



# Tecnológico de Monterrey

Bloque 2: Modelación computacional del movimiento

Simulación Cinemática de Projectiles (Bloque F1004B) – Octubre 2021

Zoe Mercandetti Hernández - A01656465  
Alejandro Pozos Aguirre - A01656017  
Andrés Eugenio Martínez Sanchez - A01656442  
Daniel Nava Mondragón - A01661649  
Carlos Alberto Mendoza Medina - A01661896

Profesores:  
Víctor Robledo Rella  
Luis Octavio Castaños Cervantes

Octubre 2021

**Resumen.** Presentar de manera breve, qué se hizo, cómo se hizo, así como los resultados y conclusiones principales.

En este reto se desarrolló una simulación simple en Excel, y posteriormente en MatLab, del movimiento de una partícula tras ser expulsada en la erupción de un volcán. Se encontraron las ecuaciones que definen el movimiento de dicha partícula, y se tradujeron a fórmulas de Excel. Se obtuvieron diversas tablas que muestran el comportamiento de la partícula en función a su velocidad y ángulo. Se encontró que la velocidad y el ángulo iniciales influyen directamente en el alcance del proyectil; a mayor velocidad, el proyectil llega más lejos. El ángulo también determina el alcance vertical y horizontal del proyectil.

**Introducción. (Breve) Incluir:**

**a) planteamiento y definición del problema**

Se investiga cuáles son los riesgos que representa la actividad del volcán Popocatepetl para los habitantes de las zonas cercanas al volcán. De modo que con ayuda de diferentes *software* como *MatLab* y *Excel* se crea una simulación computacional basada en las leyes de física con la finalidad de determinar las posiciones y velocidades de impacto de los proyectiles.

**b) definición de fricción aerodinámica:**

Según Connor, “la fuerza de fricción es proporcional al área de superficie. Por lo tanto, los cuerpos con un área de superficie más grande experimentarán un arrastre de fricción mayor” (2019). Gracias a la condición antideslizante de un fluido en movimiento, este ejerce una fuerza de corte tangencial, causada por sus cualidades viscosas. Este tipo de arrastre depende de la geometría, rugosidad y del tipo de flujo del fluido. La fuerza de fricción aerodinámica es proporcional al área transversal de la superficie, es decir, los cuerpos que cuentan con un área de superficie mayor tienden a tener mayor arrastre de fricción. Esto se debe a que deberá mover una cantidad mayor de aire para poder desplazarse por el fluido.

### c) descripción del concepto de integración numérica

Según Martínez et al., “el método de cuadratura numérica es un método con el cual se aproxima la integral de una función” (s.f.). Es decir, es una variedad de métodos por los cuales se busca encontrar una función similar a la integral de esa función. Ya que hay ocasiones en la que es imposible utilizar el teorema fundamental del cálculo, ya que no existe una función a integrar. Existen diversos métodos, mas en este reto se ha utilizado el método de Euler, que a su vez forma parte de los métodos de Runge-Kutta.

#### Método de Euler

El método de Euler es el más simple de los métodos de Runge Kutta en el que, según Figueroa, “podemos usar el punto  $(x_0, y_0)$  para construir el siguiente punto  $(x_1, y_1)$  y así sucesivamente” (s.f.). Con cada iteración se crea una nueva pendiente que estima la integral real, aunque dependiendo del tamaño de paso será mayor o menor esta semejanza. En general, se calcula con la fórmula:

$$x_i = x_0 + ih \mid 0 \leq i \leq n$$

Para este proyecto se modificó el modelo base del método de Euler para que coincidiese con las ecuaciones de tiro parabólico, descritas a continuación.

#### d) ecuaciones utilizadas

$$x = x_o + V_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad y = y_o + V_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t \quad v_y = v_{oy} + a_y t$$

$$x_{i+1} = x_i + V_{xi} \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2 \quad y_{i+1} = y_i + V_{yi} \Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2$$

$$v_{x_{i+1}} = v_{xi} + a_{xi} \Delta t \quad v_{y_{i+1}} = v_{yi} + a_{yi} \Delta t$$

$$a_x = \frac{-k}{m} \cdot v \cdot v_x \quad a_y = \frac{-k}{m} \cdot v \cdot v_y - g$$

$$\hat{\Sigma F} = m\hat{a} \quad |\hat{R}| = kv^2$$

**Métodos.** Incluir los datos de entrada y las suposiciones. Describir métodos y procedimientos empleados para calcular las trayectorias de los proyectiles. Describir cómo se calcularon las aceleraciones ( $a_x, a_y$ ), velocidades ( $v_x, v_y$ ) y posiciones ( $x, y$ ) de los proyectiles **con y sin** resistencia del aire.

**Datos de entrada:**

x (Posición inicial en eje x), y (Posición inicial en eje y)

Vx (Velocidad inicial en eje x), Vy (Velocidad inicial en eje y)

ax (Aceleración inicial en eje x), ay (Aceleración inicial en eje y)

**Constantes:**

g (Fuerza de gravedad) =  $-9.81 \text{ m/s}^2$

$\rho$  (Densidad del aire) =  $1.22 \text{ kg/m}^3$

$\delta$  (Parámetro de forma) = 1

k (Parámetro de forma) = 0.0007665486075

A (Área transversal del proyectil) = 0.01

$\Delta t$  (Longitud de paso) = 0.1s

**Cálculo de variables**

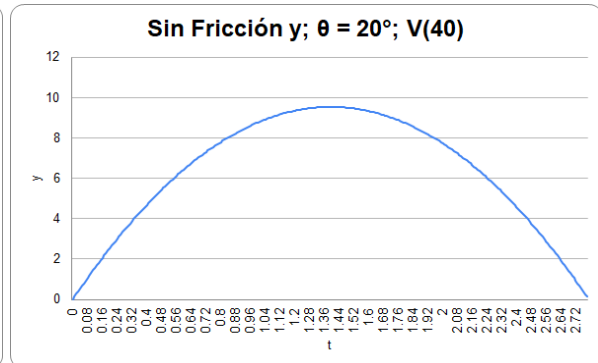
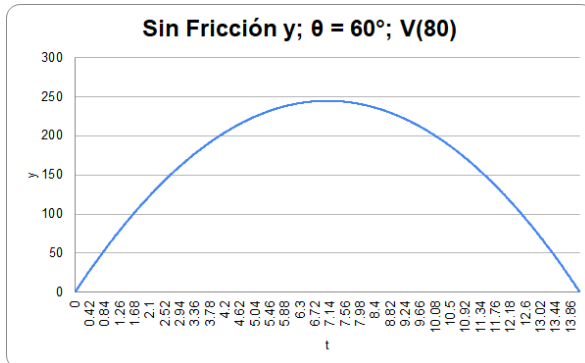
$$k = \rho \cdot A \cdot \delta$$

$$A = (4 \cdot \pi \cdot r^2) / 2 \text{ (con radio [r] dado)}$$

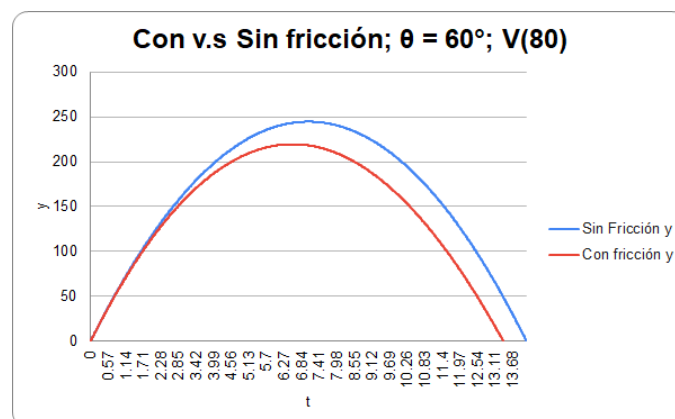
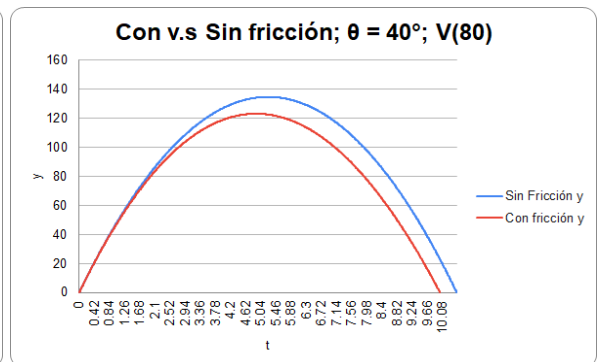
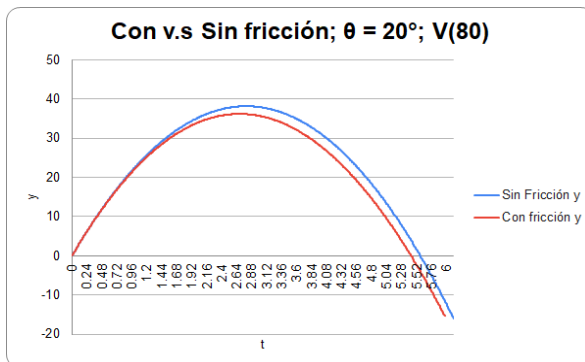
Con fricción	Sin fricción
$a_x = -(k/m) \cdot v \cdot v_x$ $a_y = -g - (k/m) \cdot v \cdot v_y$ $v_{xf} = v_{xi} + a_{xi} \cdot \Delta t$ $v_{yf} = v_{yi} + a_{yi} \cdot \Delta t$ $ v  = \text{SQRT}(v_{xf}^2 + v_{yf}^2)$ $x_f = x_i + v_{xi} \cdot \Delta t + 0.5 \cdot a_{xi} \cdot \Delta t^2$ $y_f = y_i + v_{yi} \cdot \Delta t + 0.5 \cdot a_{yi} \cdot \Delta t^2$	$a_x = 0$ $a_y = -g$ $v_{xf} = v_{xi}$ $v_{yf} = v_{yi} + a_{yi} \cdot \Delta t$ $ v  = \text{SQRT}(v_{xf}^2 + v_{yf}^2)$ $x_f = x_i + v_{xi} \cdot \Delta t$ $y_f = y_i + v_{yi} \cdot \Delta t + 0.5 \cdot a_{yi} \cdot \Delta t^2$

**Análisis de datos y resultados.** Incluir resultados principales (diagramas, tablas, gráficas, cálculos, simulaciones). Comparar las trayectorias con y sin fricción.

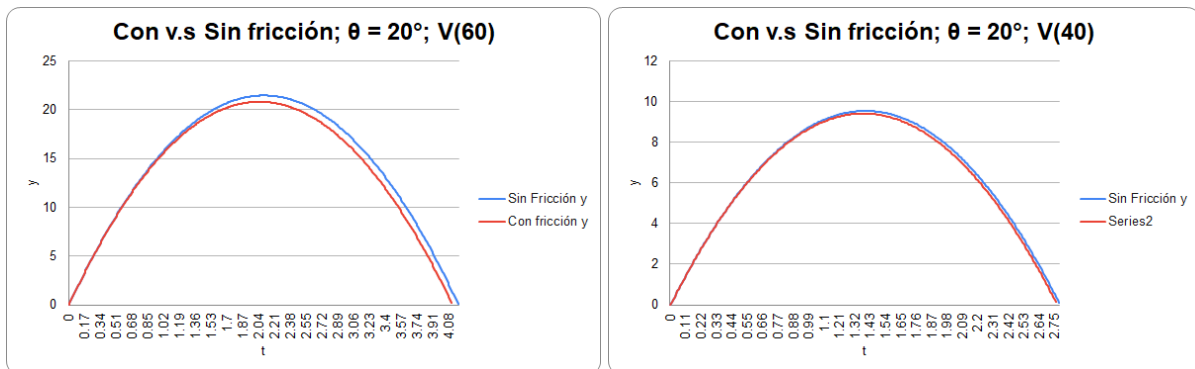
**a) Comparativa entre las gráficas con mayor ángulo y mayor velocidad, contra menor ángulo y menor velocidad.**



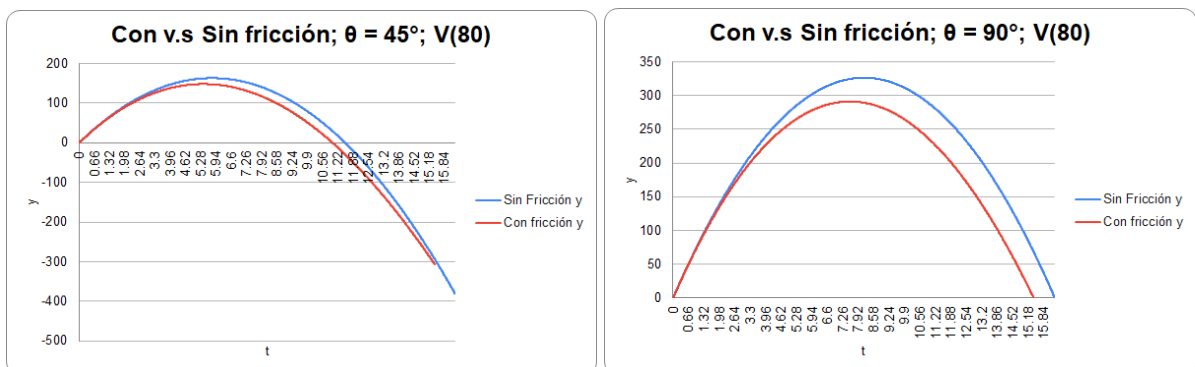
**b) Comparativa entre gráficas de Fricción excluida contra Fricción incluida con variación angular.**



**c) Comparativa entre las gráficas de mismo ángulo con diferente velocidad.**



**d) Comparativa entre las gráficas de menor alcance vertical y mayor alcance horizontal ( $45^\circ$ ); y mayor alcance vertical y menor alcance horizontal ( $90^\circ$ ), respectivamente.**



**e) Comparativa de alcances en x & en y con ángulos de  $45^\circ$  y  $90^\circ$**

[ $45^\circ$ ]  $t = 10.98$ ;  $x_f = 548.4693258$ ;  $MAX(y) = 148.1417384$ ; Máximo en x, Mínimo en y

[ $90^\circ$ ]  $t = 15.4$ ;  $x_f = 6.74994E-14$ ;  $MAX(y) = 291.0919141$ ; Máximo en y, Mínimo en x

**Discusión. Incluir una discusión breve de los resultados principales.**

Con base en los resultados que obtuvimos, observamos que, dependiendo del ángulo y de la velocidad inicial del proyectil, los resultados varían considerablemente. Incluso en situaciones donde el ángulo varía por un solo grado, se observa una diferencia notable en la distancia recorrida en ambos ejes, siendo  $90^\circ$  el ángulo que tiene la menor distancia horizontal, y  $45^\circ$  el que llega más lejos en el eje x.

Es posible afirmar que un proyectil sin fricción del aire siempre llegará más lejos que uno que sí la toma en cuenta. Supóngase un ambiente al vacío con dos objetos en caída libre. En este caso, ambos objetos caen al mismo tiempo; sin embargo, al añadir resistencia del aire, la varianza en el área transversal de los objetos se vuelve un factor muy determinante de la distancia a la que llega un objeto, ya sea en caída libre, tiro parabólico o solo movimiento horizontal.

Relacionando lo anterior directamente con los volcanes, es bien sabido que las explosiones lanzan proyectiles de tamaños diversos a todo el alrededor de este, como es de esperarse, cada uno sale con ángulos y velocidades distintas, al igual que con dimensiones y formas diferentes. Este último punto determina particularmente el qué tan grande será su desplazamiento, ya que, a mayor área del proyectil, menor es la distancia que podrá recorrer.

**Conclusiones. Resumir brevemente los resultados principales (se parecen al resumen).**

En conclusión, la fricción del aire afecta considerablemente el desplazamiento total del proyectil, otros datos a considerar son que la forma de la roca y el ángulo de lanzamiento importa para este tipo de cálculos, pues de éstos depende el alcance en  $x$  y en  $y$  de la partícula. Asimismo, cuando consideramos que no hay fricción lo único que hace que se detenga el proyectil es la gravedad que ejerce la Tierra sobre el objeto.

Consideramos que la realización de este trabajo nos otorga una idea más clara de la trayectoria de los proyectiles volcánicos y cuál sería su impacto en la vida de las personas que viven en las proximidades de algún volcán.

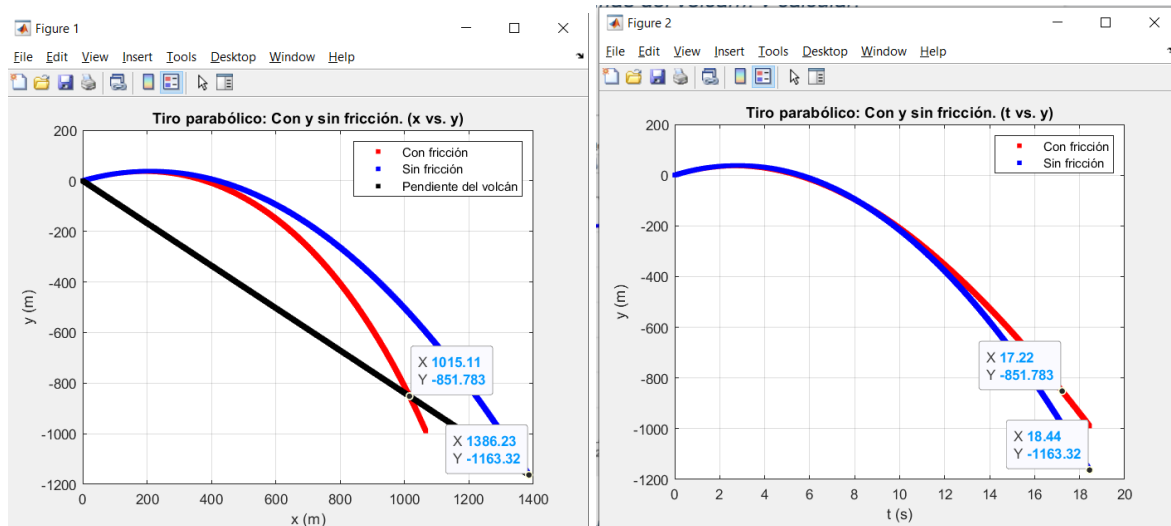


## Entrega 2

Establecer una función que defina el **perfil del volcán cerca del cráter** (puede ser incluso una recta, estimado la pendiente de fotografías del volcán), y calcular:

- los puntos donde caerán los fragmentos eyectados por el volcán,
- las velocidades (magnitud y dirección) de los proyectiles justo antes del impacto,
- la altura máxima de los proyectiles y
- el tiempo de vuelo.

Gráficas con  $dt = 0.01$ ;  $r = 0.01$ ;  $(x, y) = (0, 0)$ ;  $\theta = 20^\circ$ ;  $v(80)$ .



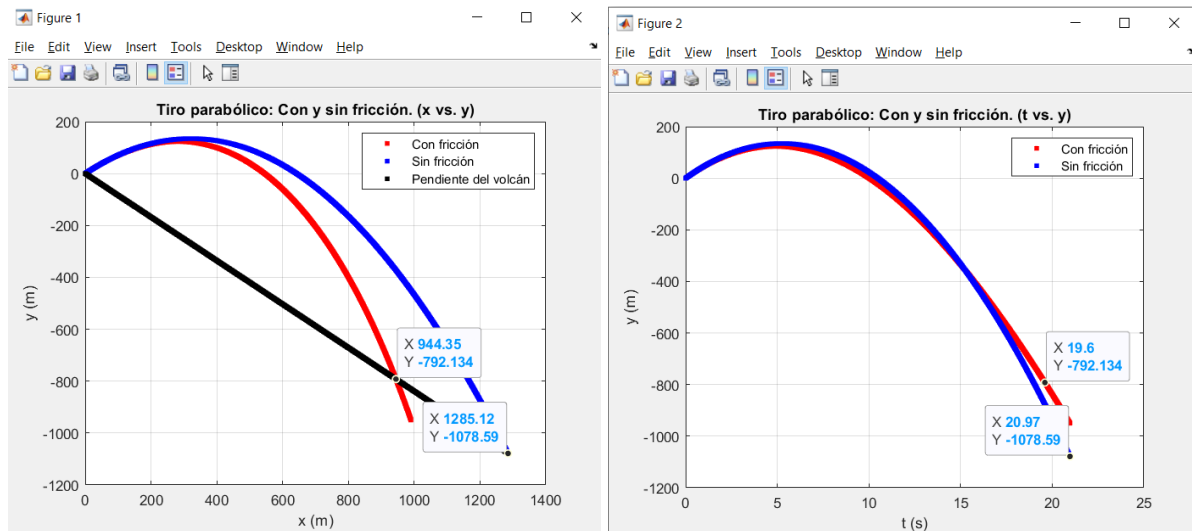
### Con fricción

- $x_f = 1015.11$  m,  $y_f = -851.783$  m,
- $v_f = 123.25$  m/s a  $-72.91^\circ$ ,
- $y_{Max} = 36.19$  m,
- $t_f = 17.22$  s;

### Sin fricción

- $x_{sf} = 1386.23$  m,  $y_{sf} = -1163.32$  m,
- $v_{fs} = 170.95$  m/s a  $-63.91^\circ$ ,
- $y_{sMax} = 38.16$  m,
- $t_{sf} = 18.44$  s;

Gráficas con  $dt = 0.01$ ;  $r = 0.01$ ;  $(x, y) = (0, 0)$ ;  $\theta = 40^\circ$ ;  $V(80)$ .



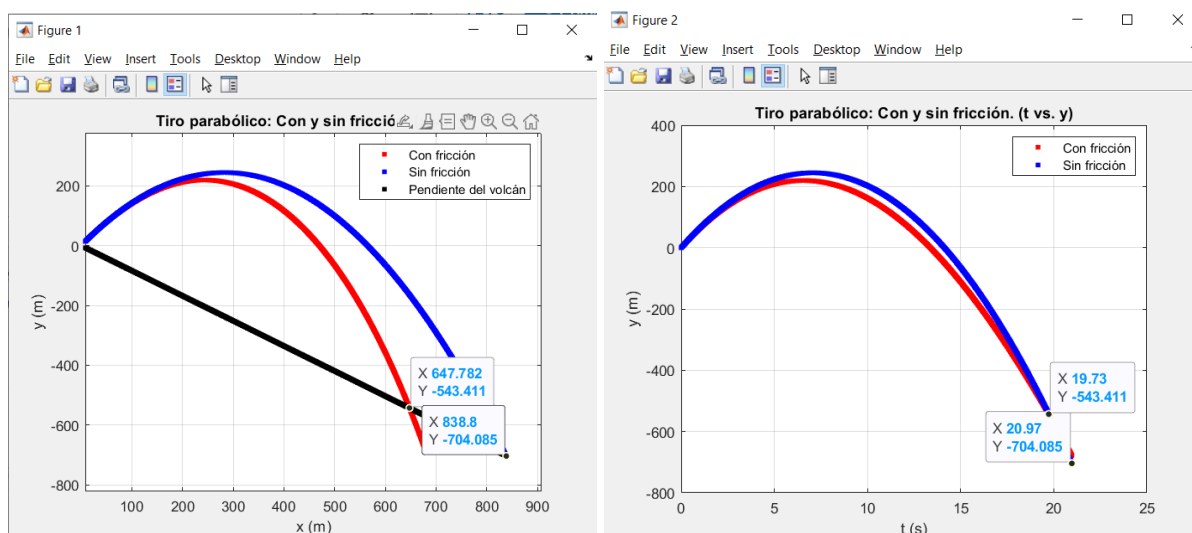
### Con fricción

- a)  $x_f = 944.35$  m,  $y_f = -792.134$  m
- b)  $v_f = 122.44$  m/s a  $-74.71^\circ$ ,
- c)  $y_{Max} = 123.19$  m,
- d)  $t_f = 19.6$  s;

### Sin fricción

- a)  $x_{sf} = 1285.12$  m,  $y_{sf} = -1078.59$  m,
- b)  $v_{fs} = 166.02$  m/s a  $-68.34^\circ$ ,
- c)  $y_{sMax} = 137.78$  m,
- d)  $t_{sf} = 20.97$  s;

Gráficas con  $dt = 0.01$ ;  $r = 0.01$ ;  $(x, y) = (0, 0)$ ;  $\theta = 60^\circ$ ;  $V(80)$ .



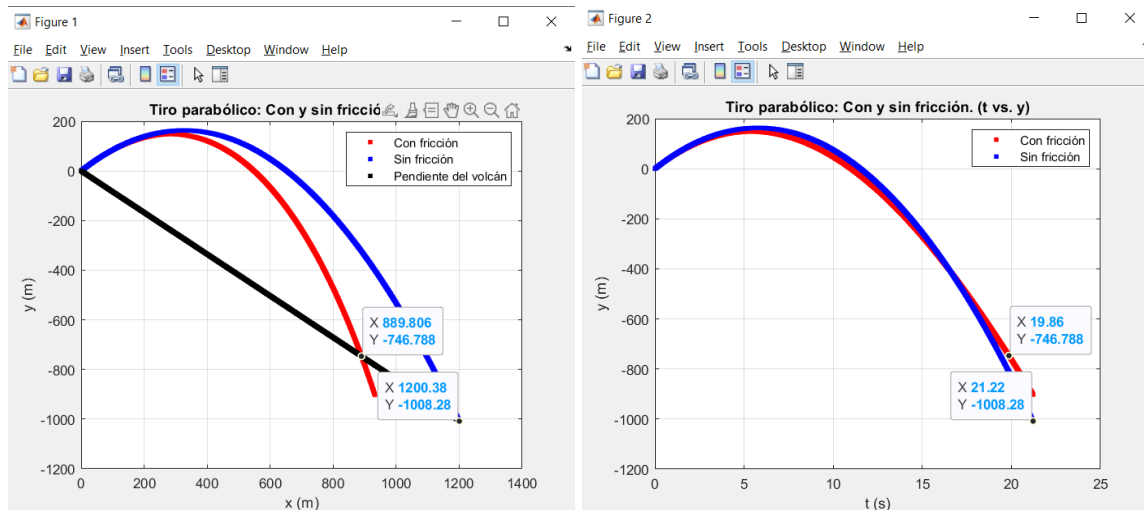
**Con fricción**

- a)  $x_f = 647.782 \text{ m}$ ,  $y_f = -543.411 \text{ m}$ ,
- b)  $v_f = 114.50 \text{ m/s}$  a  $-78.14^\circ$ ,
- c)  $y_{\text{Max}} = 219.48 \text{ m}$ ,
- d)  $t_f = 19.73 \text{ s}$ ;

**Sin fricción**

- a)  $x_{sf} = 838.8 \text{ m}$ ,  $y_{sf} = -704.085 \text{ m}$ ,
- b)  $v_{fs} = 142.18 \text{ m/s}$  a  $-73.66^\circ$
- c)  $y_{s \text{ Max}} = 244.65 \text{ m}$ ,
- d)  $t_{sf} = 20.97 \text{ s}$ ;

Gráficas con  $dt = 0.01$ ;  $r = 0.01$ ;  $(x, y) = (0, 0)$ ;  $\theta = 45^\circ$ ;  $v(80)$ .

**Con fricción**

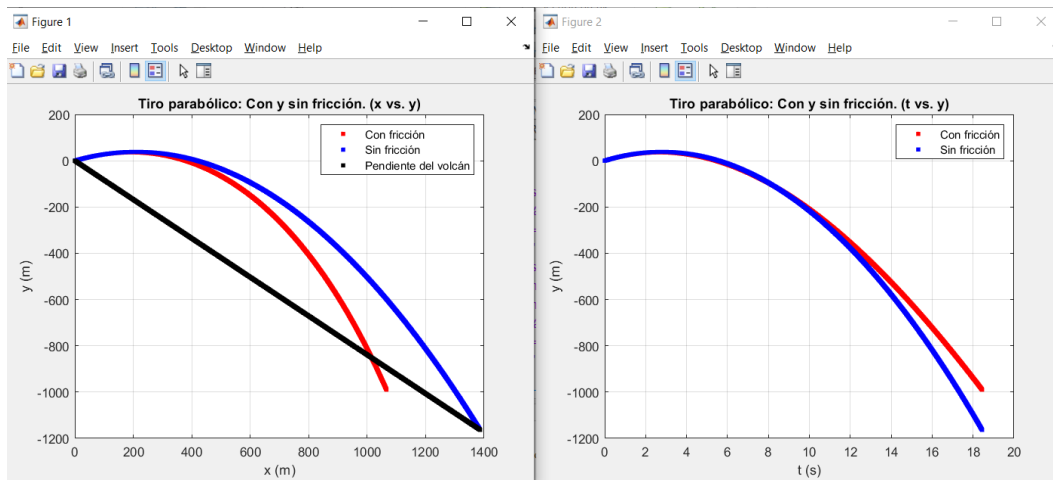
- a)  $x_f = 889.806 \text{ m}$ ,  $y_f = -746.788 \text{ m}$ ,
- b)  $v_f = 121.35 \text{ m/s}$  a  $-75.55^\circ$ ,
- c)  $y_{\text{Max}} = 148.14 \text{ m}$ ,
- d)  $t_f = 19.86 \text{ s}$ ;

**Sin fricción**

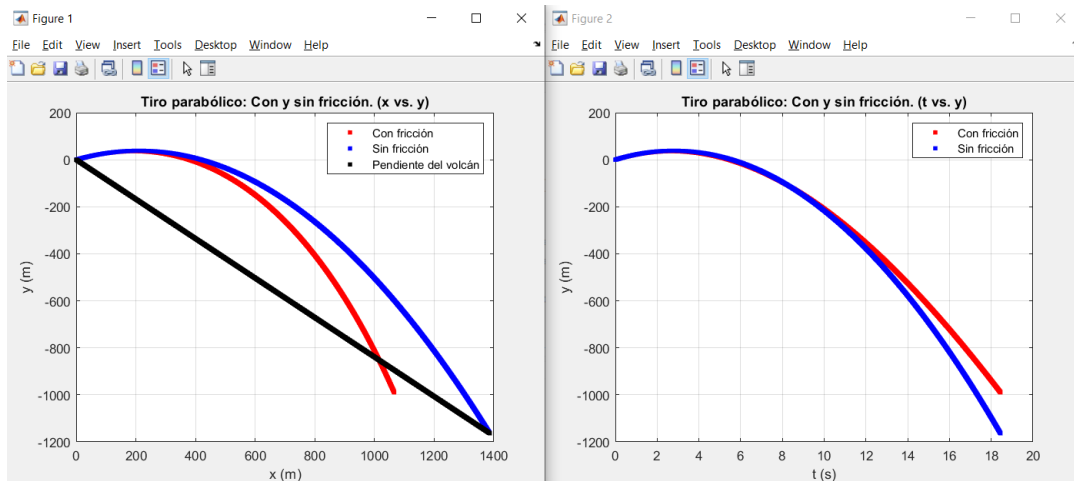
- a)  $x_{sf} = 1200.38 \text{ m}$ ,  $y_{sf} = -1008.28 \text{ m}$ ,
- b)  $v_{fs} = 161.81 \text{ m/s}$  a  $-69.54^\circ$
- c)  $y_{s \text{ Max}} = 163.10 \text{ m}$ ,
- d)  $t_{sf} = 21.22 \text{ s}$ ;

Además, discutir cuál es el efecto del paso  $\Delta t$  en los resultados obtenidos.

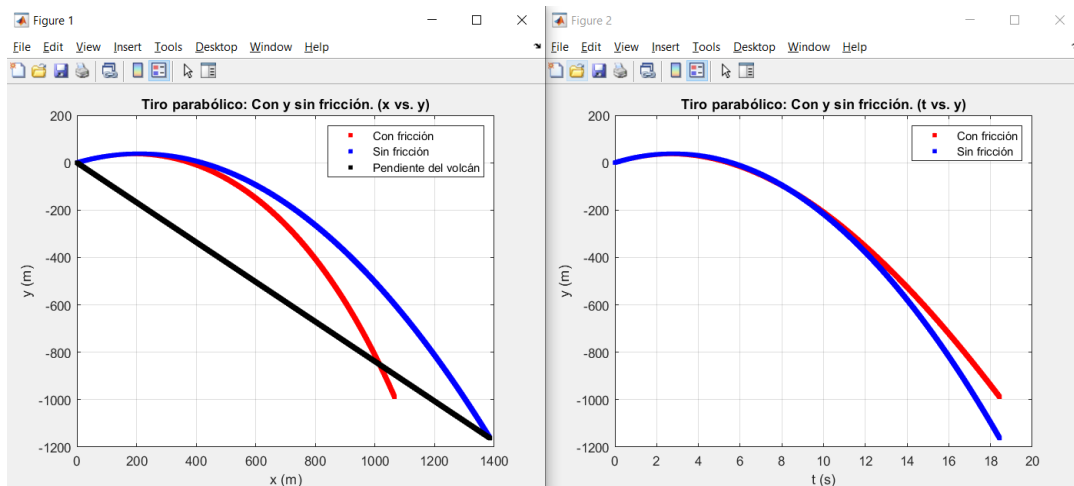
$\Delta t = 0.01$



$\Delta t = 0.001$



$\Delta t = 0.0001$



La variación entre los datos finales con longitudes de paso entre 0.1 y 0.01 es de tan solo pocas unidades. Por otro lado, la variación entre los datos finales con cada una de las longitudes de paso menores a 0.01 (0.01, 0.001, 0.0001) son mínimos, hablamos de una diferencia de centésimas pero la diferencia del número de datos (observaciones) entre ellas es exponencial, a tal grado que el cálculo con una longitud de paso de 0.0001 se vuelve una pérdida de tiempo total, pues sólo calcular unos 780,000 observaciones tarda casi 3 minutos, tiempo que excede el límite de la paciencia.

### ***Resultados con longitudes de paso de 0.01 s (izq.) y 0.001 s (der)***

```
~~~~ Resultados sin fricción ~~~~
Posición final en x = 1386.23 (m).
Posición final en y = -1163.32 (m).
Altura máxima = 38.16 (m).
Velocidad final = 170.95 (m/s).
Hacia: -63.91°.
```

```
~~~~ Resultados sin fricción ~~~~
Posición final en x = 1386.16 (m).
Posición final en y = -1163.16 (m).
Altura máxima = 38.16 (m).
Velocidad final = 170.94 (m/s).
Hacia: -63.91°.
```

### **Análisis de resultados y comparación entre Excel y MatLab**

Los resultados obtenidos por el código de MatLab aparentan ser más precisos que los del Excel, pues son cantidades de datos mayores. La longitud de paso afecta de una manera ligera en los primeros decimales, mas su impacto disminuye gradualmente al disminuirla hacia centésimas y milésimas. Por otro lado, es evidente, tanto en Excel como en MatLab, que la partícula sin fricción siempre llegará más lejos que la que sí tiene fricción. Además, podría parecer, en las gráficas de posición contra *tiempo*, que la partícula con fricción cae más lejos, sin embargo, esto no es así, pues en la otra gráfica, de posición x contra posición y, es posible visualizar que la partícula sin fricción llega más lejos. Esto se debe a que la partícula con fricción tarda *más tiempo* en llegar a la misma altura que la que no tiene fricción, pero no por eso llega más lejos. Finalmente, se observa que en todos los casos, el ángulo de 45° permite a ambas partículas llegar más lejos.

**Reflexión grupal****a) En tu opinión, ¿qué valores éticos están en juego en este escenario?**

En este escenario, la responsabilidad y la honestidad están en juego; su ausencia pondría en riesgo la vida humana; es preciso que el cálculo de las variables involucradas sea sumamente preciso y, sobre todo, honesto. Un mal cálculo podría dar demasiada confianza a los pobladores, que podrían bajar la guardia y sufrir las consecuencias de una erupción volcánica.

**b) Se ha documentado que hay varios dueños de terrenos que se han visto en la necesidad de vender terrenos en las cercanías del volcán a precios muy atractivos (en particular hacia la zona de Cholula, hacia donde apunta la boca del volcán), debido a que los cultivos de esas tierras ya no les dan las ganancias que tenían antes. ¿Qué valores éticos consideras que están presentes en esta problemática? ¿Qué recomendación ética le darías a los dueños de los terrenos? ¿Por qué? ¿Y a los posibles compradores?**

Desde un punto de vista utilitarista, los vendedores de estos terrenos no están haciendo nada malo; ya que, como tal, son los dueños y tienen derecho a vender sus terrenos, no obstante, desde nuestra perspectiva y valores, creemos que está mal vender esos terrenos con la finalidad de que alguien más los use debido a que se está propiciando una situación de peligro donde alguien podría salir estar en riesgo (en el caso de que el volcán erupcione). Por otro lado, es una especie de estafa; debido a que, esas tierras no son cultivables y son estériles debido a su proximidad con el volcán. La honestidad y la empatía brillan por su ausencia en este problema. Se aconsejaría no vender los terrenos, o bien venderlos a su precio real. A los compradores se aconsejaría ser precavidos con los terrenos que compran, a fin de no poner en riesgo su integridad y la de su capital.

**c) Se sospecha que un asesor contratado previamente por el Sistema Meteorológico Nacional, coludido con algunos de los dueños de los terrenos aledaños al volcán, ajustó algunos de los parámetros relevantes del problema (como velocidad y ángulos de disparo, masa de los proyectiles, coeficientes de arrastre, etc.) para disminuir aparentemente los riesgos involucrados. ¿Qué recomendaciones éticas y críticas le habrías a este asesor ¿Por qué? ¿Y a los dirigentes del SMN?**

Este caso está lleno de corrupción en todos los niveles, desde el sistema Meteorológico Nacional hasta el contratista, se recomendaría que hubiese una auditoría externa que pudiera revisar los antecedentes del asesor y su experiencia laboral y que al mismo tiempo revisara los procedimientos que usa la empresa para contratar a los empleados. Claramente, la honestidad y ética se ven afectadas y no son empleadas por nadie. El Gobierno debería de estar más pendiente de la calidad de sus procesos de contratación del SMN. Se recomendaría imponer una sanción a todos los involucrados o incluso algún tipo de persecución legal.

**d) ¿Cómo podríamos a nivel *regional, estatal y nacional* implementar acciones prácticas y efectivas que nos ayuden como sociedad a disminuir y eventualmente erradicar actitudes de corrupción?**

Una idea sería organizar una asociación civil con los afectados que contenga un estudio de todos los factores que afectan o benefician a los interesados para después exponerlo con las autoridades y que se dé una posible solución. Así, poco a poco más se irán haciendo organizaciones que cumplan las necesidades de todas las personas. A nivel sociedad, debe quitarse poder a los más poderosos mediante procesos democráticos, y penar severamente el nepotismo.

**e) ¿Y respecto de actitudes de impunidad por parte de los dueños de los terrenos o dirigentes gubernamentales?**

Deberían haber regulaciones gubernamentales más estrictas para los dueños de terrenos que deseen vender sus propiedades y obligarlos a presentar evidencias de que sus terrenos son cultivables y que se encuentran en zonas seguras, para que posibles compradores no sean engañados y sea una transacción legalmente válida y aceptable sin dolo para nadie.

**f) ¿Qué tan confiables son nuestras autoridades regionales, estatales y nacionales? ¿Qué podemos hacer para mejorar comportamientos no éticos?**

Es posible afirmar que las autoridades no son confiables, pues desgraciadamente vivimos en uno de los países más corruptos del mundo, y es esta condición la que lleva al incumplimiento de muchas leyes y poca confianza sobre nuestras autoridades. La manera en

que podemos hacer un cambio es predicar con el ejemplo y actuar de manera adecuada y ética, además de reportar actos ilícitos de los cuales seamos testigos. Además, es importante que la población civil se una para exigir cambios concretos. La educación es la mejor manera de mejorar los comportamientos no éticos, todos somos responsables de dirigirse apropiadamente en beneficio de la comunidad.

### Referencias. (formato APA).

- Connor, N. (2020, 7 enero). *¿Qué es la fuerza de fricción aerodinámica? Definición*. Thermal Engineering. Recuperado 15 de octubre de 2021, de <https://www.thermal-engineering.org/es/que-es-la-fuerza-de-friccion-aerodinamica-definicion/>
- Figueroa M., G. (s.f.). Método de Euler. Revista digital Matemática. Octubre 16, 2021. <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap1-geo/node14.html>
- Martínez Vázquez, M., Cuevas Durán, J., Alberto Acosta, J., Franco Torres, J. (s.f.) 2.4. Integración Numérica. *Apuntes de Cálculo diferencial e integral*. Octubre 16, 2021. Cidecame Sitio Web. [http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro8/24\\_integracin\\_numrica.html](http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro8/24_integracin_numrica.html)



**Aportación por Integrante:**

Zoe Mercandetti Hernández - A01656465:

Investigación de los temas de la introducción

Desarrollo del planteamiento del problema

Desarrollo de la fricción Aerodinámica

Corrección de datos en Excel

Desarrollo de la presentación

Alejandro Pozos Aguirre - A01656017:

Desarrollo del Excel

Desarrollo de casos en Excel

Traducción de fórmulas a Excel

Depuración de la Hoja de cálculo

Investigación y redacción del documento (Énfasis en Introducción y Resultados)

Corrección de estilo

Andrés Eugenio Martínez Sanchez - A01656442:

Desarrollo del Excel

Corrección de fórmulas en el Excel

Graficación en el Excel

Corrección gramatical del documento

Daniel Nava Mondragón - A01661649:

Desarrollo del Excel

Corrección de fórmulas en el Excel

Graficación en el Excel

Corrección gramatical del documento

Desarrollo de la presentación

Carlos Alberto Mendoza Medina - A01661896:

Creación de las tablas de datos sin fricción del excel

Apoyo en tabla de datos con fricción

Gráficas de desplazamiento vs tiempo

Incluir en el documento las fórmulas utilizadas

Preguntas Éticas

Investigación de temas de la introducción y Conclusiones