

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA



Corso di laurea triennale in
Matematica Generale

Tesi di Laurea

**Teoria e pratica dell'omologia persistente:
un'indagine sull'efficacia
dell'analisi topologica dei dati**

Candidato:
Andrea Di Via

Relatore interno:
Matteo Penegini

Relatore esterno:
Ulderico Fugacci

Anno accademico 2022/2023

*L'arte da imparare in questa vita
non è quella di essere invincibili e perfetti,
ma quella di saper essere come si è,
invincibilmente fragili e imperfetti.*

*Alessandro D'Avenia,
“L'arte di essere fragili”*

Indice

Introduzione	5
1 Complessi e Gruppi di Omologia	1
1.1 Simplessi	2
1.2 Complessi simpliciali geometrici e astratti	4
1.2.1 Complessi simpliciali geometrici	4
1.2.2 Complessi simpliciali astratti	7
1.3 Gruppi di omologia simpliciale	12
1.4 Δ -complessi e i loro gruppi di omologia	16
1.4.1 Δ -complessi	16
1.4.2 Gruppi di omologia di Δ -complessi	18
1.5 Relazione tra l'omologia simpliciale e l'omologia singolare	20
2 L'Omologia Persistente	23
2.1 Gruppi di omologia persistente	24
2.1.1 Diagrammi di persistenza	26
2.1.2 Calcolo dell'omologia persistente	28
2.2 Trasformazione di dati in strutture di complessi simpliciali	31
3 Caso Studio: Riconoscimento di Crepe	35
3.1 Dataset in esame	36
3.2 Elaborazione delle immagini e classificazione	36
3.2.1 Binarizzazione	37
3.2.2 Diagrammi di persistenza e classificazione	39
3.2.3 Matrici di confusione	41
3.2.4 Falsi positivi e falsi negativi	44
3.3 Studio comparativo basato su un approccio di machine learning	46
Conclusione	47
Codice	49
Ringraziamenti	55

Introduzione

La topologia, in particolare la topologia algebrica, è una branca della matematica teorica la cui applicazione, al di fuori della pura matematica, è veramente difficile da immaginare per la sua natura intrinsecamente astratta. Tuttavia, è proprio da qui che nascono le idee alla base della teoria della persistenza e il mio interesse verso questo mondo, capace di coniugare due mie passioni così contrastanti: la topologia e l'informatica.

La quantità di dati disponibili è aumentata esponenzialmente negli ultimi anni e riuscire a darne un significato è difficile a causa della loro complessità: sono rumorosi, di alta dimensione e/o incompleti. Si richiede perciò lo sviluppo di metodi di elaborazione dei dati innovativi ed efficienti e nell'ambito dell'analisi dei dati, i recenti sviluppi matematici stanno creando nuovi approcci differenti da quelli "tradizionali" di stampo statistico-informatico, migliorando la comprensione delle strutture sempre più complesse dei dati. In particolare la topologia algebrica si rivela sorprendentemente efficace nell'inferire strutture globali da dati che sono relativamente localizzati, smentendo ancora una volta il pregiudizio secondo cui la matematica teorica non serve a nulla.

L'analisi topologica dei dati (il cui acronimo è TDA, Topological Data Analysis) è un recente e promettente approccio nel campo dell'analisi dati e trova fondamenta nel campo della topologia, della teoria dei gruppi, dell'algebra lineare e della teoria dei grafi. Nel corso del tempo, diverse scoperte matematiche hanno portato allo sviluppo del concetto di omologia persistente, tema fondamentale della tesi. Nel 1990 il professore Patrizio Frosini ha introdotto una pseudo-distanza tra sottovarietà e la funzione di grandezza "size function", che per curve 1-dimensional è equivalente al 0-esimo gruppo di omologia persistente. Nel 1999, la professoressa Vanessa Robins ha studiato le immagini degli omomorfismi indotti dall'inclusione permettendo così al professor Herbert Edelsbrunner di introdurre qualche anno dopo il concetto di omologia persistente con un efficiente algoritmo di calcolo e la sua visualizzazione per mezzo di diagrammi di persistenza. Infine, il professore Gunnar E. Carlsson e il suo studente Gurjeet Singh hanno riformulato la definizione iniziale e introdotto un metodo di visualizzazione equivalente detto diagramma a codice a barre.

L'omologia persistente (il cui acronimo è PH, Persistent Homology) è lo strumento principale della TDA e si tratta di un adattamento dell'omologia alle nuvole di punti dati. L'obiettivo dell'omologia persistente è identificare e quantificare le caratteristiche topologicamente dominanti all'interno dei dati, come componenti connesse, tunnel, cavità e loro generalizzazioni. Tuttavia, da un punto di vista topologico, i dati risultano privi di informazioni. Si considera quindi un ispessimento di una nuvola di punti a diverse scale di risoluzione (defini-

ta filtrazione) e se ne analizza l’evoluzione della forma risultante attraverso diverse scale di risoluzione. Le caratteristiche qualitative sono date da invarianti topologici, e si può rappresentare la variazione di tali invarianti tra le diverse scale di risoluzione al fine di riassumere l’effettiva “forma” dei dati.

L’uso del termine “persistente” richiama l’attenzione sul fatto che l’informazione più rilevante sia descritta da cicli di vita lunga, persistenti per l’appunto, mentre i cicli destinati a sparire in poche fasi della filtrazione rappresentano rumore.

In sintesi, l’omologia persistente permette di analizzare dati in modo insensibile a particolari metriche scelte, fornendo una riduzione della dimensionalità e una robustezza al rumore. Per questo motivo negli ultimi anni, l’omologia persistente e l’analisi topologica dei dati hanno guadagnato sempre più attenzione nei campi del riconoscimento delle forme, dell’analisi di dati e immagini, trovando spazio in diversi settori scientifici ed ingegneristici:

- * Nel campo dell’imaging medico, l’omologia persistente è stata utilizzata nello studio del riconoscimento di tumori, dei dendrogrammi cerebrali e nell’identificazione delle reti cerebrali nei bambini con ADHD e autismo.
- * In scienze dei materiali, queste tecniche sono state utilizzate per analizzare le strutture gerarchiche di materiali amorfì come il vetro. Sono stati anche utilizzati nello screening ad alta produttività di materiali nanoporosi, come le zeoliti.
- * Nell’analisi dei sistemi dinamici e delle serie temporali, la TDA è stata utilizzata per studiare l’espressione genica e la dinamica dei flussi di Kolmogorov e della convezione di Raleygh-Bernard.
- * In chimica e biochimica, l’omologia persistente è stata utilizzata per caratterizzare la struttura proteica e per prevedere la stabilità del fullerene.

L’obiettivo della tesi è quello di esplorare i fondamenti teorici dell’omologia persistente e di valutarne l’efficacia e i limiti con un esempio di applicazione. Il lavoro è strutturato come segue:

Nel Capitolo 1, si esaminano le definizioni di base della topologia necessarie ad introdurre l’omologia persistente. Si definiscono i complessi simpliciali, l’omologia simpliciale e viene dimostrato che omologia singolare e omologia simpliciale producono gli stessi risultati su determinate strutture.

Nel Capitolo 2, si introduce il tema principale. Si definisce l’omologia persistente a livello teorico, sfruttando le nozioni introdotte al primo capitolo, e a livello pratico, mostrando l’algoritmo di calcolo ideato dal professore H. Edelsbrunner e le diverse tecniche di rappresentazione (diagrammi di persistenza e diagrammi a codice a barre).

Nel Capitolo 3, si discute infine un problema di classificazione binaria valendosi dell’omologia persistente. Si analizza infatti un dataset costituito da immagini di superfici crepate e non, e si confrontano i risultati ottenuti con quelli già ricavati attraverso tecniche tradizionali di machine learning supervisionato.

Capitolo 1

Complessi e Gruppi di Omologia

In questo primo capitolo si esplorano i fondamenti teorici dei complessi simpliciali e della teoria dell'omologia. Si discutono in particolare i vari metodi per costruire i complessi simpliciali, necessari per discretizzare gli spazi topologici, e se ne studiano le principali proprietà topologiche.

In Sezione 1.1, si definisce il concetto di semplesso facendo riferimento a [5]. Questi elementi di base possono essere combinati per costruire forme e strutture più complesse, come complessi simpliciali e Δ -complessi, che possono essere utilizzate per discretizzare ed analizzare in maniera più efficace gli spazi topologici.

In Sezione 1.2, si introducono i complessi simpliciali in due differenti modi: sia in forma geometrica che in forma astratta. Il motivo di tale scelta viene evidenziato al Capitolo 2 poichè la duplicità nella definizione risulta utile per la costruzione di strutture quali il complesso di Čech e il complesso di Vietoris-Rips.

In Sezione 1.3, si esamina la teoria dell'omologia simpliciale facendo riferimento a [5]. Si tratta di un concetto fondamentale per poter introdurre il tema principale della tesi, l'omologia persistente.

In Sezione 1.4, si affrontano una generalizzazione della struttura di complesso simpliciale e i relativi gruppi di omologia calcolati su di essa. Inoltre si evidenziano le principali differenze tra la struttura di complesso simpliciale e quella di Δ -compleSSI. Per questa sezione si fa riferimento alle nozioni presenti in [3].

In Sezione 1.5, si confrontano l'omologia singolare e l'omologia simpliciale dimostrando che producono gli stessi risultati nel caso di strutture di Δ -complessi.

1.1 Simplessi

Un simplex è un oggetto geometrico di base che può essere utilizzato per rappresentare un'ampia varietà di forme. Gli esempi più elementari di un simplex sono un punto in uno spazio unidimensionale, un segmento di linea in uno spazio bidimensionale e un triangolo in uno spazio tridimensionale.

Definizione 1.1.1 (Indipendenza Geometrica). *Un insieme $\{a_0, \dots, a_n\}$ di punti di \mathbb{R}^N si dice geometricamente indipendente se, per un qualche scalare $t_i \in \mathbb{R}$, le equazioni*

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implicano che $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Osservazione 1.1.2. *Si osservi che, in generale, $\{a_0, \dots, a_n\}$ è geometricamente indipendente se e solo se i vettori $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ sono linearmente indipendenti nel senso classico dell'algebra lineare. Infatti:*

$$0 = \sum_{i=0}^n t_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^n t_i a_i - \sum_{i=1}^n t_i a_0 = (-t_1 - t_2 - \dots - t_n)a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n$$

Si noti che $(-t_1 - t_2 - \dots - t_n) + t_1 + \dots + t_n = 0$ quindi per l'indipendenza geometrica dell'insieme $\{a_0, \dots, a_n\}$ si conclude che $-t_1 - t_2 - \dots - t_n = 0$ e $t_i = 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. In particolare $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ quindi $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ è linearmente indipendente.

Perciò un insieme è detto geometricamente indipendente se i suoi punti non giacciono sullo stesso iperpiano, ovvero non appartengono allo stesso insieme di soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Esempio 1.1.3. *Un solo punto, due punti distinti, tre punti non collineari, quattro punti non complanari sono geometricamente indipendenti.*

Definizione 1.1.4 (Simplex). *Sia $X = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ un insieme di punti geometricamente indipendente in \mathbb{R}^N .*

Si definisce Δ^n il simplex di dimensione n generato da a_0, \dots, a_n come l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di X .

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad t_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

I punti a_i si dicono vertici e i coefficienti t_i , univocamente determinati da x , si dicono coordinate baricentriche del punto x di Δ^n rispetto a_0, \dots, a_n .

Osservazione 1.1.5. *Se non diversamente specificato si considera sui simplessi la topologia di sottospazio τ_{Δ^n} indotta dalla topologia euclidea.*

Esempio 1.1.6. In base alla dimensione n , si attribuiscono nomi specifici agli n -simplessi:

(a) **Vertice** per uno 0-simplesso.

Lo 0-simplesso generato da a_0 è il solo punto a_0 .

(b) **Lato** per un 1-simplesso.

L'1-simplesso generato da a_0, a_1 consiste di tutti i punti $x \in \mathbb{R}^N$ nella forma

$$x = ta_0 + (1 - t)a_1$$

con $0 \leq t \leq 1$. Si tratta semplicemente del segmento che unisce i due vertici a_0 e a_1 .

(c) **Triangolo** per un 2-simplesso.

Il 2-simplesso generato da a_0, a_1, a_2 può essere considerato come triangolo che ha come vertici questi tre punti. Infatti, assumendo che $x \neq a_0$ si può osservare che:

$$x = \sum_{i=0}^2 t_i a_i = t_0 a_0 + (1 - t_0)[(t_1/\lambda)a_1 + (t_2/\lambda)a_2]$$

con $\lambda = 1 - t_0$. Si osservi che l'espressione nelle parentesi quadre rappresenta un punto p del segmento che congiunge a_1 con a_2 siccome $1 = t_0 + t_1 + t_2$. Di conseguenza $(t_1 + t_2)/\lambda = (1 - t_0)/\lambda = 1$ e $t_i/\lambda \geq 0$ per $i = 1, 2$. Perciò x è un punto del segmento che congiunge a_0 . Si può verificare che ogni punto di tale segmento appartiene a Δ^n . Quindi si ha che Δ^n è l'unione di tutti i segmenti che congiungono a_0 ai punti del segmento $\overline{a_1 a_2}$ che è perciò un triangolo come in figura 1.1.

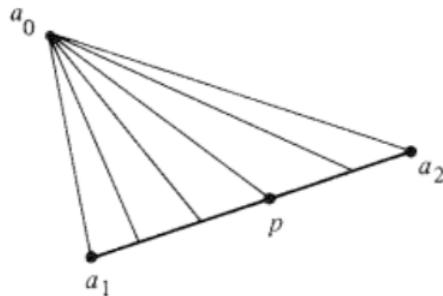


Figura 1.1: Visualizzazione di un 2-simplesso.

Immagine tratta da [5].

(d) **Tetraedro** per un 3-simplesso.

La prova che il 3-simplesso è un tetraedro è analoga al caso precedente.

Definizione 1.1.7 (Faccia). La i -esima faccia σ_i di un n -simplesso Δ^n è definita come il simplexo generato da un sottoinsieme non vuoto di vertici di Δ^n .

I vertici sono le 0-facce dei simplessi.

Definizione 1.1.8 (Bordo e Parte Interna). Si definisce il bordo di un simplexo $\partial\Delta^n$ l'unione di tutte le facce di Δ^n . Si definisce il simplexo aperto $\overset{\circ}{\Delta}{}^n$ come $\overset{\circ}{\Delta}{}^n = \Delta^n - \partial\Delta^n$.

1.2 Complessi simpliciali geometrici e astratti

In questa sezione si introducono i complessi simpliciali definendoli in due modi differenti: in maniera geometrica e in maniera astratta. Infatti in alcuni ambiti applicativi, come la combinatorica, è utile lavorare con complessi simpliciali senza considerare la loro realizzazione geometrica e la nozione di complesso simpliciale astratto risponde a questa esigenza.

1.2.1 Complessi simpliciali geometrici

Ci si preoccupa di considerare solamente complessi simpliciali finiti, chiamandoli semplicemente come complessi simpliciali. La motivazione è quella di dotare i complessi simpliciali della struttura topologica che meglio riflette la nostra intuizione e di poterli gestire meglio da un punto di vista computazionale.

Definizione 1.2.1 (Complesso Simpliciale). *Un complesso simpliciale K in \mathbb{R}^N è una collezione di simplessi in \mathbb{R}^N tale che:*

(a) *ogni faccia di un simplexo Δ^n di K è ancora un simplexo di K :*

$$\Delta^n \in K, \quad \sigma \leq \Delta^n \implies \sigma \in K.$$

(b) *l'intersezione di due qualsiasi simplessi di K o è vuota o è una faccia di entrambi i simplessi:*

$$\Delta_1^n, \Delta_2^m \in K \implies \begin{cases} \Delta_1^n \cap \Delta_2^m = \emptyset & \text{oppure} \\ \Delta_1^n \cap \Delta_2^m & \text{è una faccia sia di } \Delta_1^n \text{ che di } \Delta_2^m \end{cases}$$

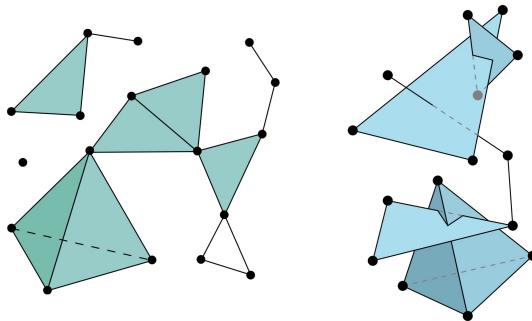


Figura 1.2: Il primo è un esempio di complesso simpliciale mentre il secondo non rappresenta un esempio di complesso simpliciale. Immagine tratta da Wikipedia.

Definizione 1.2.2. *La dimensione di K è il massimo delle dimensioni di ciascuno dei suoi simplessi:*

$$\dim K = \max\{\dim \Delta^k | \Delta^k \in K\}.$$

Definizione 1.2.3 (Sottocomplesso Simpliciale). *Sia L una sottocollezione di K che contiene tutte le facce dei suoi elementi. Allora L è a sua volta un complesso simpliciale e viene detto sottocomplesso di K .*

Esempio 1.2.4 (p -Scheletro di K). *La collezione di tutti i simplessi di K di dimensione al più p , detta p -scheletro di K e denotata con $K^{(p)}$, è un sottocomplesso di K :*

$$K^{(p)} = \{\Delta^n \in K \mid \dim \Delta^n \leq p\}.$$

La collezione $K^{(0)}$ è l'insieme dei vertici.

Definizione 1.2.5 (Supporto di K). *Il supporto di un complesso simpliciale K è definito come il sottoinsieme di \mathbb{R}^N determinato dall'unione dei simplessi che compongono K e si indica con $|K|$.*

Si desidera adesso dotare i complessi simpliciali K di struttura topologica. Siccome ogni simplexo Δ^n è dotato della sua topologia τ_{Δ^n} indotta dalla topologia euclidea su \mathbb{R}^N Si definisce la topologia τ_K su $|K|$ come segue:

$$A \subseteq |K| \text{ è chiuso in } (|K|, \tau_K) \iff A \cap \Delta^n \text{ è chiuso in } (\Delta^n, \tau_{\Delta^n}) \quad \forall \Delta^n \in K.$$

Si verifica che soddisfa le condizioni richieste dalla definizione di topologia.

Proposizione 1.2.6. *La topologia τ_K su $|K|$ coincide con la topologia $\tau_{|K|}$ che $|K|$ eredita come sottospazio di \mathbb{R}^N .*

Dimostrazione. (a) Si provi che τ_K è più fine della topologia $\tau_{|K|}$ che $|K|$ eredita come sottospazio di \mathbb{R}^N . Cioè che i chiusi nella topologia indotta $\tau_{|K|}$ sono anche chiusi nella topologia della realizzazione τ_K .

Se A è un chiuso in $(|K|, \tau_{|K|})$ allora $A = B \cap |K|$ per qualche chiuso $B \subseteq \mathbb{R}^N$. Allora $B \cap \Delta^n$ è chiuso in $(\Delta^n, \tau_{\Delta^n})$ per ogni Δ^n , e quindi si ha che $B \cap |K| = A$ è chiuso in $(|K|, \tau_K)$ per definizione.

(b) Si provi che $\tau_{|K|}$ è più fine della topologia τ_K , cioè che i chiusi nella topologia τ_K sono anche chiusi nella topologia indotta $\tau_{|K|}$.

Si ricorda che K è complesso simpliciale finito e sia A un chiuso in $|K|$. Dunque si ha che $A \cap \Delta^n$ è un chiuso in $(\Delta^n, \tau_{\Delta^n})$ e quindi un chiuso in $(|K|, \tau_{|K|})$. Siccome A è unione finita di insiemi $A \cap \Delta^n$ si ha che anche A è un chiuso di $(|K|, \tau_{|K|})$. □

Osservazione 1.2.7. *Si osservi che, nel provare che τ_K è più fine di $\tau_{|K|}$, l'ipotesi che K sia complesso simpliciale finito non viene utilizzata. Infatti è un risultato che vale in generale per ogni complesso simpliciale, anche di dimensione non finita.*

Tuttavia le due topologie coincidono solo in condizione di finitezza.

Lemma 1.2.8. *Se L è un sottocomplesso di K allora $|L|$ è un sottospazio chiuso di $|K|$. In particolare, se $\Delta^n \in K$, allora Δ^n è un sottospazio chiuso di $|K|$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova a pagina 9 di [5]. □

Lemma 1.2.9. $|K|$ è uno spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. La dimostrazione si trova a pagina 10 di [5]. \square

Proposizione 1.2.10. Siano X uno spazio topologico e $|K|$ il supporto di un complesso simpliciale K . Allora

$$f : |K| \longrightarrow X \text{ è continua} \iff f|_{\Delta^n} : \Delta^n \longrightarrow X \text{ è continua} \quad \forall \Delta^n \in K.$$

Dimostrazione.

• \implies

Se f è continua, anche $f|_{\Delta^n}$ lo è siccome Δ^n è un sottospazio di K per il lemma precedente.

• \impliedby

Supponiamo che ogni $f|_{\Delta^n}$ sia continua.

Se C è un chiuso di X allora si ha che

$$f^{-1}(C) \cap \Delta^n = (f|_{\Delta^n})^{-1}(C)$$

è un chiuso in Δ^n per la continuità di $f|_{\Delta^n}$. Quindi $f^{-1}(C)$ è chiuso in $|K|$ per definizione della topologia su $|K|$. Quindi f è continua. \square

Proposizione 1.2.11 (Mappa Simpliciale). Siano K e L dei complessi simpliciali e sia $f : K^{(0)} \longrightarrow L^{(0)}$ una mappa.

Si suppone che ogni volta che i vertici v_0, \dots, v_n di K generano un simplexo di K , i punti $f(v_0), \dots, f(v_n)$ siano i vertici di un simplexo di L .

Allora f può essere estesa ad una mappa continua

$$g : |K| \longrightarrow |L|$$

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \longrightarrow g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i).$$

Si dice che g è la mappa simpliciale indotta dalla mappa dei vertici f .

Dimostrazione. Si osservi che, per ipotesi, i vertici $f(v_0), \dots, f(v_n)$ di L generano un simplexo τ di L anche se non sono necessariamente distinti.

Dunque nell'espressione di $g(x)$ si ha che i coefficienti sono non negativi e la loro somma è 1. Di conseguenza, g mappa l' n -simplexo σ generato da v_0, \dots, v_n nel simplexo τ il cui insieme di vertici è $\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}$ con continuità. La mappa g è continua come mappa da σ a τ e quindi come mappa da σ a $|L|$. Per la Proposizione 1.2.10 si ha che g è continua come mappa da $|K|$ a $|L|$. \square

Osservazione 1.2.12. La composizione di due mappe simpliciali è simpliciale. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 12 di [5].

Lemma 1.2.13. *Sia $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una mappa bigettiva tale che i vertici v_0, \dots, v_n di K generino un simplex di K se e solo se $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generano un simplex di L . Allora la mappa simpliciale indotta $g : |K| \rightarrow |L|$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Ogni simplex σ di K viene mappato da g su un simplex τ di L della stessa dimensione di σ .

Occorre solo provare che la mappa lineare $h : \tau \rightarrow \sigma$ indotta dalla corrispondenza dei vertici f^{-1} sia l'inversa della mappa $g : \sigma \rightarrow \tau$.

Si osservi che, se $x = \sum_i t_i v_i$ allora $g(x) = \sum_i t_i f(v_i)$ per definizione. Quindi

$$h(g(x)) = h\left(\sum_i t_i f(v_i)\right) = \sum_i t_i f^{-1}(f(v_i)) = \sum_i t_i v_i = x.$$

□

1.2.2 Complessi simpliciali astratti

Si introduce adesso la nozione di complesso simpliciale astratto. Infatti spesso risulta complicato specificare tutti i simplessi e assicurarsi che si intersechino correttamente. Conviene dunque costruire un complesso astrattamente e preoccuparsi successivamente di inserirlo in uno spazio euclideo.

Definizione 1.2.14 (Complesso Simpliciale Astratto). *Sia V un insieme finito. Un complesso simpliciale astratto è una collezione \mathbf{S} di sottoinsiemi non vuoti di V tale che*

$$A \in \mathbf{S} \implies B \in \mathbf{S} \quad \forall B \subseteq A, B \neq \emptyset.$$

L'elemento $A \in \mathbf{S}$ è detto simplex di \mathbf{S} .

Definizione 1.2.15 (Dimensioni). *Sia \mathbf{S} un complesso simpliciale astratto. La dimensione di un simplex $A \in \mathbf{S}$ è*

$$\dim A = \#A - 1,$$

dove con $\#A$ si intende il numero di elementi distinti presenti in A .

La dimensione di un complesso \mathbf{S} è definita come il massimo delle dimensioni dei suoi simplessi.

Definizione 1.2.16 (Faccia). *Ogni sottoinsieme non vuoto di $A \in \mathbf{S}$ è detto faccia di A .*

L'insieme dei vertici V di \mathbf{S} è l'unione degli insiemi singoletti di \mathbf{S} .

Definizione 1.2.17 (Sottocomplesso). *Una sottocollezione di \mathbf{S} è essa stessa un complesso detto sottocomplesso di \mathbf{S} .*

Si dice che due complessi \mathbf{S} e \mathbf{T} siano isomorfi se esiste un'applicazione bigettiva f che mappa l'insieme dei vertici di \mathbf{S} all'insieme dei vertici di \mathbf{T} tale che $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathbf{S}$ se e solo se $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathbf{T}$.

Definizione 1.2.18 (Schema di vertici). *Siano K un complesso simpliciale (geometrico) e V l'insieme dei suoi vertici. Sia \mathcal{K} la collezione di tutti i sottoinsiemi $\{a_0, \dots, a_n\}$ di V tale che i vertici a_0, \dots, a_n generano un simplex di K .*

La collezione \mathcal{K} viene detta schema di vertici di K .

La collezione \mathcal{K} è un particolare esempio di complesso simpliciale astratto.

Teorema 1.2.19. (a) *Ogni complesso simpliciale astratto \mathbf{S} è isomorfo allo schema di vertici di qualche complesso simpliciale (geometrico) K .*

(b) *Due complessi simpliciali (geometrici) sono isomorfi linearmente se e solo se i loro schemi di vertici sono isomorfi come complessi simpliciali astratti.*

Dimostrazione. (a) Sia \mathbf{S} un complesso simpliciale astratto con insieme dei vertici V . Si definisce lo spazio euclideo E come il più piccolo sottospazio euclideo che contiene tutti i punti di V . In particolare, E contiene tutti i punti di \mathbf{S} come sottoinsieme. Sia e_1, \dots, e_m una base ortonormale di E , dove m è la dimensione di E . Ogni punto $v \in V$ può essere scritto in modo unico come $v = \sum_{i=1}^m a_i(v)e_i$, dove i coefficienti $a_i(v)$ sono scalari. Si definisce il complesso simpliciale geometrico K come segue. L'insieme dei suoi vertici è proprio V , cioè K ha un simplex per ogni vertice di \mathbf{S} . Per ogni sottoinsieme di vertici $v_0, \dots, v_n \subseteq V$ tali che v_0, \dots, v_n generano un simplex di \mathbf{S} , si definisce il simplex di K corrispondente come il simplex avente come vertici v'_0, \dots, v'_n , dove $v'_i = \sum_{j=1}^m a_j(v_i)e_j$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Si osservi che K è un complesso simpliciale geometrico, in quanto ogni simplex di K è il convesso dell'insieme dei suoi vertici. Inoltre, ogni volta che i vertici di \mathbf{S} generano un simplex, anche i corrispondenti vertici in K generano un simplex, in quanto i vertici di K sono costruiti come combinazioni lineari dei vettori della base ortonormale di E . Per mostrare che \mathbf{S} è isomorfo allo schema di vertici di K , si definisce una mappa simpliciale iniettiva $f : \mathbf{S} \rightarrow K$ che manda ogni vertice di \mathbf{S} nel suo corrispondente vertice di K . In particolare, per ogni sottoinsieme di vertici $v_0, \dots, v_n \subseteq V$ tali che v_0, \dots, v_n generano un simplex di \mathbf{S} , si definisce f come la mappa lineare che manda v_i in v'_i per ogni $i = 0, \dots, n$. Si osservi che f è iniettiva e preserva i simpletti, in quanto ogni volta che i vertici di \mathbf{S} generano un simplex, anche i corrispondenti vertici in K generano un simplex. Inoltre, f è una mappa simpliciale in quanto le combinazioni lineari di vettori della base ortonormale di E formano un sottospazio lineare di E , che è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per scalare.

Per mostrare che f è suriettiva, si considera un simplex s di K avente come vertici v'_0, \dots, v'_n . Poiché ogni v'_i è una combinazione lineare dei vettori della base ortonormale di E , esistono vertici $v_i \in V$ tali che $v'_i = \sum_{j=1}^m a_j(v_i)e_j$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Poiché v_0, \dots, v_n generano un simplex di \mathbf{S} , la mappa f manda v_i in v'_i per ogni $i = 0, \dots, n$, e quindi f manda s in un simplex di \mathbf{S} . Dunque, f è suriettiva.

Si conclude che f è un isomorfismo di complessi simpliciali tra \mathbf{S} e lo schema di vertici di K , e quindi \mathbf{S} e K sono isomorfi.

(b) La dimostrazione segue direttamente dal Lemma 1.2.13

□

Definizione 1.2.20. Se il complesso simpliciale astratto \mathbf{S} è isomorfo allo schema di vertici del complesso simpliciale K , si chiama K una realizzazione geometrica di \mathbf{S} , unicamente determinata a meno di isomorfismi lineari.

Dunque se si dispone di un complesso simpliciale (geometrico) K , è possibile creare un complesso simpliciale astratto \mathbf{S} rimuovendo tutti i simplessi ma mantenendo solo i loro insiemi di vertici. Si può chiamare \mathbf{S} uno schema di vertici di K e simmetricamente, chiamare K una realizzazione geometrica di \mathbf{S} . La costruzione di realizzazioni geometriche risulta sorprendentemente facile se la dimensione dello spazio ambiente è sufficientemente alta.

Definizione 1.2.21 (Triangolazione). Una triangolazione di uno spazio topologico X è un omeomorfismo $|K| \rightarrow X$, dove K è un complesso simpliciale.

Uno spazio topologico che ammette una triangolazione è detto triangolabile. Questo è necessariamente di Hausdorff e metrizzabile. Non tutti gli spazi presentano però delle triangolazioni: esistono delle varietà topologiche in dimensione 4 o superiore che non ne hanno. Questo non accade nelle dimensioni inferiori: tutte le varietà di dimensione 1, 2 e 3 sono triangolabili. La triangolabilità è quindi un fattore importante nella topologia della dimensione bassa.

Esempio 1.2.22 (Cilindro). Sia K un complesso simpliciale il cui supporto $|K|$ è omeomorfo al cilindro $S^1 \times [0, 1]$.

Lo si può rappresentare in due modi, come in figura 1.3:

Nel primo modo è rappresentato come collezione di sei 2-simplessi e delle rispettive facce.

Nel secondo modo è rappresentato come complesso L (il cui supporto è un rettangolo) con un sistema di etichette sui vertici.

Questo diagramma è da intendersi come modo per denotare il complesso astratto \mathbf{S} il cui insieme di vertici consiste delle lettere a, b, c, d, e, f e i cui simplessi sono gli insiemi

$$\{a, f, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, c, e\}, \{a, e, f\}.$$

Tale complesso astratto è isomorfo allo schema di vertici di K quindi specifica precisamente lo stesso complesso. Si ha che K è una realizzazione geometrica di \mathbf{S} .

Sia $f : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$ la mappa che assegna ad ogni vertice di L il corrispondente vertice etichettato di K .

Allora f si estende ad una mappa simpliciale $g : |L| \rightarrow |K|$.

Siccome gli spazi sono compatti e di Hausdorff, g è una mappa quoziente detta “mappa d’incollamento” e identifica dunque il lato destro di $|L|$ con il lato sinistro, ottenendo il cilindro.

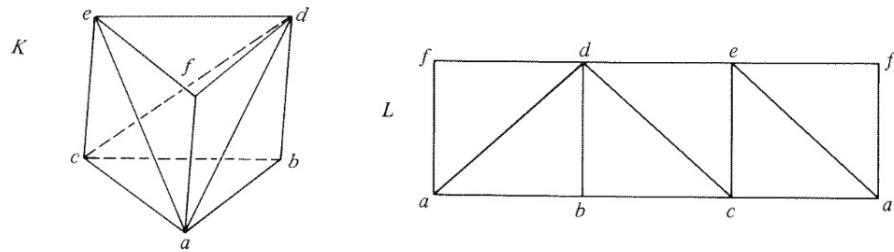


Figura 1.3: Due diverse rappresentazioni di un cilindro. L'immagine è tratta da [5].

Esempio 1.2.23 (Toro). *Il toro può essere definito come spazio quoziente ottenuto da un rettangolo identificandone i lati come in figura 1.4a.*

Per costruire un complesso il cui supporto sia omeomorfo al toro è perciò sufficiente definirlo come in figura 1.4b. Si verifica che il risultato ottenuto dalla mappa quoziente g è esattamente la realizzazione geometrica del toro cercata.

Si osservi che in questo caso sono serviti 18 triangoli, 27 lati e 9 vertici. In generale per dotare il toro di struttura di complesso simpliciale occorrono almeno 14 triangoli, 21 lati e 7 vertici!

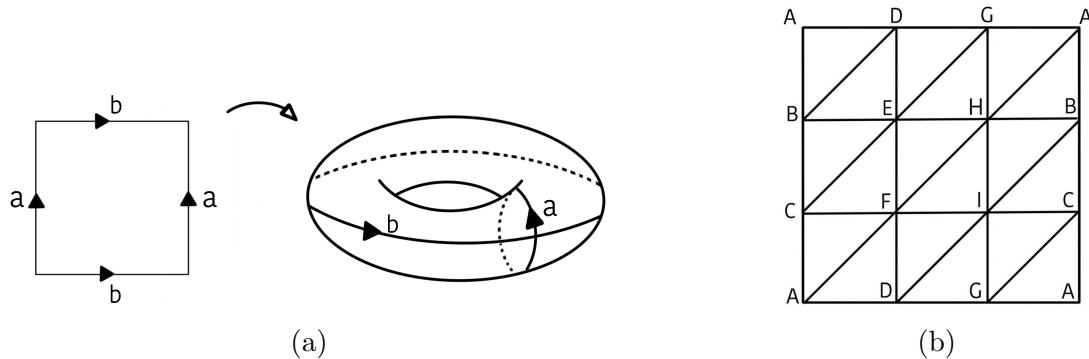


Figura 1.4: Rappresentazione del toro con complessi simpliciali.

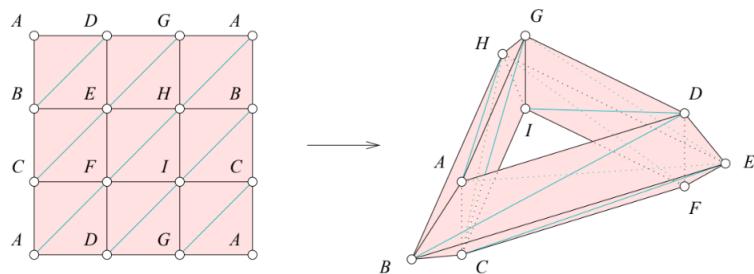


Figura 1.5: Discretizzazione del toro per mezzo di complessi simpliciali. Immagine tratta da [1].

Osservazione 1.2.24. Questo tipo di discretizzazione risulta alla base dell'omologia persistente in quanto è più facilmente riconoscibile dai computer.

Tuttavia, come si può intuire dalla figura 1.5, è anche quella che meno si avvicina alla realtà. Sebbene la trattazione sull'omologia persistente in questione si basi sulla nozione di complesso simpliciale, si introducono in seguito altre strutture, quali quella di Δ -complesso o di complesso singolare, che, ammettendo deformazioni sui simplessi, presentano una maggiore accuratezza nella descrizione reale delle forme.

Osservazione 1.2.25. Il fatto che occorrono almeno 14 triangoli, 21 lati e 7 vertici deriva dall'esercizio proposto a pagina 31 di [4]:

Per una qualsiasi triangolazione di una superficie compatta si ha che:

- (a) $3f = 2l$,
- (b) $l = 3(v - \chi)$,
- (c) $v \geq \frac{1}{2}(\sqrt{49 - 24\chi} + 7)$,

dove con f si intende il numero di facce, con l il numero di spigoli, con v il numero di vertici e con χ la caratteristica di Eulero che si ricorda essere calcolata come $\chi = v - l + f$.

Dimostrazione. La dimostrazione per i primi due punti deriva sostanzialmente dalla formula di Eulero, il terzo punto deriva invece dalla teoria dei grafi e dalla generalizzazione del teorema dei quattro colori. \square

Dunque, siccome è già noto che $\chi(T) = 0$ si ha che $v \geq 7$. La triangolazione minima si può allora ottenere con un minimo di 7 vertici. Di conseguenza, per sostituzione si ottiene anche che $l = 21$ e che $f = 14$, come in figura 1.6.

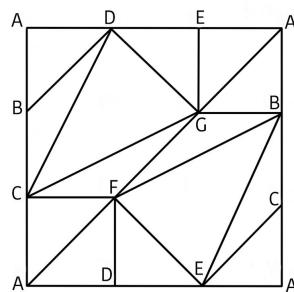


Figura 1.6: Triangolazione minima di Császár di un toro.

1.3 Gruppi di omologia simpliciale

Si ha interesse adesso nel definire un invariante topologico che possa descrivere e distinguere la forma di un qualsiasi oggetto. L'omologia è uno strumento potente nell'analisi delle forme, poiché permette di studiare le proprietà topologiche di uno spazio in modo più astratto e algebrico, senza dover dipendere da una specifica rappresentazione geometrica (come nel caso dell'omotopia). Queste nozioni possono essere definite per una qualsiasi discretizzazione di una forma geometrica ma, in questa sezione, si introduce la nozione di omologia solo per complessi simpliciali.

In questo capitolo si fa riferimento a [3], omettendo le dimostrazioni riguardanti l'omologia singolare che già sono state affrontate in corsi di base ma che rimangono altrettanto valide in questo studio.

Definizione 1.3.1 (Orientamento). *Sia Δ^p un p -simplesso. Si dice che due ordinamenti sull'insieme dei suoi vertici sono equivalenti se differiscono per una permutazione pari. Se $\dim \Delta^p > 0$ gli ordinamenti dei vertici costituiscono due classi di equivalenza. Ogni classe è detta **orientamento** di Δ^p .*

Se $\dim \Delta^p = 0$ c'è una sola classe e quindi un solo orientamento di Δ^p .

Un p -simplesso che presenta un orientamento viene detto p -simplesso orientato.

Osservazione 1.3.2. *Si adotti la convenzione che i vertici delle facce abbiano lo stesso ordinamento dei vertici del simplesso più grande di cui fanno parte.*

Notazione:

Si indica $[v_0, \dots, v_p]$ il p -simplesso orientato generato da v_0, \dots, v_p e con ordinamento (v_0, \dots, v_p) .

Esempio 1.3.3. *Come si osserva dalla figura 1.7 i 2-simplessi orientati con ordinamento (v_0, v_1, v_2) e (v_1, v_2, v_0) sono uguali tra loro ma sono diversi da (v_2, v_1, v_0) .*

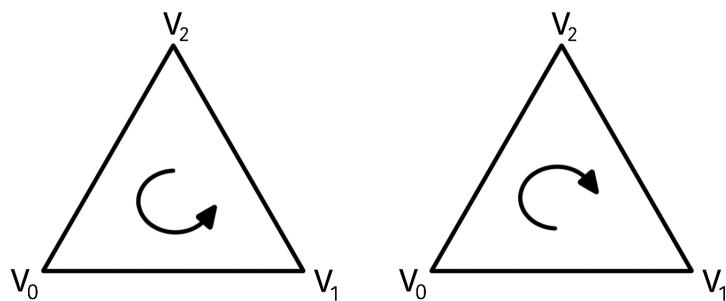


Figura 1.7: Due diversi orientamenti di un 2-simplesso.

Definizione 1.3.4 (Catena). *Sia K un complesso simpliciale e sia fissato un ordinamento su ciascuno dei suoi p -simplessi. Una p -catena è una somma formale dei p -simplessi orientati in K . La notazione standard con cui indicarla è $c = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Delta_i^p$ dove i Δ_i^p sono i p -simplessi orientati e gli α_i sono coefficienti interi.*

Proposizione 1.3.5. *Le p-catene con l'operazione di addizione formano il gruppo abeliano libero di p-catene di K a coefficienti in \mathbb{Z} :*

$$(C_p(K), +).$$

L'insieme dei p-simplessi orientati ne determina una base.

Per $p < 0$ e per $p > \dim K$ il gruppo è banale ed è costituito solo dall'elemento neutro.

Dimostrazione. Si verifica che $(C_p(K), +)$ è un gruppo osservando che due p-catene si sommano componente per componente. Ossia, date

$$c = \sum_{i=0}^n \Delta_i^p \lambda_i \quad \text{e} \quad c' = \sum_{i=0}^n \Delta_i^p \gamma_i$$

si ottiene

$$c + c' = \sum_{i=0}^n \Delta_i^p (\lambda_i + \gamma_i).$$

Quindi segue che l'abelianità e l'associatività dell'operazione sono date rispettivamente dalla commutatività e dall'associatività dell'addizione in \mathbb{Z} ; inoltre si ha che l'elemento neutro è $0 = \sum_{i=0}^n 0 \Delta_i^p$ e l'inverso di c è determinato dalla p-catena dei simpleSSI orientati in maniera opposta.

La verifica che il gruppo sia libero segue direttamente.

La p-catena assegna il valore λ_i al p-simpleSSo orientato Δ_i^p , il valore $-\lambda_i$ al p-simpleSSo con orientamento opposto rispetto a Δ_i^p e il valore 0 a tutti i p-simpleSSI orientati che non appaiono nella somma. \square

Definizione 1.3.6 (Operatore di Bordo). *Se $\Delta^p = [v_0, \dots, v_p]$ è un p-simpleSSo orientato con $p > 0$, si definisce l'operatore di bordo come il seguente omomorfismo:*

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$

$$\partial_p \Delta^p = \partial_p [v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p],$$

dove \hat{v}_i rappresenta il vertice mancante.

L'elemento $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$ rappresenta l'i-esima faccia di Δ^p ottenuta una volta eliminato il suo i-esimo vertice.

Proposizione 1.3.7. *L'applicazione ∂_p è ben definita e $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$*

Si pone inoltre ∂_p identicamente uguale a 0 se $p \leq 0$, oppure $p > \dim K$.

Dimostrazione. La dimostrazione si trova a pagina 30 di [5]. \square

Definizione 1.3.8 (p-Cicli e p-Bordi). *Si ha che:*

Il nucleo di $\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ è detto gruppo di p-cicli e viene denotato $Z_p(K)$.

L'immagine di $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$ è detta gruppo di p-bordi e viene denotata con $B_p(K)$.

Dalla proposizione 1.3.7, ne consegue che ogni bordo di una $(p+1)$ -catena è automaticamente anche un p -ciclo. Perciò si ha che:

$$B_p(K) \subseteq Z_p(K).$$

Dal momento che i gruppi di bordi sono sottogruppi dei gruppi di cicli e sono normali (in quanto sottogruppi dei gruppi abeliani $C_p(K)$), è possibile passare ai quozienti, ossia partizionare ciascun gruppo di cicli in classi di cicli che differiscono l'uno dall'altro solo per i bordi. Questo permette di definire le nozioni di gruppi di omologia e dei loro ranghi.

Definizione 1.3.9 (Complesso di Catene). *La sequenza dei seguenti omomorfismi di gruppi abeliani, determinata per merito degli operatori di bordo, viene definita complesso di catene,*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Definizione 1.3.10 (Gruppo di Omologia). *Si definisce il p -esimo gruppo di omologia come:*

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K).$$

Il rango di questo gruppo viene detto p -esimo numero di Betti:

$$\beta_p = \text{rank } H_p(K).$$

Da un punto di vista geometrico il p -esimo numero di Betti β_p quantifica il numero di p -cicli indipendenti e non vincolati presenti in K . In dimensione 0, il numero di Betti conta il numero di componenti connesse all'interno del complesso. In dimensione 1, il numero di Betti tiene conto della presenza di tunnel e buchi mentre, in dimensione 2, conta il numero di gusci che circondano vuoti o cavità, e così via.

Definizione 1.3.11 (Catena a Coefficienti Arbitrari). *Sia K un complesso simpliciale e sia fissato un ordinamento su ciascuno dei suoi p -simplessi. Sia G un gruppo abeliano. Si può definire una p -catena a coefficienti in G come somma formale $c = \sum_{i=0}^n g_i \Delta_i^p$, dove i Δ_i^p sono p -simplessi orientati e g_i sono elementi di G .*

Analogamente a 1.3.5 si osserva che la p -catena a coefficienti in G assegna il valore g_i al p -simplesso orientato Δ_i^p , il valore $-g_i$ al p -simplesso con orientamento opposto rispetto a Δ_i^p e il valore 0 a tutti i p -simplessi orientati che non appaiono nella somma. Inoltre le p -catene con l'operazione di addizione formano il gruppo abeliano libero di p -catene di K a coefficienti in G , denotato con $C_p(K; G)$.

Definizione 1.3.12 (Omomorfismo di Bordo). *Si definisce l'operatore di bordo $\partial_p : C_p(K; G) \longrightarrow C_{p-1}(K; G)$ analogamente a 1.3.6, secondo la formula $\partial(g\Delta^p) = g\partial(\Delta^p)$. Analogamente alla definizione 1.3.8, si definiscono inoltre:*

- (a) $Z_p(K; G) = \text{Ker} \partial_p$ il gruppo dei cicli;
- (b) $B_p(K; G) = \text{Im} \partial_{p+1}$ il gruppo dei bordi.

Definizione 1.3.13 (Omologia a Coefficienti Arbitrari). *Analogamente a 1.3.10 si definisce il p -esimo gruppo di omologia simpliciale di K a coefficienti in G come*

$$H_p(K; G) = Z_p(K; G)/B_p(K; G).$$

In ambito applicativo si utilizza spesso il caso in cui G sia il campo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$. Grazie a ciò, si può non dipendere dal concetto di orientamento e considerare una catena come un insieme di p -simplessi Δ_i^p , quelli con $g_i = \bar{1}$.

Inoltre l'utilizzo di soli 1 e 0 favorisce l'utilizzo di determinate strutture dati, come emerge in Sezione 2.1.2. Affrontando infatti la riduzione di Gauss nel caso di matrici sparse, è sufficiente memorizzare solo la posizione dei valori pari a 1. La struttura dati scelta rimane valida fino al termine del processo dal momento che la matrice continua ad essere sparsa (finché si è a valori in \mathbb{Z}_2). Diversamente, se si lavorasse a valori in \mathbb{Z} , in determinati passaggi della riduzione di Gauss sarebbe necessario cambiare la struttura dati scelta (memorizzare solo la posizione dei valori d'interesse) siccome la matrice tende a riempirsi e difficilmente risulterà sparsa.

Un altro motivo deriva dal fatto che l'omologia persistente, come evidenziato in Sezione 2.1.1 (Osservazione 2.1.3), può essere descritta per mezzo di $A[X]$ -moduli. Questi moduli ammettono una certa decomposizione solo se sono finitamente generati su un PID. Di conseguenza si deve avere che A sia un campo affinché $A[X]$ sia PID. Dunque l'ipotesi che A sia un campo è richiesta dal teorema di struttura in questione, e se dovesse venire a mancare si dovrebbero cercare altre decomposizioni molto più complicate.

Tuttavia, sebbene il passaggio da \mathbb{Z} a \mathbb{Z}_2 fornisca delle semplificazioni sul fronte implementativo, inevitabilmente riduce la qualità delle informazioni sul fronte teorico. Un esempio lo costituiscono i gruppi di omologia del toro e della bottiglia di Klein, che in generale sono diversi finché si opera a coefficienti in \mathbb{Z} ma che coincidono lavorando in \mathbb{Z}_2 .

Esempio 1.3.14. *Siano T un toro e S una bottiglia di Klein. Si riportano di seguito i gruppi di omologia simpliciale del toro e della bottiglia di Klein.*

$$H_p(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, 2 \\ 0 & \text{se } p \geq 3 \end{cases}.$$

$$H_p(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{se } p \geq 2 \end{cases}.$$

Si osserva però che, a coefficienti in \mathbb{Z}_2 , i gruppi di omologia coincidono:

$$H_p(S; \mathbb{Z}_2) = H_p(T; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n = 0, 2 \\ 0 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}.$$

1.4 Δ -complessi e i loro gruppi di omologia

Il concetto di complesso simpliciale è uno dei pilastri della topologia algebrica tuttavia, in alcuni casi, la semplice costruzione di un complesso simpliciale non è sufficiente a modellare la complessità di un oggetto topologico, e si rende necessario utilizzare una generalizzazione più potente. In questo contesto, entrano in gioco i Δ -complessi.

1.4.1 Δ -complessi

Come si evince dalla definizione riportata di seguito, i Δ -complessi sono complessi singolari ma che presentano delle maggiori restrizioni. Infatti in questo caso non è più sufficiente la sola continuità sulla mappa $\sigma_i : \Delta^p \rightarrow X$.

Inoltre si osservi che, i Δ -complessi, a loro volta sono generalizzazione dei complessi simpliciali le cui mappe considerate si riducevano a delle semplici identità.

In seguito si illustrano i motivi per cui risulta utile definire una tale struttura.

Definizione 1.4.1 (Δ -completo). *Una struttura di Δ -completo su uno spazio topologico X è una collezione di mappe*

$$\sigma_i : \Delta^p \rightarrow X$$

con p dipendente dall'indice i , tale che:

- (a) $\sigma_i|_{\Delta^p} : \Delta^p \rightarrow X$ sia iniettiva e ogni punto di X stia nell'immagine di esattamente quell'una restrizione.
- (b) Ogni restrizione di σ_i ad una faccia di Δ^p sia una delle mappe

$$\sigma_j : \Delta^{p-1} \rightarrow X.$$

- (c) Un insieme $A \subset X$ è aperto in (X, τ_X) se $\sigma_i^{-1}(A)$ è aperto in $(\Delta^p, \tau_{\Delta^p})$.

Esempio 1.4.2 (Circonferenza). Si consideri lo spazio rappresentato in figura 1.8.

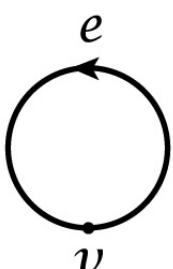


Figura 1.8:
Circonferenza
con vertice v
e un lato e .
Tratto da [3].

Si tratta di un Δ -completo poiché l'applicazione che mappa lo 0-simplesso v in sè stesso soddisfa tutte e tre le condizioni richieste. Inoltre anche l'applicazione che mappa un 1-simplesso (che si ricorda essere un segmento retto) nel lato “ e ” soddisfa le tre proprietà. Infatti si tratta di un'applicazione continua e , se ristretta alla parte interna, iniettiva (quindi non vengono coinvolti i due estremi dell'1-simplesso che identificandosi avrebbero creato problemi). Infine le facce dell'1-simplesso sono determinate dai suoi due estremi, e le relative mappe rientrano nel caso visto inizialmente per v .

Tuttavia si può notare che non si tratta di un complesso simpliciale poiché non è ammessa la deformazione di un 1-simplesso in tal modo.

Esempio 1.4.3. La decomposizione del toro in 2 triangoli, 3 lati e 1 vertice come in figura 1.9 definisce una struttura Δ -complessa con un totale di 6 mappe σ_i .

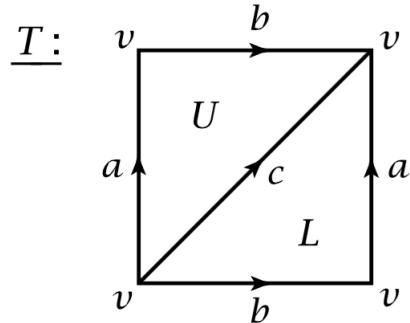


Figura 1.9: Δ -triangolazione del toro. Immagine tratta da [3].

Gli orientamenti sui lati, nelle figure, sono compatibili con un unico ordinamento di vertici di ogni simplexo, e questi ordinamenti determinano le mappe σ_i .

Osservazione 1.4.4. Si osservi che per definire un toro con una struttura di Δ -complesso occorrono solo 2 triangoli, 3 lati e 1 vertice.

Si ricordi che, in Esempio 1.2.23, si ha osservato che per definire un toro con struttura di complesso simpliciale invece servono 14 triangoli, 21 lati e 7 vertici.

Considerando uno spazio X con struttura di Δ -complesso come se fosse uno spazio quoziente di una collezione disgiunta di simpletti, non è difficile osservare che X deve essere di Hausdorff.

La terza condizione su σ_i inoltre implica che ogni restrizione $\sigma_i|_{\overset{\circ}{\Delta}^p}$ deve essere un omeomorfismo sull'immagine, la quale è perciò un simplexo aperto in X .

Per mezzo della seguente proposizione si può dunque dire che questi simpletti aperti $\sigma_i(\overset{\circ}{\Delta}^p)$ sono le p -celle e_i^p di una struttura di CW -complesso su X con σ_i come mappe caratteristiche.

Proposizione 1.4.5. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia data una famiglia di mappe $\Phi_i : D_i^p \rightarrow X$. Allora queste mappe sono le mappe caratteristiche di una struttura CW -complessa su X se e solo se:

- (a) Ogni Φ_i si restringe ad un omeomorfismo da $\overset{\circ}{D}_i^p$ alla sua immagine, una cella $e_i^p \subset X$, e queste celle sono tutte disgiunte e la loro unione è proprio X .
- (b) Per ogni cella e_i^p si ha che $\Phi_i(\partial D_i^p)$ è contenuto nell'unione di un numero finito di celle di dimensione minore di n .
- (c) Un sottoinsieme di X è chiuso se e solo se incontra la chiusura di ogni cella di X in un insieme chiuso.

Dimostrazione. La dimostrazione si trova a pagina 521 di [3]. □

1.4.2 Gruppi di omologia di Δ -complessi

Analogamente a quanto svolto per i complessi simpliciali, si definisce l'omologia "simpliciale" per Δ -complessi. In Sezione 1.5 tale nozione risulta fondamentale, si dimostra infatti che l'omologia simpliciale e l'omologia singolare producono gli stessi risultati in situazioni di Δ -complessi.

Definizione 1.4.6 (Gruppo delle Catene). *Sia $\Delta_p(K)$ il gruppo abeliano libero generato dai p -simplessi aperti e_i^p di K Δ -complesso.*

Gli elementi $\omega \in \Delta_p(x)$ sono detti p -catene e si possono scrivere come somma formale

$$\omega = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i^p,$$

dove $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Equivalentemente si può scrivere

$$\omega = \sum_{i=0}^n \alpha_i \sigma_i,$$

dove $\sigma_i : \Delta^p \longrightarrow K$ è la funzione caratteristica di e_i^p e la cui immagine è $\overline{e_i^p}$.

Osservazione 1.4.7. *La definizione è analoga alla definizione 1.3.4, in cui $\sigma_i : \Delta^p \longrightarrow K$ risulta essere l'identità ottenendo perciò: $c = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Delta_i^p$.*

Definizione 1.4.8 (Operatore di Bordo). *Analogamente alla definizione 1.3.6 si può definire un omomorfismo di bordo*

$$\begin{aligned} \partial_p : \Delta_p(K) &\longrightarrow \Delta_{p-1}(K) \\ \partial_p(\sigma_i) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_i|_{[v_0, \dots, \hat{v_k}, \dots, v_n]}. \end{aligned}$$

Lemma 1.4.9. *La seguente composizione è nulla:*

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p : \Delta_p(K) \longrightarrow \Delta_{p-1}(K) \longrightarrow \Delta_{p-2}(K).$$

Definizione 1.4.10. *Analogamente alla definizione 1.3.8 valgono le seguenti definizioni:*

- (a) $\text{Ker}\partial_p$ è il gruppo dei cicli;
- (b) $\text{Im}\partial_{p+1}$ è il gruppo dei bordi;
- (c) $H_p^\Delta = \text{Ker}\partial_p / \text{Im}\partial_{p+1}$ è il p -esimo gruppo di omologia simpliciale di K

Esempio 1.4.11 (Toro). Sia T il toro con struttura di Δ -complesso vista in figura 1.9, cioè costituita da un vertice, tre lati a, b, c e due 2-simplessi U e L .

Si costruisce il complesso di catene:

$$\dots \xrightarrow{\partial_4} \Delta_3(T) \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(T) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(T) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(T) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

$$\dots \xrightarrow{\partial_4} 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Si osserva che $\partial_1 = 0$ è una 0-mappa infatti

$$\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0.$$

Dunque $H_0^\Delta(T) = \text{Ker}\partial_0/\text{Im}\partial_1 = \mathbb{Z}$.

Siccome $\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 L$ e $\{a, b, a + b - c\}$ è una base per $\Delta_1(T)$ ne segue che $H_1^\Delta(T) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ con base le classi di omologia $[a]$ e $[b]$.

Siccome non ci sono 3-simplessi, si ha che $H_2^\Delta(T) = \text{Ker}\partial_2$ che è ciclico infinito generato da $U - L$. Infatti si ha osservato prima che $\partial_2(U) = \partial_2(L) = a + b - c$ e quindi

$$\partial(rU + qL) = r\partial_2(U) + q\partial_2(L) = (r + q)(a + b - c) = 0 \text{ se e solo se } r = -q.$$

Perciò:

$$H_p^\Delta(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } p = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, 2 \\ 0 & \text{se } p \geq 3 \end{cases}.$$

1.5 Relazione tra l'omologia simpliciale e l'omologia singolare

L'omologia simpliciale non è l'unica teoria di omologia. La nozione di omologia può essere definita per qualsiasi spazio topologico attraverso la teoria dell'omologia singolare. Infatti, a causa delle diverse restrizioni sulle mappe, non sempre è possibile definire una struttura di Δ -complesso o addirittura di complesso simpliciale su uno spazio topologico. Al contrario, la richiesta della sola continuità, permette di poter calcolare l'omologia singolare di un qualsiasi spazio. Fortunatamente si può dimostrare che le due teorie sono equivalenti per i Δ -complessi (e conseguentemente per i complessi simpliciali) e che dunque omologia singolare e omologia simpliciale producono gli stessi risultati.

Ciò dimostra anche che l'omologia simpliciale è ben definita e non dipende dall'orientamento dato ai simplex di un complesso simpliciale, siccome per definire l'omologia singolare non è richiesta la nozione di orientamento. Per la dimostrazione è opportuno definire il concetto di omologia relativa.

Notazione:

In questa sezione si discute solo di omologia di Δ -complessi e di omologia singolare. Per semplicità si denotano gli n -esimi gruppi di omologia rispettivamente con H_n^Δ e con H_n (si abusa di notazione utilizzando la stessa scrittura associata all'omologia simpliciale).

Definizione 1.5.1 (Omologia Relativa di Δ -complessi). *Sia K un Δ -complesso finito con $A \subset K$ un sottocomplesso. Si definisce l'omologia relativa di Δ -complessi $H_n^\Delta(K, A)$ in maniera analoga all'omologia relativa singolare $H_n(K, A)$.*

Si denotano $C_n(K, A)$ il gruppo delle n -catene relative (singolari) e $\Delta_n(K, A)$ il gruppo delle n -catene relative di un Δ -complesso K

$$\Delta_n(K, A) = \Delta_n(K)/\Delta_n(A).$$

Si definisce l'omomorfismo di bordo $\partial_n|_A : \Delta_n(K, A) \longrightarrow \Delta_{n-1}(K, A)$ e si definiscono i gruppi di omologia relativi come

$$H_n^\Delta(K, A) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}.$$

Ciò porta ad una sequenza esatta lunga del tipo

$$\dots \longrightarrow H_n^\Delta(A) \longrightarrow H_n^\Delta(K) \longrightarrow H_n^\Delta(K, A) \longrightarrow H_{n-1}^\Delta(A) \longrightarrow \dots .$$

Inoltre esiste l'omomorfismo canonico

$$H_n^\Delta(K, A) \longrightarrow H_n(K, A)$$

indotto dalla mappa catena $\Delta_n(K, A) \longrightarrow C_n(K, A)$ che manda ogni n -simplex di K nella sua funzione caratteristica $\sigma : \Delta^n \longrightarrow K$.

Il caso $A = \emptyset$ non è escluso, e in quella possibilità i gruppi relativi si riducono ai gruppi assoluti.

Ai fini di dimostrare il teorema si introduce il seguente lemma:

Lemma 1.5.2 (Cinque Lemma). *Sia dato il diagramma commutativo di gruppi abeliani come segue:*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D \xrightarrow{l} E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' \xrightarrow{l'} E' \end{array} .$$

Se le due righe sono esatte e se $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sono isomorfismi allora anche γ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Per provare che γ è isomorfismo è sufficiente provare che:

- (a) γ è suriettiva se β, δ sono suriettive e ϵ iniettiva;
- (b) γ è iniettiva se β, δ sono iniettive e α è suriettiva.

La dimostrazione di questi due fatti si ottiene ripercorrendo il diagramma. Si possono trovare i dettagli a pagina 129 di [3]. \square

Teorema 1.5.3. *Siano $H_n^\Delta(K, A)$ i gruppi di omologia simpliciale su Δ -complessi e $\Delta_n(K, A)$ i gruppi di omologia singolare. Gli omeomorfismi*

$$H_n^\Delta(K, A) \longrightarrow H_n(K, A)$$

sono isomorfismi per ogni n e per ogni $\Delta_n(K, A)$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è che in generale andando a sviluppare l'omologia singolare si hanno più simplessi singolari che Δ -complessi, siccome subiscono meno restrizioni. Per calcolare l'omologia sono sufficienti però esattamente quelle per i Δ -complessi. Si procede per casi ricordando che K è di dimensione finita:

- (a) **Caso** $A = \emptyset$.

Per il p -scheletro di K , costituito da tutti i simpleSSI di dimensione p o inferiore, si ha un diagramma commutativo di successioni esatte come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}^\Delta(K^p, K^{p-1}) & \xrightarrow{i} & H_n^\Delta(K^{p-1}) & \xrightarrow{j} & H_n^\Delta(K^p) & \xrightarrow{k} & H_n^\Delta(K^p, K^{p-1}) \xrightarrow{l} H_{n-1}^\Delta(K^{p-1}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ H_{n+1}(K^p, K^{p-1}) & \xrightarrow{i'} & H_n(K^{p-1}) & \xrightarrow{j'} & H_n(K^p) & \xrightarrow{k'} & H_n(K^p, K^{p-1}) \xrightarrow{l'} H_{n-1}(K^{p-1}) \end{array} .$$

Si prosegue la dimostrazione per induzione:

Se $p = 0$ si conclude che γ è isomorfismo per ogni n perché i simpleSSI singolari sono esattamente le mappe σ_i alla base dei Δ -complessi.

Adesso per ipotesi induttiva siano anche β e ϵ isomorfismi per ogni n .

Per dimostrare che γ è isomorfismo si dimostra che α e δ sono isomorfismi per ogni n

così da concludere per il lemma 1.5.2.

Il gruppo delle catene simpliciali $\Delta_n(K^p, K^{p-1}) = \Delta_n(K^p)/\Delta_n(K^{p-1})$ è un gruppo abeliano libero generato da n -simplessi di K se $p = n$, dunque è zero per $n \neq p$. Quindi $H_n^\Delta(K^p, K^{p-1})$ ha esattamente la stessa descrizione.

I corrispondenti gruppi di omologia singolare $H_n(K^p, K^{p-1})$ possono essere costruiti considerando la mappa

$$\Phi : \bigsqcup_i (\Delta_i^p, \partial\Delta_i^p) \longrightarrow (K^p, K^{p-1})$$

ottenuta dalle funzioni caratteristiche $\Delta^p \longrightarrow K$ per ognuno dei p -simplessi di K . L'esistenza di tali funzioni caratteristiche è garantita dal fatto che si sta operando su Δ -complessi. Siccome Φ è una funzione caratteristica, per definizione induce un omeomorfismo di spazi quoienti

$$\bigsqcup_i \Delta_i^p / \bigsqcup_i \partial\Delta_i^p \approx K^p / K^{p-1}$$

e dunque induce un isomorfismo su tutti i gruppi di omologia singolare.

Perciò $H_n(K^p, K^{p-1})$ è zero per $n \neq p$ mentre per $n = p$ questo gruppo è abeliano libero la cui base è rappresentata dai cicli relativi dati dalle mappe caratteristiche di tutti i p -simplessi di K , poichè $H_p(\Delta^p, \partial\Delta^p)$ è generato dalle mappe identiche $\Delta^p \longrightarrow \Delta^p$ (la dimostrazione di tale fatto si trova in Esempio 2.23 a pagina 125 di [3]).

Perciò le mappe

$$\alpha : H_n^\Delta(K^p, K^{p-1}) \longrightarrow H_n(K^p, K^{p-1}) \quad \text{e} \quad \delta : H_n^\Delta(K^p, K^{p-1}) \longrightarrow H_n(K^p, K^{p-1})$$

sono isomorfismi per ogni n .

Osservazione 1.5.4. *La dimostrazione funziona proprio perchè si ha una struttura di Δ -complesso su X e con sè, delle funzioni caratteristiche utilizzate. In generale, una tale struttura potrebbe non esistere, impedendo di terminare la dimostrazione con la costruzione dei gruppi di omologia singolare $H_n(K^p, K^{p-1})$.*

(b) **Caso $A \neq \emptyset$.**

Deriva dal caso precedente applicando il lemma 1.5.2 a

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}^\Delta(K, A) & \xrightarrow{i} & H_n^\Delta(A) & \xrightarrow{j} & H_n^\Delta(K) & \xrightarrow{k} & H_n^\Delta(K, A) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta \\ H_{n+1}(K, A) & \xrightarrow{i'} & H_n(A) & \xrightarrow{j'} & H_n(K) & \xrightarrow{k'} & H_n(K, A) \\ & & & & & & \xrightarrow{l'} H_{n-1}(A) \end{array} .$$

□

Grazie a questo teorema è possibile analizzare i complessi simpliciali e i gruppi di omologia simpliciale semplicemente sfruttando i risultati già noti per l'omologia singolare.

Capitolo 2

L’Omologia Persistente

L’omologia persistente è uno strumento di analisi topologica che permette di estrarre informazioni invarianti dalla struttura topologica di un insieme di dati. A differenza dell’omologia simpliciale e singolare, che forniscono una descrizione “statica” della topologia di un insieme di dati, l’omologia persistente si basa sull’idea di costruire una successione di gruppi di omologia, uno per ogni valore del parametro considerato, e di studiare l’evoluzione di tali gruppi al variare del parametro. In questo modo, si ottiene una descrizione “dinamica” della topologia dell’insieme di dati, che consente di individuare le caratteristiche topologiche persistenti (ovvero presenti per un intervallo di valori del parametro) e di discriminare tra caratteristiche topologiche transitorie (ovvero presenti solo per valori isolati del parametro). Le caratteristiche che persistono sono considerate con maggiore probabilità le proprietà autentiche dello spazio mentre le caratteristiche transitorie sono considerate come il risultato di imprecisioni di campionamento, rumore o selezioni di parametri specifici.

Questa tecnica di analisi topologica trova applicazioni in diversi campi, tra cui la biologia, la chimica, l’astrofisica, la classificazione delle immagini, le reti di sensori e le reti sociali.

In Sezione 2.1, si definiscono le filtrazioni e l’omologia persistente, ottenute a partire da un complesso simpliciale. Si fa riferimento prevalentemente a [1].

In Sottosezione 2.1.1, si illustrano le coppie di persistenza, caratterizzanti l’omologia persistente, e le principali tecniche di rappresentazione visiva.

In Sottosezione 2.1.2, si descrive l’algoritmo di calcolo delle coppie di persistenza.

In Sezione 2.2, si introducono i complessi simpliciali di Vietoris-Rips, utilizzati per determinare l’omologia persistente di un insieme di dati. Per queste ultime sezioni si fa comunque riferimento a [1], con particolare attenzione alle nozioni in [2] per quel che riguarda l’aspetto applicativo.

2.1 Gruppi di omologia persistente

L'idea dell'omologia persistente si basa sulla costruzione di una successione di gruppi di omologia a partire da una filtrazione di un complesso simpliciale (o in generale, singolare). In questa sezione si introduce quindi la nozione di filtrazione, per andare poi a definire i gruppi di omologia persistente.

Definizione 2.1.1 (Filtrazione). *Sia K un complesso simpliciale finito e sia $f : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione monotona, dove per funzione monotona si intende che se σ è una faccia di τ , allora $f(\sigma) \leq f(\tau)$.*

Per la monotonia si ha che l'insieme $K(a) = f^{-1}(-\infty, a]$ è un sottocomplesso di K per ogni $a \in \mathbb{R}$. Si definisce una filtrazione di f la successione crescente di complessi

$$\emptyset = K_{-1} \subseteq K_0 \subseteq \dots \subseteq K_n = K,$$

dove, se $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ sono i valori assunti da f e $a_{-1} = -\infty$, $K_i := K(a_i)$ per ogni $i = -1, \dots, n$.

La filtrazione si può immaginare come una costruzione del complesso aggiungendo pezzi di simplessi alla volta, come in figura 2.1.

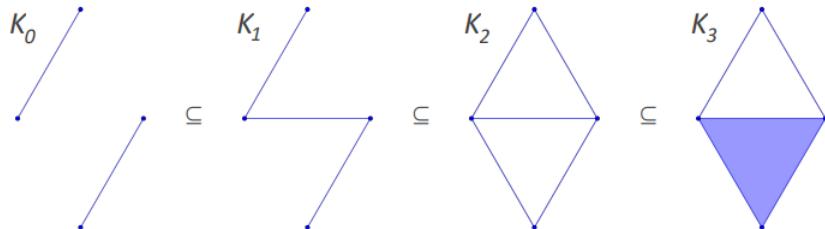


Figura 2.1: Esempio di filtrazione. Immagine tratta da [2].

L'interesse ricade nello studio dell'evoluzione in termini topologici, rappresentata dalla corrispondente sequenza dei p -esimi gruppi di omologia.

Per ogni $i \leq j$ si ha la mappa $\iota_{i,j}$ dell'inclusione del complesso K_i nel complesso K_j , perciò è possibile definire anche l'inclusione del gruppo $C_p(K_i)$ delle p -catene di K_i nel gruppo $C_p(K_j)$ delle p -catene di K_j e la si denota ugualmente come $\iota_{i,j}$ abusando di notazione. Si ha, per ogni dimensione p , il seguente complesso di p -catene:

$$C_p(K_0) \xrightarrow{\iota_{0,1}} C_p(K_1) \xrightarrow{\iota_{1,2}} \dots \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} C_p(K_n).$$

Ogni inclusione quindi induce l'omeomorfismo $f_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$ per ogni dimensione p , dove i rispettivi $H_p(K_*) = \text{Ker}\partial_p / \text{Im}\partial_{p+1}$ sono definiti conformemente alla definizione 1.3.10. Infatti il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{p+1}(K_0) & \xrightarrow{\iota_{0,1}} & C_{p+1}(K_1) & \xrightarrow{\iota_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & C_{p+1}(K_n) \\
\downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} & & \downarrow \partial_{p+1} \\
C_p(K_0) & \xrightarrow{\iota_{0,1}} & C_p(K_1) & \xrightarrow{\iota_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & C_p(K_n) \\
\downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p \\
C_{p-1}(K_0) & \xrightarrow{\iota_{0,1}} & C_{p-1}(K_1) & \xrightarrow{\iota_{1,2}} & \dots & \xrightarrow{\iota_{n-1,n}} & C_{p-1}(K_n).
\end{array}$$

Sia $\Delta^p = [v_0, \dots, v_p] \in C_p(K_i)$ un p -simplesso orientato. Abusando di notazione per ∂_p e $\iota_{i,j}$ si dimostra che:

$$(\iota_{i,j} \circ \partial_p)(\Delta^p) = \iota_{i,j} \left(\sum_{i=0}^p [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \right) = \sum_{i=0}^p [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \in C_{p-1}(K_j).$$

$$(\partial_p \circ \iota_{i,j})(\Delta^p) = \partial_p(\Delta^p) = \sum_{i=0}^p [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \in C_{p-1}(K_j).$$

Il risultato si può estendere ad ogni somma formale di p -simplessi.

Quando si passa da K_{i-1} a K_i si guadagnano delle nuove classi di omologia e se ne perdono altre (quando diventano banali o si fondono tra loro). L'obiettivo è tenere conto delle classi che nascono o muoiono dopo una determinata soglia i fissata.

Definizione 2.1.2 (Gruppo di Omologia Persistente). *Si definisce il p -esimo gruppo di omologia persistente l'immagine degli omomorfismi indotti dalle inclusioni*

$$H_p^{i,j} = \text{Im } f_p^{i,j},$$

per $0 \leq i \leq j \leq n$.

I ranghi di questi gruppi sono detti p -esimi numeri di Betti persistenti:

$$\beta_p^{i,j} = \text{rank } H_p^{i,j}.$$

I gruppi di omologia persistente consistono delle classi di omologia in K_i che sono sopravvissute in K_j , più formalmente:

$$H_p^{i,j} = \iota_{i,j}(Z_p(K_i)) / (B_p(K_j) \cap \iota_{i,j}(Z_p(K_i))).$$

Si dice che una classe γ in $H_p(K_i)$ è nata in K_i se $\gamma \notin H_p^{i-i,i}$.

Se γ è nata in K_i , si dice che muore entrando in K_j se si unisce ad un'altra classe passando da K_{j-1} a K_j . Cioè si ha che

$$f_p^{i,j-1}(\gamma) \notin H_p^{i-1,j-1} \text{ ma } f_p^{i,j}(\gamma) \in H_p^{i-1,j}.$$

Se γ nasce in K_i e muore in K_j , si definiscono (a_i, a_j) le coppie di persistenza e $\text{pers}(\gamma) = a_j - a_i$ la persistenza, dove $a_i, a_j \in \mathbb{R}$ in accordo con la definizione 2.1.1.

Si definisce indice di persistenza della classe la differenza tra indici $j - i$.

2.1.1 Diagrammi di persistenza

La rappresentazione della nascita e della morte di determinate proprietà avviene per mezzo di punti in due dimensioni. Se delle caratteristiche persistono fino all'ultimo valore della filtrazione considerata, presentano coordinate all'infinito e per questo motivo è prassi considerare il piano reale esteso $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Sia $\mu_p^{i,j}$ il numero delle classi p -dimensionali nate in K_i e morte entrando in K_j . Tale numero lo si può esprimere come la differenza seguente, per ogni $i < j$ e per ogni p :

$$\mu_p^{i,j} = (\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}),$$

dove la prima differenza conta le classi nate in K_i (o prima) e morte in K_j mentre la seconda differenza conta le classi nate in K_{i-1} (o prima) e morte in K_j .

Si può ottenere il p -esimo diagramma di persistenza rappresentando ogni punto (a_i, a_j) con molteplicità $\mu_p^{i,j}$. Una classe può essere visualizzata dunque dai punti la cui distanza verticale dalla diagonale è la persistenza. Inoltre siccome le molteplicità sono definite solo per $i < j$, tutti i punti giacciono sopra rispetto alla diagonale.

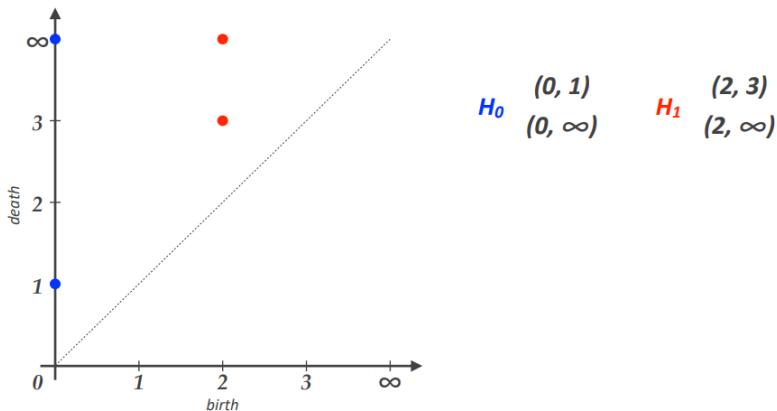


Figura 2.2: Esempio di diagramma di persistenza, riferito alla filtrazione della figura 2.1. Immagine tratta da [2]. Si osserva che i punti in blu rappresentano le componenti connesse, una delle quali muore al primo passo. L'altra invece non muore mai. Per quel che riguarda i buchi, rappresentati dai punti in rosso, si ha che uno dei due viene coperto da un triangolo al terzo passo, giungendo alla morte.

Un'altra rappresentazione visiva spesso utilizzata è quella del diagramma a codice a barre, come in figura 2.3. In questo caso lo spazio considerato si limita alla retta reale estesa.

Prendendo in esempio la figura 2.3 si nota che al passo 0 si hanno due componenti connesse e nessun buco. Al passo 1 una delle due componenti connesse muore mentre al passo 2 nascono due buchi, l'unica componente connessa rimasta continua ad esistere. Infine al passo 3 uno dei due buchi muore e al termine della filtrazione si può osservare che si ha una sola componente connessa ed un solo buco.

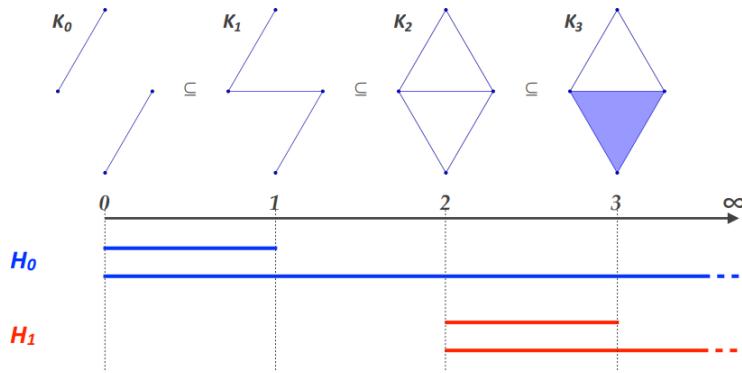


Figura 2.3: Esempio di diagramma a codice a barre, riferito alla filtrazione della figura 2.1. Immagine tratta da [2].

Osservazione 2.1.3. Come accennato dopo la definizione 1.3.13, è importante determinare l'omologia a coefficienti nel campo \mathbb{Z}_2 . In questo modo è possibile affermare che le coppie di persistenza caratterizzano il modulo dell'omologia persistente.

Si considerino una filtrazione $\mathfrak{F} := \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, un valore $p \in \mathbb{N}$ ed un campo \mathbb{F} . Allora si può definire il p -esimo modulo persistente M di \mathfrak{F} su \mathbb{F} come il $\mathbb{F}[x]$ -modulo graduato finitamente generato

$$M := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i,$$

dove

- $M_i := H_p(K_i; \mathbb{F})$ è l'insieme degli elementi omogenei di grado p ;
- l'azione $x^{j-i}h$ su un elemento h di grado i è definita come $\mu_p^{i,j}(h)$ dove

$$\mu_p^{i,j}(h) : H_p(K_i; \mathbb{F}) \longrightarrow H_p(K_j; \mathbb{F})$$

è la mappa lineare indotta dalle inclusioni $K_i \subseteq K_j$ definita in precedenza.

Infine il teorema di struttura per moduli graduati finitamente generati su un PID afferma che:

$$M \cong \bigoplus_{k=1}^n \mathbb{F}[x](-r_k) \oplus \bigoplus_{l=1}^m (\mathbb{F}[x]/(x^{j_l-i_l}))(-i_l).$$

Dunque M è completamente determinato dai valori r_k e dalle coppie (i_l, j_l) , definiti essere rispettivamente le coppie di persistenza (r_k, ∞) e (i_l, j_l) .

Per una trattazione approfondita dell'osservazione precedente si rimanda a [2]. D'ora in poi si assume che $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$.

2.1.2 Calcolo dell'omologia persistente

Per calcolare efficientemente l'omologia persistente si ricorre ad un particolare algoritmo di riduzione delle matrici.

Si considerino K un complesso simpliciale di dimensione n e $\mathfrak{F} = \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sua filtrazione. Grazie alla monotonia di f è possibile fissare un ordinamento sui simplessi tale che, se si considera una sequenza $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- (a) Se $f(\Delta_i) < f(\Delta_j)$ allora $i < j$;
- (b) Se Δ_i è una faccia di Δ_j allora $i < j$.

Definizione 2.1.4 (Matrice di Bordo). *Sia K un complesso simpliciale con ordinamento dei simplessi fissato. La matrice di bordo è definita essere della forma $D[a_{i,j}]$ dove $i, j = 1, \dots, n$ e*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta_i \text{ è una faccia di } \Delta_j \text{ di co-dimensione uno;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In generale si dice che Δ_i è una faccia di Δ_j di co-dimensione uno se

$$\dim \Delta_j - \dim \Delta_i = 1.$$

La sua matrice di bordo viene dunque costruita rappresentando tutti i simplessi che lo compongono sulle righe e sulle colonne.

Siccome ogni simplexo è preceduto dalle sue facce proprie, la matrice di bordo D è una matrice triangolare superiore.

Definizione 2.1.5 (Matrice Ridotta). *Sia D una matrice di bordo. Data una colonna non nulla j di D si definisce*

$$\text{low}(j) := \max\{i | a_{i,j} \neq 0\}.$$

Se la colonna j è nulla, low non è definito.

Una matrice R si dice ridotta se la funzione low è iniettiva nel suo dominio, cioè se per ogni coppia di colonne distinte non nulle j_0, j si ha che $\text{low}(j_0) \neq \text{low}(j)$.

Il metodo di riduzione è descritto dall'algoritmo 1.

Algorithm 1 Riduzione di Matrici

```

1:  $R = D$ ;
2: for  $j = 1$  to  $m$  do
3:   while there exists  $j_0 < j$  with  $\text{low}(j_0) = \text{low}(j)$  do
4:     add column  $j_0$  to  $j$ 
5:   end while
6: end for.

```

Si può provare che i low sono unici nonostante la matrice ridotta R non lo sia (dimostrazione a pagina 183 di [1]).

Dalla matrice ridotta è possibile ottenere le coppie di persistenza analizzando i diversi low ottenuti. Più precisamente, (a_i, a_j) è un punto finito nel diagramma di persistenza $Dgm_p(f)$ se e solo se $i = \text{low}(j)$ e il simplesso Δ_i è un simplesso di dimensione p . Invece il punto (a_i, ∞) in $Dgm_p(f)$ è tale se e solo se la colonna i è nulla e la riga i non contiene low. In generale si può riassumere dicendo che le coppie di persistenza (a_i, a_j) e (a_i, ∞) ottenute dalla matrice ridotta R corrispondono rispettivamente alle effettive coppie di persistenza $(f(\Delta_i), f(\Delta_j))$ e $(f(\Delta_i), \infty)$ della filtrazione $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Il grado omologico coincide con la dimensione di Δ_i .

Esempio 2.1.6. Si consideri la filtrazione con ordinamento fissato rappresentata in figura 2.4.

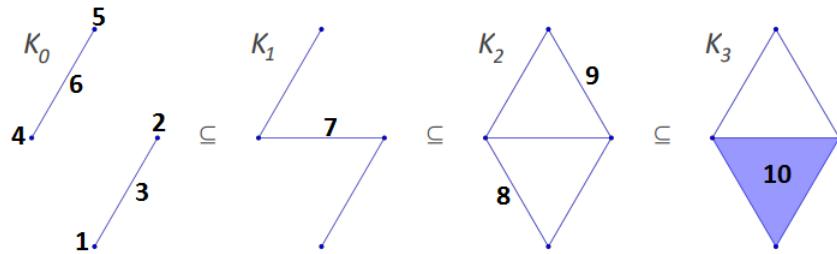


Figura 2.4: Esempio di ordinamento sui simplessi di una filtrazione.

La matrice di bordo e la matrice ridotta risultano essere:

$$D = \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccccccl}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \text{low} \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right) & \xrightarrow{c_8+c_7} & \begin{array}{ccccccccccl}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \text{low} \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\xrightarrow{c_8+c_3} \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccccccl}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \text{low} \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right) & \xrightarrow{c_9+c_6} & \begin{array}{ccccccccccl}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \text{low} \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\xrightarrow{c_9+c_7} R = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & & & 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & 1 & & & & 0 & & \\ 3 & & & & & 1 & & & & & 1 \\ 4 & & & & & & 1 & 1 & 0 & & \\ 5 & & & & & & & 1 & & & \\ 6 & & & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & & & 1 \\ 8 & & & & & & & & & & 1 \\ 9 & & & & & & & & & & \\ 10 & & & & & & & & & & \\ \hline low & & 2 & & 5 & 4 & & & 8 & & \end{pmatrix}.$$

Si osservi dapprima che l'ordinamento è ben definito. A questo punto dalla matrice ridotta è possibile dedurre le coppie di persistenza seguenti:

$$[2, 3], \quad [5, 6], \quad [4, 7], \quad [8, 10], \quad [1, \infty), \quad [9, \infty).$$

Queste, riesaminando la loro appartenenza ad un determinato complesso della filtrazione proposta in partenza, restituiscono rispettivamente:

$$[0, 0], \quad [0, 0], \quad [0, 1], \quad [2, 3], \quad [0, \infty), \quad [2, \infty).$$

Le coppie di persistenza (a_i, a_j) in cui $a_i = a_j$ non sono significative poichè determinano la nascita e la morte di una proprietà allo stesso passo della filtrazione. Dunque le coppie significative per il numero di componenti connesse sono $[0, 1]$ e $[0, \infty)$ mentre quelle significative per il numero di buchi sono $[2, 3]$ e $[2, \infty)$. Sono esattamente le coppie individuate dal grafico in figura 2.1.1.

Si vuole descrivere adesso come l'algoritmo operi da un punto di vista geometrico. Si osservi inizialmente che la matrice di bordo va ad individuare quali sono le facce di ogni complesso e conseguentemente, la nascita e la morte di alcune di esse. Per esempio, in questo caso si ha che l'1-simplesso 3 mette in comunicazione i vertici 1 e 2. Di conseguenza si ha che le due componenti connesse determinate dai singoli vertici con l'aggiunta dell'1-simplesso si fondono determinando una singola componente connessa finale. Per convenzione (dettata in realtà dal teorema di struttura 2.1.3) si assume che la componente connessa destinata a morire sia quella data dalla faccia con ordinamento maggiore, in questo caso il vertice 2. Da qui si ottiene dunque la coppia di persistenza $[2, 3]$. D'altra parte, il vertice 1 persiste all'infinito determinando la coppia $[1, \infty)$. Si osservi poi che l'algoritmo considera l'aggiunta di un complesso alla volta, perciò è necessario andare a considerare le coppie di persistenza in relazione alle reali aggiunte dei complessi secondo la filtrazione data, che può essere più o meno fine.

Inoltre l'algoritmo consiste nell'individuare e ed eliminare (attraverso la somme di colonne) due low dello stesso valore, che rappresenterebbero infatti due coppie di persistenza e dunque sancirebbero due diverse date di morte per uno stesso complesso. Si consideri ad

esempio la prima operazione, che prevede la somma della colonna 8 con la colonna 7. Inizialmente si avrebbero infatti le coppie [4,7] e [4,8] ma occorre stabilire se la componente connessa data dal vertice 4 muoia a seguito dell'aggiunta dell'1-simplesso 7 o dell'1-simplesso 8. Siccome l'algoritmo procede da sinistra verso destra, si assume che la morte si abbia in 7. Di conseguenza, l'1-simplesso 8 ha come bordo non più il vertice 1 e il vertice 4 (che è morto per mezzo dell'1-simplesso 7 fondendosi al vertice 2) bensì il vertice 1 e il vertice 2. Si osservi che in particolare, al termine della riduzione, la colonna 8 risulta nulla, evidenziando l'annullamento di un bordo e la nascita di un ciclo.

2.2 Trasformazione di dati in strutture di complessi simpliciali

Gli insiemi di dati scientifici si presentano solitamente sotto forma di nuvole di punti in un determinato spazio ambiente. Un esempio lo costituiscono i dati della fisica delle particelle, i voti elettorali o i dati per le previsioni meteorologiche.

L'essere umano può riconoscere facilmente strutture geometriche come ad esempio la disposizione dei punti ad anello in figura 2.5, ma se le strutture geometriche sono molto complesse e in dimensioni elevate, l'occhio umano potrebbe non essere in grado di coglierle.

Ci si domanda perciò se sia possibile riuscire a determinare in maniera algoritmica la forma dell'insieme di dati, la disposizione di questi singoli punti in un determinato ambiente, così da avere un'informazione topologica rilevante nello studio della nuvola di punti. Per fare ciò si ricorre alla topologia computazionale e alla costruzione di un opportuno complesso simpliciale collegando (per mezzo di simpletti) i punti vicini tra loro.

In questo modo, è possibile utilizzare l'omologia persistente sui complessi simpliciali ottenuti dai dati per riconoscerne le caratteristiche geometriche essenziali e distinguere il rumore.

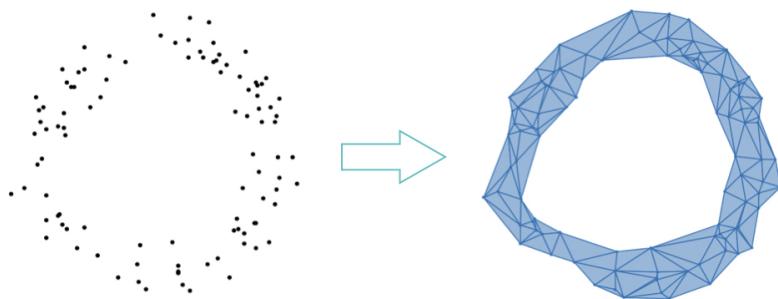


Figura 2.5: Una nuvola di punti e il complesso simpliciale che cattura la sua forma. Immagine tratta da [2].

Definizione 2.2.1 (Nervo). *Sia \mathbf{S} una collezione finita di insiemi in \mathbb{R}^n .*

Il nervo $Nrv(\mathbf{S})$ di \mathbf{S} è costituito da tutte le sottocollezioni non vuote \mathbf{x} i cui insiemi hanno intersezione comune non vuota:

$$Nrv(\mathbf{S}) = \{\mathbf{x} \subseteq \mathbf{S} \mid \bigcap_{X \in \mathbf{x}} X \neq \emptyset\}.$$

Si tratta di un complesso simpliciale astratto infatti se $\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X \neq \emptyset$ e $Y \subseteq \mathfrak{X}$ si ha che $\bigcap_{Y \in \mathfrak{X}} Y \neq \emptyset$.

Inoltre per il Teorema 1.2.19 si sa che ammette una realizzazione geometrica, identificando gli insiemi con i vertici collegati tra loro da 1-simplessi se hanno intersezione comune, come in figura 2.6.

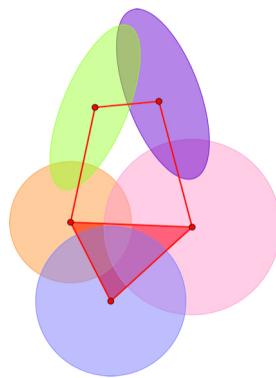


Figura 2.6: Esempio di nervo e della sua realizzazione geometrica. Immagine tratta da [2].

Teorema 2.2.2. *Sia \mathbf{S} una collezione di insiemi chiusi e convessi nello spazio euclideo. Allora il nervo di \mathbf{S} e l'unione di tutti gli insiemi di \mathbf{S} sono omotopicamente equivalenti (e quindi omologicamente equivalenti).*

Dimostrazione. Il teorema presenta una forma ancor più generale, la cui dimostrazione può essere approfondita in [3], corollario 4G.3. \square

Osservazione 2.2.3. *L'ipotesi che gli insiemi siano convessi è fondamentale.*

Un controesempio è fornito dal disco pieno bucato al centro. Il suo nervo è costituito dal solo vertice, ma il disco bucato è noto per non essere contraibile. Di conseguenza il teorema non funziona in questo caso: l'insieme d'esempio non può essere omotopicamente equivalente al vertice.

Definizione 2.2.4 (Complesso di Čech). *Si consideri un insieme di punti V in \mathbb{R}^n .*

Siano $B_u(r)$ delle palle chiuse di centro $u \in V$ e raggio r e \mathbf{S} la collezione di queste palle. Il complesso di Čech di V di raggio r è isomorfo al nervo di \mathbf{S} . Formalmente:

$$\check{C}ech(r) := \{\mathfrak{X} \subseteq \mathbf{S} \mid \bigcap_{B_u(r) \in \mathfrak{X}} B_u(r) \neq \emptyset\} = \{X \subseteq V \mid \bigcap_{u \in X} B_u(r) \neq \emptyset\}.$$

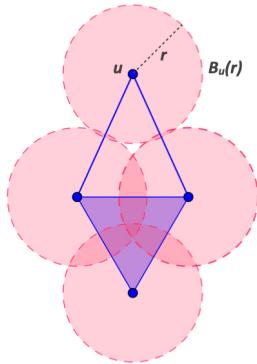


Figura 2.7: Esempio di complesso di Čech. Immagine tratta da [2].

Si osserva che all'aumentare del raggio, le palle crescono in dimensione e tendono a creare più sovrapposizioni, mantenendo però quelle già ottenute per i raggi minori. Dunque si ha che $\check{\text{C}}\text{ech}(r_0) \subseteq \check{\text{C}}\text{ech}(r)$ per $r_0 \leq r$.

Aumentando continuamente il raggio da 0 all'infinito, si ottiene una famiglia discreta di complessi di Čech annidati.

Siccome in generale costruire complessi di Čech risulta complicato, si introducono i complessi di Vietoris-Rips: un'approssimazione dei complessi di Čech.

Definizione 2.2.5 (Complesso di Vietoris-Rips). *Si consideri un insieme di punti V in \mathbb{R}^n . Siano $B_u(r)$ delle palle chiuse di centro $u \in V$ e raggio r e \mathbf{S} la collezione di tali palle. Il complesso di Vietoris-Rips di V di raggio r consiste di tutti i sottoinsiemi di \mathbf{S} di palle di diametro al più $2r$, cioè*

$$VR(r) := \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{S} \mid \text{diam } X \leq 2r \quad \forall X \in \mathbf{X}\} = \{X \subseteq V \mid d(u, v) \leq 2r \quad \forall u, v \in X\}.$$

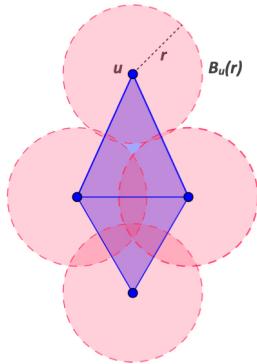


Figura 2.8: Esempio di complesso di Vietoris-Rips. Immagine tratta da [2].

Gli 1-simplessi ottenuti nel complesso di Vietoris-Rips sono gli stessi presenti nel complesso di Čech. Tuttavia nel caso del complesso di Vietoris-Rips si aggiungono simplessi di dimensione $n \geq 2$ quando garantiti dal $(n-1)$ -scheletro.

Perciò si ha che $\check{\text{C}}\text{ech}(r) \subseteq VR(r)$.

Si può inoltre provare l'inclusione inversa aumentando il raggio del complesso di Čech con una costante moltiplicativa.

Lemma 2.2.6. Sia V un insieme finito di punti in uno spazio euclideo e sia $r \geq 0$. Si ha che $VR(r) \subseteq \check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r)$.

Dimostrazione. Si consideri il simplesso standard Δ^d generato dalla base canonica in \mathbb{R}^{d+1} come in figura 2.9. Ogni spigolo di Δ^d ha lunghezza $\sqrt{2}$.

Per simmetria, la distanza dell'origine dal simplesso standard è la distanza dell'origine dal baricentro z le cui $d+1$ coordinate sono tutte uguali a $\frac{1}{d+1}$. La distanza perciò è pari a $\|z\| = \frac{1}{\sqrt{d+1}}$. Il baricentro è anche il centro della d -sfera circoscritta a Δ^d , perciò denotando con r_d il raggio di tale d -sfera si ha

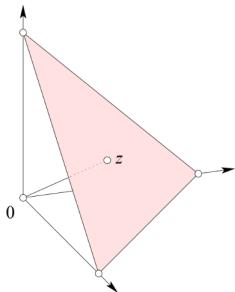


Figura 2.9:
Tratta da [1]

$$r_d^2 = 1 - \|z\|^2 = \frac{d}{d+1}.$$

In dimensione 1 si ha metà della lunghezza di un intervallo.

In dimensione 2 si ha il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero (di lato $\sqrt{2}$).

All'aumentare della dimensione, il raggio cresce tendendo a 1:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} r_d = 1.$$

In generale un qualsiasi insieme di $d+1$ punti (o meno) per il quale la d -sfera di raggio r_d sia la più piccola sfera contenente quei punti (cioè la d -sfera circoscritta per $d \geq 2$) presenta una coppia di punti a distanza di $\sqrt{2}$ o maggiore. Ne deriva che ogni simplesso di diametro $\sqrt{2}$ o meno appartenga a $\check{\text{Cech}}(r_d)$.

Moltiplicando con $\sqrt{2}r$ si ottiene che $VR(r) \subseteq \check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r \cdot r_d)$.

Siccome $r_d \leq 1$ per ogni d , quest'ultimo è un sottocomplesso di $\check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r)$.

□

Osservazione 2.2.7. La seguente relazione mette in luce come il complesso di Vietoris-Rips sia un'approssimazione del complesso di $\check{\text{Cech}}$:

$$VR\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subseteq \check{\text{Cech}}(r) \subseteq VR(r).$$

Osservazione 2.2.8. Per gli scopi di questa tesi non risulta necessario dover fissare un parametro raggio per definire il complesso di Vietoris-Rips siccome l'omologia persistente mediante il concetto di filtrazione presenta il vantaggio di considerarli tutti.

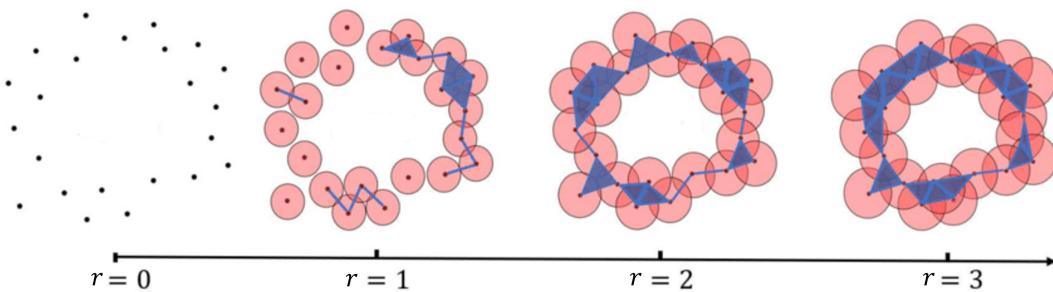


Figura 2.10: Esempio di filtrazione data dai complessi di Vietoris-Rips.

Capitolo 3

Caso Studio: Riconoscimento di Crepe

Negli ultimi anni, l’omologia persistente e l’analisi topologica dei dati sono diventate tecniche sempre più diffuse nel campo dell’analisi dei dati e del machine learning. Una delle applicazioni più interessanti di queste tecniche è la classificazione di immagini attraverso lo studio delle loro proprietà topologiche, in questo caso studio il numero di fori. In questo capitolo, si esplora una possibile applicazione dell’omologia persistente alla classificazione binaria di immagini di superfici crepate e non crepate. Si mostra come questa tecnica possa essere utilizzata per ottenere risultati migliori rispetto ai tradizionali metodi di classificazione in ambito di machine learning, come macchina a supporto vettoriale e foresta casuale. Inoltre, si discutono i vantaggi e le sfide di questo innovativo approccio topologico.

Il presente capitolo è organizzato come segue:

In Sezione 3.1, si presenta brevemente l’insieme di dati, oggetto di studio.

In Sezione 3.2, si introduce il metodo di classificazione e si mostrano le diverse tecniche che si possono utilizzare per elaborare al meglio l’immagine, in maniera da facilitarne l’individuazione delle classi.

In Sottosezione 3.2.1, si confrontano i diversi possibili modi di binarizzare un’immagine.

In Sottosezione 3.2.2, si esaminano i diagrammi di persistenza ottenuti.

In Sottosezione 3.2.3, si mostrano gli eventuali errori di classificazione.

In Sottosezione 3.2.4, si illustrano esempi di falsi positivi e falsi negativi, a supporto dei risultati mostrati in precedenza.

In Sezione 3.3, si confrontano i risultati numerici calcolati dall’analisi topologica con i risultati ottenuti dalle tecniche di classificazione del machine learning, confermando la nostra ipotesi.

3.1 Dataset in esame

In ambito edilizio, le crepe sono indicatori critici di danno strutturale e sono perciò una delle principali preoccupazioni per garantire la sicurezza, la durata e la funzionalità delle strutture. Ispezionare visivamente gli elementi dell'edificio e saperne riconoscere il buono stato è fondamentale. Per motivi di efficienza in termini di tempo è bene introdurre un sistema di classificazione, che a partire da immagini di superfici casuali è in grado di riconoscere e discriminare autonomamente quali di esse presentano delle crepe.

Il dataset preso in riferimento, a cura di [6], comprende 40.000 immagini di superfici, di cui rispettivamente 20.000 presentano crepe (contenute nella cartella “Positive”) e 20.000 invece no (contenute nella cartella “Negative”). Le immagini sono costituite da 227x227 pixel con canali RGB e presentano variazioni in termini di finitura superficiale o condizione di illuminazione.

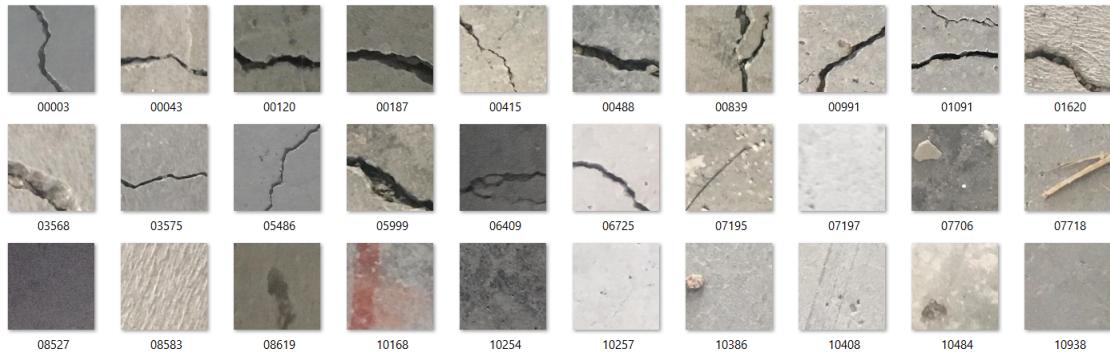


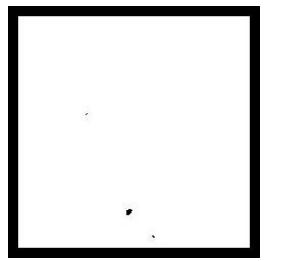
Figura 3.1: Raffigurazione d'esempio di alcuni campioni del dataset.

Per motivi prettamente pratici si considerano solamente 2500 immagini per ciascun tipo, ognuna ridimensionata a 50x50 pixel.

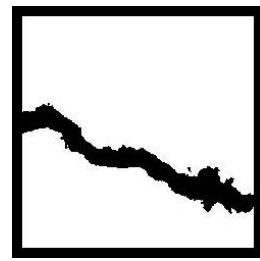
3.2 Elaborazione delle immagini e classificazione

L'obiettivo è quello di riuscire a distinguere, attraverso l'omologia persistente, le immagini che non presentano crepe da quelle che invece le presentano. Occorre dunque definire il dataset su cui andare a calcolare il complesso di Vietoris-Rips e, per semplificare il lavoro, si ricorre ad una binarizzazione dell'immagine così che si tengano in considerazione solamente i punti dati dai pixel neri.

Una volta ottenuta l'immagine binarizzata, viene aggiunto un bordo nero all'immagine per valorizzare la forma che assume la distribuzione di punti. Risulta infatti evidente che, dopo averne determinato il complesso di Vietoris-Rips e calcolato l'omologia persistente, si presenteranno almeno due 1-cicli persistenti nel caso di immagini raffiguranti superfici positive (figura 3.2b) mentre ve ne sarà al più uno nel caso di superfici negative (figura 3.2a).



(a) Superficie negativa.



(b) Superficie positiva.

Figura 3.2: Esempio di binarizzazione e aggiunta di bordo.

3.2.1 Binarizzazione

Le superfici spesso sono caratterizzate da basso contrasto e illuminazione irregolare: ciò può arrecare un forte disturbo in termini di binarizzazione. Sono stati sperimentati diversi approcci, visualizzabili in figura 3.3 e figura 3.4.

I primi due metodi utilizzati prevedono come soglia un valore numerico tra 0 e 255 fissato a priori. La scelta è ricaduta inizialmente su 128. Se il pixel presenta un'intensità di grigio superiore a 128, gli viene assegnato il valore 255 (nero), altrimenti 0 (bianco). Tuttavia, notando una prevalenza di immagini con scarsa illuminazione, si sono riscontrati risultati decisamente migliori con la scelta di una soglia a 110. Non è stato possibile considerare valori di soglia inferiori poiché immagini con crepe appena accennate sarebbero risultate negative. Tra l'avere dei falsi negativi e dei falsi positivi, sono sempre preferibili quest'ultimi.

Il terzo e quarto metodo invece prevedono come soglia una media ottenuta dai valori dei pixel. Inizialmente si è considerata l'idea di calcolare una media globale di tutti i valori dei pixel e utilizzarla come soglia. Se il pixel presenta un'intensità di grigio superiore alla media ottenuta, gli viene assegnato il valore 255 (nero), altrimenti 0 (bianco). In secondo luogo, si è calcolata per ogni pixel una media data da un intorno locale (10x10 in questo caso). Per i pixel dell'intorno non appartenenti all'immagine originale si è considerato un valore di default pari a zero.

Si osservi che l'ultimo metodo utilizzato ha mostrato grande accuratezza nell'individuazione delle crepe, ma a costo di “sporcare” l'immagine laddove la superficie non ne presentava. Questi punti potrebbero in certi casi produrre rumore e creare problemi con la costruzione del complesso di Vietoris-Rips e conseguentemente con la nostra strategia di classificazione. Come si evidenzia in seguito nella figura 3.11, una classificazione con questo tipo di binarizzazione produce un errore pari circa al 13% contro il 3% ottenuto con una binarizzazione a soglia 110.

Questa tecnica potrebbe comunque risultare accettabile a seconda del dataset. Nel caso studio in esame si è scelto di operare con la binarizzazione con soglia a 110 siccome la quantità di immagini mal binarizzate in questo modo risulta comunque trascurabile sul totale.

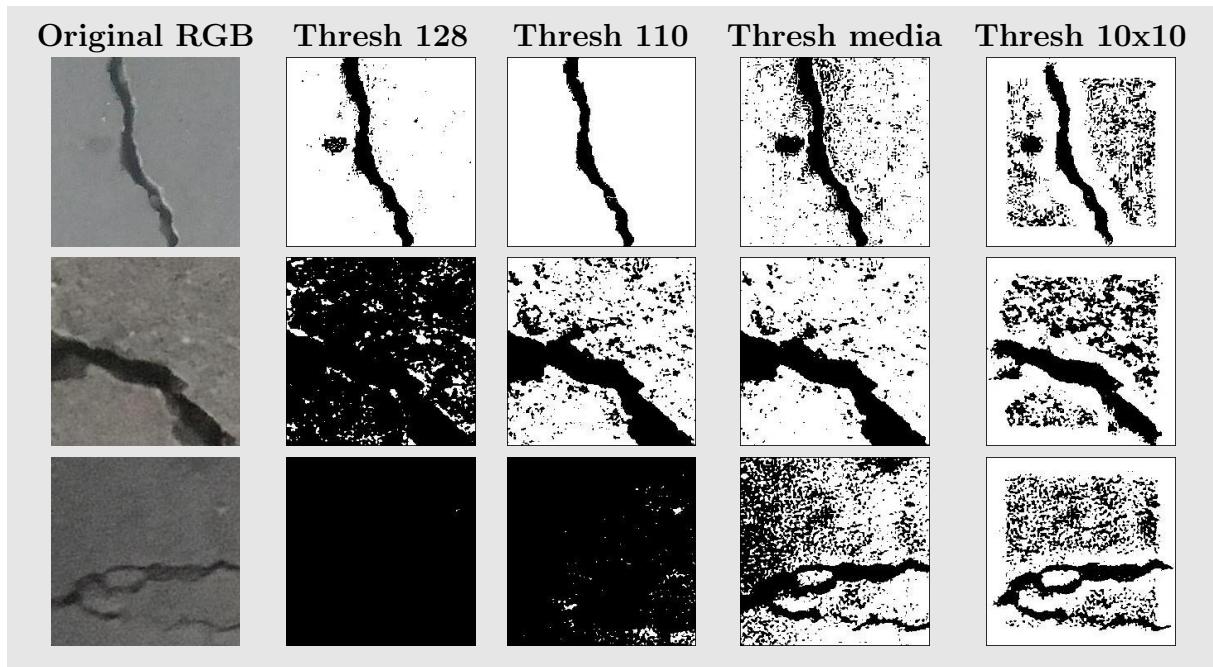


Figura 3.3: Confronto delle diverse binarizzazioni per superfici crepate di vario tipo.

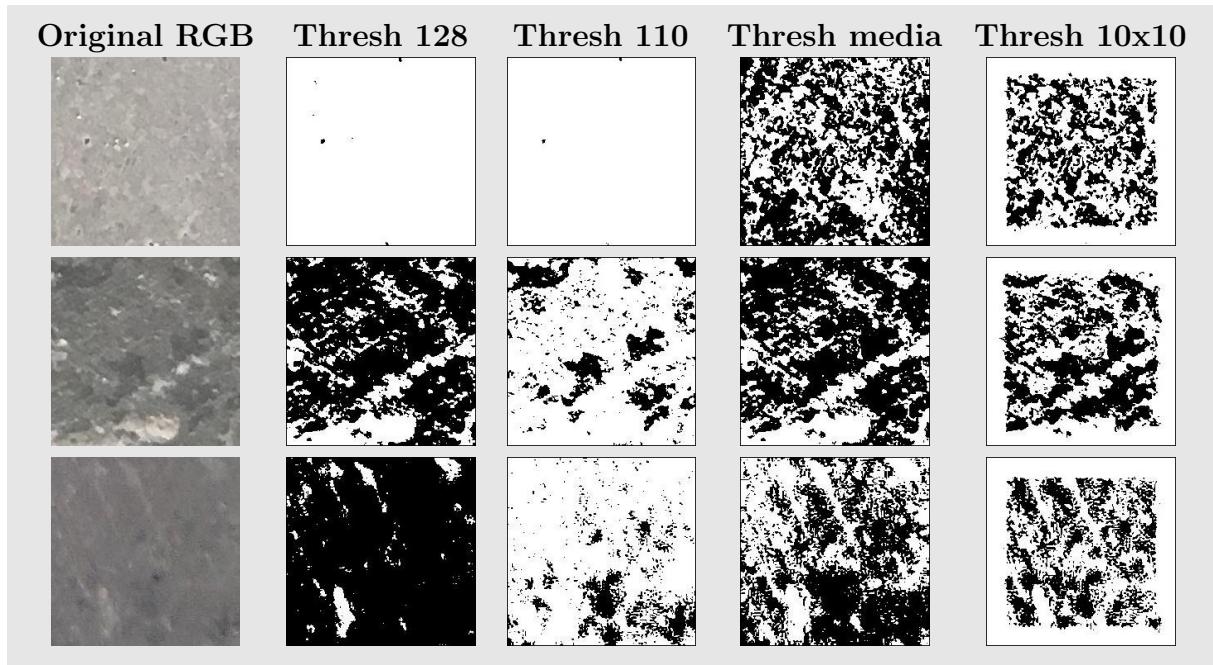


Figura 3.4: Confronto delle diverse binarizzazioni per superfici non crepate di vario tipo.

Osservazione 3.2.1 (Bordo). *La dimensione del bordo non è influente nel calcolo dell'omologia persistente e della classificazione utilizzata, purché ve ne sia uno. Per questo motivo si utilizza un bordo di un solo pixel per lato per aspetti puramente pratici e computazionali.*

3.2.2 Diagrammi di persistenza e classificazione

Una volta ottenute le immagini binarizzate, è dunque possibile costruire il complesso di Vietoris-Rips associato all'insieme dei pixel neri e calcolarne l'omologia persistente. L'algoritmo python “Ripser” utilizzato determina automaticamente il complesso simpliciale associato a una nuvola di punti e ne calcola l'omologia persistente. Il risultato che si ottiene è un diagramma di persistenza e nelle figure 3.5 e 3.6 è possibile osservarne degli esempi. Il risultato è quello aspettato: vi è al più un solo 1-ciclo che persiste per immagini di superfici non crepe.

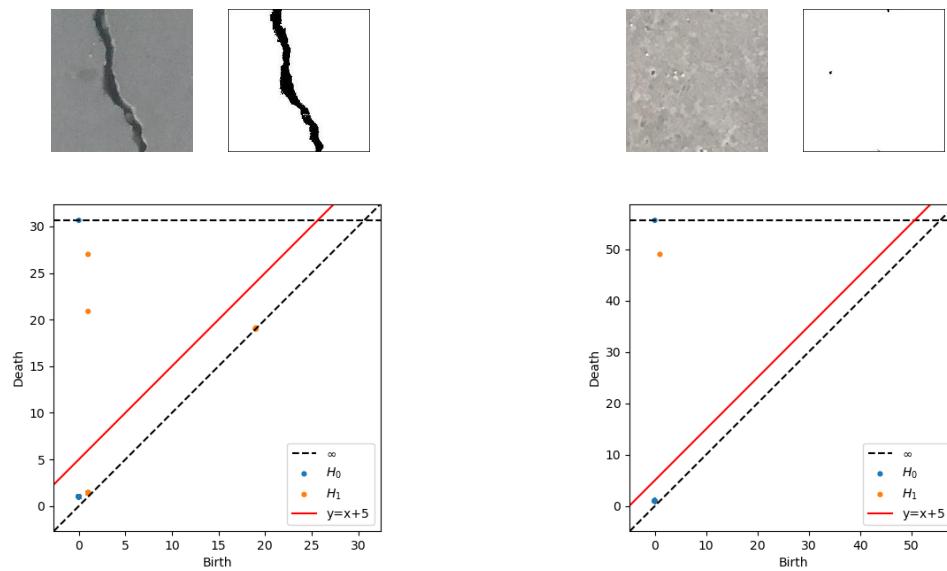


Figura 3.5: Confronto tra i diagrammi di persistenza di superfici con e senza crepe.

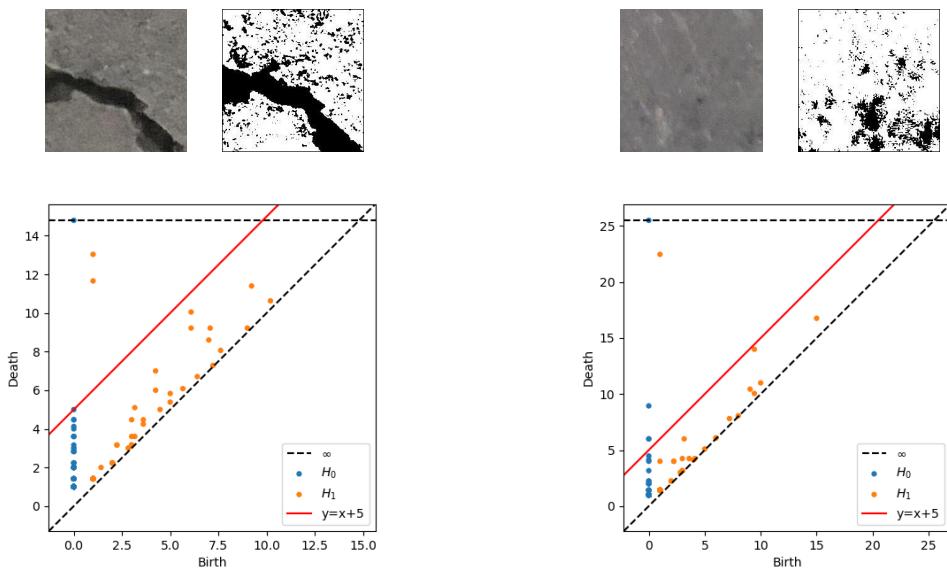


Figura 3.6: Confronto tra i diagrammi di persistenza di superfici con e senza crepe.

La retta $y = x + 5$ tracciata in rosso rappresenta il classificatore che si è deciso di utilizzare ed evidenzia i primi gruppi di omologia la cui persistenza (definita come differenza tra l'istante di morte e l'istante di nascita) è maggiore o uguale a 5. Se il numero di 1-cicli con questa caratteristica è superiore a due, si può dedurre l'immagine presenta una crepa.

Osservazione 3.2.2 (Scelta del parametro e altre tecniche di classificazione). *Il valore 5, utilizzato come soglia di classificazione, è stato scelto euristicamente osservando un campione di addestramento prestabilito di 2500 immagini per tipologia, ciascuna di dimensione 50x50. In particolare, si è considerata un'immagine ogni otto dal dataset iniziale di 20000 immagini. In seguito, con una sorta di convalidazione incrociata, questo classificatore ed un altro con soglia a 1 sono testati su altri campioni costituiti da 2500 immagini casuali che non comprendessero quelle utilizzate in addestramento. Il risultato è soddisfacente in entrambi i casi, ma presenta una miglior accuratezza il classificatore con valore 1, come emerge in figura 3.8 ed in figura 3.10.*

Si sottolinea inoltre che questa strategia di classificazione utilizzata funziona bene per la semplicità di questo problema ma un approccio di classificazione più generico ed efficace prevede la definizione di distanza tra diagrammi di persistenza (generalmente si utilizza la distanza di Bottleneck) e il conseguente studio dei diagrammi ottenuti al fine di assegnare una classe: se due immagini sono simili producono diagrammi di persistenza simili. Conseguentemente, per diagrammi di persistenza diversi si possono definire classi diverse. Per una trattazione approfondita si rimanda al capitolo 8 di [1].

3.2.3 Matrici di confusione

Dopo aver determinato le diverse coppie di persistenza, si assegna ad ogni immagine una sua etichetta di predizione (positiva o negativa) basata sulla soglia di classificazione scelta. Inoltre, sono note le etichette reali poiché le immagini del dataset sono contenute distintamente nelle rispettive cartelle (positive o negative). Si può quindi creare una matrice di confusione, capace di confrontare i valori predetti con i valori reali e di restituire una rappresentazione dell'accuratezza di classificazione.

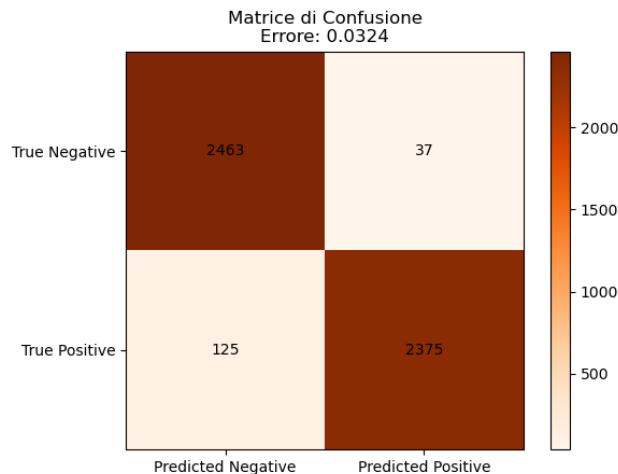


Figura 3.7: Matrice di confusione con soglia di binarizzazione a 110 e soglia di persistenza a 5. Dati d'addestramento.

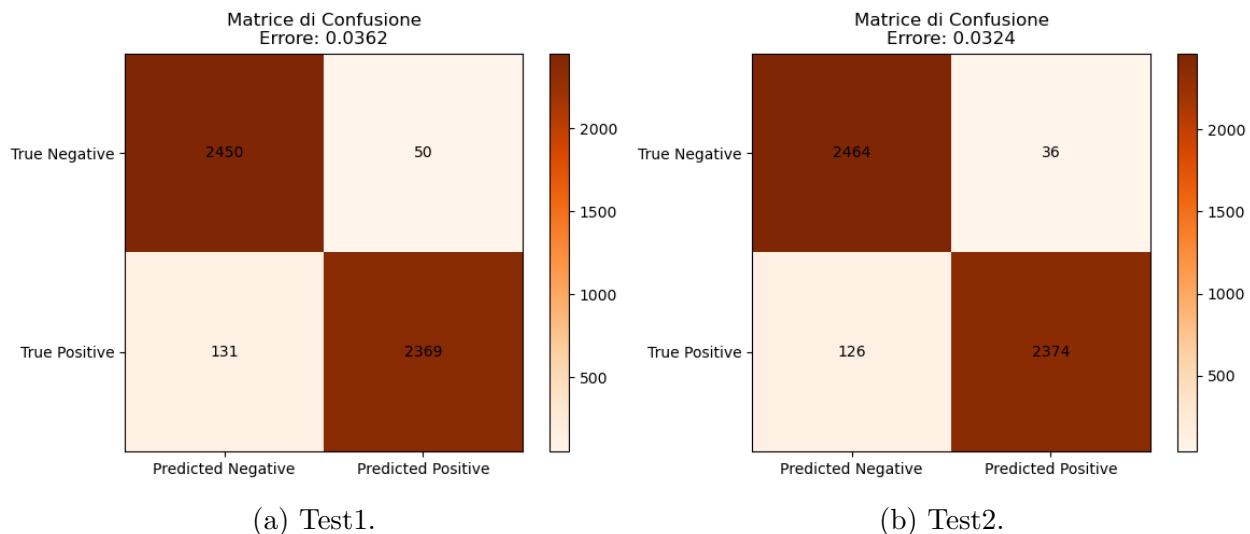


Figura 3.8: Matrici di confusione con soglia di binarizzazione a 110 e soglia di persistenza a 5.

Dalle matrici è possibile determinare un errore di classificazione come $\epsilon = \frac{f_p + f_n}{tot}$, dove f_p e f_n sono rispettivamente i falsi positivi e i falsi negativi mentre tot è il numero di campioni totali considerati (dunque 5000). Si osserva che i risultati sono ottimi, con un errore di classificazione pari circa al 3%.

Tuttavia il numero di falsi negativi appare un po' troppo elevato. Nella pratica la mancata identificazione di superfici crepate può comportare un problema, ed è per questo che, a costo di un possibile aumento dell'errore, si è deciso di provare ad abbassare la soglia di classificazione da 5 a 1. Infatti in situazioni reali è preferibile invece avere un numero di falsi positivi maggiore arrivando a classificare superfici senza crepe come superfici potenzialmente crepate, che verranno eventualmente sottoposte a controlli.

Il risultato è sorprendente: non solo si è ottenuto un numero di falsi positivi superiore rispetto ai falsi negativi, ma in generale l'errore di classificazione totale risulta essere diminuito.

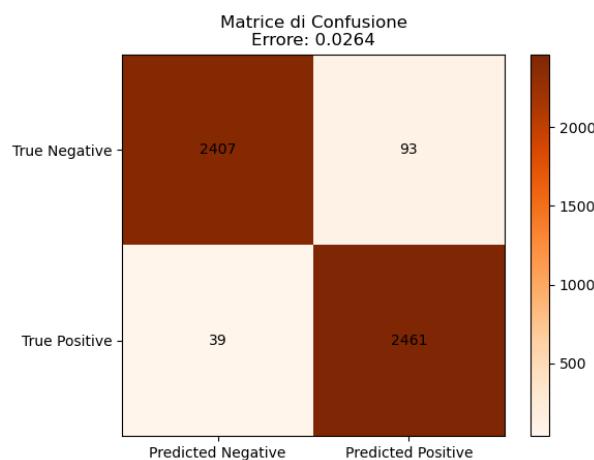


Figura 3.9: Matrice di confusione con soglia di binarizzazione a 110 e soglia di persistenza a 1. Dati d'addestramento.

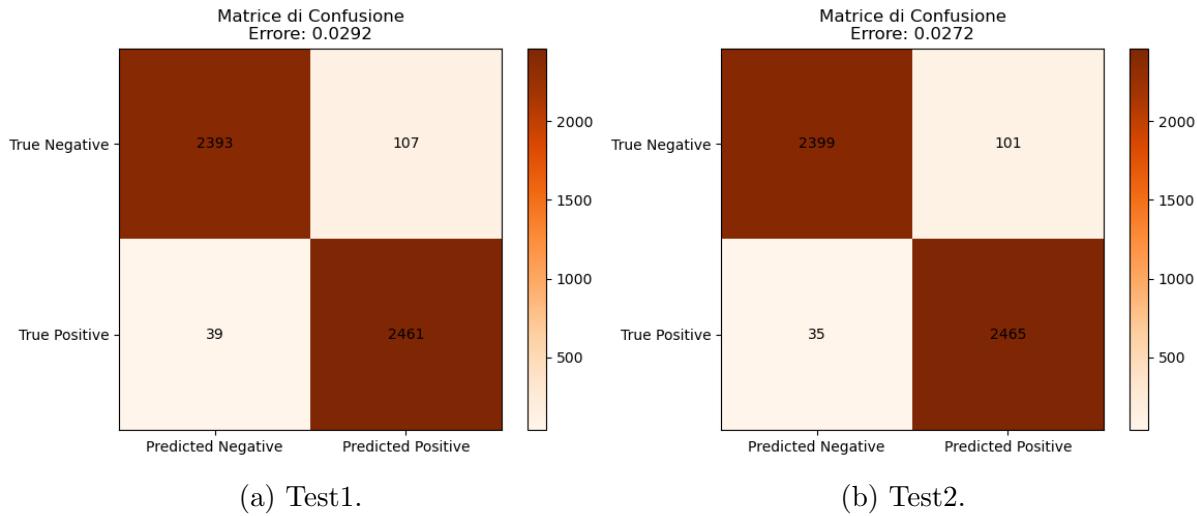


Figura 3.10: Matrici di confusione con soglia di binarizzazione a 110 e soglia di persistenza a 1.

Per curiosità si riporta inoltre una matrice di confusione ottenuta sullo stesso insieme di addestramento ma sul quale è stata effettuata una binarizzazione con soglia data dalla media di un intorno 10x10. Come scelta del parametro di persistenza si è deciso di considerare 5.

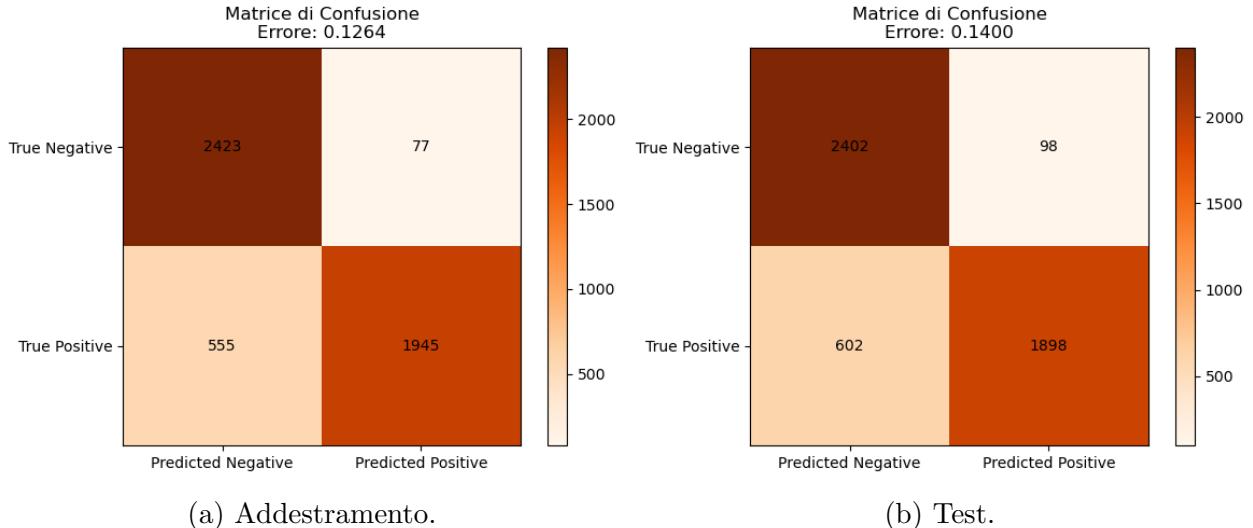


Figura 3.11: Matrici di confusione con soglia di binarizzazione la media di un intorno 10x10 e soglia di persistenza a 5.

L'errore di classificazione appare leggermente più alto, come da aspettativa, ma comunque piuttosto accettabile (non si discosta di molto dall'errore ottenuto con SVM, in figura 3.14a). Si osservi però che il numero di falsi negativi risulta esageratamente alto, per contrastare il problema sarebbe possibile provare ad utilizzare delle soglie di classificazione minori.

3.2.4 Falsi positivi e falsi negativi

Si prendano in esame alcuni esempi di falsi positivi e falsi negativi, come in figura 3.13.

Falsi negativi

Per quel che riguarda i falsi negativi si possono osservare almeno due tipi di problemi: il primo consiste in un problema di binarizzazione, come emerge dal primo e dal secondo caso in esempio. Infatti, nella prima immagine positiva la crepa risulta troppo sottile e poco profonda non venendo dunque rappresentata con la soglia di binarizzazione scelta. D'altra parte, nella seconda immagine, a causa di un'illuminazione poco presente l'immagine binarizzata appare completamente oscurata. In quest'ultimo caso in particolare si osserva che non è possibile la formazione di neanche un foro che sia persistente sufficientemente a lungo.

Infine dal terzo esempio di superficie positiva è possibile osservare che, sebbene la crepa risulti ben visibile nell'immagine binarizzata, il diagramma di persistenza riporta un solo 1-ciclo persistente. Il motivo deriva probabilmente dalla posizione della crepa: trovandosi infatti in prossimità del bordo, la costruzione del complesso di Vietoris-Rips tende a far morire quasi istantaneamente il buco soggiacente alla crepa. In figura 3.12a si schematizza questo concetto, derivato dalla definizione di complesso di Vietoris-Rips, facendo riferimento all'ultima immagine binarizzata di superfici positive in figura 3.13.

Falsi positivi

Per quel che riguarda i falsi positivi, risulta evidente che l'errore di classificazione sia causato dalla presenza corpi estranei alla superficie stessa (quali pietre, bastoncini, macchie anomale). Tuttavia talvolta ci si imbatte in un'errata classificazione anche per le immagini la cui binarizzazione si presenta ricca di punti sparsi. Una tale distribuzione dei punti può infatti, con la formazione del complesso di Vietoris-Rips, favorire la nascita e la persistenza di fori. In figura 3.12b viene schematizzato questo concetto, derivato dalla definizione di complesso di Vietoris-Rips, facendo riferimento all'ultima immagine binarizzata di superfici negative in figura 3.13.



(a) Superficie crepata risultata falso negativo. (b) Superficie non crepata risultata falso positivo.

Figura 3.12: Rappresentazione esemplificativa della costruzione del complesso di Vietoris-Rips di un'immagine non crepata.

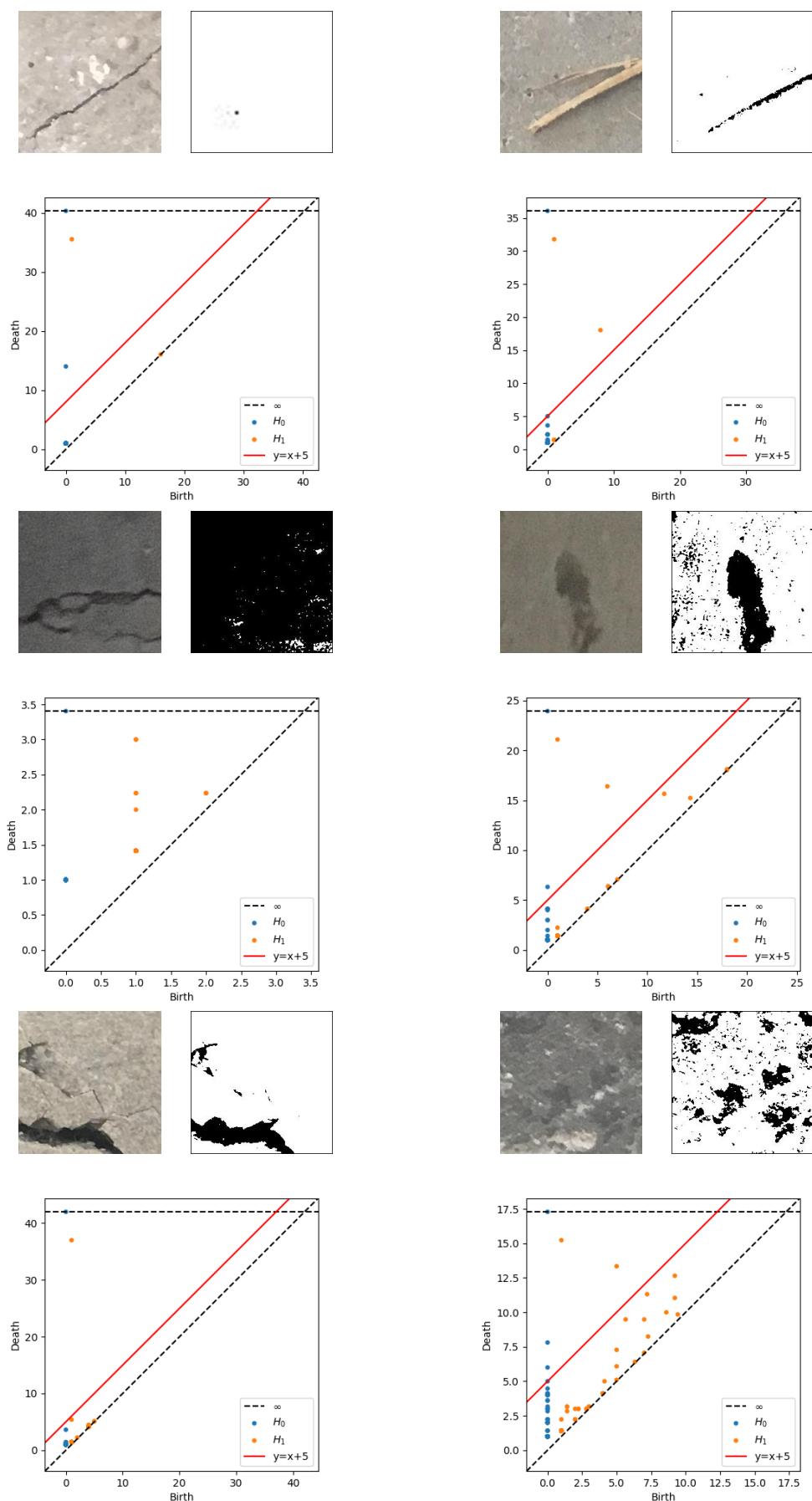


Figura 3.13: Confronto tra i diagrammi di persistenza di superfici con e senza crepe.

3.3 Studio comparativo basato su un approccio di machine learning

Lo stesso dataset si è studiato con le tecniche di classificazione più note nel mondo del machine learning. In particolare, i due metodi di classificazione utilizzati sono:

- (a) Macchina a supporto vettoriale (il cui acronimo è SVM, Support Vector Machine).
L'algoritmo è un classificatore lineare che individua l'iperpiano che separa due classi con il massimo margine.
- (b) Foresta casuale, ottenuta dall'aggregazione di 100 alberi decisionali.
L'albero di decisione rappresenta il modo più semplice di definire una partizione dell'insieme di dati in due classi. Le due classi si ottengono attraverso passi successivi in cui l'insieme viene suddiviso in sottoinsiemi sempre più omogenei rispetto alla etichetta di classe positiva o negativa.
L'operazione utilizzata fa uso per default del metodo “Classification and Regression Tree” (CART), una procedura di ricerca della suddivisione binaria ottimale in base al massimo guadagno informativo secondo l'indice di Gini, ed un criterio di potatura basato sul compromesso tra errore di classificazione e numero di foglie.

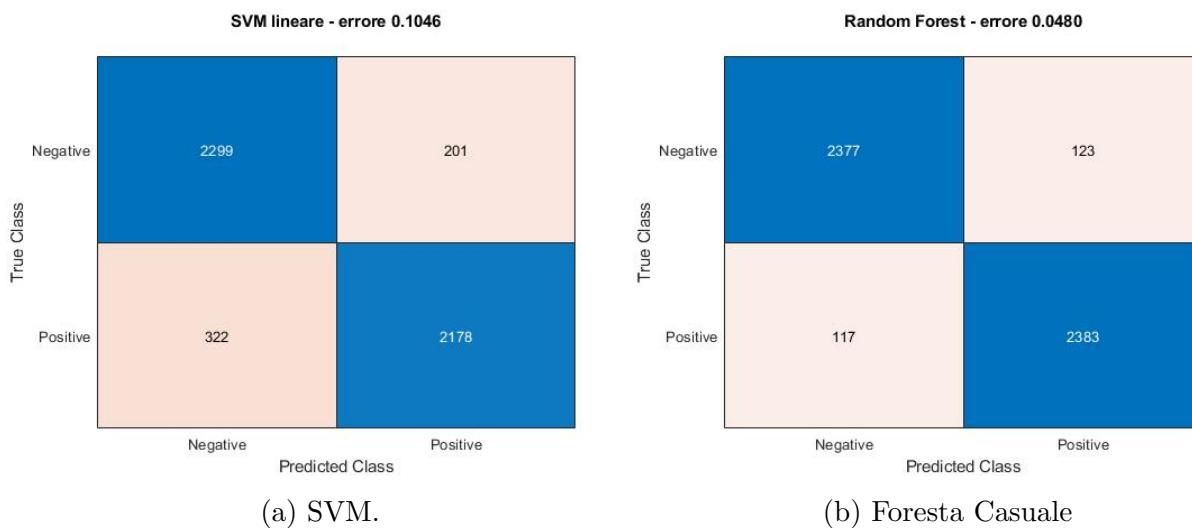


Figura 3.14: Matrici di confusione relative alle tecniche tradizionali di machine learning.

Come si può notare confrontando la figura 3.14 con le matrici di confusione esaminate in precedenza, l'approccio con l'omologia persistente produce errori di classificazione significativamente migliori di quelli ottenuti con i classificatori lineari SVM o foreste casuali. Questi risultati evidenziano il potenziale dell'omologia persistente come tecnica complementare al machine learning e suggeriscono che la combinazione di questi due approcci potrebbe portare in futuro a sistemi di classificazione ancora più potenti e accurati.

Conclusione

La presente tesi ha esplorato l'efficacia dell'omologia persistente come strumento innovativo per l'analisi di dati, studiandone fondamenti teorici e vantaggi o limiti nell'utilizzo. In questa conclusione, vorrei ripercorrere brevemente i principali risultati della mia ricerca e sottolineare l'importanza di alcuni di essi.

Come primo risultato, lo studio delle teoria omologica alla base dell'omologia persistente ha dimostrato l'equivalenza tra l'omologia simpliciale e l'omologia singolare per i complessi simpliciali. Questo risultato è particolarmente significativo, in quanto l'omologia singolare richiede l'ipotesi della sola continuità sulle funzioni e non dipende dall'orientamento dei simplessi, rendendola una teoria più accessibile rispetto all'omologia simpliciale. L'utilizzo dell'omologia persistente può quindi essere esteso anche a spazi topologici dove non è possibile definire una struttura di Δ -complesso o di complesso simpliciale.

Nel corso della mia ricerca, ho mostrato come questa l'omologia persistente potesse essere messa in pratica, rispondendo alla necessità evidenziata in introduzione: quella di inferire strutture globali da dati che sono relativamente localizzati. A tal fine, sono stati definiti i complessi di Vietoris-Rips, attraverso i quali si conferisce una struttura geometrica ad insiemi di punti che apparentemente sembrano non averne una. Inoltre la risoluzione a tale problema ha evidenziato i numerosi vantaggi che questo metodo topologico è in grado di offrire. Molti algoritmi per l'analisi dei dati, richiedono l'impostazione di diversi parametri. Senza una precedente conoscenza del dominio, è difficile scegliere la corretta collezione di parametri per un insieme di dati. La principale intuizione dell'omologia persistente consiste nell'utilizzare le informazioni ottenute da tutti i valori dei parametri, codificando questa enorme quantità di informazioni in una forma comprensibile e facile da rappresentare. In questo modo, l'omologia persistente fornisce un potente strumento per l'analisi dei dati, in grado di cogliere e rappresentare le informazioni topologiche sottostanti i dati stessi, senza la necessità di selezionare in modo arbitrario i parametri dell'algoritmo.

In secondo luogo, attraverso la costruzione di complessi simpliciali, l'omologia persistente è in grado di far fronte alla complessità dei dati, consentendo di identificare rapidamente le strutture geometriche sottostanti e di rappresentarle in modo comprensibile. In questo modo risulta semplificato anche riconoscere i pattern topologici dei dati, distinguendo tra informazioni significative e rumore.

Questo studio ha dimostrato come questo approccio possa essere applicato con successo alla classificazione binaria di immagini di superfici crepate, ottenendo risultati notevolmente migliori rispetto ai metodi classici della letteratura dell'informatica per quanto riguarda problemi di classificazione binaria tramite machine learning supervisionato. Questi risultati confermano l'importanza dell'omologia persistente come strumento di analisi efficace, con

ampie potenzialità di applicazione in diversi campi disciplinari.

Tuttavia, è importante tenere presente che questa teoria presenta anche delle limitazioni: l'omologia persistente richiede un elevato grado di calcolo, specialmente quando si lavora con grandi dataset, comportando tempi di elaborazione computazionale troppo lunghi. Inoltre, è importante sottolineare che l'omologia persistente dipende dalla scelta di una filtrazione, e la selezione di una buona filtrazione può essere un compito non banale, che richiede una certa conoscenza del dominio di riferimento e può influenzare i risultati finali. Infine, l'interpretazione dei risultati può rappresentare un'altra difficoltà, in quanto i diagrammi di persistenza possono essere complessi e richiedere una certa esperienza per essere interpretati correttamente.

Queste limitazioni devono quindi essere prese in considerazione quando si utilizza l'omologia persistente per l'analisi dei dati topologici, e dovrebbero essere affrontate mediante tecniche appropriate per garantire l'affidabilità dei risultati ottenuti. In particolare, una possibile prospettiva è l'utilizzo della collaborazione tra il machine learning e l'omologia persistente. Infatti è interessante notare che l'omologia persistente e il machine learning sono due campi di ricerca in rapida evoluzione con enorme potenziale per produrre risultati significativi nell'analisi dei dati ed una maggiore integrazione di queste due tecniche potrebbe portare a risultati ancora più promettenti.

Codice

Reperibile al link: <https://github.com/AndyDiVi/Persistent-Homology-for-Surface-Cracks>.
Per il calcolo dell'omologia persistente si utilizza il pacchetto Ripser, riferimento a [7].

```
1 #Pacchetti base
2 import numpy as np
3 from numpy import asarray
4 from PIL import Image
5 import os, random
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 #Omologia persistente
9 from ripser import ripser
10 from persim import plot_diagrams
11
12 #Matrice di confusione
13 from sklearn.metrics import confusion_matrix
14
15
```

```
1
2 def ProcessImages(image_directory, process_every_n, thresh=110,
3 padding_size=0, new_size=None, persistence):
4
5     # Ciclo su ogni elemento della directory in input
6     for i, filename in enumerate(os.listdir(image_directory)):
7         # Verifico che l'elemento sia l'immagine corretta
8         if filename.endswith(".jpg") and (i % process_every_n == 0):
9
10             #Apro l'immagine usando PIL e converto in scala di grigi
11             img = Image.open(os.path.join(image_directory, filename))
12             img = img.convert('L')
13
14             #Faccio un resize dell'immagine se richiesto in input
15             if new_size:
16                 img = img.resize(new_size)
```

```

1
2                                #BINARIZZAZIONE
3
4 #Binarizzo l'immagine secondo il valore di threshold in input
5 #I pixel assumono valore da 0 (neri) a 255 (bianchi)
6 binary_img = Image.new('L', img.size)
7
8 #Ciclo sulle righe e sulle colonne
9 for i in range(img.size[0]):
10    for j in range(img.size[1]):
11        #Se il pixel ha valore inferiore a thresh gli assegno valore 0
12        #Se il pixel ha valore superiore a thresh gli assegno valore 255
13        if img.getpixel((i, j)) < thresh:
14            binary_img.putpixel((i, j), 0)
15        else:
16            binary_img.putpixel((i, j), 255)
17
18 #Salvo l'immagine binarizzata nella rispettiva cartella
19 img = binary_img
20 binary_img.save(os.path.join(binarized_directory, "binarized_" + filename))

```

```

1
2                                #AGGIUNTA DI UN BORDO
3
4 #Aggiungo un bordo se richiesto in input
5 if padding_size > 0:
6
7     #Size attuale dell'immagine binarizzata
8     width, height = binary_img.size
9
10    #Creo una nuova immagine nera (solo pixels 0) con size desiderata
11    pad_img = Image.new('L',(width+2*padding_size, height+2*padding_size),0)
12
13    #In collo l'immagine originale sulla nuova immagine creata
14    for i in range(width):
15        for j in range(height):
16            pixel = img.getpixel((i, j))
17            pad_img.putpixel((i + padding_size, j + padding_size), pixel)
18
19    #Salvo l'immagine con bordo nella rispettiva cartella
20    img = pad_img
21    img.save(os.path.join(padded_directory, "padded_" + filename))

```

```
1                                     #OMOLOGIA PERSISTENTE
2
3     #Memorizzo i pixels dell'immagine in una lista.
4     #Ciclo su ogni pixel e memorizzo gli indici i,j dei punti di valore 0 (nero)
5     #Sarà il dataset di cui vogliamo determinare l'omologia persistente
6     points = []
7     for i in range(img.size[0]):
8         for j in range(img.size[1]):
9             if img.getpixel((i, j)) == 0:
10                 points.append((i, j))
11
12     points = np.array(points) #ripser non prende liste ma array
13     #Trovo le coppie di persistenza fermandomi a dimensione 1
14     pers_pairs = ripser(points, maxdim=1)[‘dgms’]
15
```

```
1                                     #CRITERIO DISCRIMINATORIO PER CLASSIFICAZIONE
2
3     #Inizializzo la variabile "contatore"
4     num_holes = 0
5     #Considero solo il primo gruppo di omologia persistente
6     pers_pairs_1 = pers_pairs[1]
7
8     for i in range(pers_pairs_1.shape[0]):
9         #Determino la differenza tra morte e vita di ogni elemento
10        diff = pers_pairs_1[i][1] - pers_pairs_1[i][0]
11        #Se la differenza è maggiore della soglia di persistenza in input
12        #aumento il contatore per tenere il conto del numero di H1
13        #che presentano lunga persistenza
14        if diff > persistence:
15            num_holes += 1
16
17                                     #GRAFICI DIAGRAMMI DI PERSISTENZA
18
19     plot_diagrams(pers_pairs, show=False)
20     #Aggiungo la retta y=x+persistence per evidenziare meglio la classificazione
21     x = np.linspace(-10, max(points.max(0))+10, 100)
22     y = x+persistence
23     plt.plot(x, y, c='red', label='y=x'+ str(persistence))
24
25     plt.legend()
26     plt.savefig(os.path.join(diagram_directory, f'{filename.split('.')[0]}.png'))
27     plt.clf()
28
```

```

1
2                     #CLASSIFICAZIONE
3
4             #Assegno le etichette reali
5             #Se l'immagine è nella cartella "Positive" assegno valore 1
6             true_label = 1 if "Positive" in image_directory else 0
7             true_labels.append(true_label)
8
9             #Assegno le etichette predette
10            #Se presenta almeno 2 gruppi H1 di lunga persistenza, almeno due buchi persistenti
11            #predico ci sia una crepa e assegno 1
12            predicted_label = 1 if num_holes >= 2 else 0
13            predicted_labels.append(predicted_label)
14
15            #Stampo il nome delle immagini che sono falsi negativi/positivi
16            if "Positive" in image_directory and num_holes < 2:
17                print(f"{filename} è un falso negativo")
18            if "Negative" in image_directory and num_holes >= 2:
19                print(f"{filename} è un falso positivo")
20
21        return true_labels, predicted_labels

```

```

1
2     #Definisco gli array con tutte le etichette reali e predette
3     total_true_labels=[]
4     total_predicted_labels=[]
5
6             #POSITIVE
7             #Chiamo la funzione ProcessImages con la cartella delle crepe
8             positive_true_labels, positive_predicted_labels =
9             ProcessImages(positive_img_dir, process_every_n, thresh, padding_size, new_size, persistence)
10
11            #Aggiungo agli array inizializzati precedentemente i valori appena ottenuti
12            total_true_labels.extend(positive_true_labels)
13            total_predicted_labels.extend(positive_predicted_labels)
14
15             #NEGATIVE
16             #Chiamo la funzione ProcessImages con la cartella delle non crepe
17             negative_true_labels, negative_predicted_labels =
18             ProcessImages(negative_img_dir, process_every_n, thresh, padding_size, new_size, persistence)
19
20            #Aggiungo agli array inizializzati precedentemente i valori appena ottenuti
21            total_true_labels.extend(negative_true_labels)
22            total_predicted_labels.extend(negative_predicted_labels)

```

```
23
24          #MATRICE DI CONFUSIONE
25 #Calcolo la matrice di confusione mettendo in input le etichette predette e reali
26 #Per tutte le immagini, positive e negative
27 cm = confusion_matrix(total_true_labels, total_predicted_labels)
28
29 #Estraggo dalla matrice di confusione il numero di veri e falsi positivi/negativi
30 true_pos = cm[1, 1]
31 true_neg = cm[0, 0]
32 false_pos = cm[0, 1]
33 false_neg = cm[1, 0]
34
35 #Calcolo l'errore sulle predizioni
36 error = (false_pos + false_neg) / (true_pos + true_neg + false_pos + false_neg)
37
38 #Stampo i risultati
39 print(cm)
40 print(error)
41
42          #RAPPRESENTAZIONE VISIVA MATRICE DI CONFUSIONE
43
44 fig, ax = plt.subplots()
45 im = ax.imshow(cm, cmap='Oranges')
46
47 #Imposto gli assi
48 ax.set_xticks(np.arange(len(cm)))
49 ax.set_yticks(np.arange(len(cm)))
50 ax.set_xticklabels(['Predicted Negative', 'Predicted Positive'])
51 ax.set_yticklabels(['True Negative', 'True Positive'])
52
53 #Aggiungo i valori alla matrice
54 for i in range(len(cm)):
55     for j in range(len(cm)):
56         text = ax.text(j, i, cm[i, j], ha='center', va='center', color='black')
57
58 #Imposto un titolo, aggiungo colorbar e salvo
59 ax.set_title(f'Matrice di Confusione\nErrore: {error:.4f}')
60 cbar = ax.figure.colorbar(im, ax=ax)
61 plt.savefig('confusion_matrix.jpg')
62 plt.show()
63
```


Bibliografia

- [1] Herbert Edelsbrunner e John Harer. *Computational Topology - an Introduction*. American Mathematical Society, 2010, p. 282. ISBN: 978-0-8218-4925-5.
- [2] Ulderico Fugacci. *Matematica Discreta*. Dipartimento di Matematica, UniGe. 2023. URL: <https://fugacci.github.io/home/PDF%20TDA/Matematica%20Discreta%20e%20Applicazioni%20-%20TDA%20-%20v6.pdf>.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002, pp. xii+544. ISBN: 0-521-79540-0.
- [4] William S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer Science & Business Media, 1991, pp. xvi+428. ISBN: 0-387-97430-X.
- [5] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984, pp. ix+454. ISBN: 0-201-04586-9.
- [6] Çağlar F. Özgenel. *Concrete Crack Images for Classification*. Mendeley Data. Ver. 2. 2019. DOI: [10.17632/5y9wdsg2zt.2](https://doi.org/10.17632/5y9wdsg2zt.2).
- [7] Christopher J. Tralie, Nathaniel Saul e Rann Bar-On. «Ripser.py: A Lean Persistent Homology Library for Python». In: *J. Open Source Softw.* 3.29 (2018), p. 925. DOI: [10.21105/JOSS.00925](https://doi.org/10.21105/JOSS.00925).

Ringraziamenti

Era il 27 settembre 2019. Ricordo bene quel giorno, dovevo sostenere l'esame orale di ALGA. Presi posto in aula 509, quarta fila, abbastanza vicino per riuscire ad ascoltare le domande poste ai candidati prima di me, sufficientemente lontano per sentirmi protetto dalla lavagna nera, come l'ansia che cresceva. Con andamento esponenziale aggiungerei. È normale, sebbene i professori si siano sempre mostrati rassicuranti e dai toni pacati. Ed è normale se si è sempre andati bene alle superiori e ora ci si sente crollare senza capire cosa sia cambiato. Ci si sente indietro con gli esami e si teme un altro insuccesso. Era l'ultimo appello della sessione prima del nuovo anno accademico, le lezioni erano già ricominciate, e in quell'aula non conoscevo nessuno (se non di vista) di quei pochi rimasti, ognuno divorato dalle proprie ansie. Finalmente mi sentii chiamare, era il mio turno, l'ultimo della giornata. Assieme al mio cognome venne chiamato anche quello di un ragazzo, evidentemente in paranoia come lo ero io. I miei pensieri erano altrove e non prestai attenzione a quale fosse il suo nome, ma in questo momento vorrei invece essermelo ricordato.

Scambiammo due parole, il minimo indispensabile per accordarci con quale professore iniziare l'orale, teoria o esercizi. Cominciò quindi realmente il mio esame. Avevo studiato a lungo e parola dopo parola, l'ansia cedeva il posto a una certa soddisfazione. Sfortunatamente, non si può dire lo stesso per quel ragazzo, esaminato alla lavagna a fianco. Non mi resi troppo conto della situazione fino a esame concluso, quando, tra un paio di sbuffi e un piccolo alterco con il docente, avvertii che qualcosa non andava. Ma senza darci troppo peso, lancio un ultimo sguardo alla lavagna: la dimostrazione del teorema spettrale, e abbandono l'aula. Superato il fine settimana, la notizia. E di spettrale non rimase nient'altro che il pensiero che avevo in testa.

Questa mia sofferta laurea triennale è una vittoria che dedico a lui, come ricordo dei veri valori della vita e come monito contro le pressioni sociali che possono portare a gesti estremi.

Ai professori

Un enorme ringraziamento va ai professori che hanno accettato di farmi da relatore. Ringrazio il prof. Penegini per la sua pazienza ai molteplici esami di geometria, spronandomi a non abbattermi e a migliorare il mio approccio allo studio. Ora, il prof. Penegini ha accettato di essere il mio relatore, un gesto che apprezzo enormemente. Ringrazio il prof. Fugacci per la sua immensa disponibilità e per l'attenzione e il supporto instancabili dimostrati durante lo svolgimento del mio lavoro, indispensabili per la buona riuscita della tesi. Ringrazio anche il prof. Conca per avermici messo in contatto, è stata un'enorme sorpresa per me scoprire l'opportunità di lavorare su un tema di mio profondo interesse con un esperto del suo calibro.

Agli amici

Un ringraziamento speciale va anche ai miei compagni di studi: Francesco, al mio fianco fin dal primo anno e sempre presente nelle situazioni più difficili, sia a livello personale che accademico; Davide, un compagno straordinario che ho conosciuto per pura coincidenza quando entrambi abbiamo scelto di trattare l'insolito tema delle geometrie non euclidee per le nostre tesine di maturità (quanta follia). Da allora, è stato sempre disponibile nel momento del bisogno, diventando una risorsa inestimabile nel mio percorso di studi.

Gli stessi ringraziamenti li faccio anche ai miei amici esterni al DIMA, in particolar modo a Virginia i cui contatti si erano persi per tutti gli anni del liceo ma che ora invece mi fornisce un enorme sostegno ad ogni esame. Il gelato al gusto bacio era buonissimo. Un grazie di cuore anche a Nick, che nonostante la distanza ha sempre saputo incoraggiarmi nei momenti di difficoltà e sfiducia. Credo in te che credi in me.

Tutti loro sono stati parte della mia crescita personale in questi anni e non li ringrazierò mai abbastanza.

Alla famiglia

Infine, ma non per importanza, un profondo ringraziamento va ai miei genitori e ai miei fratelli, per aver creduto in me. Senza di loro, nulla di tutto questo sarebbe stato possibile. In particolare grazie al mio gemello Roberto per i suoi consigli in ambito accademico e per avermi trasmesso la sua passione per l'intelligenza artificiale e i temi affini. Il nostro legame è fonte inesauribile di ispirazione e forza.

Un ringraziamento anche alla nonna “bionda” e ai miei altri nonni, che so vegliare sul mio cammino con affetto e orgoglio.

Infine, ringrazio tutti coloro che hanno contribuito, in qualsiasi modo, alla realizzazione di questo importante traguardo nella mia vita. Grazie.