Universidade Federal do Ceará - Departamento de Computação
Métodos Numéricos II – 2018.1 Professor Creto Augusto Vidal

Método dos Elementos Finitos – Resíduos Ponderados para Problemas de Valores de Contorno

1. Problema de Valores de Contorno

$$\begin{cases} -2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = e^{-0.1x} \\ \textbf{C. C.}: \begin{cases} y(0) = 1 \\ \frac{dy(10)}{dx} = -y(10) \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

2. Resíduo:

$$R(x) = -2\frac{d^2\overline{y}(x)}{dx^2} + \overline{y}(x) - e^{-0.1x} \neq 0 \tag{2}$$

3. Formulação dos Resíduos Ponderados:

$$\int_0^{10} w(x)R(x) = 0 \tag{3}$$

onde w(0) = 0 no ponto em que a condição de contorno é de Dirichlet.

Substituindo-se (2) em (3), obtém-se

$$\boxed{-2\int_0^{10} w(x)\frac{d^2\overline{y}(x)}{dx^2}dx + \int_0^{10} w(x)\overline{y}(x)dx - \int_0^{10} w(x)e^{-0.1x}\,dx = 0} \tag{4}$$

4. Integração por partes :

Para relaxar a condição de diferenciabilidade da função $\overline{y}(x)$, ou seja, para que ela não precise ser diferenciável duas vezes, integra-se a primeira integral em (4) por partes.

Fórmula de integração por partes:

$$\int_0^{10} u(x)dv = u(x)v(x)|_0^{10} - \int_0^{10} v(x)du \tag{5}$$

Chamando

$$\begin{array}{ll} u(x) = w(x) & du = \frac{dw}{dx}dx \\ dv = \frac{d^2\overline{y}(x)}{dx^2}dx & v(x) = \frac{d\overline{y}(x)}{dx} \end{array} \tag{6}$$

Assim, substituindo-se (6) em (5), obtém-se

$$-2\int_0^{10} \frac{d^2\overline{y}(x)}{dx^2}w(x)dx = -2\left[\left(w(10)\frac{d\overline{y}(10)}{dx} - w(0)\frac{d\overline{y}(0)}{dx}\right) - \int_0^{10} \frac{d\overline{y}(x)}{dx}\frac{dw(x)}{dx}dx\right].$$

Aplicando as condições de contorno definidas em (1) e w(0) = 0, obtém-se

$$-2\int_0^{10} \frac{d^2\overline{y}(x)}{dx^2}w(x)dx = -2\left[-w(10)y(10) - \int_0^{10} \frac{d\overline{y}(x)}{dx}\frac{dw(x)}{dx}dx\right] = 2w(10)y(10) + 2\int_0^{10} \frac{d\overline{y}(x)}{dx}\frac{dw(x)}{dx}dx \tag{7}$$

Então, substituindo-se (7) em (4), obtém-se

$$\boxed{2w(10)y(10) + 2\int_0^{10} \frac{d\overline{y}(x)}{dx}\frac{dw(x)}{dx}dx \;\; + \int_0^{10} \overline{y}(x)w(x)dx - \int_0^{10} w(x)e^{-0.1x}\,dx = 0.} \tag{8}$$

5. Discretização do domínio em elementos finitos :

Deve-se procurar a solução aproximada $\overline{y}(x)$ no espaço de funções lineares por partes, e usar funções arbitrárias w(x) que também estão neste mesmo espaço de funções. Assim, se o domínio for dividido em quatro elementos, todas as funções desse espaço são representadas como combinação linear de cinco funções bases (Figura 1)

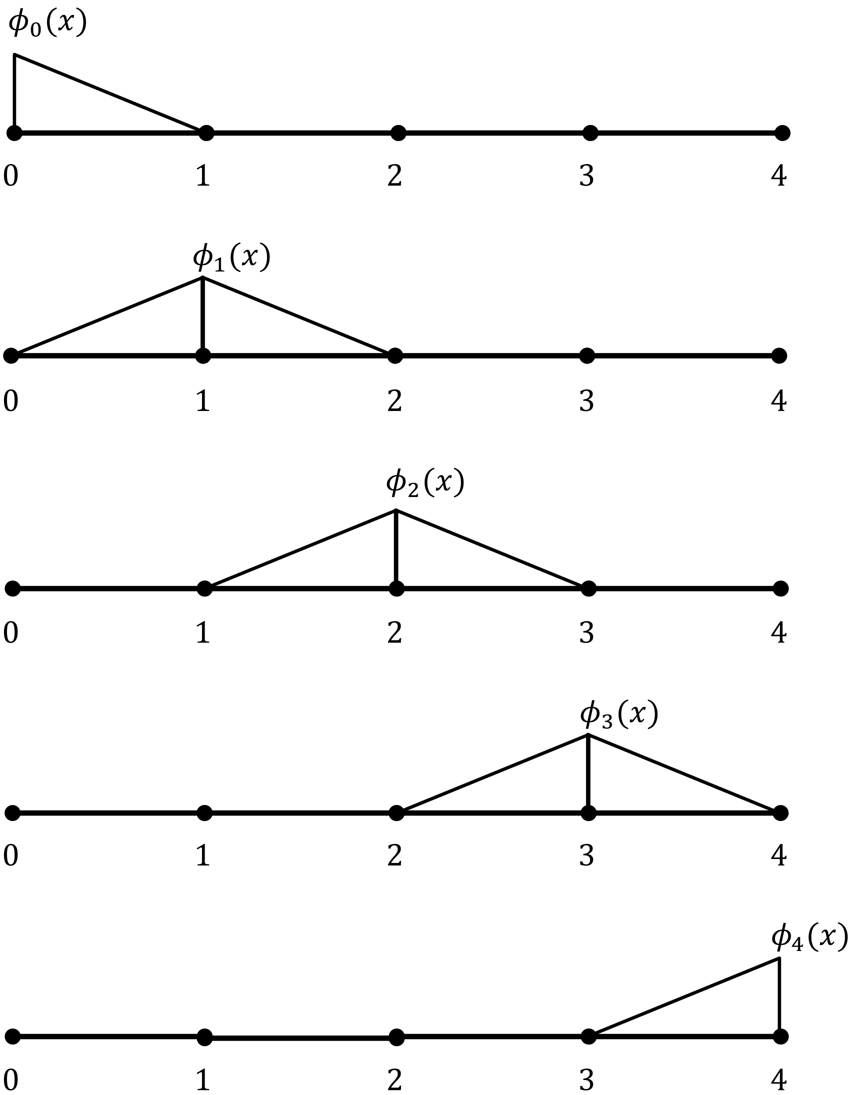

Figura 1 Funções Bases do Espaço de Funções Lineares por partes

Logo,

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_0\phi_0(x) + \overline{y}_1\phi_1(x) + \overline{y}_2\phi_2(x) + \overline{y}_3\phi_3(x) + \overline{y}_4\phi_4(x) \tag{9}$$

e

$$w(x) = w_0\phi_0(x) + w_1\phi_1(x) + w_2\phi_2(x) + w_3\phi_3(x) + w_4\phi_4(x). \tag{10}$$

As derivadas de $\overline{y}(x)$ e $w(x)$ são expressas a partir da derivação de (9) e (10) respectivamente. Assim,

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{y}_0\frac{d\phi_0(x)}{dx} + \bar{y}_1\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \bar{y}_2\frac{d\phi_2(x)}{dx} + \bar{y}_3\frac{d\phi_3(x)}{dx} + \bar{y}_4\frac{d\phi_4(x)}{dx} \tag{11}$$

e

$$\frac{dw(x)}{dx} = w_0 \frac{d\phi_0(x)}{dx} + w_1 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + w_2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + w_3 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + w_4 \frac{d\phi_4(x)}{dx} \tag{12}$$

Substituindo as equações de (9) a (12) em (8), obtém-se

$$\begin{aligned} 2w_4 y_4 + 2\int_0^{10} & \left(w_0 \frac{d\phi_0(x)}{dx} + w_1 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + w_2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + w_3 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + w_4 \frac{d\phi_4(x)}{dx}\right) \\ & \times \left(\bar{y}_0 \frac{d\phi_0(x)}{dx} + \bar{y}_1 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + \bar{y}_2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + \bar{y}_3 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + \bar{y}_4 \frac{d\phi_4(x)}{dx}\right) dx \\ & + \int_0^{10} \left(w_0\phi_0(x) + w_1\phi_1(x) + w_2\phi_2(x) + w_3\phi_3(x) + w_4\phi_4(x)\right) \\ & \quad \times \left(\bar{y}_0\phi_0(x) + \bar{y}_1\phi_1(x) + \bar{y}_2\phi_2(x) + \bar{y}_3\phi_3(x) + \bar{y}_4\phi_4(x)\right) dx \\ & - \int_0^{10} \left(w_0\phi_0(x) + w_1\phi_1(x) + w_2\phi_2(x) + w_3\phi_3(x) + w_4\phi_4(x)\right) e^{-0.1x}\, dx = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

6. Forma matricial da formulação dos resíduos ponderados

A equação (13) pode ser escrita na forma matricial como

$$\lfloor w_0\; w_1\; w_2\; w_3\; w_4 \rfloor \left(\begin{bmatrix} \int_0^{10}(2\phi_{0,x}\phi_{0,x} + \phi_0\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{0,x}\phi_{4,x} + \phi_0\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{1,x}\phi_{0,x} + \phi_1\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{1,x}\phi_{4,x} + \phi_1\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{2,x}\phi_{0,x} + \phi_2\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{2,x}\phi_{4,x} + \phi_2\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{3,x}\phi_{0,x} + \phi_3\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{3,x}\phi_{4,x} + \phi_3\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{4,x}\phi_{0,x} + \phi_4\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{4,x}\phi_{4,x} + \phi_4\phi_4)dx + 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_0^{10}(\phi_0(x))e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}(\phi_1(x))e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}(\phi_2(x))e^{-0.1x}\,dx \\ \int_0^{10}(\phi_3(x))e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}(\phi_4(x))e^{-0.1x}dx \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{14}$$

Note que, como $w_0 = 0$, a primeira linha da matriz e a primeira linha do vetor que envolve a integral da função exponencial são multiplicadas por zero. Por sua vez, como $\bar{y}_0 = 1$, a primeira coluna da matriz é multiplicada por 1. Assim, a equação matricial (14) reduz-se a

$$\lfloor w_1\; w_2\; w_3\; w_4 \rfloor \left(\begin{bmatrix} \int_0^{10}(2\phi_{1,x}\phi_{0,x} + \phi_1\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{1,x}\phi_{4,x} + \phi_1\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{2,x}\phi_{0,x} + \phi_2\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{2,x}\phi_{4,x} + \phi_2\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{3,x}\phi_{0,x} + \phi_3\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{3,x}\phi_{4,x} + \phi_3\phi_4)dx \\ \int_0^{10}(2\phi_{4,x}\phi_{0,x} + \phi_4\phi_0)dx \ldots \int_0^{10}(2\phi_{4,x}\phi_{4,x} + \phi_4\phi_4)dx + 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \int_0^{10}(\phi_1(x))e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}(\phi_2(x))e^{-0.1x}\,dx \\ \int_0^{10}(\phi_3(x))e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}(\phi_4(x))e^{-0.1x}dx \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{15}$$

7. Forma matricial da equação global do método de elementos finitos

Em (15), o vetor $\lfloor w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \rfloor$ é um vetor arbitrário, e a expressão é nula. Isso implica que o termo entre parênteses tem de ser o vetor nulo. Assim, o termo entre parênteses na expressão matricial (15) é um sistema de equações algébricas

$$\begin{bmatrix} \int_0^{10}\left(2\phi_{1,x}\phi_{1,x}+\phi_1\phi_1\right)dx & \dots & \int_0^{10}\left(2\phi_{1,x}\phi_{4,x}+\phi_1\phi_4\right)dx \\ \int_0^{10}\left(2\phi_{2,x}\phi_{1,x}+\phi_2\phi_1\right)dx & \dots & \int_0^{10}\left(2\phi_{2,x}\phi_{4,x}+\phi_2\phi_4\right)dx \\ \int_0^{10}\left(2\phi_{3,x}\phi_{1,x}+\phi_3\phi_1\right)dx & \dots & \int_0^{10}\left(2\phi_{3,x}\phi_{4,x}+\phi_3\phi_4\right)dx \\ \int_0^{10}\left(2\phi_{4,x}\phi_{1,x}+\phi_4\phi_1\right)dx & \dots & \int_0^{10}\left(2\phi_{4,x}\phi_{4,x}+\phi_4\phi_4\right)dx+2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\\ \bar{y}_3\\ \bar{y}_4\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^{10}\left(\phi_1(x)\right)e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}\left(\phi_2(x)\right)e^{-0.1x}\,dx \\ \int_0^{10}\left(\phi_3(x)\right)e^{-0.1x}dx \\ \int_0^{10}\left(\phi_4(x)\right)e^{-0.1x}dx \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \int_0^{10}\left(2\phi_{1,x}\phi_{0,x}+\phi_1\phi_0\right)dx \\ \int_0^{10}\left(2\phi_{2,x}\phi_{0,x}+\phi_2\phi_0\right)dx \\ \int_0^{10}\left(2\phi_{3,x}\phi_{0,x}+\phi_3\phi_0\right)dx \\ \int_0^{10}\left(2\phi_{4,x}\phi_{0,x}+\phi_4\phi_0\right)dx \end{pmatrix}. \tag{16}$$

8. Contribuições dos elementos finitos para a equação global

Note que, por conta do formato das funções bases (Figura 1), as integrais que aparecem na equação (16) ficam restritas aos subdomínios em que ϕ_i e ϕ_j têm interseção diferente de zero. Na Figura 2, observa-se que, na sub-região definida por um elemento finito, parte da função w(x) e parte da função $\bar{y}(x)$ têm interseção sobre o elemento. Assim, sobre um elemento, calculam-se as contribuições para as matrizes e vetores da Equação (16) envolvendo $w_I\bar{y}_I$, $w_I\bar{y}_J$, $w_J\bar{y}_I$, $w_J\bar{y}_J$, $w_Ie^{-0.1x}$ e $w_Je^{-0.1x}$.

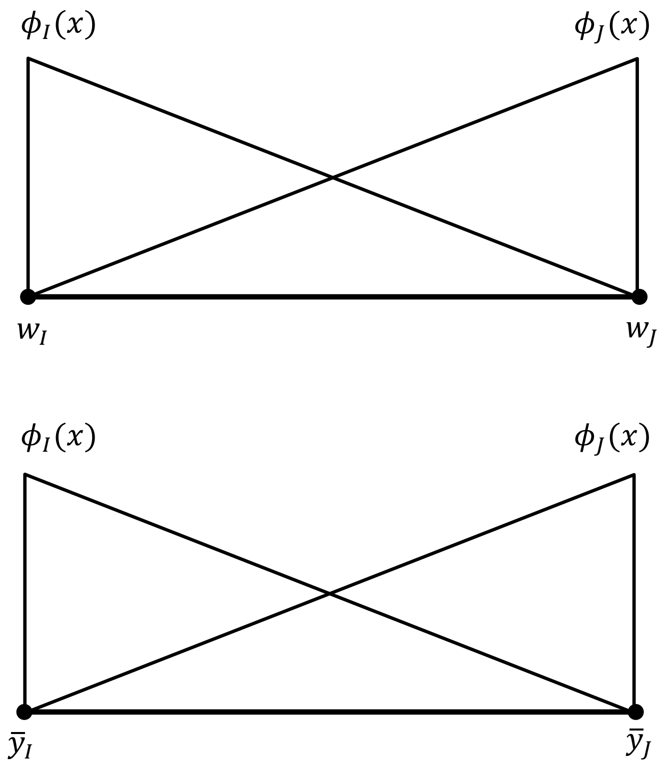

Figura 2. Partes das funções w(x) e $\bar{y}(x)$ sobre um elemento finito.

8.1 Contribuição para a matriz dos coeficientes

$$k_{II} = \int_{x_I}^{x_J} (2\phi_{I,x}\phi_{I,x} + \phi_I\phi_I) dx = \int_{-1}^{1} (2\phi_{I,x}(\alpha)\phi_{I,x}(\alpha) + \phi_I(\alpha)\phi_I(\alpha))|J| d\alpha \tag{17}$$

$$k_{IJ} = \int_{x_I}^{x_J} (2\phi_{I,x}\phi_{J,x} + \phi_I\phi_J) dx = \int_{-1}^{1} (2\phi_{I,x}(\alpha)\phi_{J,x}(\alpha) + \phi_I(\alpha)\phi_J(\alpha))|J| d\alpha \tag{18}$$

$$k_{JI} = \int_{x_I}^{x_J} (2\phi_{J,x}\phi_{I,x} + \phi_J\phi_I) dx = \int_{-1}^{1} (2\phi_{J,x}(\alpha)\phi_{I,x}(\alpha) + \phi_J(\alpha)\phi_I(\alpha))|J| d\alpha \tag{19}$$

$$k_{JJ} = \int_{x_I}^{x_J} (2\phi_{J,x}\phi_{J,x} + \phi_J\phi_J) dx = \int_{-1}^{1} (2\phi_{J,x}(\alpha)\phi_{J,x}(\alpha) + \phi_J(\alpha)\phi_J(\alpha))|J| d\alpha \tag{20}$$

onde

$$x(\alpha) = \frac{x_J + x_I}{2} + \frac{x_J - x_I}{2}\alpha, \tag{21}$$

$$\alpha(x) = \frac{2}{x_J - x_I}\left(x - \frac{x_J + x_I}{2}\right), \tag{22}$$

$$|J| = \frac{x_J - x_I}{2} = \frac{L_e}{2}, \tag{23}$$

$$\phi_I(\alpha) = -\frac{\alpha - 1}{2}, \tag{24}$$

$$\phi_J(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{2}, \tag{25}$$

$$\phi_{I,x}(\alpha) = \frac{d\phi_I(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{2}{x_J - x_I} = -\frac{1}{L_e}, \tag{26}$$

$$\phi_{J,x}(\alpha) = \frac{d\phi_J(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{2}\frac{2}{x_J - x_I} = \frac{1}{L_e}, \tag{27}$$

$$\phi_I(\alpha)\phi_I(\alpha) = \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 - 2\alpha + 1), \tag{28}$$

$$\phi_I(\alpha)\phi_J(\alpha) = \phi_J(\alpha)\phi_I(\alpha) = -\frac{1}{4}(\alpha - 1)(\alpha + 1) = -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1), \tag{29}$$

$$\phi_J(\alpha)\phi_J(\alpha) = \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha + 1), \tag{30}$$

$$\phi_{I,x}(\alpha)\phi_{I,x}(\alpha) = \frac{1}{{L_e}^2}\ , \tag{31}$$

$$\phi_{I,x}(\alpha)\phi_{J,x}(\alpha) = \phi_{J,x}(\alpha)\phi_{I,x}(\alpha) = -\frac{1}{{L_e}^2} \quad \text{e} \tag{32}$$

$$\phi_{J,x}(\alpha)\phi_{J,x}(\alpha) = \frac{1}{{L_e}^2}. \tag{33}$$

Substituindo-se as equações (23), (28) e (31) na Equação (17), obtém-se

$$k_{II} = \int_{-1}^{1} \left(2\frac{1}{{L_e}^2} + \frac{1}{4}(\alpha^2 - 2\alpha + 1)\right)\frac{L_e}{2} d\alpha = \frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{3}. \tag{34}$$

Substituindo-se as equações (23), (29) e (32) na Equação (18), obtém-se

$$k_{IJ} = k_{JI} = \int_{-1}^{1} \left(-2\frac{1}{{L_e}^2} - \frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)\right)\frac{L_e}{2} d\alpha = -\frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{6}. \tag{35}$$

Substituindo-se as equações (23), (30) e (33) na Equação (20), obtém-se

$$k_{JJ} = \int_{-1}^{1} \left(2\frac{1}{{L_e}^2} + \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha + 1)\right)\frac{L_e}{2} d\alpha = \frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{3}. \tag{36}$$

Neste problema de valor de contorno, todos os elementos têm o mesmo tamanho $\left(L_e = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\right)$. Assim, suas contribuições são

$k_{II} = \frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{3} = \frac{49}{30}$,

$k_{IJ} = k_{JI} = -\frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{6} = -\frac{23}{60}$ e

$k_{JJ} = \frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{3} = \frac{49}{30}$.

8.2 Contribuição para os vetores do lado direito da equação

O primeiro vetor do lado direito envolve a função exponencial e cada uma das funções bases de w(x). Assim, cada elemento contribui com as componentes que têm valores não nulos no subdomínio do elemento. Conforme visto na Figura 2, tem-se

$$f_I = \int_{x_I}^{x_J} \left(\phi_I(x)\right) e^{-0.1x} dx = \int_{-1}^{1} \left(\phi_I(\alpha)\right) e^{-0.1x(\alpha)} |J| d\alpha \tag{37}$$

$$f_J = \int_{x_I}^{x_J} \left(\phi_J(x)\right) e^{-0.1x} dx = \int_{-1}^{1} \left(\phi_J(\alpha)\right) e^{-0.1x(\alpha)} |J| d\alpha. \tag{38}$$

Substituindo-se as equações (21), (23) e (24) na Equação (37), obtém-se

$$f_I = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{\alpha-1}{2}\right) e^{-0.1\left(\frac{x_J+x_I}{2}+\frac{L_e}{2}\alpha\right)} \frac{L_e}{2} d\alpha \approx 1.30542251\, e^{-0.1\left(\frac{x_I+x_J}{2}\right)} \tag{39}$$

Substituindo-se as equações (21), (23) e (25) na Equação (38), obtém-se

$$f_J = \int_{-1}^{1} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) e^{-0.1\left(\frac{x_J+x_I}{2}+\frac{L_e}{2}\alpha\right)} \frac{L_e}{2} d\alpha \approx 1.20109299\, e^{-0.1\left(\frac{x_I+x_J}{2}\right)} \tag{40}$$

O segundo vetor do lado direito envolve cada uma das funções bases de w(x) com a função base $\phi_0(x)$ de $\bar{y}(x)$. Assim, cada elemento contribui com as componentes que têm valores não nulos e intersectam a parte não nula de $\phi_0(x)$ em seu domínio. Conforme visto na Figura 2, tem-se

$$g_I = \int_{x_I}^{x_J} \left(2\phi_{I,x}\phi_{0,x} + \phi_I\phi_0\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2\phi_{I,x}(\alpha)\phi_{0,x}(\alpha) + \phi_I(\alpha)\phi_0(\alpha)\right) |J| d\alpha \tag{41}$$

$$g_J = \int_{x_I}^{x_J} \left(2\phi_{J,x}\phi_{0,x} + \phi_J\phi_0\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2\phi_{J,x}(\alpha)\phi_{0,x}(\alpha) + \phi_J(\alpha)\phi_0(\alpha)\right) |J| d\alpha \tag{42}$$

No entanto, a função $\phi_0(\alpha)$ é não nula apenas no domínio do elemento 1, além disso, o nó I do elemento 1 está associado a w_0, que é nulo. Portanto, apenas o nó J do elemento 1 contribui para o segundo vetor (equação (42)). Assim, substituindo-se as equações (23), (29) e (32) na Equação (42), obtém-se

$$g_J = \int_{-1}^{1} \left(-2\frac{1}{{L_e}^2} - \frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)\right) \frac{L_e}{2} d\alpha = -\frac{2}{L_e} + \frac{L_e}{6}$$

Neste problema de valor de contorno, o elemento 1 tem o tamanho $\left(L_e = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\right)$. Assim, sua contribuição é

$g_J = -\frac{23}{60}$

e restringe-se à primeira componente do segundo vetor.

8.3 Acúmulo das contribuições dos elementos na matriz dos coeficientes do sistema global

O sistema de equações algébricas do problema é dado pela Equação (16). Chamando a matriz dos coeficientes de $\mathbf{A}$ e os vetores do lado direito de $\boldsymbol{b_1}$ e $\boldsymbol{b_2}$, a equação (16) pode ser reescrita como

$$[\mathbf{A}](\bar{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{b_2} \tag{43}$$

O elemento e tem duas extremidades, cada uma das quais está associada a uma incógnita. A Tabela 1 mostra essa associação para o problema analisado.

Tabela 1. Associação dos nós de extremidade com as incógnitas

Elemento	Nó I	Nó J
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4

Assim pode-se inicializar a matriz $\mathbf{A}$ como uma matriz nula, percorrer as linhas da Tabela 1 e adicionar as contribuições dos elementos ao termo a_{ij} da matriz dos coeficientes apropriado. Assim, por exemplo, os termos k_{II}, k_{IJ} e k_{JI} do elemento 1 não têm correspondentes em $\mathbf{A}$ porque seu Nó I não está ligado a nenhuma incógnita. Porém o termo k_{JJ} contribui para o termo a_{11}. Dessa forma, as contribuições dos elementos após percorrer toda a Tabela 1 fica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_{JJ}^{e_1} + k_{II}^{e_2} & k_{IJ}^{e_2} & 0 & 0 \\ k_{JI}^{e_2} & k_{JJ}^{e_2} + k_{II}^{e_3} & k_{IJ}^{e_3} & 0 \\ 0 & k_{JI}^{e_3} & k_{JJ}^{e_3} + k_{II}^{e_4} & k_{IJ}^{e_4} \\ 0 & 0 & k_{IJ}^{e_4} & k_{JJ}^{e_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{30} + \frac{49}{30} & -\frac{23}{60} & 0 & 0 \\ -\frac{23}{60} & \frac{49}{30} + \frac{49}{30} & -\frac{23}{60} & 0 \\ 0 & -\frac{23}{60} & \frac{49}{30} + \frac{49}{30} & -\frac{23}{60} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{60} & \frac{49}{30} \end{bmatrix}$$

A Equação (16) mostra que deve-se adicionar o valor 2 (oriundo da condição de contorno de Neumann) ao tremo a_{44}. Assim, a versão final da matriz dos coeficientes é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{49}{15} & -\frac{23}{60} & 0 & 0 \\ -\frac{23}{60} & \frac{49}{15} & -\frac{23}{60} & 0 \\ 0 & -\frac{23}{60} & \frac{49}{15} & -\frac{23}{60} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{60} & \frac{49}{30} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2667 & -0.3833 & 0 & 0 \\ -0.3833 & 3.2667 & -0.3833 & 0 \\ 0 & -0.3833 & 3.2667 & -0.3833 \\ 0 & 0 & -0.3833 & 3.6333 \end{bmatrix}$$

8.4 Acúmulo das contribuições dos elementos nos vetores do lado direito do sistema global

Inicializar os dois vetores como vetores nulos. Em seguida, percorrer a Tabela 1 e adicionar, nas posições adequadas, as contribuições f_I e f_J (Equações (39) e (40)) ao vetor $\boldsymbol{b_1}$. Note que o valor $\left(\frac{x_I+x_J}{2}\right)$ no expoente dessas equações é a coordenada x do ponto médio do elemento em questão. Assim

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} f_J^{e_1} + f_I^{e_2} \\ f_J^{e_2} + f_I^{e_3} \\ f_J^{e_3} + f_I^{e_4} \\ f_I^{e_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2011\ e^{-0.1(1.25)} + 1.3054\ e^{-0.1(3.75)} \\ 1.2011\ e^{-0.1(3.75)} + 1.3054\ e^{-0.1(6.25)} \\ 1.2011\ e^{-0.1(6.25)} + 1.3054\ e^{-0.1(8.75)} \\ 1.3054\ e^{-0.1(8.75)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.95715 \\ 1.52423 \\ 1.18707 \\ 0.54417 \end{pmatrix}$$

O vetor $\boldsymbol{b_2}$ recebe as contribuições dos elementos de maneira análoga. Porém, neste caso, apenas o elemento 1 contribui para este vetor. Assim,

$$\boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} g_J^{e_1} + g_I^{e_2} \\ g_J^{e_2} + g_I^{e_3} \\ g_J^{e_3} + g_I^{e_4} \\ g_I^{e_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_J^{e_1} + 0 \\ 0 \quad + 0 \\ 0 \quad + 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{23}{60} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3833 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.5 Sistema global

A expressão final do sistema de equações algébricas do problema de valor de contorno dada pelo método dos elementos finitos (formulado como resíduos ponderados) é

$$\begin{bmatrix} 3.2667 & -0.3833 & 0 & 0 \\ -0.3833 & 3.2667 & -0.3833 & 0 \\ 0 & -0.3833 & 3.2667 & -0.3833 \\ 0 & 0 & -0.3833 & 3.6333 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.34045 \\ 1.52423 \\ 1.18707 \\ 0.54417 \end{pmatrix}.$$

A solução desse sistema é

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7884 \\ 0.6129 \\ 0.4586 \\ 0.1982 \end{pmatrix}$$