常微分方程-2025 年秋季学期

作者：容志谨（课程助教）

联系方式：rzj@stu.ouc.edu.cn

授课教师：丁双双

备注：本讲义根据2024年秋季学期王建老师课堂笔记整理，若有错误，请联系作者

§1 微分方程概论

§1.1 微分方程概述

例 1（元素衰减）

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \;\Rightarrow\; \frac{1}{R(t)}\,dR(t) = -k\,dt \;\Rightarrow\; \ln R(t) = -kt + C_1, \quad R(t) = R_0 e^{-kt}.$$

例 2（物体冷却，Newton 冷却定律）

$$\frac{dx}{dt} = -k\big(x - \theta_0\big).$$

例 3（传染病模型）

$$N\frac{di}{dt} = \lambda\, N\, S \cdot i \;\Rightarrow\; \frac{di}{dt} = \lambda\, i(1-i).$$

例 4（单摆）

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi.$$

当 φ 很小时 $\sin\varphi \approx \varphi$，得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

若有阻尼:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

若有外力:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{1}{m\ell}F(t),$$

给定初值：$\varphi(0) = \varphi_0$，$\dot\varphi(0) = v_0$。

§1.2 微分方程的基本概念

一、ODE 的定义

联系自变量、因变量及其导数的等式称为微分方程。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + c\,y = f(t), \tag{1}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+t\frac{d^2y}{dt^2}+y=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

二、分类

1) 按自变量个数：

$$\begin{cases}\text{ODE：自变量只有一个（(1)(2)）；}\\ \text{PDE：自变量不止一个 (3)。}\end{cases}$$

2) 线性与非线性：

$$\begin{cases}\text{线性方程：函数及其各阶导数为一次有理式；((1)(3))}\\ \text{非线性方程：非线性的方程。(2)}\end{cases}$$

3) 阶数：方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数

$$\begin{cases}\text{一阶方程：(2)}\\ \text{二阶方程:((1)(3))}\end{cases}$$

Rem.

(1) 一阶方程：$F(t,y,y')=0$ 或 $y'=f(t,y)$。

(2) n 阶方程：$F(t,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ 或 $y^{(n)}=f\big(t,y,\dots,y^{(n-1)}\big)$。

(3) 一阶显式方程有时可化成微分形式：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \;\Rightarrow\; M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0.$$

(4) n 阶线性微分方程的一般形式：

$$\frac{d^ny}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\,y=f(t).$$

例 $y\,y''+1=0$ 为二阶非线性微分方程；$y'=y(y(x))$ 为非微分方程。

三、方程的解

1. 定义

设 $y=\varphi(t)$ 在区间 I 上连续且有到 n 阶导数，若将 $y=\varphi(t)$ 及各阶导数代入

$$F\big(t,y,y',\dots,y^{(n)}\big)=0 \tag{$*$}$$

恒成立，则称 $y=\varphi(t)$ 为 $(*)$ 在 I 上的一解。

例 $y''+y=0$，$I=\mathbb{R}$。$y=7\sin t$，$y=3\cos t$ 均是这个方程的特解；

$$y=C_1\sin t+C_2\cos t \quad \text{为通解。}$$

Rem.

(1) 区间 I 经常简略，简称为方程的一个解。

(2) 若关系式 $\Phi(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 为方程 $(*)$ 的解，则称 $\varphi(x)$ 为方程 $(*)$ 的隐式解。

例

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

由此得

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C.$$

因此 $x^2 + y^2 = C$ 为 隐式解。

若取 $C = 1$，则

$$x^2 + y^2 = 1$$

为隐式解。对应的显式解为

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

即 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 与 $y = -\sqrt{1 - x^2}$。

2. 方程的通解

定义 含有 n 个相互独立任意常数 $C_1, \ldots, C_n$ 的解

$$y = \varphi\big(t, C_1, \ldots, C_n\big)$$

称为 $(*)$ 的通解。

独立性判据 存在 $(C_1, \ldots, C_n)$ 使雅可比

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1, \ldots, C_n)} \neq 0,$$

其中 $\varphi = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n)$，$\varphi' = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$，$\varphi^{(n-1)} = \dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial t^{n-1}}$。

例 验证 $y = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ 是 $y'' + y = 0$ 的通解:、

解

$$y' = C_1 \cos t - C_2 \sin t, \quad y'' = -C_1 \sin t - C_2 \cos t,$$

代入 $y'' + y = 0$ 成立；且

$$\frac{\partial(y, y')}{\partial(C_1, C_2)} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

因此 C_1, C_2 相互独立，所以 $y = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ 是 $y'' + y = 0$ 的通解

反例 $y = C_1 \sin t + C_3 \cos t$ 不是通解，因为

$$\frac{\partial(y, y')}{\partial(C_1, C_3)} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & \cos t \end{vmatrix} = 0.$$

3. 方程的特解

定义 满足特定条件的解称为特解（即不包含任意常数的解）。

例

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{有通解} y = C_1 \sin t + C_2 \cos t,\ \text{其中} C_2 = 0,\ C_1 = 1 \text{为特解}$$

4. 定解条件与初值问题

定解条件 初值条件或边值条件

定解问题 方程 + 定解条件（初值问题【Cauchy 问题】/边值问题）。

例

$$n\text{ 阶初值问题：} \begin{cases} F\left(t, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(t_0) = y_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

例 1

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0, \\ y(0) = 2,\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

解 1 猜想 $y = e^{\lambda t}$ 是一个解，则有 $(\lambda^2 + 5\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -4$。
通解 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$，$y' = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-4t}$。
由初值

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -C_1 - 4C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = -1,$$

特解 $y = 3e^{-t} - e^{-4t}$。

例 2 求函数族 $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \quad (x)$ 所满足的微分方程

解 2

$$y' = C_1 e^x(\cos x - \sin x) + C_2 e^x(\sin x + \cos x) \tag{1}$$

$$y'' = C_1 e^x(-2\sin x) + C_2 e^x(2\cos x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial(y,y')}{\partial(C_1,C_2)} = \begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} \neq 0,\ C_1, C_2 \text{ 相互独立}$$

据 (x), (1) 式有

$$C_1 = e^{-x}\big[y(\sin x + \cos x) - y'\sin x\big], \quad C_2 = e^{-x}\big[y(\sin x - \cos x) + y'\cos x\big]$$

代入 (2) 有:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

若考虑求解 $y'' - 2y' + 2y = 0$, 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$，特征根 $\lambda = 1 \pm i$
通解 $y = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x}$

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$$

四、微分方程及其解的几何近似

考虑：$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ 其中 $f(x,y)$ 是平面区域 D 内的连续函数

定义 设 $y = \varphi(x)$ 是方程在区间 I 上的解，则曲线 $y = \varphi(x)$ 在 xOy 平面是一条光滑曲线，称它为方程的**积分曲线**。

Rem. (1) 方程的通解 $\varphi(x,C)$ 对应 xOy 平面上的一族曲线，称为积分曲线族。
(2) 满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的特解曲线是平面上过 (x_0, y_0) 的一条积分曲线。

定义 在区域 D 内每一点 $P(x_0, y_0)$ 作一小直线段，满足斜率为 $f(x_0, y_0)$，称带有箭头段组成区域 D 方程的方向场。小直线段为方程在 $P(x_0, y_0)$ 的线素。方程的任何一条积分曲线和它的方向场是吻合的。

定义 方向场中方向相同的点的几何轨迹称为等斜线。

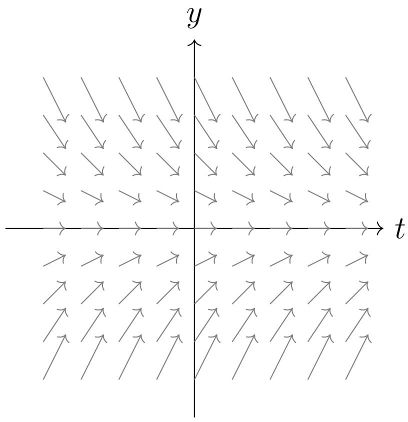
考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

的几何说明：给定方程，在平面区域 D 内初值 $y(t_0) = y_0$。上述定与方向场，求解初值问题即求过 (t_0, y_0) 且与方向场吻合的积分曲线。

例 1 $D = [-2,2] \times [-2,2]$, 求 $\dfrac{dy}{dt} = -y$ 的方向场。

解 1



例 2 考虑初值问题的近似解

$$y(t_0+\Delta) \approx y(t_0) + f(t_0, y_0)\,\Delta, \quad 0 < \Delta < \delta$$

解 2

$$\varphi(t) = \begin{cases} y_0 + f(t_0, y_0)(t-t_0), & t_0 \le t \le t_0+\delta, \\ y_1 + f(t_1, y_1)(t-t_1), & t_1 \le t \le t_1+\delta, \\ \quad \vdots & \\ y_n + f(t_n, y_n)(t-t_n), & t_n \le t \le t_n+\delta, \end{cases} \qquad \text{(Euler 近似)}$$

其中 $t_k = t_0 + k\Delta$, $y_k = \varphi(t_k)$。