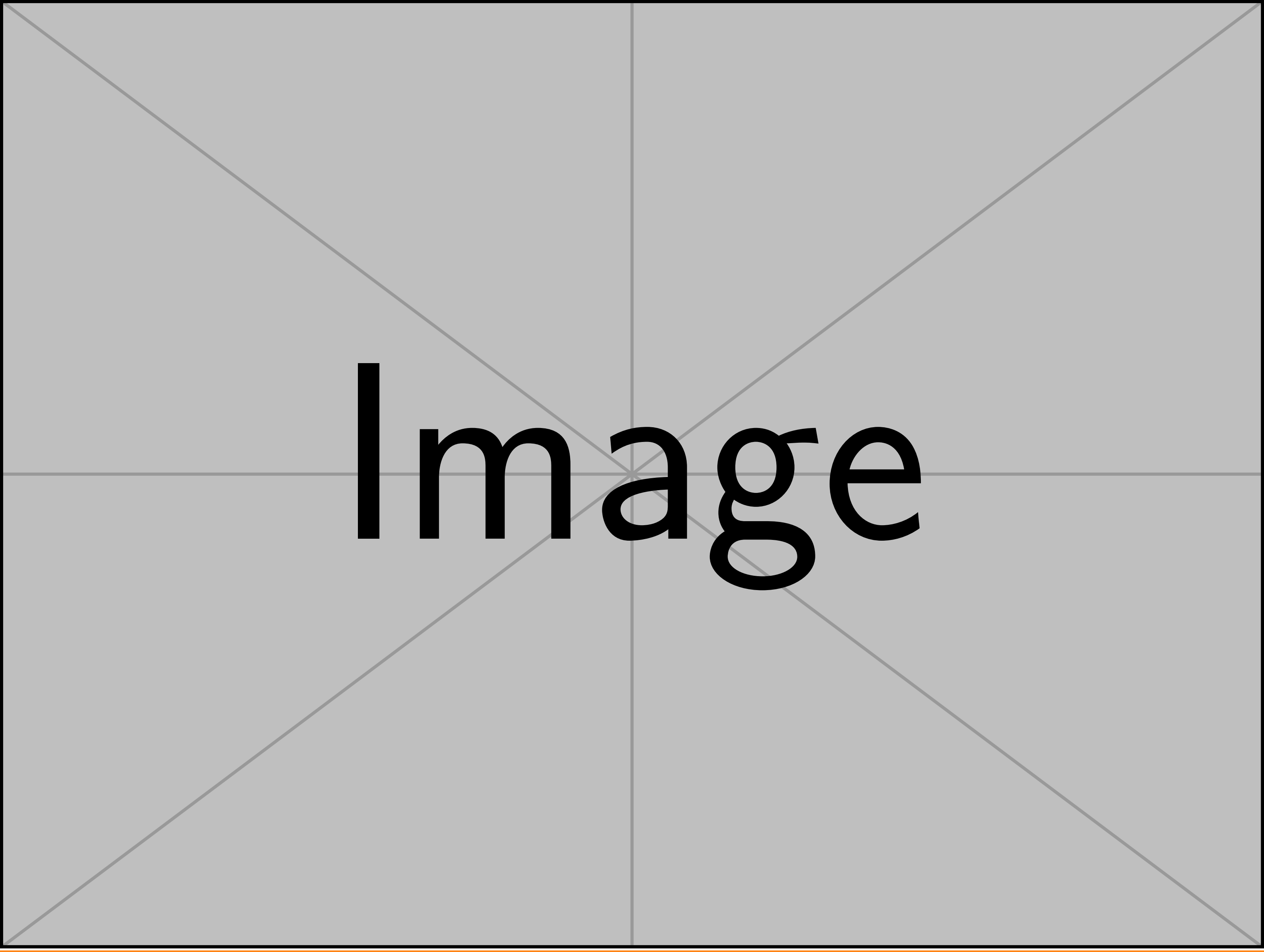


常微分方程-2025 年秋季学期

作者：容志谨（课程助教）
联系方式：rzj@stu.ouc.edu.cn

目录

§1 微分方程概论

§1.1 微分方程概述

例 1（元素衰减）

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \;\Rightarrow\; \frac{1}{R(t)}\,dR(t) = -k\,dt \;\Rightarrow\; \ln R(t) = -kt + C_1, \quad R(t) = R_0 e^{-kt}.$$

例 2（物体冷却，Newton 冷却定律）

$$\frac{dx}{dt} = -k\big(x - \theta_0\big).$$

例 3（传染病模型）

$$N\frac{di}{dt} = \lambda N S \cdot i \;\Rightarrow\; \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i).$$

例 4（单摆）

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\varphi.$$

当 φ 很小时 $\sin\varphi \approx \varphi$，得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

若有阻尼:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

若有外力:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{1}{m\ell}F(t),$$

给定初值：$\varphi(0) = \varphi_0$，$\dot{\varphi}(0) = v_0$。

§1.2 微分方程的基本概念

一、ODE 的定义

联系自变量、因变量及其导数的等式称为微分方程。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + c\,y = f(t), \tag{1}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+t\frac{dy}{dt}+y=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

二、分类

1) 按自变量个数:

$$\begin{cases}\text{ODE：自变量只有一个（(1)(2)）;}\\ \text{PDE：自变量不止一个 (3)。}\end{cases}$$

2) 线性与非线性:

$$\begin{cases}\text{线性方程：函数及其各阶导数为一次有理式；((1)(3))}\\ \text{非线性方程：非线性的方程。(2)}\end{cases}$$

3) 阶数：方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数

$$\begin{cases}\text{一阶方程：(2)}\\ \text{二阶方程:((1)(3))}\end{cases}$$

Rem.

(1) 一阶方程：$F(t,y,y')=0$ 或 $y'=f(t,y)$。

(2) n 阶方程：$F(t,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ 或 $y^{(n)}=f\big(t,y,\dots,y^{(n-1)}\big)$。

(3) 一阶显式方程有时可化成微分形式:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \;\Rightarrow\; M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0.$$

(4) n 阶线性微分方程的一般形式:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\,y=f(t).$$

例 $y\,y''+1=0$ 为二阶非线性微分方程；$y'=y(y(x))$ 为非微分方程。

三、方程的解

1. 定义

设 $y=\varphi(t)$ 在区间 I 上连续且有到 n 阶导数，若将 $y=\varphi(t)$ 及各阶导数代入

$$F\big(t,y,y',\dots,y^{(n)}\big)=0 \tag{$*$}$$

恒成立，则称 $y=\varphi(t)$ 为 $(*)$ 在 I 上的一解。

例 $y''+y=0$，$I=\mathbb{R}$。$y=7\sin t$，$y=3\cos t$ 均是这个方程的特解;

$$y=C_1\sin t+C_2\cos t \quad \text{为通解。}$$

Rem.

(1) 区间 I 经常简略，简称为方程的一个解。

(2) 若关系式 $\Phi(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程 $(*)$ 的解，则称 $\varphi(x)$ 为方程 $(*)$ 的隐式解。

例

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

由此得

$$x\,dx+y\,dy=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=C.$$

因此 $x^2+y^2=C$ 为 隐式解。

若取 $C=1$，则

$$x^2+y^2=1$$

为隐式解。对应的显式解为

$$y=\pm\sqrt{1-x^2},$$

即 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{1-x^2}$。

2. 方程的通解

定义 含有 n 个相互独立任意常数 $C_1,\dots,C_n$ 的解

$$y=\varphi\big(t,C_1,\dots,C_n\big)$$

称为 $(*)$ 的通解。

独立性判据 存在 $(C_1,\dots,C_n)$ 使雅可比

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\dots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1,\dots,C_n)}\neq 0,$$

其中 $\varphi=\varphi(t,C_1,\dots,C_n)$，$\varphi'=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$，$\varphi^{(n-1)}=\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial t^{n-1}}$。

例 验证 $y=C_1\sin t+C_2\cos t$ 是 $y''+y=0$ 的通解:、

解

$$y'=C_1\cos t-C_2\sin t,\qquad y''=-C_1\sin t-C_2\cos t,$$

代入 $y''+y=0$ 成立；且

$$\frac{\partial(y,y')}{\partial(C_1,C_2)}=\begin{vmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

因此 C_1,C_2 相互独立，所以 $y=C_1\sin t+C_2\cos t$ 是 $y''+y=0$ 的通解

反例 $y = C_1 \sin t + C_3 \cos t$ 不是通解，因为

$$\frac{\partial(y, y')}{\partial(C_1, C_3)} = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & \cos t \end{vmatrix} = 0.$$

3. 方程的特解

定义 满足特定条件的解称为特解（即不包含任意常数的解）。

例

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{有通解} y = C_1 \sin t + C_2 \cos t,\ \text{其中} C_2 = 0,\ C_1 = 1 \text{为特解}$$

4. 定解条件与初值问题

定解条件 初值条件或边值条件

定解问题 方程 + 定解条件（初值问题【Cauchy 问题】/边值问题）。

例

$$n \text{ 阶初值问题：} \begin{cases} F\left(t, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(t_0) = y_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

例 1

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0, \\ y(0) = 2,\ \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

解 1 猜想 $y = e^{\lambda t}$ 是一个解，则有 $(\lambda^2 + 5\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, -4$。
通解 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$，$y' = -C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{-4t}$。
由初值

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -C_1 - 4C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = -1,$$

特解 $y = 3e^{-t} - e^{-4t}$。

例 2 求函数族 $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x \quad (x)$ 所满足的微分方程

解 2

$$y' = C_1e^x(\cos x - \sin x) + C_2e^x(\sin x + \cos x) \tag{1}$$

$$y'' = C_1e^x(-2\sin x) + C_2e^x(2\cos x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial(y,y')}{\partial(C_1,C_2)} = \begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} \neq 0,\ C_1, C_2 \text{ 相互独立}$$

据 (x), (1) 式有

$$C_1 = e^{-x}\big[y(\sin x + \cos x) - y'\sin x\big], \quad C_2 = e^{-x}\big[y(\sin x - \cos x) + y'\cos x\big]$$

代入 (2) 有:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

若考虑求解 $y'' - 2y' + 2y = 0$, 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$，特征根 $\lambda = 1 \pm i$

通解 $y = C_1e^{(1+i)x} + C_2e^{(1-i)x}$

$$y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$$

四、微分方程及其解的几何近似

考虑：$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ 其中 $f(x,y)$ 是平面区域 D 内的连续函数

定义 设 $y = \varphi(x)$ 是方程在区间 I 上的解，则曲线 $y = \varphi(x)$ 在 xOy 平面是一条光滑曲线，称它为方程的**积分曲线**。

Rem. (1) 方程的通解 $\varphi(x, C)$ 对应 xOy 平面上的一族曲线，称为积分曲线族。
(2) 满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的特解曲线是平面上过 (x_0, y_0) 的一条积分曲线。

定义 在区域 D 内每一点 $P(x_0, y_0)$ 作一小直线段，满足斜率为 $f(x_0, y_0)$，称带有箭头段组成区域 D 方程的方向场。小直线段为方程在 $P(x_0, y_0)$ 的线素。方程的任何一条积分曲线和它的方向场是吻合的。

定义 方向场中方向相同的点的几何轨迹称为等斜线。

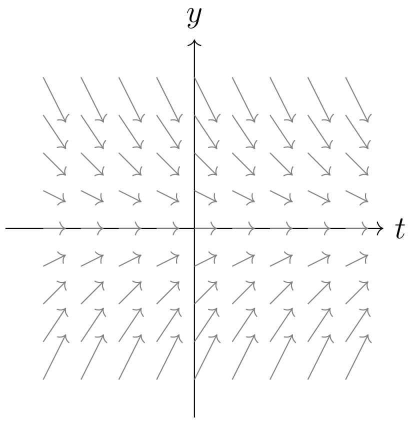
考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

的几何说明：给定方程，在平面区域 D 内初值 $y(t_0) = y_0$。上述定与方向场，求解初值问题即求过 (t_0, y_0) 且与方向场吻合的积分曲线。

例 1 $D = [-2,2] \times [-2,2]$, 求 $\dfrac{dy}{dt} = -y$ 的方向场。

解 1



例 2 考虑初值问题的近似解

$$y(t_0+\Delta) \approx y(t_0) + f(t_0, y_0)\,\Delta, \quad 0 < \Delta < \delta$$

解 2

$$\varphi(t) = \begin{cases} y_0 + f(t_0, y_0)(t-t_0), & t_0 \le t \le t_0+\delta, \\ y_1 + f(t_1, y_1)(t-t_1), & t_1 \le t \le t_1+\delta, \\ \quad\vdots & \\ y_n + f(t_n, y_n)(t-t_n), & t_n \le t \le t_n+\delta, \end{cases} \qquad \text{(Euler 近似)}$$

其中 $t_k = t_0 + k\Delta$, $y_k = \varphi(t_k)$。

§2 一阶微分方程的初等解法

$dy = f(x)\,dx$，$dx = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,dy \qquad du(x,y) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; u(x,y) = c$

内容：变量分离方程，齐次微分方程，全微分方程，积分因子，隐式微分方程。

§2.1 变量分离方程与变量替换

一、变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \tag{1}$$

其中 $f(x), g(y)$ 分别是关于 x, y 的连续函数。

变为：$\dfrac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$，$\quad g(y) \neq 0$

两边同时积分：$\displaystyle\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\,dx$

通解：$G(y) = F(x) + c$，其中 $G(y)$ 是 $\dfrac{1}{g(y)}$ 的原函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。

若 $g(y_0) = 0$，则 $y = y_0$ 也是方程 (1) 的解。

Rem. 若 $g(y) = 0$ 不在通解中，补上即可。

例 1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

解 1 $y\,dy = -x\,dx$，$\displaystyle\int y\,dy = \int -x\,dx$，$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c$，

通解 $x^2 + y^2 = c$

例 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

解 2 $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$, $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$, $\ln|y| = \ln|x| + c$
通解 $y = cx$

例 3 设方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)\,y$ 的通解，其中 $p(x)$ 为连续函数。

解 3 (1) $y \neq 0$ 时:

$$\frac{1}{y}dy = p(x)dx, \quad \int \frac{1}{y}dy = \int p(x)dx$$
$$\ln y = \int p(x)dx + C, \quad y = c \cdot e^{\int p(x)dx}$$

例 4 求解 $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ 的特解，其中 $y(0) = 1$。

解 4 $y \neq 0$, $\int \frac{1}{y^2}dy = \int \cos x\,dx$, $-\frac{1}{y} = \sin x + C$
$y = \frac{1}{-\sin x + C}$, 有奇解$y = 0$.
由 $y(0) = 1$, $C = -1$, $y = \frac{1}{1 - \sin x}$

Rem. 通解并非所有解。

二、微分方程的变量分离方程

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

其中 $M(x), N(y), P(x), Q(y)$ 均为连续函数。
若 $N(y)P(x) \neq 0$，则:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

通解 $F(x) + Q(y) = C$，其中 $F(x), Q(y)$ 为 $\frac{M(x)}{P(x)}, \frac{Q(y)}{N(y)}$ 的原函数。
若 $P(x_0) = 0$，则 $x = x_0$ 也是方程的解。
若 $N(y_0) = 0$，则 $y = y_0$ 也是方程的解。

例 5 $x(y^2 - 1)\,dx + y(y^2 - 1)\,dy = 0$

解 5 当 $x \neq \pm 1$，$y \neq \pm 1$ 时:

$$\int \frac{x}{y^2 - 1}dx + \int \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0$$

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=C\ (C\in\mathbb{R})$$

通解为 $(x^2-1)(y^2-1)=C,(C\neq 0)$

显然，$x=\pm1,y=\pm1$ 也是解 $(C=0)$

因此通解为 $(x^2-1)(y^2-1)=C,C$为任意常数

三、齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

其中 $f(u)$ 为 u 的连续函数。

变量替换：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

则 $u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$

若 $f(u)-u\neq 0$，$\dfrac{1}{f(u)-u}du=\dfrac{1}{x}dx$，通解为 $G(u)=\ln x+C$

原方程通解：$G\left(\frac{y}{x}\right)=\ln x+C$

若 $f(u_0)=u_0$，则 $u=u_0x$ 也是解。

—

例 6

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$$

解 6 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+\tan u$

当 $\tan u\neq 0$ 时

$$\int\frac{1}{\tan u}du=\int\frac{1}{x}dx,\quad \ln|\sin u|=\ln|x|+C$$

通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx\ (C\neq 0)$

当 $\tan u=0$ 时，$\sin u=0$，也是解

原方程通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$，C为任意常数

Rem. (1) $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 是齐次方程时满足 $f(x,y)$ 是 x,y 齐次函数，此时

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=f(tx,ty)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

(2) 对 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$，其中 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 都是 x,y 的 m 次齐次函数，即

$$M(tx,ty)=t^mM(x,y),\quad N(tx,ty)=t^mN(x,y),$$

则方程可化为齐次方程，此时

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=\frac{t^m M(x,y)}{t^m N(x,y)}=\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}=g\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

例 7

$$x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y\quad(x<0)$$

解 7

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2\sqrt{xy}}{x}=\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $u+x\dfrac{du}{dx}=u+2\sqrt{u}$，$x\dfrac{du}{dx}=2\sqrt{u}$

$u\neq 0$ 时

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{x}dx,\ \sqrt{u}=\ln(-x)+C$$

$$u=(\ln(-x)+C)^2,\ \ \ln(-x)+C>0$$

$u=0$ 时也是解

原方程的通解：$y=(\ln(-x)+C)^2$，$\ln(-x)+C>0$，特解：$y=0$。

例 8

$$(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$$

解 8 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1+u^2}$$

有通解 $\dfrac{xy}{x^2-y^2}=Cx$，特解 $y=x$，$y=-x$

四、可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\tag{4}$$

其中 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 为常数。

若 $c_1=c_2=0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$ 为齐次方程。

若 $c_1\neq 0$ 或 $c_2\neq 0$：

当 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ 时，令 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$，则：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

化简后

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$$

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+C_1=0 \\ a_2x+b_2y+C_2=0 \end{cases}$$

有交点 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. 令

$$\begin{cases} X=x-\alpha, \\ Y=y-\beta, \end{cases} \qquad \frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

例 9

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$$

解 9

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \quad \Rightarrow (1,2), \quad \begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则 $u+X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1-u}{1+u}$, $X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u}$

若 $u^2+2u-1\neq 0$，则

$$\int\frac{1+u}{1-2u-u^2}du=\int\frac{1}{X}dX$$

即

$$-\tfrac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=\ln|X|+C$$

$$X^2\cdot(u^2+2u-1)=C \quad (C\neq 0)$$

显然 $u^2+2u-1=0$ 对应的 $u=u_0$ 也是解。

因此通解为 $X^2(u^2+2u-1)=C$, C为任意常数

代回原变量：

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C$$

Rem. 更一般方程情形：

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

可类似求解。

例 10

$$\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y-2}{(x+y-1)}\right)^2$$

解 10

$$\begin{cases} y-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,2), \quad \begin{cases} X=x+1 \\ Y=y-2 \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2Y^2}{(X+Y)^2}$$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则 $u+X\frac{du}{dX}=\frac{2u^2}{(1+u)^2}$， 即 $X\frac{du}{dX}=-\frac{u+u^2}{(1+u)^2}$

若 $u\neq 0$，则

$$\int\frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du=\int-\frac{1}{X}dX$$

$$\ln|u|+2\arctan u=-\ln|X|+C$$

通解 $y-2=Ce^{-2arctan\frac{y-2}{x+1}}$， C为任意常数

Rem.

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c), \quad 令\ u=ax+by+c$$

$$yf(xy)\,dx+xg(xy)\,dy=0 \quad (\ 令\ u=xy\ )$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy) \quad (\ 令\ u=xy\ )$$

$$\frac{dy}{dx}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right) \quad (\ 令\ u=\frac{y}{x^2}\ )$$

五、应用举例

例 聚照灯反射镜面的形状要求：将点光源射出的光线，平行地反射出去，以保证聚照灯有良好的方向性。

解 建立坐标系, 设曲线

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转形成曲面

问题归结为求 xOy 平面上曲线 $y=f(x)z$ 的方程：

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha_2=-\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad (齐次方程)$$

亦即

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}\cdot\operatorname{sgn}(y)$$

令 $u=\dfrac{x}{y}$，则 $x=uy$，$u+y\dfrac{du}{dy}=u+\operatorname{sgn}(y)\sqrt{u^2+1}$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\operatorname{sgn}(y)\cdot\frac{dy}{y}$$

两边积分：

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)+C=\ln y,\quad C\cdot(u+\sqrt{u^2+1})=y$$

代入 $u=\frac{x}{y}$，有

$$C\cdot(x+\sqrt{x^2+y^2})=y^2,\ x^2+y^2=\frac{y^4}{C^2}+x^2-2\frac{xy^2}{C}$$

即

$$1=\frac{y^2}{C^2}-\frac{2x}{C},\ y^2=c^2+2Cx,\ C\text{为任意常数}$$

反射镜面为旋转抛物面：

$$y^2+z^2=C^2+2Cx$$

§2.2 线性微分方程与常数变易法

一、一阶线性常微分方程

1. 形式

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y+Q(x)\tag{1}$$

其中 $P(x),Q(x)$ 都是连续函数。

Rem. (i) 若方程为 $a(x)\dfrac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$，在 $a(x)\neq0$ 的区间上有：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}y+\frac{c(x)}{a(x)}=0$$

(ii) 若称 $Q(x)\equiv0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y(2)$ 称为齐次方程；反之，$Q(x)\not\equiv0$，称为非齐次方程。

2. 常数变易法

先求齐次方程 (2) 的通解：

$$y=c\,e^{\int P(x)\,dx},\quad c\text{为任意常数}$$

考虑 $y=c(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$ 的导数:

$$y'(x)=c'(x)\,e^{\int P(x)\,dx}+c(x)P(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

代入非齐次方程 (1),得:

$$Q(x)=c'(x)\,e^{\int P(x)\,dx},\quad c'(x)=Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

积分得:

$$c(x)=\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx+C$$

因此非齐次方程通解为:

$$y(x)=\left(\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx+C\right)e^{\int P(x)\,dx}$$

Rem. 线性非齐次方程通解的结构:

$$y(x)=C\,e^{\int p(x)\,dx}(\text{齐次方程通解})+\left(\int q(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}\,dx\right)e^{\int p(x)\,dx}(\text{非齐次方程的一个特解})$$

例 1 求解方程 $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$, n为常数。

解 1

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=e^x(x+1)^n$$

(i) 先求齐次方程的通解:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{y}=\int\frac{ndx}{x+1},\quad\Rightarrow\quad y=C(x+1)^n$$

(ii) 非齐次方程的通解:

设 $y=c(x)(x+1)^n$ 是方程的通解

$$c'(x)\cdot(x+1)^n=e^x\cdot(x+1)^n, c(x)=e^x+C$$

非齐次方程通解为:

$$y=(e^x+C)(x+1)^n,\quad C\text{为任意常数}$$

例 2

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$$

解 2

$$x=(-\ln(y)+C)\,y^2,\quad C\text{为任意常数}$$

$y=0$ 也是解。

3. 积分因子法

$$\frac{dy}{dx}-P(x)\,y=Q(x)$$

考虑

$$\frac{d}{dx}(y(x)\,z(x))=\frac{d}{dx}y(x)\cdot z(x)+\frac{d}{dx}z(x)\cdot y(x)$$

有

$$\frac{d}{dx}\big(e^{-\int P(x)\,dx}\,y(x)\big)=\frac{dy}{dx}\,e^{-\int P(x)\,dx}-p(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,y=e^{-\int P(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx}-P(x)\,y\right)$$

上式两边同乘 $e^{-\int P(x)\,dx}$：

$$e^{-\int P(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx}-P(x)\,y\right)=e^{-\int P(x)\,dx}\,q(x)$$

即

$$e^{-\int P(x)\,dx}\,y=\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx+C$$

因此

$$y=\left(\int q(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}\,dx+C\right)e^{\int p(x)\,dx},\quad C\text{为任意常数}$$

4. 一阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=P(x)\,y+Q(x),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

(1) 先求通解，再代入 $y(x_0)=y_0$，求出 C。

(2)

$$y=C\,e^{\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\,e^{-\int_{s}^{x}P(t)\,dt}\,ds\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt}$$

可求得 $C=y_0$：

$$y=y_0\,e^{\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\,e^{-\int_{s}^{x}P(t)\,dt}\,ds\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt}$$

例 3 函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明方程

$$\frac{dx}{dt}+x=f(t)\tag{$*$}$$

所有解均在 $[0,+\infty)$ 上有界。

解 3

证明 设 $y(t)$ 是方程 $(*)$ 上任意给定的解，令 $x(0)=x_0$，则 $x(t)$ 一定满足

$$x(t)=x_0e^{\int_0^t(-1)\,dt}+\int_0^t f(s)e^{-\int_0^s(-1)\,dt}\,ds\cdot e^{-\int_0^t(-1)\,dt}=x_0e^{-t}+\int_0^t f(s)e^{s}\,ds\cdot e^{-t}$$

显然 $\exists M>0$ s.t. $|f(t)|\le M$, $\forall t\in[0,+\infty)$。

从而

$$
\begin{aligned}
|x(t)| &= \left|x_0 e^{-t} + \int_0^t f(s)e^s ds \cdot e^{-t}\right| & (1)\\
&\le |x_0 e^{-t}| + \left|\int_0^t f(s)e^s ds \cdot e^{-t}\right| & (2)\\
&\le |x_0| + e^{-t} \cdot \int_0^t |f(s)|e^s ds & (3)\\
&\le |x_0| + e^{-t} \cdot M \int_0^t e^s ds & (4)\\
&= |x_0| + e^{-t} \cdot (e^t - 1) \cdot M & (5)\\
&\le |x_0| + M & (6)
\end{aligned}
$$

因此 $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界。

5. 线性方程的性质

(1) 齐次线性微分方程的解的线性组合仍是齐次方程的解。齐次线性微分方程的解与非齐次线性微分方程的解之和仍是非齐次线性微分方程的解；非齐次线性微分方程两个任意解的差仍是解。

(2) 齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的特解之和构成非齐次线性微分方程的通解。

(3) 线性微分方程的初值问题的解是存在唯一的。

例 3

$$\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2$$

解 3

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - 6\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -x, \qquad \frac{d(\frac{1}{y})}{dx} + \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{y} = x$$

令 $z = \dfrac{1}{y}$，有：

$$z = (\frac{1}{8}x^8 + C) \cdot x^{-6}$$

代回 y 有：

$$y = \frac{1}{\frac{1}{8}x^8 + C \cdot x^{-6}}$$

原方程 $y = 0$ 也是解。

二、Bernoulli 方程

1. 形式:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{3}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 为连续函数

2. 解法:

$y \neq 0$ 时

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = P(x)y^{1-n} + Q(x) \tag{4}$$

$$\frac{d(y^{1-n})}{dx} = (1-n)P(x)y^{1-n} + (1-n)Q(x)$$

令

$$z = y^{1-n}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x) \tag{5}$$

设 (5) 式通解为 $z = \varphi(x, c)$

则 (3) 式通解为 $y^{1-n} = \varphi(x, c), \quad c$ 为任意常数

Rem.

- 方程 (3) 中 $n = 0, 1$ 时为线性方程;
- 方程 (3) 中 $n > 0$ 时有奇解 $\Rightarrow y = 0$。

例 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3y^3}$$

解 4

$$\frac{dy}{dx} = yx + y^3x^3, \quad x^{-3}\frac{dy}{dx} = yx^{-2} + y^3$$

令 $z = x^{-2}, \quad \dfrac{dz}{dx} = -2yz - 2y^3$

齐次方程:

$$\frac{dz}{dx} = -2yz, \quad 有通解 z = Ce^{-y^2}$$

非齐次方程:

$$z = C(y)e^{-y^2}, \quad C'(y)e^{-y^2} = -2y^3$$

$$C(y) = \int -2y^3e^{y^2}dy = -\int te^tdt = -(t-1)e^t + c = -(y^2-1)e^{y^2} + c$$

通解：
$$z=[-(y^2-1)e^{y^2}+c]e^{-y^2}=-(y^2-1)+Ce^{-y^2}$$
原方程通解为
$$x^{-2}=ce^{-y^2}-y^2+1$$

例 5
$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$$

解 5 令 $u=e^y$, $\quad \dfrac{du}{dx}=e^y\dfrac{dy}{dx}$
$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}u+\frac{3}{x} \text{ 即} \frac{du}{dx}=\frac{u^2}{x^2}+\frac{3u}{x},\frac{1}{u}=Cx^{-3}-\frac{1}{2}x^{-1}$$
通解为
$$\frac{1}{e^y}=Cx^{-3}-\frac{1}{2}x^{-1},\quad \text{C 为任意常数}$$

三、Riccati 方程

1. 形式：

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x) \tag{6}$$
其中 $P(x),Q(x),R(x)$ 为连续函数。

Rem.

- 1841 年，Liouville 证明 (6) 式一般情况下不能表示为初等函数解；
- 若已知 (6) 的一个特解，则可求出通解。

2. 解法：

设 (6) 有一特解 $\tilde{y}(x)$，设 $y(x)=z+\tilde{y}(x)$ 是 (6) 的解，则代入 (6) 有
$$\frac{dz}{dx}+\frac{d\tilde{y}}{dx}=P(x)(z^2+2z\tilde{y}+\tilde{y}^2)+Q(x)(z+\tilde{y})+R(x)$$
即
$$\frac{dz}{dx}+\frac{dtildey}{dx}=P(x)z^2+(2P(x)\bar{y}+Q(x))z+P(x)\bar{y}^2+Q(x)\bar{y}+R(x)$$
由 $\tilde{y}$ 是 (6) 的特解，
$$\frac{dz}{dx}=P(x)z^2+(2P(x)\tilde{y}+Q(x))z$$
为 Bernoulli 方程。

因此原方程通解为 $y=\varphi(x,c)+tildey$。

例 6

$$y' = y^2 - x^2 + 1$$

解 6 显然，$y = x$ 是一个特解。

令 $y = x + z(x)$，则

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2xz$$

通解为

$$z = \left(-\int e^{-x^2} dx + C\right) e^{-x^2}$$

原方程通解为

$$y = x + e^{x^2} \cdot \left(-\int e^{-x^2} dx + C\right)^{-1}, \quad C \text{ 为任意常数}$$

§2.3 全微分方程和积分因子

一、全微分方程

(1) $d(xy) = x\,dy + y\,dx = 0$

$$x\,dy + y\,dx = 0 \;\Rightarrow\; d(xy) = 0 \;\Rightarrow\; xy = C$$

(2) $d\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$

$$y\,dx - x\,dy = 0 \;\Rightarrow\; d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{y} = C$$

(3) 设 Oxy 平面存在力场，$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\,\vec{i} + N(x,y)\,\vec{j}$，求曲线 L 使与力场处处垂直。

解答：设曲线 L: $y = y(x)$，则 L 在 Q 点处的斜率为

$$\frac{dy}{dx}$$

向量切线方向在 Q 点的斜率 $\tan\theta = \dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \Rightarrow \quad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \tag{$*$}$$

若 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$，则 (1) 式为全微分方程，即 $\exists u(x,y)$ s.t.

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

即方程化为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

通解为

$$u(x,y) = C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

1. 定义

设一阶拟线性微分方程的微分形式为

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \tag{$*$}$$

其中 $M(x,y),N(x,y)$ 在区域 G 内连续且有一阶连续偏导数。

若存在可微函数 $u(x,y)$ s.t.

$$du(x,y)=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$$

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$，则称方程 $(*)$ 为全微分方程，或全微分形式。$u(x,y)$ 称为 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 的一个原函数。

例 1

- $x\,dx+y\,dy=0 \implies d\big(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\big)=0$
- $y\,dx-x\,dy=0 \implies d(\dfrac{x}{y})=0$

Thm. 设 $M(x,y),N(x,y)$ 在某单连通区域 G 内连续可微，则方程

$$M(x,y)dx+N(y,y)dy=0 \tag{$*$}$$

是全微分方程

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial b},\ \forall(b,y)\in G \tag{$**$}$$

且当 $(**)$ 成立时，原函数 $u(x,y)$ 可取为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)dx+N(x,y)dy=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\,dy$$

其中 $(x_0,y_0)\in G$ 是任意取定一点。

或:

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy+\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx$$

证明 $\Rightarrow$ $(*)$ 是全微分方程，$\exists u(x,y)$ s.t. $M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x},N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$。

由 $M,N\in C'$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

$\Leftarrow$ 若 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，设法证 $\exists u(x,y)$ s.t. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$。

对 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(b,y)$ 两边关于 x 积分，得:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx$$

即

$$u(x,y)-u(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\varphi(y),\qquad \varphi(y)=u(x_0,y)$$

两边关于 y 求导:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\,dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

由 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\,dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)\quad\Rightarrow\quad\varphi'(y)=N(x_0,y)$$

因此

$$\varphi(y)-\varphi(y_0)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy$$

令 $\varphi(y_0)=0$，得

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(b_0,y)\,dy$$

于是

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy$$

因此 $(*)$ 式为全微分方程。

Rem.

- 若 $u(x,y)$ 是 $Mdx+Ndy$ 的一个原函数，则 $u(x,y)+C$ 也是解;
- $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}\ \Rightarrow\ Mdx+Ndy=0$ 是全微分方程。
- 若 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，则 $Mdx+Ndy$ 的一个原函数为 $u(x,y)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\,dy$ 其中 (x_0,y_0) 是 G 内任一点。

例 2 求解方程 $xy\,dx+(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{y})\,dy=0$

解 2 $M=xy,\ N=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=x$$

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}xy\,dx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})\,dy=\int_{0}^{x}xdx+\int_{1}^{y}(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})\,dy=\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|$$

通解：$\dfrac{1}{2}x^2y+\ln|y|=C,\ C$ 为任意常数

另解 $xy\,dx + (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y})\,dy = 0$

$$xy\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy = d\big(\tfrac{1}{2}x^2y\big)\,, \quad \frac{1}{y}dy = d(\ln|y|)$$

因此有通解 $\frac{1}{2}x^2y + \ln|y| = C$, C 为任意常数

例 3 求解方程 $(3b^2 + 6by)\,db + (4y^3 + 6b^2y)\,dy = 0$

解 3 $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 4y^3 + 6x^2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

$$u(x,y) = \int_0^x 3x^2dx + \int_0^y (4y^3 + 6x^2y)\,dy = x^3 + y^4 + 3x^2x^2$$

所以方程有通解

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

2. 初值问题的解

$$\begin{cases} M(x,y)\,db + N(x,y)\,dy = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

通解

$$u(x,y) = \int_{x_0}^x M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^y N(x_0,y)\,dy + C$$

特解：$C = 0$

3. 全微分方程的解法

(1) 公式法 (2) 分项组合法 (3) 积分法

例 4 $3y\,dx + (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y})\,dy = 0$

解 4：积分法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$$

关于 x 的积分为：

$$u = \frac{1}{2}x^2y + \varphi(y)$$

对上式关于 y 求导：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + \varphi'(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$$

因此 $\varphi(y) = \ln|y| + C,\ u = \frac{1}{2}x^2y + \ln|y|$
通解：
$$\frac{1}{2}x^2y + \ln|y| = C$$

Rem. 分项组合法： 根据常见的全微分公式

例 5 $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$

解 5
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$d(\arctan\frac{x}{y}) = (\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y})dx + (\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{x}{y^2}))dy = \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$
因此通解：
$$\arctan\frac{x}{y} = C,\quad C\ \text{为任意常数.}$$
考虑方程 $y\,dx - x\,dy = 0$
方程两边同乘 $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 有 $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$
方程两边同乘 $\dfrac{1}{y^2}$ 有 $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0$

Rem. 积分因子：$\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 与 $\dfrac{1}{y^2}$ 不唯一

二、积分因子

1. 定义

对于微分方程
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{$*$}$$
若方程 $(*)$ 不是全微分方程，但存在一个连续可微函数 $\mu = \mu(x,y)$，s.t.
$$\mu(x,y)M(x,y)\,db + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0 \tag{$**$}$$
为全微分方程，则 $\exists\, v = v(x,y)$ s.t.
$$dv(x,y) = \mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy$$
则称 $\mu(x,y)$ 为方程 $(*)$ 的一个积分因子

Rem. (i) 可以证明，$(*)$ 式与 $(**)$ 式为同解方程。(ii) $\mu(x,y)$ 为积分因子的充要条件。

Thm.1 若 $M(x,y), N(x,y), \mu(x,y)$ 均连续可微，则 $\mu(x,y)$ 为 $(*)$ 的积分因子 $\Longleftrightarrow N\cdot\dfrac{\partial\mu}{\partial x} - M\cdot\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$

Thm.2 设 $M(x,y), N(x,y), \varphi(x,y)$ 在区域 G 内连续可微，则方程 $(*)$ 有形如 $\mu = \mu[\varphi(x,y)]$ 的积分因子 $\Longleftrightarrow$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{N\frac{\partial\varphi}{\partial y} - M\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

仅是 φ 的函数，记为 $f(\varphi)$。则 $\mu = e^{\int f(\varphi)\,d\varphi} = e^{G(\varphi)}$ 是积分因子。

证明 $\Rightarrow$ 若 $(*)$ 有积分因子 μ，且 $\mu = \mu[\varphi(x,y)]$，则：

$$\frac{d\mu}{d\varphi}\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\,d\varphi = f(\varphi)\,d\varphi \Rightarrow \mu = e^{\int f(\varphi)\,d\varphi} = e^{G(\varphi)}$$

$\Leftarrow$ 若 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$ 仅关于 φ，往证 $\mu = e^{G(\varphi)}$ 是方程的解

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = (N\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M\frac{\partial\varphi}{\partial y})e^{G(\varphi)}f(\varphi) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

因此 $\mu = e^{G(\varphi)}$ 是积分因子。

类型	条件	积分因子
$\varphi(x,y) = b,\ \mu(x) = x$	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$	$e^{\int f(x)\,dx}$
$\varphi(x,y) = y,\ \mu(y) = y$	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = f(y)$	$e^{\int f(y)\,dy}$

例 6 求解方程 $(y^2 - 3xy + 1)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$

解 6

$$M = y^2 - 3xy + 1, \quad N = xy - x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 3x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = y - x$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{x}$$

仅是 x 的函数。

积分因子：

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

方程两边同乘以 x：

$$(xy^2-3x^2y+x)\,dx+(x^2y-x^3)\,dy=0$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{2}x^2\right)=0$$

通解：

$$\tfrac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{2}x^2=C$$

例 7 求解方程 $(xy+y^2)\,dx+(xy+y+1)\,dy=0$

解 7

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{1}{y}\text{ 仅是 y 的函数}$$

积分因子：

$$\mu=e^{\int-\frac{1}{y}\,dy}=\frac{1}{y}$$

当 $y\neq0$ 时：

$$(x+y)\,dx+(x+\frac{1}{y}+1)\,dy=0$$

$$d\big(\tfrac{1}{2}x^2+xy+y+\ln|y|\big)=0$$

因此通解：

$$\tfrac{3}{2}x^2+xy+y+\ln|y|=C$$

当 $y=0$ 时也是解。

例 8 求解方程 $(y^2+2x^2y)\,dx+(xy+x^3)\,dy=0$

解 8

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y+2x^2,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=y+3x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=y-x^2$$

设方程有积分因子 $\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\alpha\frac{N}{x}-\beta\frac{M}{y}}\cdot\frac{1}{x^\alpha y^\beta}=\frac{y-x^2}{\alpha(y+x^2)-\beta(y+2x^2)}\cdot\frac{1}{x^\alpha y^\beta}$$

令

$$\begin{cases}\alpha-\beta=1,\\ \alpha-2\beta=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\alpha=3,\ \beta=2$$

因此积分因子：

$$\mu=e^{\int\frac{1}{x^3y^2}\,dy}=x^3y^2$$

将方程两边同乘 $\mu=x^3y^2$：

$$(x^3y^4+2x^5y^3)\,dx+(x^4y^3+x^6y^2)\,dy=0$$

这是一个全微分方程：

$$d\left(\frac{1}{4}x^4y^4+\tfrac{1}{3}x^6y^3\right)=0$$

通解：

$$\frac{1}{4}x^4y^4+\tfrac{1}{3}x^6y^3=C$$

§2.4 一阶隐式微分方程

一、一阶隐式方程

$$F(x,y,y')=0\tag{$*$}$$

1. 若可化为 $y'=f(x,y)$

根据显式方程求解即可。

例 1 求解方程 $y'^2-(x+y)y'+xy=0$

解 1

$$(y'-x)(y'-y)=0$$

所以通解为 $y=\dfrac{1}{2}x^2+C$ 或 $y=Ce^x$

2. 可解出 y 的方程： $y=f(x,y')$，其中 $f\in C^{(1)}$

令 $y'=p$，则 $y=f(x,p)$

两边关于 x 求导：

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

即

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = F(x, p)$$

（关于 x, p 的一阶显式微分方程）

① 若 $p = \varphi(x, c)$，代入有 $y = f[x, \varphi(x, c)]$

② 若 $x = \psi(p, c)$，代入有

$$\begin{cases} x = \psi(p, c), \\ y = f(x, p) \end{cases}$$

其中 p 为参数，c 为任意常数。

③ 若 $\Phi(x, p, c) = 0$，代入有

$$\begin{cases} \Phi(x, p, c) = 0, \\ y = f(x, p) \end{cases}$$

其中 p 为参数，c 为任意常数。

例 2 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

解 2

$$y = p^3 + 2xp, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

上式左边关于 x 求导:

$$p = 3p^2\frac{dp}{dx} + 2p + 2x\frac{dp}{dx}$$

即:

$$3p^2dp + 2xdp + pdx = 0$$

有积分因子 $\mu(p) = p$

$$(3p^3 + 2xp)\,dp + p^2\,dx = 0 \quad (p \neq 0)$$

$$d\left(\tfrac{3}{4}p^4 + p^2x\right) = 0$$

通解:

$$\tfrac{3}{4}p^4 + p^2x = C$$

即:

$$x = Cp^{-2} - \tfrac{3}{4}p^2$$

代入得:

$$y = p^3 + 2xp = \frac{2C}{p} - \frac{1}{2}p^3$$

故原方程为隐式通解为:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{3}{4}p^2, \\ y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{1}{2}p^3 \end{cases}$$

其中 p 为参数，C 为任意常数。当 $p=0$ 时，有特解 $y=0$。

例 3 求解方程 $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^2}{2}$

解 3 令 $\dfrac{dy}{dx}=p$，则 $y=p^2-xp+\dfrac{x^2}{2}$。
两边对 x 求导：

$$p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}+x$$

$$2p\frac{dp}{dx}-2p-x\frac{dp}{dx}+x=0$$

$$(\frac{dp}{dx}-1)(2p-x)=0$$

因此 $\dfrac{dp}{dx}=1$ 或 $2p=x$。
有通解：

$$y=(x+C)^2-x(x+C)+\tfrac{1}{2}x^x$$

特解为 $y=\frac{1}{4}x^2$。（几何上称为"包络线"）

3. 可解出 x 的方程：$x=f(y,y')$

令 $y'=p$，则 $x=f(y,p)$
两边关于 y 求导：

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

即

$$\frac{dp}{dy}=\frac{\frac{1}{p}-\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial p}}=G(y,p)$$

（关于 y,p 的一阶显式微分方程）
① 若 $\Phi(y,p,c)=0$，则原方程通解为：

$$\begin{cases}\Phi(y,p,c)=0,\\ x=f(y,p)\end{cases}$$

其中 p 为参数，c 为任意常数。

例 4 求解方程 $x\dfrac{1}{y}=y'^2$

解 4

$$x=yp^2,\quad p=y'$$

两边对 y 求导:

$$\frac{1}{p}=p^2+2yp\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{\frac{1}{p}-p^2}{2py}=\frac{1-p^3}{2yp^2}$$

$$\frac{p^2}{1-p^3}dp=\frac{1}{2y}dy$$

积分:

$$-\tfrac{1}{3}\ln\left(1-p^2\right)=\tfrac{1}{2}\ln|y|+C$$

原方程通解:

$$-\tfrac{1}{3}\ln\left(1-p^2\right)=\tfrac{1}{2}\ln|y|+C, x=yp^2$$

其中 p 为参数，C 为任意常数。当 $p=1$ 时显然也是解；$y=0$ 时也是解。

例 5 求解方程 $y=xy'+\varphi(y')$，其中 $\varphi\in C^{(2)}$ 且 $\varphi''\neq 0$。（Clairaut Equation）

解 5 令 $y'=p$，则 $y=xp+\varphi(p)$。

两边对 x 求导:

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+\varphi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$[x+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}=0$$

① 若 $\dfrac{dp}{dx}=0$，则 $p=C$，此时原方程通解为:

$$\begin{cases}y=xp+\varphi(p)p=C\end{cases}$$

② 若 $x+\varphi'(p)=0$，此时原方程的**一个特解**为:

$$\begin{cases}y=-p\varphi'(p)+\varphi(p),\\ x=-\varphi'(p)\end{cases}$$

Rem. 上述方程称为 Clairaut 方程。

例 6 求解方程 $y=xy'+(y')^2$

解 6

$$\varphi(u)=u^2,\quad \varphi'(u)=2u,\quad \varphi''(u)=2\neq 0$$

通解为:

$$y=Cx^2+C^2$$

特解为:

$$\begin{cases}y=-p\varphi'(p)+\varphi(p)=-2p^2+p^2=-p^2,\\ x=-\varphi'(p)=-2p\end{cases}$$

即 $y=-\dfrac{x^2}{4}$。

4. 不显含 y 的方程 $F(x,y')=0$

令 $y'=p$，则 $F(x,p)=0$。
设其为参数方程：

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ p=\psi(t) \end{cases}$$

由于 $dy=p\,dx=\psi(t)\,d\varphi(t)$，从而 $dy=\psi(t)\varphi'(t)\,dt$
两边积分得：

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt+C$$

原方程的参数形式通解：

$$\begin{cases} y=\displaystyle\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt+C, \\ x=\varphi(t) \end{cases}$$

其中 t 为参数，C 为任意常数。

例 7 求解方程 $x\sqrt{1+(y')^2}=y'$

解 7 令 $y'=p$，则 $F(x,p)=x\sqrt{1+p^2}-p=0$
设：

$$x=\sin t,\quad p=\tan t$$

由于 $dy=p\,dx$，有

$$y=\int\tan t\cos t\,dt=\int\sin t\,dt=-\cos t+C$$

原方程通解：

$$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=-\cos t+C \end{cases}$$

例 8 求解方程 $x^3+xy'^3-3xy'=0$

解 8 令 $y'=p$，则 $x^3+p^3-3xp=0$
设 $x=t^3$，则

$$p=\frac{3t^2}{1+t^3},x=\frac{3t}{1+t^3}$$

由于 $dy=p\,dx=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\cdot\dfrac{3(1+t^3)-3t\cdot3t^2}{(1+t^3)^2}dt=\dfrac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt$

$$y=\int\frac{9t^3(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt+C=\frac{3}{2}\cdot\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^3}+C$$

原方程参数形式通解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^3} + C \end{cases}$$

5. 不显含 x 的方程 $F(y, y') = 0$

令 $y' = p$，则 $F(y, p) = 0$。设其为参数方程：

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ p = \psi(t), \end{cases} \quad t \text{ 为参数。}$$

由于 $dy = p\,dx$，故 $dx = \dfrac{dy}{p} = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$

两边积分得：

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C$$

原方程的参数形式通解：

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

当 $p = 0$ 时，若 $F(y, 0) = 0$，则有常数解 $y = k$。

例 9 求解方程 $y^2(1-y') = (2-y')^2$

解 9 令 $y' = p$，则 $y^2(1-p) = (2-p)^2$

设 $2-p = ty$，则 $ty - 1 = t^2, y = t + \dfrac{1}{t}, p = 1 - t^2 (p \neq 0)$，得

又因为 $dx = \dfrac{1}{p}dy = \dfrac{1-\frac{1}{t}}{1-t^2}dt = -\dfrac{1}{t^2}dt, x = \displaystyle\int -\dfrac{1}{t^2}dt = \dfrac{1}{t} + C$

原方程通解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + C, \\ y = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

或写作：

$$y = x - C + \frac{1}{x-C}$$

当 $p = 0$ 时，有 $y^2 = 4$，即 $y = \pm 2$ 也是特解。

6. 一般的一阶隐式方程 $F(x, y, y') = 0$

令 $y' = p$，则 $F(x, y, p) = 0$。

令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad p = h(u, v)$$

代入：

$$dy = p\,dx, \quad \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = h(u,v)\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right)$$

即：

$$M(u,v)\,du + N(u,v)\,dv = 0$$

求出其通解或特解，从而可求出原方程的通解。

例 10 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0$

解 10 令 $p = \frac{dy}{dx}$，则 $p^2 + y - x = 0$

设 $x = u$，$p = v$，$y = u - v^2$

由 $dy = p\,dx$，

$$d(u - v^2) = v\,du \quad \Rightarrow \quad (1-v)\,du = 2v\,dv$$

积分得：

$$u = -2v - \ln(v-1)^2 + C \quad \text{特解为 } v = 1$$

原方程通解：

$$\begin{cases} x = -2v - \ln(v-1)^2 + C, \\ y = -2v - \ln(v-1)^2 - v^2 + C \end{cases}$$

C 为任意常数。

特解：$y = x - 1$

思考：

1. Riccati 方程：$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ 除特例外，一般没有初等解法.
2. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, y(0) = 0$ 的解不唯一，$y \equiv 0$，$y = x^2$ 都是解。
3. 考虑 $\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$ 的解的**存在性、唯一性**以及**连续性**。