INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR D'INFORMATIQUE

UE : Algèbre Linéaire
Parcours : Master en I2AD

Présenté par :
RANAIVO Nirina Andy Nantenaina
ANDRIANTSALAMA Rijamampianina
RAHARIMANITRA-MALA Toky Jason Hermann
RAKOTONIRINA Mendrika Itokiana

Sous la direction de :
Dr RABEARIVONY Dimby

June 17, 2025

Moindres Carrés & Décomposition QR

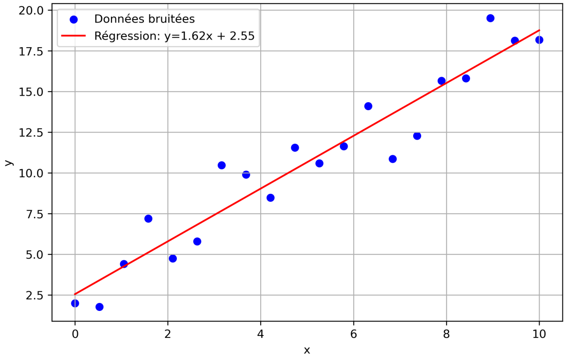
Applications en IA et Science des Données

Problématique

Systèmes sur-déterminés : $m > n$ (plus d'équations que d'inconnues)

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1.1 \\ 2x_1 - x_2 = 3.0 \\ 3x_1 + x_2 = 2.9 \end{cases}$$



Objectif : Minimiser $\|Ax - b\|^2$

Approche naïve : Équations Normales

Solution théorique :

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Problèmes :

- Calcul de $A^T A$ instable
- $\mathrm{cond}(A^T A) = \mathrm{cond}(A)^2$
- Coût : $O(mn^2 + n^3)$

Exemple numérique

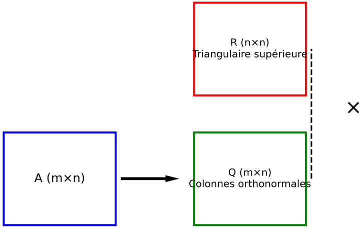
Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$ alors $A^T A \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ quand $\epsilon \approx 0$

Décomposition QR

$$A = QR$$

- Q orthogonale ($Q^T Q = I$)
- R triangulaire supérieure

$$\|Ax - b\| = \left\|Rx - Q^T b\right\|$$



Avantage : Évite le calcul de $A^T A$

Algorithme de Gram-Schmidt Modifié

$$j = 1 \text{ à } n \; v \leftarrow A_{:,j} \; i = 1 \text{ à } j-1 \; R_{i,j} \leftarrow Q_{:,i}^T A_{:,j} \; v \leftarrow v - R_{i,j} Q_{:,i} \; R_{j,j} \leftarrow \|v\| \; Q_{:,j} \leftarrow v / R_{j,j}$$

Avantage

Moins sensible aux erreurs d'arrondi que Gram-Schmidt classique

Implémentation Python

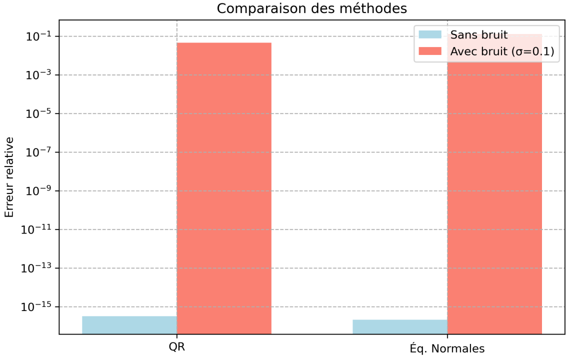
```python
def qr_gs(A):
m, n = A.shape
Q = np.zeros((m, n))
R = np.zeros((n, n))
for j in range(n):
v = A[:, j].copy()
for i in range(j):
R[i,j] = Q[:,i] @ A[:,j]
v -= R[i,j] * Q[:,i]
R[j,j] = np.linalg.norm(v)
Q[:,j] = v / R[j,j]
return Q, R
```

- Validation : $\left\|Q^T Q - I\right\| \approx 10^{-15}$
- Complexité : $O(mn^2)$

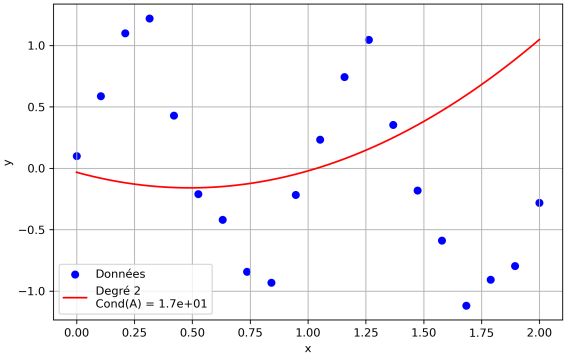
Résultats Numériques

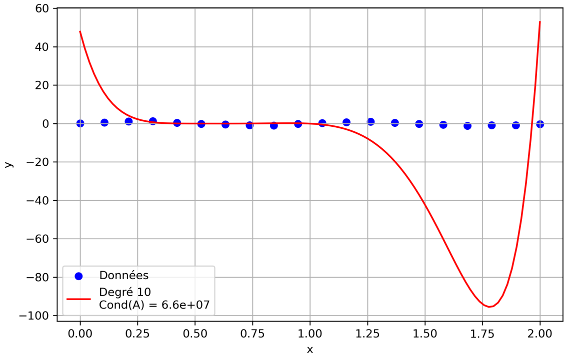
Méthode	**Erreur**
QR	3.2×10^{-16}
Éq. Normales	2.1×10^{-16}

QR (bruité)	4.7×10^{-2}
Éq. Normales (bruité)	1.3×10^{-1}



Application : Régression Polynomiale





- Degré 2 : Bon ajustement
- Degré 10 : Sur-apprentissage

Conclusion

- Méthode QR numériquement stable
- Implémentation efficace avec Gram-Schmidt modifié
- Applications larges en science des données

Pour aller plus loin

- Décomposition SVD
- Régularisation (Ridge, Lasso)

Merci pour votre attention !