

# 自动控制原理

## 第六章 频率法串联校正

电子信息学院

主讲：张永韡 博士 讲师  
email: ywzhang@just.edu.cn



# 主要内容

- 1 引言
- 2 串联超前校正
- 3 串联滞后校正
- 4 串联滞后 - 超前校正
- 5 比例-积分-微分 (PID) 调节器
- 6 反馈校正



# 引言

## 控制目标——性能指标

$$\text{性能指标} \left\{ \begin{array}{l} \text{时域} \left\{ \begin{array}{l} \text{超调量} \sigma\% \\ \text{调节时间} t_s \\ \text{稳态误差} e_{ss} \end{array} \right. \\ \text{频域} \left\{ \begin{array}{l} \text{稳定裕量}(h, \gamma), \text{截止频率} \omega_c \\ \text{谐振峰值} M_r, \text{频带宽} \omega_b \end{array} \right. \end{array} \right.$$



# 引言

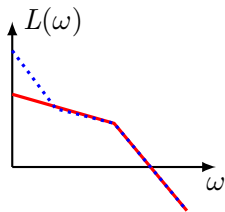
系统开环频率特性与系统性能指标密切相关，一般可以将校正问题归纳为三类：

- (1) 如果系统稳定且有较满意的暂态响应，但稳态误差太大，这就必须增加低频段的增益来减小稳态误差，同时保持中、高频特性不变；
- (2) 如系统稳定且有较满意的误差，但其动态性能较差，则应改变系统的中频段和高频段，以改变系统的截止频率和相角裕度；
- (3) 如果一个系统的稳态和动态性能均不能令人满意，就必须增加低频增益，并改变中频段和高频段。

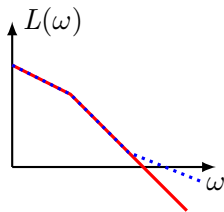


# 引言

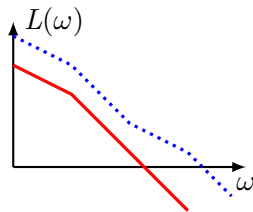
对应上面三种情况的 *BODE* 图：



a) 改变低频段



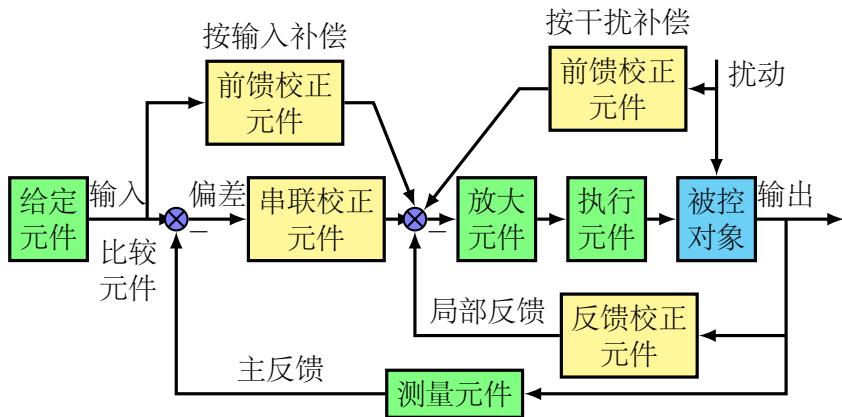
b) 改变中高频段



c) 低中高频段均改变

# 引言

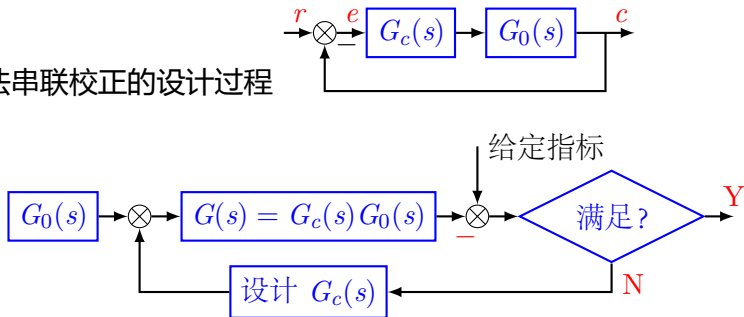
**校正**：采用适当方式，在系统中加入一些参数可调整的装置（校正装置），用以改变系统结构，进一步提高系统的性能，使系统满足指标要求。



**校正方式：串联校正，反馈校正，复合校正**

# 频率法串联校正

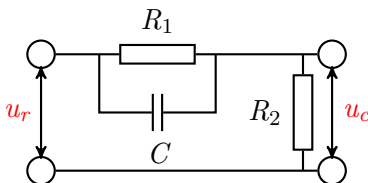
频率法串联校正的设计过程



合理确定性能指标 { 有重点地照顾各项指标要求;  
不要追求不切实际的高指标。



# 串联超前校正：超前网络特性



$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{Cs}}{R_1 + \frac{1}{Cs}}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{CR_1 s + 1}} \\
 &= \frac{R_2(CR_1 s + 1)}{R_2(CR_1 s + 1) + R_1} = \frac{R_2(CR_1 s + 1)}{R_1 R_2 C s + R_1 + R_2} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}(CR_1 s + 1)}{\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} s + 1} \\
 &= \frac{1}{a} \cdot \frac{aTs + 1}{Ts + 1} \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \\ T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \end{array} \right. \quad a \cdot G_c(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}
 \end{aligned}$$





# 串联超前校正：超前网络特性

$$a \cdot G_c(s) = \frac{aTs+1}{Ts+1} \quad (a > 1)$$

$$H = 20 \log \frac{1/T}{1/aT} = 20 \log a$$

$$\psi(\omega) = \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega) =$$

$$\arctan \frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2}$$

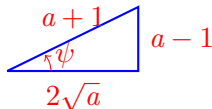
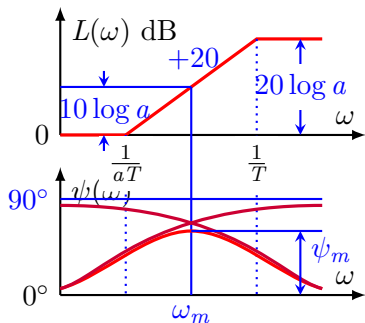
$$\frac{d\psi(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\omega} [\tan \psi(\omega)] = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2} \right] = \frac{T(a-1)[1-aT^2\omega^2]}{(1+aT^2\omega^2)^2} = 0$$

$$\omega_m = 1/\sqrt{a}T$$

$$\tan \psi(\omega_m) = \frac{T\omega(a-1)}{1+aT^2\omega^2} \bigg|_{\omega_m=1/\sqrt{a}T} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

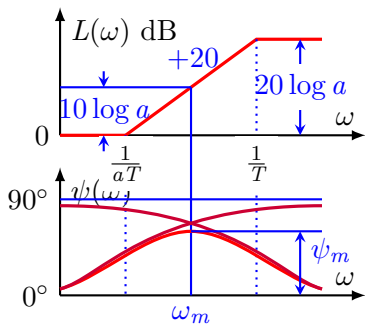
$$\psi_m = \psi(\omega_m) = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{2}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \text{ 可解出 } \begin{cases} a = \frac{1+\sin \psi_m}{1-\sin \psi_m} \\ L(\omega_m) = 10 \log a \end{cases}$$





# 串联超前校正：超前网络特性

$$\begin{cases} \psi_m = \arctan \frac{a-1}{a+1} \\ a = \frac{1+\sin \psi_m}{1-\sin \psi_m} \end{cases}$$



- 超前网络特点：相角超前，幅值增加
- 一级超前网络最大超前角为  $60^\circ$
- 最有效的  $a \in (4, 10)$



# 串联超前校正：步骤

实质—利用超前网络相角超前特性提高系统的相角裕度

超前校正步骤 (设给定指标  $e_{ss}^*$ ,  $\omega_c^*$ ,  $\gamma^*$ )

- (1) 由  $e_{ss}^* \rightarrow K$
- (2) 由  $G_0(s) \rightarrow L_0(\omega) \rightarrow \omega_{c0} \rightarrow \gamma_0\{\omega_{c0}, \gamma_0\}$  均不足
- (3) 确定  $\psi_m = \gamma^* - \gamma_0 + (5^\circ \sim 10^\circ)\{a = \frac{1+\sin\psi_m}{1-\sin\psi_m}, 10\log a\}$
- (4) 作图确定  $\omega_c(\omega_m) \rightarrow \omega_1(\omega_m\sqrt{a}) \rightarrow \omega_2(a\omega_1) \rightarrow G_c(s)$
- (5)  $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$  验算  $\{\omega_c, \gamma\}$  是否满足要求

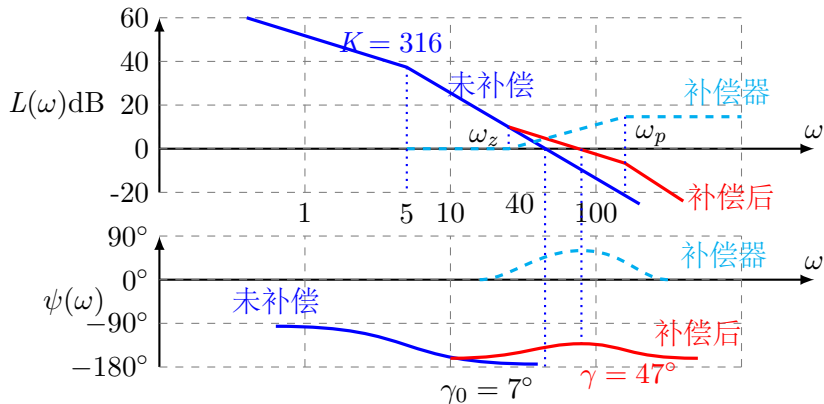


例 1 考虑系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$

要求：1)  $\epsilon_{ssv} \leq 0.136\%$  , 2)  $\gamma \geq 45^\circ$

(1) 由  $e_{ss}^* \rightarrow K$   $K = K_v = 316s^{-1}$

(2) 由  $G_0(s) \rightarrow L_0(\omega) \rightarrow \omega_{c0} = 40 \text{ rad/s} \rightarrow \gamma_0 = 7^\circ$





**例 1** 考虑系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$

要求：1)  $\epsilon_{ssv} \leq 0.136\%$  , 2)  $\gamma \geq 45^\circ$

(3) 确定  $\psi_m = \gamma^* - \gamma_0 + (5^\circ \sim 10^\circ) = 45^\circ - 7^\circ + 5^\circ = 43^\circ$

(4) 估算参数

$$a = \frac{1 + \sin \psi_m}{1 - \sin \psi_m} = \frac{1 + \sin 43^\circ}{1 - \sin 43^\circ} = 5.3$$

取  $\omega_c = \omega_m$ , 此时超前网络幅值  $10 \log a = 7.2 \text{ dB}$

$\therefore L_0(\omega_m) = -7.2 \text{ dB}$

由图  $L_0(\omega)$  求得  $\omega_m = \omega_c = 62 \text{ rad/s}$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \rightarrow T = 0.007\text{s} \rightarrow \omega_1 = \frac{1}{T} = 143 \text{ rad/s}$$

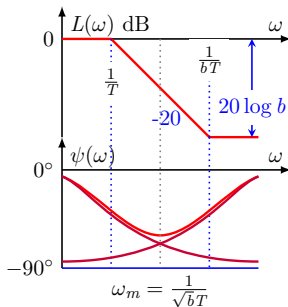
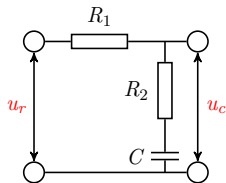
$$\omega_2 = \frac{1}{aT} = 27 \text{ rad/s}, \quad G_c(s) = \frac{0.037s + 1}{0.007s + 1}$$

(5)  $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$  验算  $\begin{cases} \omega_c = 62 \text{ rad/s} \\ \gamma = 47.5^\circ \end{cases}$  满足要求



# 串联滞后校正：滞后网络特性

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} \\
 &= \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} \\
 &= \frac{bTs + 1}{Ts + 1} \begin{cases} b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \\ T = (R_1 + R_2)C \end{cases} \\
 G_c(s) &= \frac{bTs + 1}{Ts + 1}
 \end{aligned}$$





# 串联滞后校正：滞后校正分析

- (1) 幅频高频衰减特性，使原系统截止频率  $\omega_c$  左移减小，相角裕度提高。适用于  $\omega_c$  有余，相角裕度不足时；
- (2) 相位滞后，会减小原系统相角裕度，应附加相角  $5 \sim 12^\circ$ ，并力求避免  $\omega_m$  出现在  $\omega_c$  附近，一般取

$$\omega_2 = 1/bT = (0.1 \sim 0.2)\omega_c$$

{ 相角迟后：是不利因素，应当避免  
幅值衰减：是有利因素，应当利用



# 串联滞后校正：步骤

实质—利用滞后网络幅值衰减特性挖掘系统自身的相角储备

滞后校正步骤 (设给定指标  $e_{ss}^*$ ,  $\omega_c^*$ ,  $\gamma^*$ )

(1) 由  $e_{ss}^* \rightarrow K$

(2) 由  $G_0(s) \rightarrow L_0(\omega) \rightarrow \omega_{c0} \rightarrow \gamma_0 \begin{cases} \omega_{c0} \text{有余} \\ \gamma_0 \text{不足} \end{cases}$

(3) 绘制曲线  $\gamma_c(\omega) = \gamma^* + 5^\circ \Rightarrow \omega_c$

(4) 作图设计  $\rightarrow G_c(s)$

(5)  $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$  验算  $\{\omega_c, \gamma\}$  是否满足要求





## 例 2 单位反馈系统 $G_0(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$

设计串联滞后校正环节，要求：1)  $K_v = 316s^{-1}$ ；2)  $r \geq 45^\circ$

(1) 由  $e_{ss}^* \rightarrow K = 316$

(2) 由  $G_0(s) \rightarrow L_0(\omega_c) \rightarrow \omega_{c0} \rightarrow \gamma_0 \begin{cases} \omega_{c0} = 40 \text{ rad/s} \\ \gamma_0 = 7^\circ \text{不足} \end{cases}$

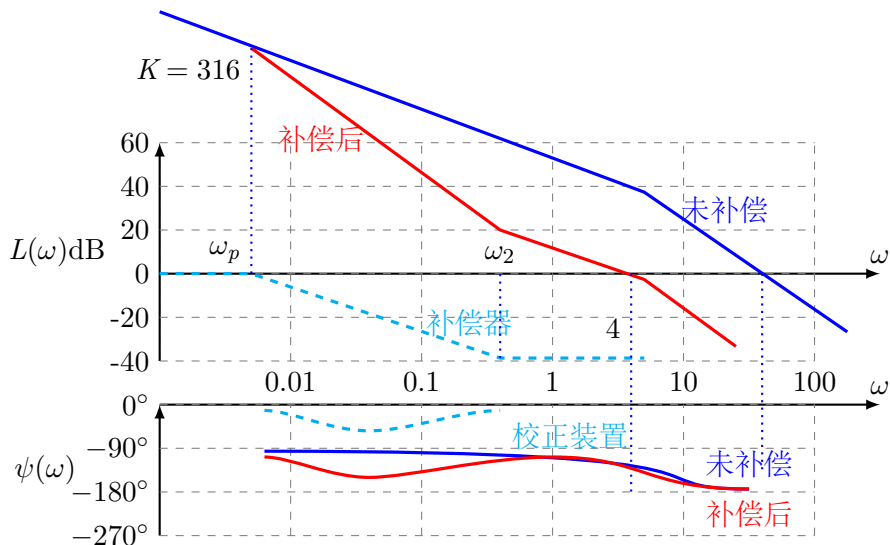
(3) 在  $L_0(\omega)$  上找  $\gamma_0(\omega_c) = \gamma^* + 5^\circ = 45^\circ + 5^\circ = 50^\circ$

$$\gamma_0 = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega \geq 50^\circ \rightarrow \omega_c = 4 \text{ rad/s}$$

(4) 确定参数  $b$ 。由图求  $L_0(\omega_c = 4) = 38 \text{ dB}$ ，令滞后网络  
 $20 \log b = -38 \text{ dB} \rightarrow b = 0.0125$ ,  $\omega_2 = 0.1\omega_c = 0.4 \text{ rad/s}$ ,  
 $\omega_1 = b\omega_2 = 0.005 \text{ rad/s}$

$$G_c(s) = \frac{2.5s + 1}{200s + 1}$$

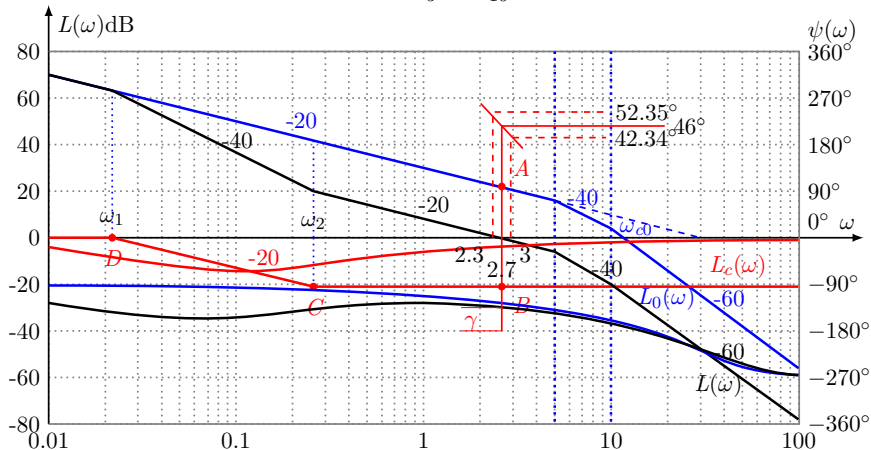
(5)  $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$  验算  $\begin{cases} \omega_c = 4 \text{ rad/s} \\ \gamma = 45.6^\circ \end{cases}$  满足要求





# 例 3 串联滞后校正

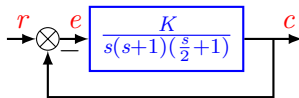
$$G_0 = \frac{K}{s(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{10}+1)}$$





# 串联滞后校正

例 4 系统结构图如图所示



要求：

(1) 静态速度误差  $e_{ss} \leq 0.2$

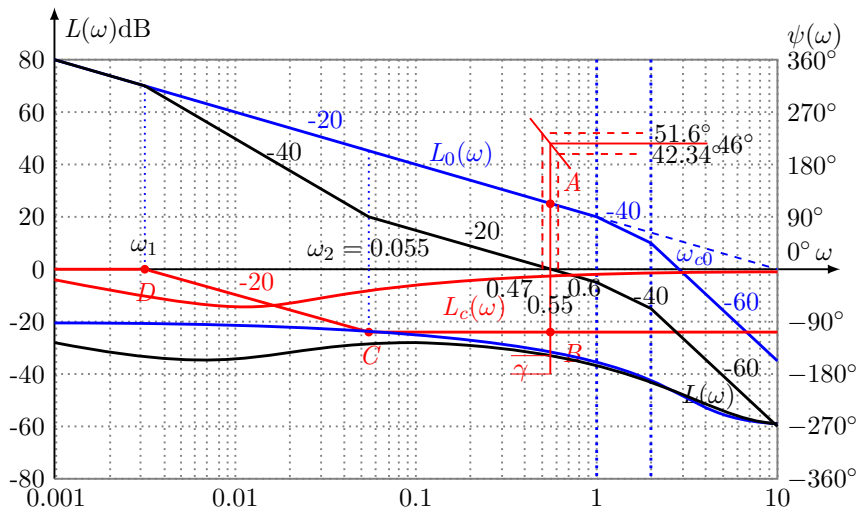
(2)  $\gamma^* \geq 40^\circ$

(3)  $h^* \geq 10$  dB

试确定校正装置传递函数  $G_c(s) = ?$

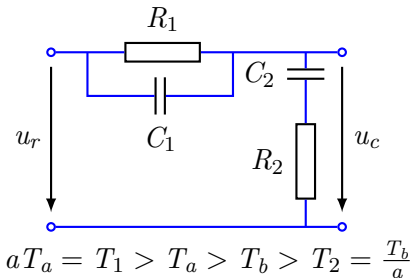


# 串联滞后校正



当用超前网络不足以达到指标，而用迟后校正时，又不能使系统落在有足够相角裕量的地方，要用迟后—超前网络校正。

$$\begin{cases} T_a = R_1 C_1 \\ T_b = R_2 C_2 \\ T_{ab} = R_1 C_2 \end{cases}$$

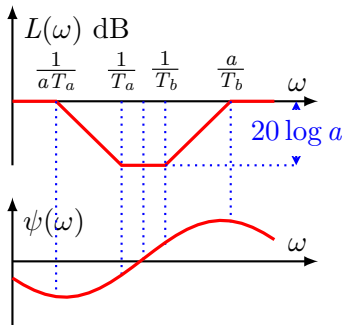




# 串联滞后 - 超前校正：滞后-超前网络特性

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(s + \frac{1}{T_a})}{(s + \frac{1}{aT_a})}}_{\text{滞后部分}} \cdot \underbrace{\frac{(s + \frac{1}{T_b})}{(s + \frac{a}{T_b})}}_{\text{超前部分}} \quad (a > 1)$$

滞后-超前网络特点：幅值衰减，相角超前  
 若高频与低频部分衰减因子分别为  $\alpha > 1$ ， $\beta < 1$ ，则高频部分幅值为  $20 \log \alpha \beta$





# 串联滞后 - 超前校正

实质—综合利用滞后网络幅值衰减、超前网络相角超前的特性，改造开环频率特性，提高系统性能

滞后-超前校正步骤 (设给定指标  $e_{ss}^*$ ,  $\omega_c^*$ ,  $\gamma^*$ )

(1) 由  $e_{ss}^* \rightarrow K$

(2) 由  $G_0(s) \rightarrow L_0(\omega) \rightarrow \omega_{c0} \rightarrow \gamma_0$  用  $\begin{cases} \text{超前校正} \\ \text{滞后校正} \end{cases}$  均无效时

(3) 确定  $\psi_m = \gamma^* - \gamma_0(\omega_c) + 6^\circ$   $\left\{ a = \frac{1+\sin\psi_m}{1-\sin\psi_m} \right.$ ,  $\sqrt{a}$

(4) 作图设计  $A - B - C - D - E - F \rightarrow G_c(s)$

(5)  $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$  验算  $\{\omega_c, \gamma\}$  是否满足要求





# 串联滞后 - 超前校正

例 5 单位反馈系统，已知：

$$G(s) = \frac{K}{s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{60} + 1)}$$

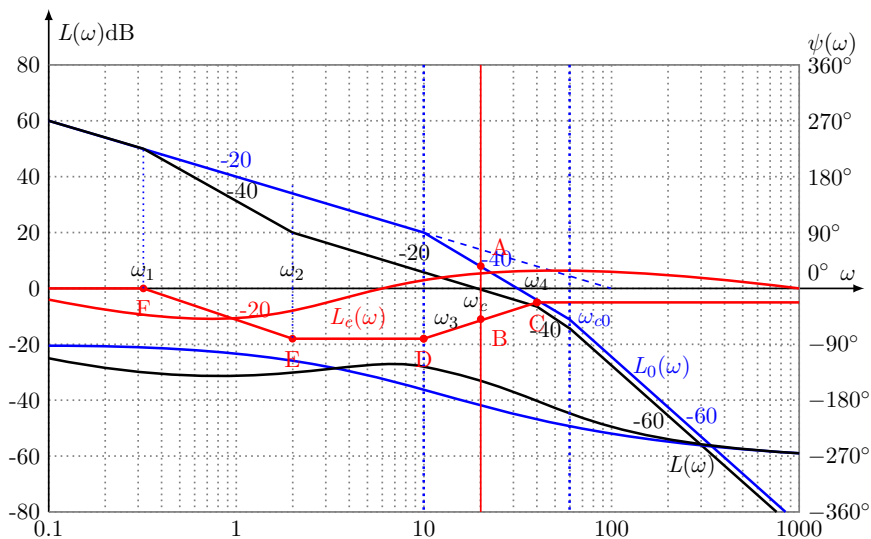
要求

$$\begin{cases} K = 100 \\ \gamma^* = 50^\circ \\ h^* \geq 10 \text{ dB} \\ \omega_c = 20 \end{cases}$$

确定  $G_c(s) = ?$



# 串联滞后 - 超前校正





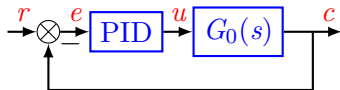
# 小结

## 串联校正方法的比较

校正方法	校正网络特点	应用场合	效果
超前校正	幅值增加 相角超前	$\begin{cases} \omega_{c0} < \omega_c^* \\ \gamma_0 < \gamma^* \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_c \uparrow, \gamma \uparrow \\ \text{高频段} \uparrow \end{cases}$
滞后校正	幅值衰减 相角滞后	$\begin{cases} \omega_{c0} > \omega_c^* \\ \gamma_0 < \gamma^* \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_c \downarrow, \gamma \uparrow \\ \text{高频段} \downarrow \end{cases}$
滞后超前	幅值衰减 相角超前	滞后超前 均不奏效	$\begin{cases} \omega_c \sim, \gamma \uparrow \\ \text{高频段} \sim \end{cases}$



# 比例-积分-微分 (PID) 调节器



PID 调节器：无需知道精确的控制对象模型

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

$u(t)$ : 控制器输出;  $e(t)$ : 误差信号

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

通常采用试探法确定参数  $K_P$ ,  $K_I$  和  $K_D$

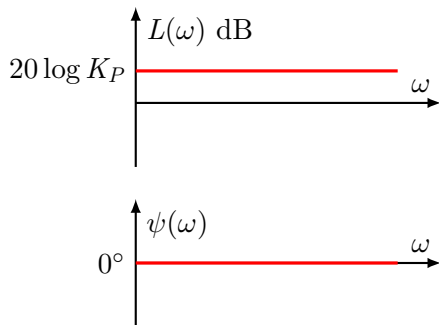


# 比例-积分-微分 (PID) 调节器

## 比例 (P) 调节器

$$G_c(s) = K_P$$

只调节系统增益，不影响系统相角



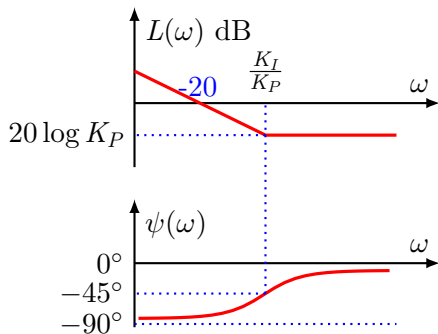


# 比例-积分-微分 (PID) 调节器

## 比例-积分 (PI) 调节器

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} = \frac{K_I(\tau s + 1)}{s}$$

其中  $\tau = K_P/K_I$ 。PI 调节器增加系统型别，可改善稳态性能。





# 比例-积分-微分 (PID) 调节器

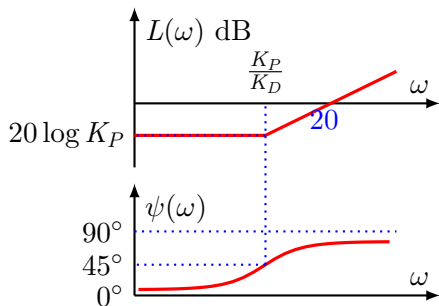
## 比例-微分 (PD) 调节器

$$G_c(s) = K_P + K_D s = K_P \left( \frac{K_D}{K_P} s + 1 \right)$$

相位超前校正，改善瞬态响应

PD 调节器对高频噪声有放大作用，可通过引入一个模值大于零点的极点（保证相位仍然超前）改善：

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K_P + K_D s}{s - p_{add}} \\ &= K_P \frac{(K_D/K_P)s + 1}{s - p_{add}} \end{aligned}$$





# 比例-积分-微分 (PID) 调节器

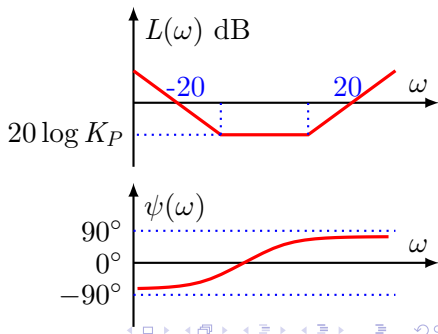
## 比例-积分-微分 (PID) 调节器

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

积分校正低频，微分校正高频

PID 调节器是一种滞后-超前校正器，同样会放大高频噪声，需要引入极点：

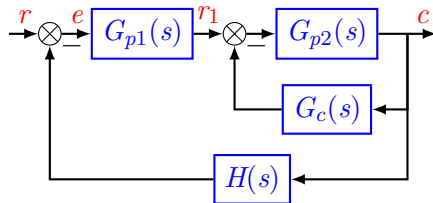
$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{s - p_{add}}$$







# 反馈校正



$G_c(s)$  为反馈校正装置， $G_{p2}(s)$  和  $G_c(s)$  构成局部回路，和  $G_{p1}(s)$  串联形成的回路为外回路（主回路）。



# 反馈校正-位置反馈

设

$$G_{p2}(s) = \frac{K_2}{Ts + 1}$$

且

$$G_c(s) = K_P$$

则局部闭环传函

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{\frac{K_2}{Ts+1}}{1 + \frac{K_2 K_P}{Ts+1}} = \frac{K'_2}{T's + 1}$$

其中

$$K' = \frac{K_2}{1 + K_2 K_P}, \quad T' = \frac{T}{1 + K_2 K_P}$$

位置反馈减小原系统的时间常数和增益，加快系统响应。但增益减小增大稳态误差，可在  $G_{p1}(s)$  中加入放大器进行补偿。



# 反馈校正-速度反馈

设  $G_{p2}(s)$  由功放和执行电机组成，则  $c$  为角位移，有

$$G_{p2}(s) = \frac{K_2}{s(T_m s + 1)}$$

$G_c(s)$  为测速发电机：  $G_c(s) = K_1 s$ ，在  $K_2 K_t \gg 1$  时，局部闭环传函可简化为

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{1}{K_t s \left( \frac{T_m}{K_2 K_t} s + 1 \right)}$$

用  $\frac{C(s)}{R_1(s)}$  除去  $G_{p2}(s)$ ，局部反馈相当于在  $G_{p2}(s)$  前串联  $G_{eq}$ ：

$$G_{eq}(s) = \frac{1}{K_2 K_t} \cdot \frac{T_m s + 1}{\frac{T_m}{K_2 K_t} s + 1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a T s + 1}{T s + 1}$$

\* 速度反馈效果等价于超前校正装置



# 反馈校正-速度微分反馈

考虑上例，在局部反馈中串接微分网络  $\frac{T_d s}{T_d s + 1}$ ，则有

$$G_c(s) = \frac{K_t T_d s^2}{T_d s + 1}$$

局部反馈的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R_1(s)} = \frac{K_2(T_d s + 1)}{s[T_m T_d s^2 + (T_m + K_2 K_t T_d + T_d)s + 1]}$$

若  $K_2 K_t \gg 1$  且  $K_2 K_t T_d \gg T_m$ ，局部反馈相当于在  $G_{p2}(s)$  前串接

$$G_{eq} = \frac{(T_m s + 1)(T_d s + 1)}{\left(\frac{T_m}{K_2 K_t} s + 1\right)(K_2 K_t T_d s + 1)}$$

\* 速度微分反馈效果等价于滞后-超前校正装置。



# 小结

- (1) 串联超前校正：改变中高频幅值，提升相角
- (2) 串联滞后校正：幅频高频衰减，会减小原系统  $\gamma$ ，应附加相角  $5^\circ \sim 12^\circ$
- (3) 串联滞后-超前：幅值衰减，相角超前，提升  $\gamma$ ，不影响高频段
- (4) 比例调节器：只调节系统增益，不影响相角
- (5) 比例积分调节器：增加系统型别，改善稳态性能
- (6) 比例微分调节器：相位超前校正，改善瞬态响应
- (7) 比例积分微分调节器：等价于滞后超前校正，实际使用应引入极点
- (8) 位置反馈校正：减小时间常数，加快响应
- (9) 速度反馈校正：等价于超前校正
- (10) 速度微分反馈：等价于滞后超前校正
- (11) 按扰动补偿复合校正：前馈抑制大扰动，反馈抑制小扰动
- (12) 按输入补偿复合校正，使输出完美复现输入，时间响应特性理想。