INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR D'INFORMATIQUE

UE : Algèbre Linéaire
Parcours : Master en I2AD

Présenté par :

RANAIVO Nirina Andy Nantenaina
ANDRIANTSALAMA Rijamampianina
RAHARIMANITRA-MALA Toky Jason Hermann
ANDRIANARISON Maheritsizakaina Merina Fitiavana Jean
RAKOTONIRINA Mendrika Itokiana

Sous la direction de :
Dr RABEARIVONY Dimby

18 juin 2025

Moindres Carrés & Décomposition QR

Applications en IA et Science des Données

Vue d'ensemble du Projet

Objectif

Implémenter une solution numérique pour les systèmes linéaires surdéterminés $Ax = b$ via la méthode des moindres carrés.

Méthode

- Développement d'une fonction de **décomposition QR** basée sur l'algorithme de **Gram-Schmidt modifié**.
- Résolution du système triangulaire supérieur $Rx = Q^T b$.

Validation et Application

- Comparaison de la solution avec la référence `numpy.linalg.lstsq`.
- Application à un cas pratique de **régression polynomiale**.

Le Problème des Moindres Carrés - Introduction Théorique 1/2

Système Surdéterminé

- $Ax = b$
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $m > n$ (plus d'équations que d'inconnues)
- En général, pas de solution exacte

Objectif

Trouver x qui minimise la norme du résidu au carré :

$$\min_x \|Ax - b\|^2$$

Approches

- Équations normales :

$$A^T Ax = A^T b$$

  Peuvent être numériquement **instables**

- **Décomposition QR** (notre choix) :

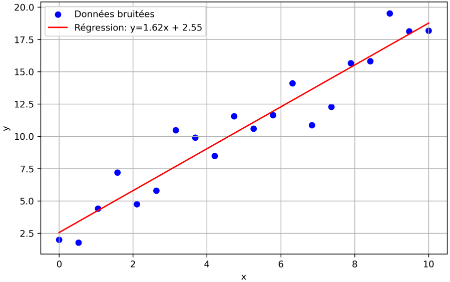
$$A = QR$$

  Plus **robuste** et stable numériquement

Systèmes sur-déterminés : $m > n$ (plus d'équations que d'inconnues)

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1.1 \\ 2x_1 - x_2 = 3.0 \\ 3x_1 + x_2 = 2.9 \end{cases}$$



Objectif : Minimiser

$$\min_x \|Ax - b\|^2$$

Méthodologie

1. Factorisation QR

On décompose $A = QR$, où :

- **Q** est une matrice $m \times n$ à colonnes **orthonormales** ($Q^T Q = I$).
- **R** est une matrice $n \times n$ **triangulaire supérieure**.

L'algorithme de **Gram-Schmidt modifié** a été utilisé pour sa stabilité.

2. Résolution Simplifiée

Le problème $\min \|Ax - b\|^2$ devient $\min \|QRx - b\|^2$.
 On résout le système triangulaire simple :

$$Rx = Q^T b$$

Ce qui se fait efficacement par **substitution arrière**.

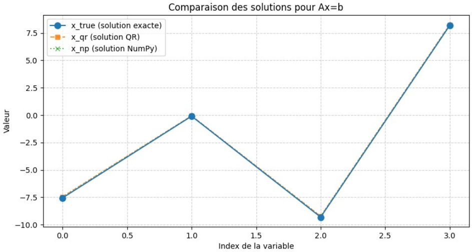
Implémentation : Le Solveur QR

```python
import numpy as np
def modified_gram_schmidt_qr(A):
m, n = A.shape
Q = np.zeros((m, n))
R = np.zeros((n, n))

for j in range(n):
v = A[:, j].copy()

for i in range(j):
R[i, j] = Q[:, i] @ v
v -= R[i, j] * Q[:, i]

R[j, j] = np.linalg.norm(v)
if R[j, j] < 1e-10:
raise ValueError("Matrice a colonnes lineairement dependantes")
Q[:, j] = v / R[j, j]

return Q, R

def solve_least_squares_qr(A, b):
Q, R = modified_gram_schmidt_qr(A)
b_proj = Q.T @ b
x = np.linalg.solve(R, b_proj) # Resolution par substitution arriere
return x
```

Listing 1 – Cœur du solveur (src/qr_solver.py)

Comparaison sur un Système Bruité

- Un système $Ax = b$ a été généré avec une solution ‘$x_t rue‘connue$.
- Un bruit a été ajouté à ‘b‘ pour simuler des données réelles.
- Notre solution (‘$x_q r‘)estcomparecelledeNumPy(‘x_n umpy‘)$.

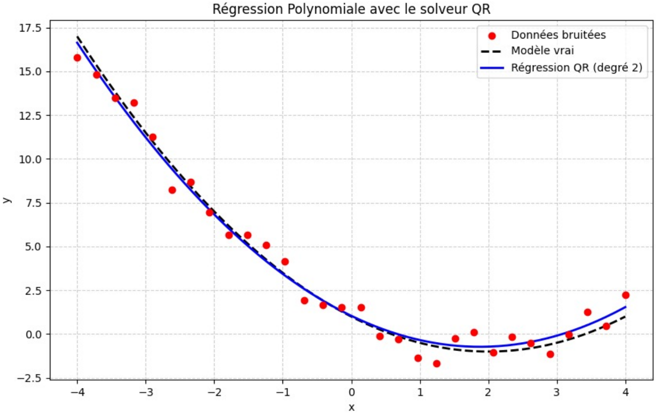


Validation

L’erreur relative entre notre solution et celle de NumPy est de l’ordre de 10^{-15}. Notre implémentation est validée.

Ajustement d'un Modèle sur des Données

- **Objectif** : Ajuster un polynôme $P(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k$ à un nuage de points.
- **Mise en équation** : On cherche les coefficients c en résolvant $Ac = y$ au sens des moindres carrés, où A est la matrice de Vandermonde.



Conclusion

Réalisations

- Mise en œuvre complète d'un solveur de moindres carrés numériquement stable.
- Implémentation réussie de l'algorithme de Gram-Schmidt modifié pour la décomposition QR.
- Validation rigoureuse des résultats par rapport à une bibliothèque de référence (NumPy).
- Application réussie à un problème concret de régression de données.

Apports du projet

Ce projet a permis de renforcer la compréhension des enjeux de l'algèbre linéaire numérique, notamment l'importance de la **stabilité des algorithmes** pour obtenir des résultats fiables en pratique.

Merci de votre attention !

Annexe : Synthèse Express

	MC	QR	SVD
Stabilité	Faible	Moyenne	Forte
Complexité	$O(mn^2)$	$O(mn^2)$	$O(mn^2)+$
Usage	Petits systèmes	Standard	Problèmes délicats

- **MC** : $A^T A x = A^T b$
- **QR** : $A = QR \Rightarrow Rx = Q^T b$
- **SVD** : $x = V\Sigma^+ U^T b$