$

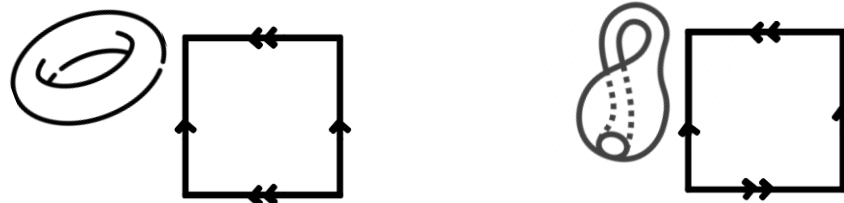
- Computazionale:

L'algoritmo di calcolo dell'omologia persistente basato su una riduzione di matrici di bordo presenta un costo inferiore

$$D = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \hline low \end{array} \begin{pmatrix} & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow R = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \hline low \end{array} \begin{pmatrix} & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Svantaggi:

- Perdita di informazioni topologiche (omologia di toro e bottiglia di Klein coincidono)



Generalizzazioni

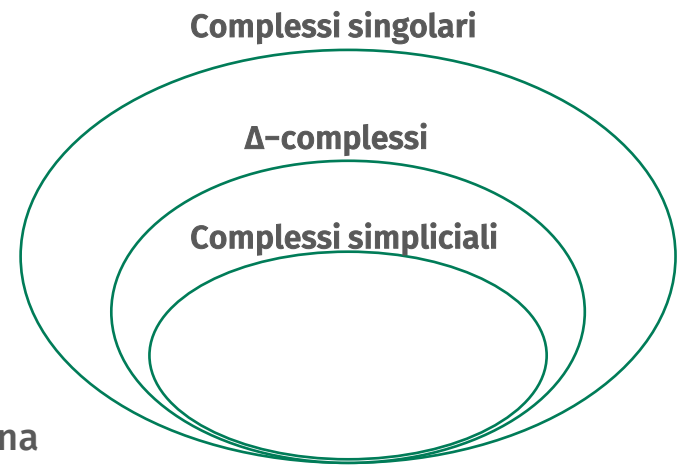
Catene

$c = \sum_{i=0}^n g_i \sigma_i^p$ dove σ_i^p sono funzioni caratteristiche e $g_i \in G$.

Simplessi singolari: $\sigma^p: \Delta^p \rightarrow X$ continua

Δ -complessi: $\sigma^p: \Delta^p \rightarrow X$ continua e iniettiva sulla parte interna

Complessi simpliciali : $\sigma^p: \Delta^p \rightarrow \Delta^p$ identità



Omologia relativa

Sia K un Δ -complesso finito con $A \subset K$ un sottocomplesso. Si definiscono i gruppi di omologia relativa $H_n^\Delta(K, A)$ come: $\Delta_n(K, A) = \Delta_n(K) / \Delta_n(A)$.

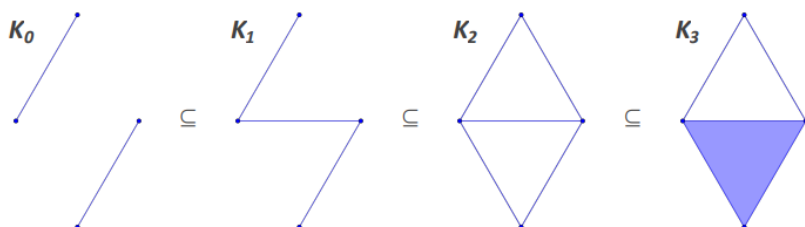
Teorema

Gli omeomorfismi $H_n^\Delta(K, A) \rightarrow H_n(K, A)$ sono isomorfismi per ogni n e per ogni $\Delta_n(K, A)$.

Vantaggi:

- Sfruttare i risultati già noti per l'omologia singolare anche per l'omologia simpliciale
- Nessuna dipendenza dalla nozione di orientamento sui semplici

Rappresentazioni



Rappresentazione delle coppie di persistenza (i, j) con una certa molteplicità

Le caratteristiche che persistono fino all'ultimo valore della filtrazione, presentano coordinate all'infinito

Diagramma codice a barre

Spazio: $\bar{\mathbb{N}}$

Persistenza: lunghezza degli intervalli

Intervalli lunghi → caratteristiche robuste

Intervalli brevi → rumore nei dati

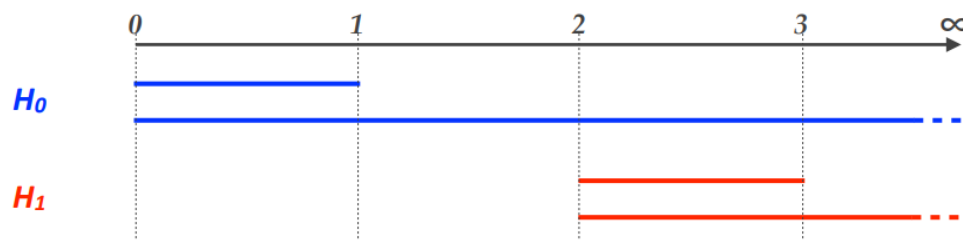
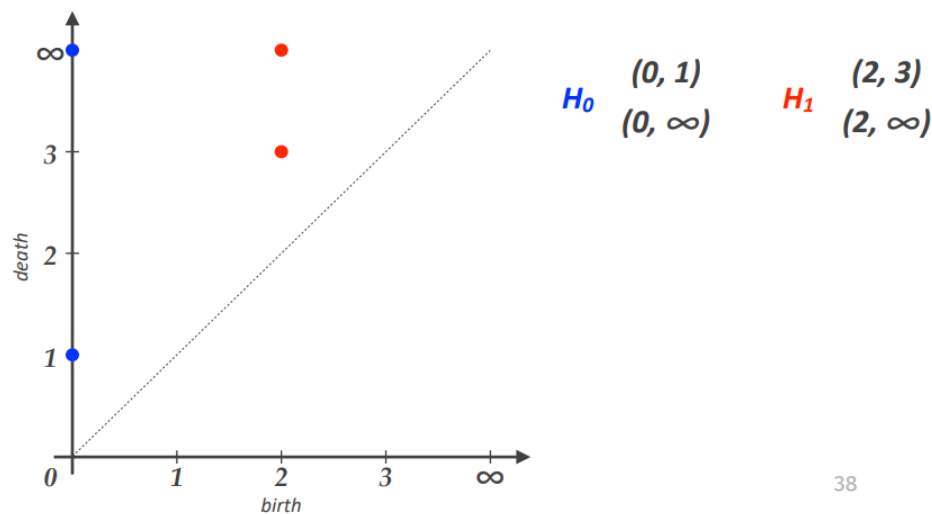


Diagramma di persistenza

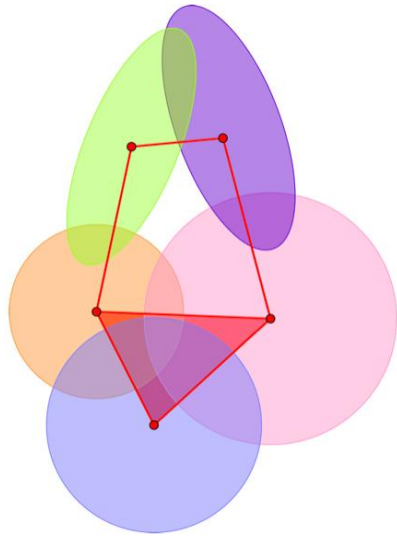
Siccome $i < j$, tutti i punti giacciono sopra rispetto alla diagonale

Spazio: $\mathbb{N} \times \bar{\mathbb{N}}$

Persistenza: distanza verticale dalla diagonale



Nervo



Nervo

Sia S una collezione finita di insiemi in \mathbb{R}^n . Il nervo $\text{Nrv}(S)$ di S è costituito da tutte le sottocollezioni non vuote i cui insiemi hanno intersezione comune non vuota:

$$\text{Nrv}(\mathfrak{S}) = \{\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S} \mid \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X \neq \emptyset\}.$$

Si tratta di un complesso simpliciale astratto infatti

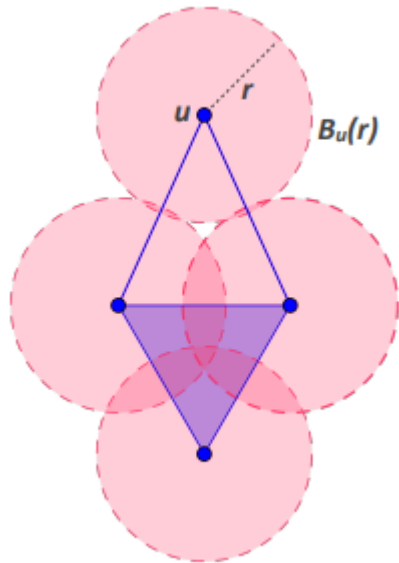
$$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad Y \subseteq \mathfrak{X} \implies \bigcap_{Y \in \mathfrak{X}} Y \neq \emptyset$$

Realizzazione geometrica:

Insiemi \rightarrow vertici

Intersezioni comuni \rightarrow 1-simplessi che congiungono i vertici

Complesso di Čech e di Vietoris-Rips



Complesso di Čech

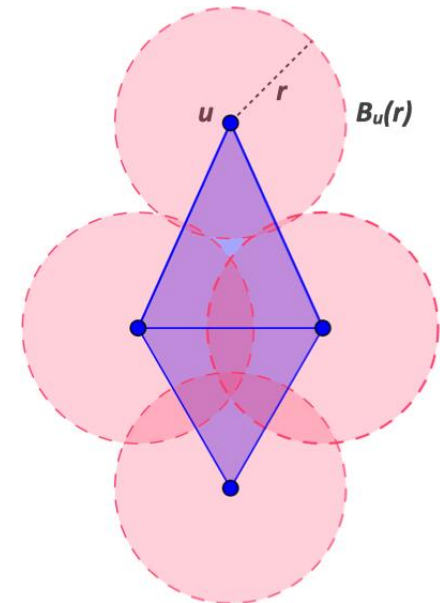
Si consideri un insieme di punti V in \mathbb{R}^n . Siano $B_u(r)$ delle bolle chiuse di centro $u \in V$ e raggio r e S la collezione di queste bolle. Il complesso di Čech di V di raggio r è isomorfo al nervo di S . Formalmente:

$$\check{Cech}(r) := \{\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S} \mid \bigcap_{B_u(r) \in \mathfrak{X}} B_u(r) \neq \emptyset\} = \{X \subseteq V \mid \bigcap_{u \in X} B_u(r) \neq \emptyset\}.$$

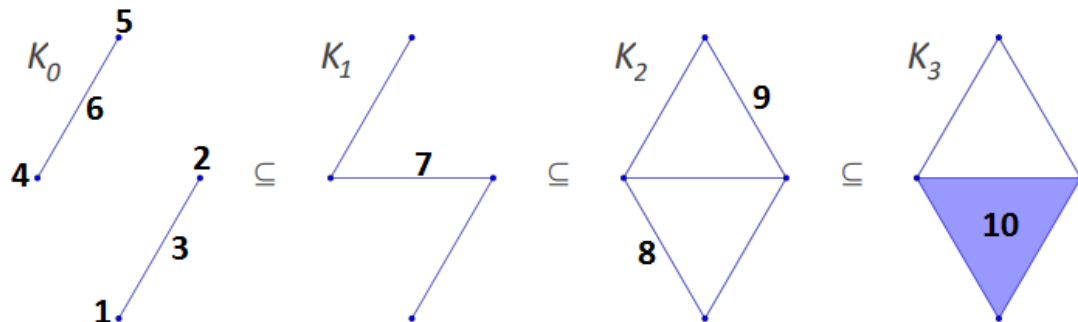
Complesso di Vietoris-Rips

Si consideri un insieme di punti V in \mathbb{R}^n . Siano $B_x(r)$ delle bolle chiuse di centro $x \in V$ e raggio r e S la collezione di queste bolle. Il complesso di Vietoris-Rips di V di raggio r consiste di tutti i sottoinsiemi di bolle di diametro al più $2r$, cioè

$$VR(r) := \{X \subseteq V \mid d(u, v) \leq 2r \quad \forall u, v \in X\}.$$



Calcolo



Sia $F = \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una filtrazione.

- **Ordinamento**

Sia una sequenza $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ di semplici, si definisce un ordinamento tale che:

- a) $f(\Delta_i) < f(\Delta_j) \Rightarrow i < j$
- b) Δ_i faccia di $\Delta_j \Rightarrow i < j$

- **Matrice di Bordo**

Matrice D della forma $D[a_{i,j}]$ dove $i, j = 1, \dots, n$ e

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta_i \text{ è una faccia di } \Delta_j \text{ di co-dimensione 1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Matrice Ridotta**

Sia j una colonna non nulla di D. Si definisce $low(j) := \max\{i \mid a_{i,j} \neq 0\}$.

Una matrice R si dice ridotta se la funzione $low(j)$ è iniettiva nel suo dominio

$$\forall j_0 \neq j \ [low(j_0) \neq low(j)] .$$

Calcolo

Algorithm 1 Riduzione di Matrici

```

1:  $R = D$ ;
2: for  $j = 1$  to  $m$  do
3:   while there exists  $j_0 < j$  with  $\text{low}(j_0) = \text{low}(j)$  do
4:     add column  $j_0$  to  $j$ 
5:   end while
6: end for.

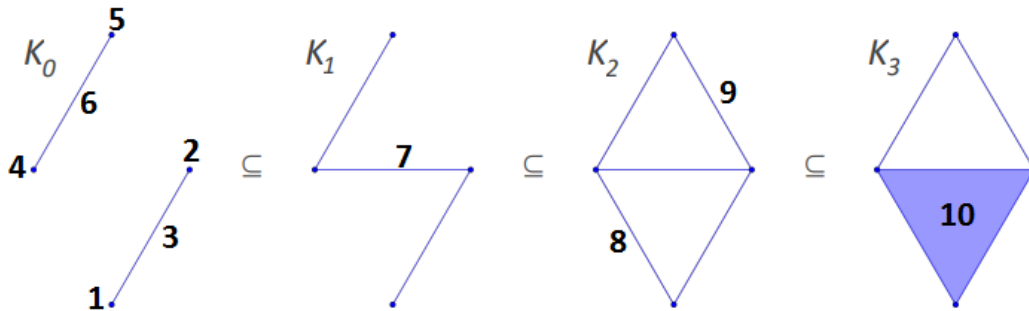
```

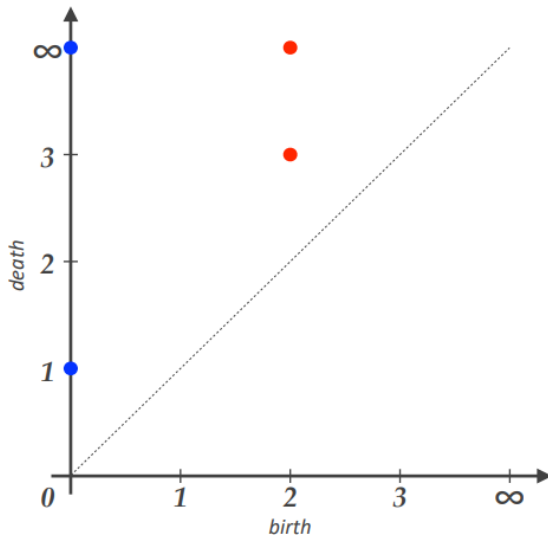
$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & 1 & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \right) \\ \text{low} & \left(\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & 4 & 4 & 5 & 8 \end{array} \right) \end{matrix} \xrightarrow{c_8 + c_7} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \right) \\ \text{low} & \left(\begin{array}{cccccccccc} & & & & & & 4 & 2 & 5 & 8 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Calcolo

Figure 1 shows four matrices illustrating the evolution of the matrix A through a sequence of row operations. The matrices are arranged in a 2x2 grid. The top-left matrix is the initial matrix A , with columns 6 and 9 highlighted in blue and yellow respectively. The top-right matrix is A after the operation $c_8 + c_3$, with column 9 highlighted in green. The bottom-left matrix is A after the operation $c_9 + c_5$, with column 7 highlighted in blue and column 9 highlighted in yellow. The bottom-right matrix is A after the operation $c_9 + c_7$, with column 9 highlighted in green. Each matrix is a 10x10 matrix with rows and columns indexed 1 to 10. The bottom row is labeled 'low'.

Calcolo



$$R = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & & & & & & & & & & \\ 2 & & 1 & & & & & 1 & & 0 & \\ 3 & & & & & & & & & & 1 \\ 4 & & & & & 1 & 1 & & 0 & & \\ 5 & & & & & 1 & & & & & \\ 6 & & & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & & 1 & \\ 8 & & & & & & & & & 1 & \\ 9 & & & & & & & & & & \\ 10 & & & & & & & & & & \\ low & & 2 & & 5 & 4 & & 8 & & & \end{pmatrix}.$$


H_0 $(0, 1)$
 $(0, \infty)$ H_1 $(2, 3)$
 $(2, \infty)$

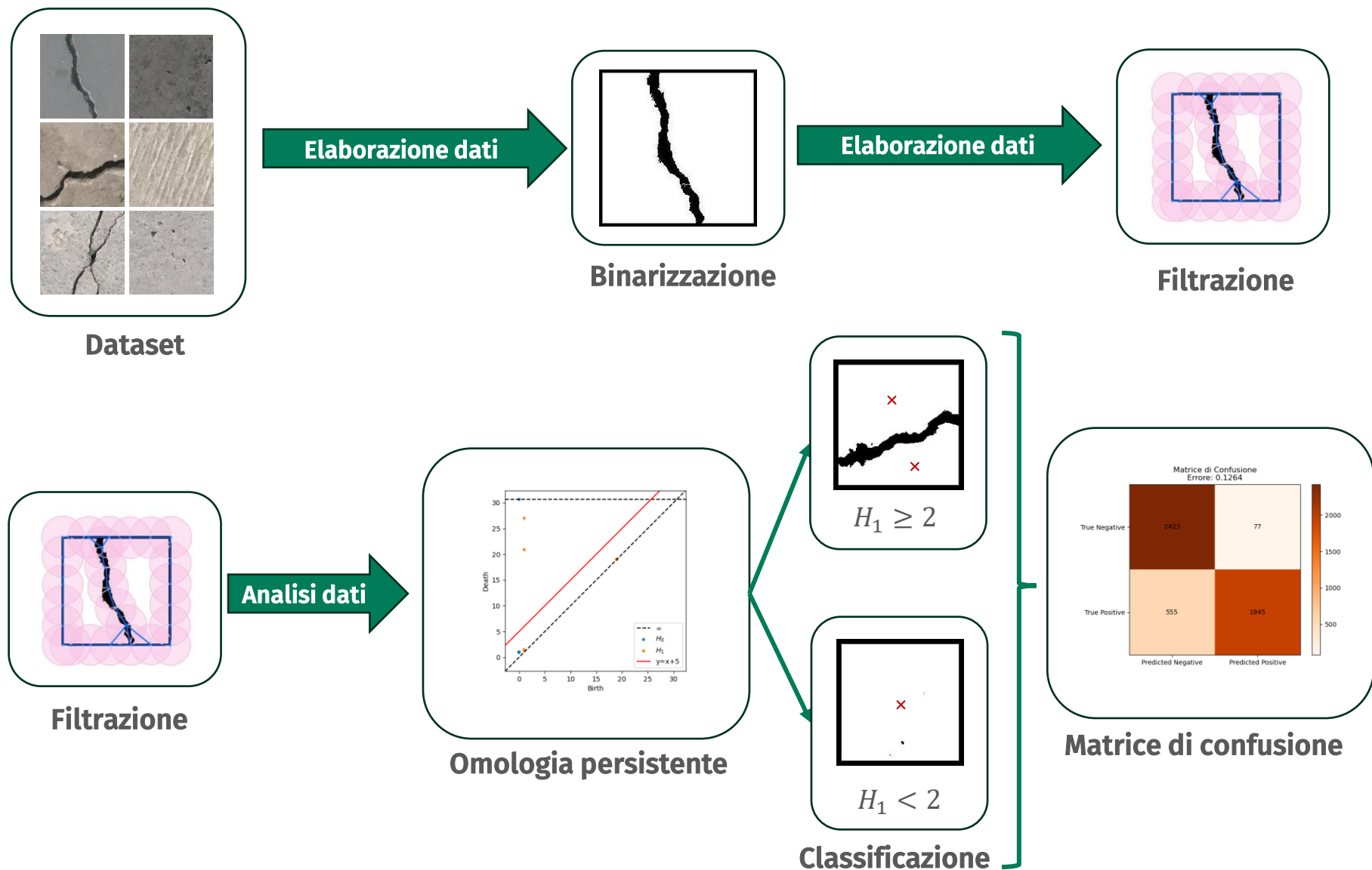
$[2, 3], [5, 6], [4, 7], [8, 10], [1, \infty), [9, \infty).$

$[0, 0], [0, 0], [0, 1], [2, 3], [0, \infty), [2, \infty).$

$(i, j) \in Dgm_p(f) \Leftrightarrow i = low(j) \text{ \& } \dim \Delta_i = p$

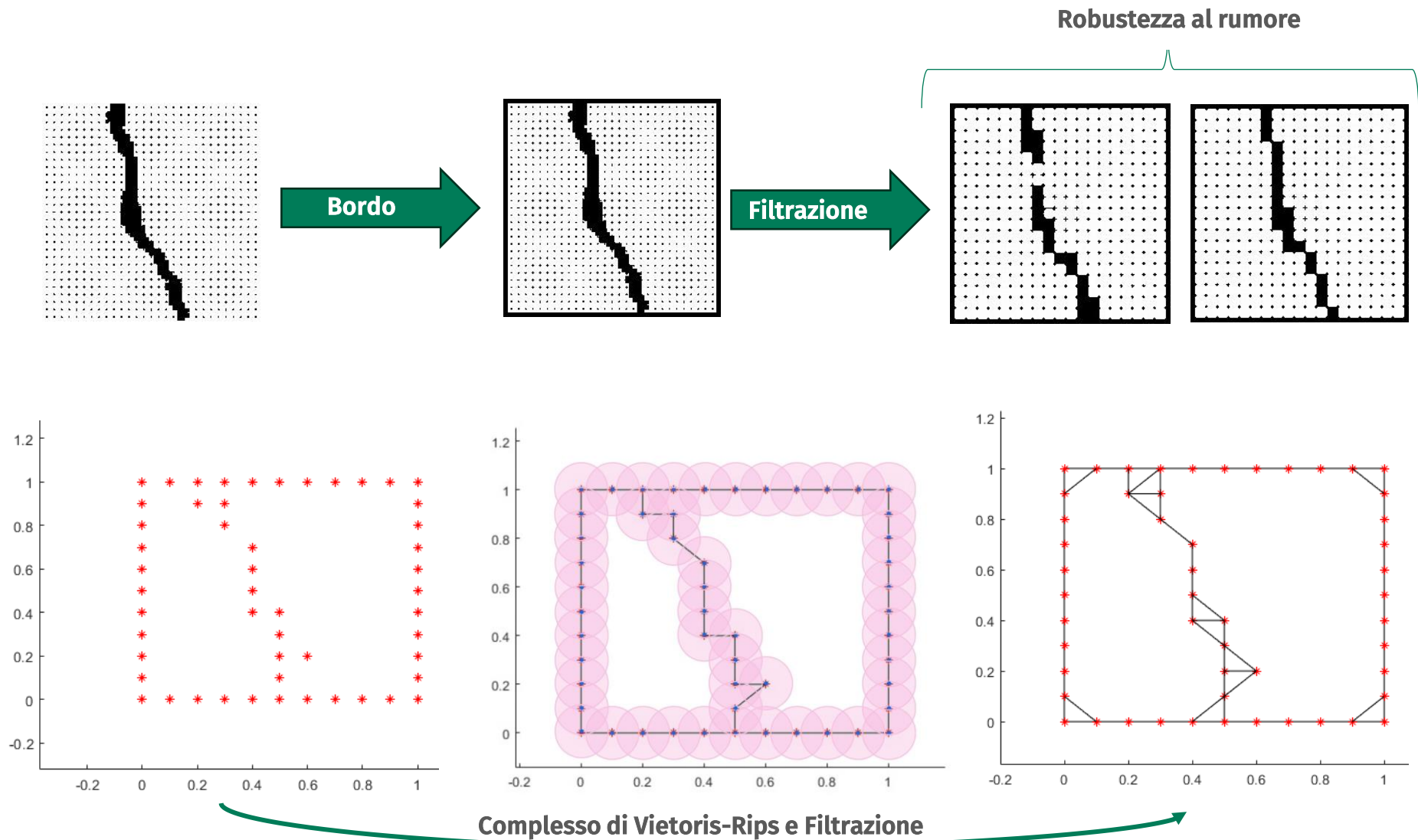
$(j, \infty) \in Dgm_p(f) \Leftrightarrow \text{colonna } i = 0 \text{ \& } i \notin low$

Strategia

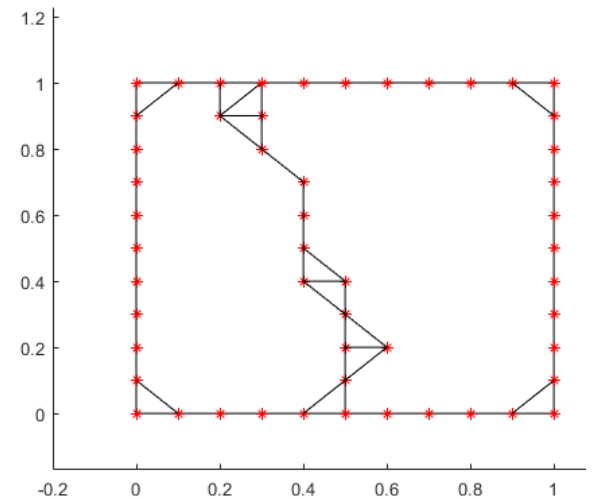
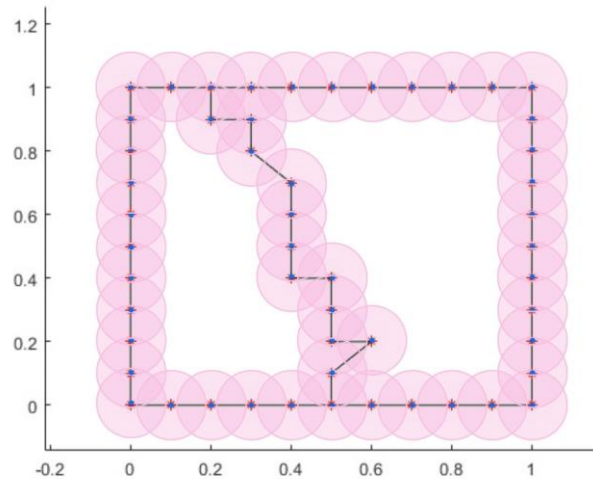
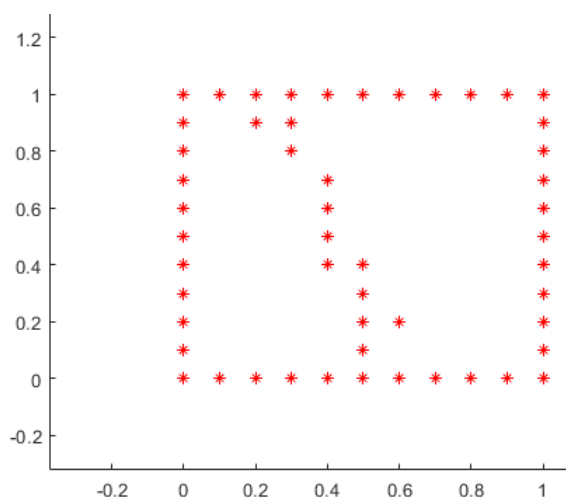
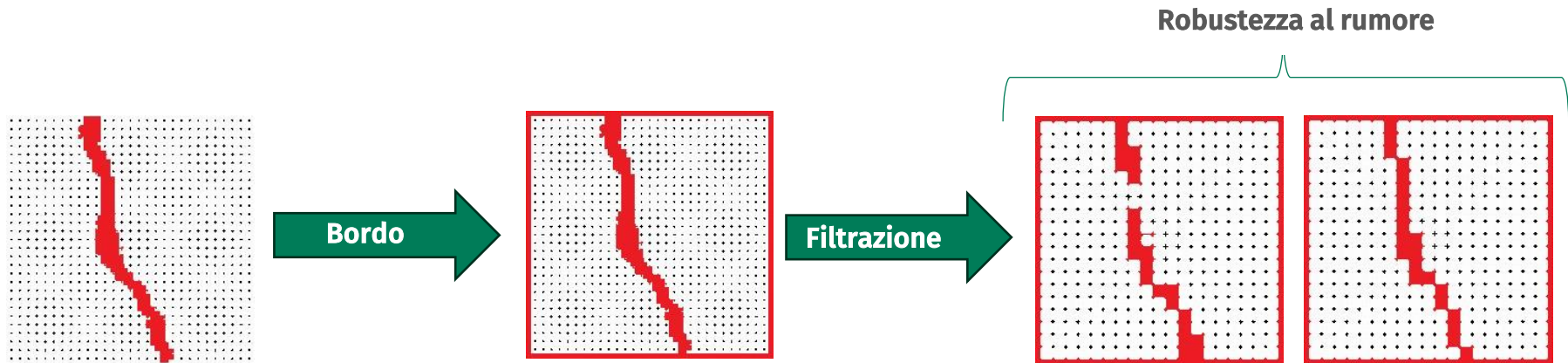


(studio del primo gruppo di omologia persistente)

Nuvole di punti a partire dal dataset



Nuvole di punti a partire dal dataset



Complesso di Vietoris-Rips e Filtrazione