Universidade Federal do Ceará - Departamento de Computação
Métodos Numéricos II – 2018.1   Professor Creto Augusto Vidal

Método das Diferenças Finitas para Problemas de Valores de Contorno

1. Problema de Valores de Contorno

$$\begin{cases} -2\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = e^{-0.1x} \\ \textbf{C. C.}: \begin{cases} y(0) = 1 \\ \dfrac{dy(10)}{dx} = -y(10) \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

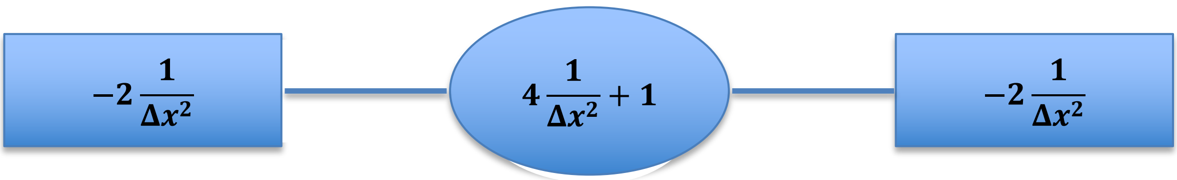
2. Operador diferencial discreto:

Utilizando a filosofia central, e substituindo-se o operador diferencial discreto na equação diferencial contínua apresentada no problema de valor de contorno (1), obtém-se

$$-2\frac{1}{\Delta x^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + y_i = e^{-0.1x_i} \tag{2}$$

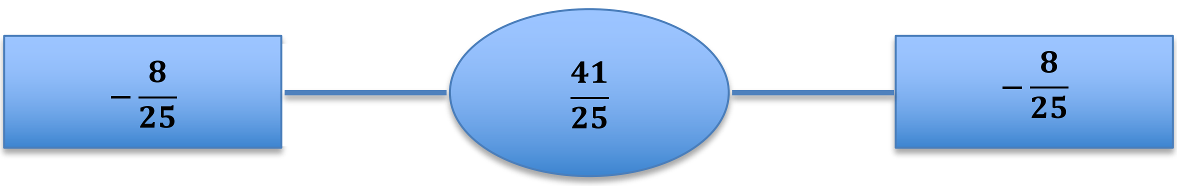
3. Célula do operador discreto da filosofia central:

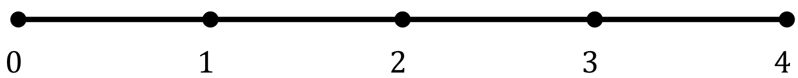
A célula é uma máscara que contém os valores dos coeficientes a serem multiplicados pelos valores discreto da função y a fim de obter o operador diferencial no ponto x_i. Esses coeficientes são identificados facilmente na equação (2). Assim a máscara é representada como



4. Discretização do domínio:

Neste exemplo, o domínio é discretizado em quatro partes iguais $\left(\Delta x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\right)$. Assim, a máscara fica com os seguintes coeficientes





5. Montagem do sistema de equações algébricas do problema de valor de contorno :

Deve-se aplicar a célula desenvolvida na Seção 4 sobre cada um dos nós da grade onde existe incógnita, ou seja, sobre os nós de 1 a 4. Assim, obtém-se

Linha 1 do sistema de equações: Célula sobre o nó 1.

$$-\frac{8}{25}y_0 + \frac{41}{25}y_1 - \frac{8}{25}y_2 = e^{-0.1x_1}$$

Porém y_0 é dado como condição de contorno de Dirichlet ($y_0 = 1$). Assim, a Linha 1 do sistema é reescrita como

$$\frac{41}{25}y_1 - \frac{8}{25}y_2 = e^{-0.1x_1} + \frac{8}{25}$$

Linha 2 do sistema de equações: Célula sobre o nó 2.

$$-\frac{8}{25}y_1 + \frac{41}{25}y_2 - \frac{8}{25}y_3 = e^{-0.1x_2}$$

Linha 3 do sistema de equações: Célula sobre o nó 3.

$$-\frac{8}{25}y_2 + \frac{41}{25}y_3 - \frac{8}{25}y_4 = e^{-0.1x_3}$$

Linha 4 do sistema de equações: Célula sobre o nó 4.

$$-\frac{8}{25}y_3 + \frac{41}{25}y_4 - \frac{8}{25}y_5 = e^{-0.1x_4}$$

Note que o nó 5 está fora do domínio do problema. No entanto, pode-se escrever a condição de contorno de Neumann

$$\frac{dy(10)}{dx} = -y(10)$$

como

$$\frac{1}{2\Delta\mathrm{x}}(y_5 - y_3) = -y_4 \rightarrow y_5 = y_3 - 2\Delta\mathrm{x}\, y_4 = y_3 - 2\frac{5}{2}\, y_4 = y_3 - 5\, y_4$$

Assim, a linha 4 do sistema pode ser reescrita como

$$-\frac{8}{25}y_3 + \frac{41}{25}y_4 - \frac{8}{25}(y_3 - 5\, y_4) = e^{-0.1x_4}$$

$$\rightarrow -\frac{16}{25}y_3 + \frac{81}{25}y_4 = -e^{-0.1x_4}$$

Substituindo-se as coordenadas dos nós ($x_1 = 2.5, x_2 = 5, x_3 = 7.5, x_4 = 10$) em cada equação e escrevendo o sistema em forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{8}{25} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{25} & \frac{41}{25} & -\frac{8}{25} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{25} & \frac{41}{25} & -\frac{8}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{25} & \frac{81}{25} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-0.25} + \frac{8}{25} \\ e^{-0.50} \\ e^{-0.75} \\ e^{-1.00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.09880 \\ 0.60653 \\ 0.47237 \\ 0.36788 \end{pmatrix}$$

A solução do sistema de equações algébricas resulta em

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.78922 \\ 0.61097 \\ 0.44661 \\ 0.20176 \end{pmatrix}$$