

§2 一阶微分方程的初等解法

$$dy = f(x) dx, \quad dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad du(x, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = c$$

内容：变量分离方程，齐次微分方程，全微分方程，积分因子，隐式微分方程。

§2.1 变量分离方程与变量替换

一、变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \tag{1}$$

其中 $f(x), g(y)$ 分别是关于 x, y 的连续函数。

变为: $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx, \quad g(y) \neq 0$

两边同时积分: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$

通解: $G(y) = F(x) + c$, 其中 $G(y)$ 是 $\frac{1}{g(y)}$ 的原函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数。

若 $g(y_0) = 0$, 则 $y = y_0$ 也是方程 (1) 的解。

Rem. 若 $g(y) = 0$ 不在通解中, 补上即可。

例 1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

解 1 $y dy = -x dx, \quad \int y dy = \int -x dx, \quad \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c,$

通解 $x^2 + y^2 = c$

例 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

解 2 $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx, \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx, \ln|y| = \ln|x| + c$
通解 $y = cx$

例 3 设方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)y$ 的通解, 其中 $p(x)$ 为连续函数。

解 3 (1) $y \neq 0$ 时:

$$\frac{1}{y}dy = p(x)dx, \int \frac{1}{y}dy = \int p(x)dx \\ \ln y = \int p(x)dx + C, \quad y = e^{\int p(x)dx}$$

例 4 求解 $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$ 的特解, 其中 $y(0) = 1$ 。

解 4 $y \neq 0, \int \frac{1}{y^2}dy = \int \cos x dx, -\frac{1}{y} = \sin x + C$
 $y = \frac{1}{-\sin x + C}, \text{ 有奇解 } y = 0.$
由 $y(0) = 1, C = -1, y = \frac{1}{1 - \sin x}$

Rem. 通解并非所有解。

二、微分方程的变量分离方程

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \quad (2)$$

其中 $M(x), N(y), P(x), Q(y)$ 均为连续函数。

若 $N(y)P(x) \neq 0$, 则:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

通解 $F(x) + Q(y) = C$, 其中 $F(x), Q(y)$ 为 $\frac{M(x)}{P(x)}, \frac{Q(y)}{N(y)}$ 的原函数。

若 $P(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$ 也是方程的解。

若 $N(y_0) = 0$, 则 $y = y_0$ 也是方程的解。

例 5 $x(y^2 - 1)dx + y(y^2 - 1)dy = 0$

解 5 当 $x \neq \pm 1, y \neq \pm 1$ 时:

$$\int \frac{x}{y^2 - 1}dx + \int \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0$$

$$\ln|x^2 - 1| + \ln|y^2 - 1| = C \quad (C \in \mathbb{R})$$

通解为 $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C, (C \neq 0)$

显然, $x = \pm 1, y = \pm 1$ 也是解 ($C = 0$)

因此通解为 $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C, C$ 为任意常数

三、齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3)$$

其中 $f(u)$ 为 u 的连续函数。

变量替换: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

则 $u + x\frac{du}{dx} = f(u)$

若 $f(u) - u \neq 0$, $\frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{x} dx$, 通解为 $G(u) = \ln x + C$

原方程通解: $G\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + C$

若 $f(u_0) = u_0$, 则 $u = u_0x$ 也是解。

—

例 6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$$

解 6 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $u + x\frac{du}{dx} = u + \tan u$

当 $\tan u \neq 0$ 时

$$\int \frac{1}{\tan u} du = \int \frac{1}{x} dx, \quad \ln |\sin u| = \ln |x| + C$$

通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx (C \neq 0)$

当 $\tan u = 0$ 时, $\sin u = 0$, 也是解

原方程通解为 $\sin \frac{y}{x} = Cx$, C 为任意常数

Rem. (1) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 是齐次方程时满足 $f(x, y)$ 是 x, y 齐次函数, 此时

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

(2) 对 $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, 其中 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 都是 x, y 的 m 次齐次函数, 即

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^m N(x, y),$$

则方程可化为齐次方程，此时

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{M(tx, ty)}{N(tx, ty)} = \frac{t^m M(x, y)}{t^m N(x, y)} = \frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

例 7

$$x \frac{dy}{dx} + 2\sqrt{xy} = y \quad (x < 0)$$

解 7

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2\sqrt{xy}}{x} = \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $u + x \frac{du}{dx} = u + 2\sqrt{u}$, $x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}$
 $u \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{u}} du &= \frac{1}{x} dx, \sqrt{u} = \ln(-x) + C \\ u &= (\ln(-x) + C)^2, \quad \ln(-x) + C > 0 \end{aligned}$$

$u = 0$ 时也是解

原方程的通解: $y = (\ln(-x) + C)^2$, $\ln(-x) + C > 0$, 特解: $y = 0$ 。

例 8

$$(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

解 8 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{1+u^2}$$

有通解 $\frac{xy}{x^2 - y^2} = Cx$, 特解 $y = x$, $y = -x$

四、可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{4}$$

其中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 为常数。

若 $c_1 = c_2 = 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$ 为齐次方程。

若 $c_1 \neq 0$ 或 $c_2 \neq 0$:

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 时, 令 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, 则:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = f(a_2x + b_2y)$$

化简后

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2f(u)$$

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + C_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

有交点 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. 令

$$\begin{cases} X = x - \alpha, \\ Y = y - \beta, \end{cases} \quad \frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} = g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

例 9

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

解 9

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 2), \quad \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

令 $u = \frac{Y}{X}$, 则 $u + X \frac{du}{dX} = \frac{1 - u}{1 + u}$, $X \frac{du}{dX} = \frac{1 - 2u - u^2}{1 + u}$

若 $u^2 + 2u - 1 \neq 0$, 则

$$\int \frac{1 + u}{1 - 2u - u^2} du = \int \frac{1}{X} dX$$

即

$$-\frac{1}{2} \ln |u^2 + 2u - 1| = \ln |X| + C$$

$$X^2 \cdot (u^2 + 2u - 1) = C \quad (C \neq 0)$$

显然 $u^2 + 2u - 1 = 0$ 对应的 $u = u_0$ 也是解。

因此通解为 $X^2(u^2 + 2u - 1) = C$, C 为任意常数

代回原变量:

$$(y - 2)^2 + 2(x - 1)(y - 2) - (x - 1)^2 = C$$

Rem. 更一般方程情形:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

可类似求解。

例 10

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y - 2}{x + y - 1}\right)^2$$

解 10

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (-1, 2), \quad \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2Y^2}{(X+Y)^2}$$

$$\text{令 } u = \frac{Y}{X}, \text{ 则 } u + X \frac{du}{dX} = \frac{2u^2}{(1+u)^2}, \text{ 即 } X \frac{du}{dX} = -\frac{u+u^2}{(1+u)^2}$$

若 $u \neq 0$, 则

$$\int \frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)} du = \int -\frac{1}{X} dX$$

$$\ln|u| + 2 \arctan u = -\ln|X| + C$$

通解 $y - 2 = Ce^{-2\arctan \frac{y-2}{x+1}}$, C 为任意常数

Rem.

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad \text{令 } u = ax + by + c$$

$$yf(xy) dx + xg(xy) dy = 0 \quad (\text{令 } u = xy)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = f(xy) \quad (\text{令 } u = xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = xf\left(\frac{y}{x^2}\right) \quad (\text{令 } u = \frac{y}{x^2})$$

五、应用举例

例 聚照灯反射镜面的形状要求: 将点光源射出的光线, 平行地反射出去, 以保证聚照灯有良好的方向性。

解 建立坐标系, 设曲线

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转形成曲面

问题归结为求 xOy 平面上曲线 $y = f(x)z$ 的方程:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha_2 = -\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{齐次方程})$$

亦即

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \cdot \operatorname{sgn}(y)$$

$$\text{令 } u = \frac{x}{y}, \text{ 则 } x = uy, \quad u + y \frac{du}{dy} = u + \operatorname{sgn}(y) \sqrt{u^2 + 1}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \operatorname{sgn}(y) \cdot \frac{dy}{y}$$

两边积分：

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right) + C = \ln y, \quad C \cdot (u + \sqrt{u^2 + 1}) = y$$

代入 $u = \frac{x}{y}$, 有

$$C \cdot (x + \sqrt{x^2 + y^2}) = y^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{y^4}{C^2} + x^2 - 2 \frac{xy^2}{C}$$

即

$$1 = \frac{y^2}{C^2} - \frac{2x}{C}, \quad y^2 = c^2 + 2Cx, \quad C \text{ 为任意常数}$$

反射镜面为旋转抛物面：

$$y^2 + z^2 = C^2 + 2Cx$$

§2.2 线性微分方程与常数变易法

一、一阶线性常微分方程

1. 形式

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \tag{1}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 都是连续函数。

Rem. (i) 若方程为 $a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0$, 在 $a(x) \neq 0$ 的区间上有:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)} = 0$$

(ii) 若称 $Q(x) \equiv 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = P(x)y$ (2) 称为齐次方程; 反之, $Q(x) \not\equiv 0$, 称为非齐次方程。

2. 常数变易法

先求齐次方程 (2) 的通解:

$$y = c e^{\int P(x) dx}, \quad c \text{ 为任意常数}$$

考虑 $y = c(x) e^{\int P(x) dx}$ 的导数:

$$y'(x) = c'(x) e^{\int P(x) dx} + c(x)P(x) e^{\int P(x) dx}$$

代入非齐次方程(1), 得:

$$Q(x) = c'(x) e^{\int P(x) dx}, \quad c'(x) = Q(x) e^{-\int P(x) dx}$$

积分得:

$$c(x) = \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C$$

因此非齐次方程通解为:

$$y(x) = \left(\int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C \right) e^{\int P(x) dx}$$

Rem. 线性非齐次方程通解的结构:

$$y(x) = C e^{\int p(x) dx} (\text{齐次方程通解}) + \left(\int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx \right) e^{\int p(x) dx} (\text{非齐次方程的一个特解})$$

例 1 求解方程 $(x+1) \frac{dy}{dx} - ny = e^x (x+1)^{n+1}$, n 为常数。

解 1

$$\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x+1} y = e^x (x+1)^n$$

(i) 先求齐次方程的通解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x+1} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{n dx}{x+1}, \Rightarrow y = C(x+1)^n$$

(ii) 非齐次方程的通解:

设 $y = c(x)(x+1)^n$ 是方程的通解

$$c'(x) \cdot (x+1)^n = e^x \cdot (x+1)^n, c(x) = e^x + C$$

非齐次方程通解为:

$$y = (e^x + C)(x+1)^n, \quad C \text{ 为任意常数}$$

例 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x-y^2}$$

解 2

$$x = (-\ln(y) + C) y^2, \quad C \text{ 为任意常数}$$

$y = 0$ 也是解。

3. 积分因子法

$$\frac{dy}{dx} - P(x)y = Q(x)$$

考虑

$$\frac{d}{dx}(y(x)z(x)) = \frac{d}{dx}y(x) \cdot z(x) + \frac{d}{dx}z(x) \cdot y(x)$$

有

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}y(x)\right) = \frac{dy}{dx}e^{-\int P(x)dx} - p(x)e^{-\int P(x)dx}y = e^{-\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} - P(x)y\right)$$

上式两边同乘 $e^{-\int P(x)dx}$:

$$e^{-\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} - P(x)y\right) = e^{-\int P(x)dx}q(x)$$

即

$$e^{-\int P(x)dx}y = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C$$

因此

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C\right)e^{\int p(x)dx}, \quad C \text{为任意常数}$$

4. 一阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(1) 先求通解, 再代入 $y(x_0) = y_0$, 求出 C 。

(2)

$$y = C e^{\int_{x_0}^x P(t)dt} + \int_{x_0}^x Q(s)e^{-\int_s^x P(t)dt}ds \cdot e^{\int_{x_0}^x P(t)dt}$$

可求得 $C = y_0$:

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^x P(t)dt} + \int_{x_0}^x Q(s)e^{-\int_s^x P(t)dt}ds \cdot e^{\int_{x_0}^x P(t)dt}$$

例 3 函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续有界, 证明方程

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t) \tag{*}$$

所有解均在 $[0, +\infty)$ 上有界。

解 3

证明 设 $y(t)$ 是方程 (*) 上任意给定的解, 令 $x(0) = x_0$, 则 $x(t)$ 一定满足

$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t (-1)dt} + \int_0^t f(s)e^{-\int_0^s (-1)dt}ds \cdot e^{-\int_0^t (-1)dt} = x_0 e^{-t} + \int_0^t f(s)e^s ds \cdot e^{-t}$$

显然 $\exists M > 0$ s.t. $|f(t)| \leq M$, $\forall t \in [0, +\infty)$ 。

从而

$$|x(t)| = |x_0 e^{-t} + \int_0^t f(s) e^s ds \cdot e^{-t}| \quad (1)$$

$$\leq |x_0 e^{-t}| + \left| \int_0^t f(s) e^s ds \cdot e^{-t} \right| \quad (2)$$

$$\leq |x_0| + e^{-t} \cdot \int_0^t |f(s)| e^s ds \quad (3)$$

$$\leq |x_0| + e^{-t} \cdot M \int_0^t e^s ds \quad (4)$$

$$= |x_0| + e^{-t} \cdot (e^t - 1) \cdot M \quad (5)$$

$$\leq |x_0| + M \quad (6)$$

因此 $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界。

5. 线性方程的性质

(1) 齐次线性微分方程的解的线性组合仍是齐次方程的解。齐次线性微分方程的解与非齐次线性微分方程的解之和仍是非齐次线性微分方程的解；非齐次线性微分方程两个任意解的差仍是解。

(2) 齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的特解之和构成非齐次线性微分方程的通解。

(3) 线性微分方程的初值问题的解是存在唯一的。

例 3

$$\frac{dy}{dx} = 6 \frac{y}{x} - xy^2$$

解 3

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - 6 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -x, \quad \frac{d(\frac{1}{y})}{dx} + \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{y} = x$$

令 $z = \frac{1}{y}$, 有:

$$z = \left(\frac{1}{8} x^8 + C \right) \cdot x^{-6}$$

代回 y 有:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{8} x^8 + C \cdot x^{-6}}$$

原方程 $y = 0$ 也是解。

二、Bernoulli 方程

1. 形式:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \quad (3)$$

其中 $P(x), Q(x)$ 为连续函数

2. 解法:

$y \neq 0$ 时

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = P(x)y^{1-n} + Q(x) \quad (4)$$

$$\frac{d(y^{1-n})}{dx} = (1-n)P(x)y^{1-n} + (1-n)Q(x)$$

令

$$z = y^{1-n}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x) \quad (5)$$

设 (5) 式通解为 $z = \varphi(x, c)$

则 (3) 式通解为 $y^{1-n} = \varphi(x, c)$, c 为任意常数

Rem.

- 方程 (3) 中 $n = 0, 1$ 时为线性方程;
- 方程 (3) 中 $n > 0$ 时有奇解 $\Rightarrow y = 0$ 。

例 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3y^3}$$

解 4

$$\frac{dy}{dx} = yx + y^3x^3, \quad x^{-3} \frac{dy}{dx} = yx^{-2} + y^3$$

$$\text{令 } z = x^{-2}, \quad \frac{dz}{dx} = -2yz - 2y^3$$

齐次方程:

$$\frac{dz}{dx} = -2yz, \quad \text{有通解 } z = Ce^{-y^2}$$

非齐次方程:

$$z = C(y)e^{-y^2}, \quad C'(y)e^{-y^2} = -2y^3$$

$$C(y) = \int -2y^3 e^{-y^2} dy = - \int te^t dt = -(t-1)e^t + c = -(y^2 - 1)e^{y^2} + c$$

通解：

$$z = [-(y^2 - 1)e^{y^2} + c]e^{-y^2} = -(y^2 - 1) + Ce^{-y^2}$$

原方程通解为

$$x^{-2} = ce^{-y^2} - y^2 + 1$$

例 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y + 3x}{x^2}$$

解 5 令 $u = e^y$, $\frac{du}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} u + \frac{3}{x} \text{ 即 } \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{x^2} + \frac{3u}{x}, \frac{1}{u} = Cx^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1}$$

通解为

$$\frac{1}{e^y} = Cx^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1}, \quad C \text{ 为任意常数}$$

三、Riccati 方程

1. 形式：

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (6)$$

其中 $P(x), Q(x), R(x)$ 为连续函数。

Rem.

- 1841 年, Liouville 证明 (6) 式一般情况下不能表示为初等函数解;
- 若已知 (6) 的一个特解, 则可求出通解。

2. 解法：

设 (6) 有一特解 $\tilde{y}(x)$, 设 $y(x) = z + \tilde{y}(x)$ 是 (6) 的解, 则代入 (6) 有

$$\frac{dz}{dx} + \frac{d\tilde{y}}{dx} = P(x)(z^2 + 2z\tilde{y} + \tilde{y}^2) + Q(x)(z + \tilde{y}) + R(x)$$

即

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dtild{y}}{dx} = P(x)z^2 + (2P(x)\bar{y} + Q(x))z + P(x)\bar{y}^2 + Q(x)\bar{y} + R(x)$$

由 \tilde{y} 是 (6) 的特解,

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z^2 + (2P(x)\tilde{y} + Q(x))z$$

为 Bernoulli 方程。

因此原方程通解为 $y = \varphi(x, c) + tild{y}$ 。

例 6

$$y' = y^2 - x^2 + 1$$

解 6 显然, $y = x$ 是一个特解。

令 $y = x + z(x)$, 则

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2xz$$

通解为

$$z = \left(- \int e^{-x^2} dx + C \right) e^{-x^2}$$

原方程通解为

$$y = x + e^{x^2} \cdot \left(- \int e^{-x^2} dx + C \right)^{-1}, \quad C \text{ 为任意常数}$$

§2.3 全微分方程和积分因子

一、全微分方程

$$(1) d(xy) = x dy + y dx = 0$$

$$x dy + y dx = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C$$

$$(2) d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0$$

$$y dx - x dy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = C$$

(3) 设 Oxy 平面存在力场, $\vec{F}(x, y) = M(x, y) \vec{i} + N(x, y) \vec{j}$, 求曲线 L 使与力场处处垂直。

解答: 设曲线 $L: y = y(x)$, 则 L 在 Q 点处的斜率为

$$\frac{dy}{dx}$$

向量切线方向在 Q 点的斜率 $\tan \theta = \frac{N(x, y)}{M(x, y)}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \Rightarrow M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (*)$$

若 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, 则 (1) 式为全微分方程, 即 $\exists u(x, y)$ s.t.

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

即方程化为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

通解为

$$u(x, y) = C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

1. 定义

设一阶拟线性微分方程的微分形式为

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (*)$$

其中 $M(x, y), N(x, y)$ 在区域 G 内连续且有一阶连续偏导数。

若存在可微函数 $u(x, y)$ s.t.

$$du(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$, 则称方程 (*) 为全微分方程, 或全微分形式。 $u(x, y)$ 称为 $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ 的一个原函数。

例 1

- $x dx + y dy = 0 \implies d(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2) = 0$
- $y dx - x dy = 0 \implies d(\frac{x}{y}) = 0$

Thm. 设 $M(x, y), N(x, y)$ 在某单连通区域 G 内连续可微, 则方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (*)$$

是全微分方程

$$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \forall (b, y) \in G \quad (**)$$

且当 (**) 成立时, 原函数 $u(x, y)$ 可取为

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy$$

其中 $(x_0, y_0) \in G$ 是任意取定一点。

或:

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x M(x, y) dx$$

证明 $\Rightarrow (*)$ 是全微分方程, $\exists u(x, y)$ s.t. $M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

由 $M, N \in C'$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}$

\Leftarrow 若 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, 设法证 $\exists u(x, y)$ s.t. $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ 。

对 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ 两边关于 x 积分, 得:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_0}^x M(x, y) dx$$

即

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y), \quad \varphi(y) = u(x_0, y)$$

两边关于 y 求导:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

由 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y) \Rightarrow \varphi'(y) = N(x_0, y)$$

因此

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

令 $\varphi(y_0) = 0$, 得

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(b_0, y) dy$$

于是

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

因此 (*) 式为全微分方程。

Rem.

- 若 $u(x, y)$ 是 $Mdx + Ndy$ 的一个原函数, 则 $u(x, y) + C$ 也是解;
- $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow Mdx + Ndy = 0$ 是全微分方程。
- 若 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, 则 $Mdx + Ndy$ 的一个原函数为 $u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$
其中 (x_0, y_0) 是 G 内任一点。

例 2 求解方程 $xy dx + (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}) dy = 0$

解 2 $M = xy, N = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = x$$

$$u(x, y) = \int_{(0,1)}^{(x,y)} xy dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = \int_0^x x dx + \int_1^y \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2}x^2y + \ln|y|$$

通解: $\frac{1}{2}x^2y + \ln|y| = C$, C 为任意常数

另解 $xy \, dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) \, dy = 0$

$$xy \, dx + \frac{x^2}{2} \, dy = d\left(\frac{1}{2}x^2y\right), \quad \frac{1}{y} \, dy = d(\ln|y|)$$

因此有通解 $\frac{1}{2}x^2y + \ln|y| = C$, C 为任意常数

例 3 求解方程 $(3b^2 + 6by) \, db + (4y^3 + 6b^2y) \, dy = 0$

解 3 $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 4y^3 + 6x^2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

$$u(x, y) = \int_0^x 3x^2 \, dx + \int_0^y (4y^3 + 6x^2y) \, dy = x^3 + y^4 + 3x^2y^2$$

所以方程有通解

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

2. 初值问题的解

$$\begin{cases} M(x, y) \, db + N(x, y) \, dy = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

通解

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) \, dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) \, dy + C$$

特解: $C = 0$

3. 全微分方程的解法

- (1) 公式法 (2) 分项组合法 (3) 积分法

例 4 $3y \, dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) \, dy = 0$

解 4: 积分法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$$

关于 x 的积分为:

$$u = \frac{1}{2}x^2y + \varphi(y)$$

对上式关于 y 求导:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + \varphi'(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$$

因此 $\varphi(y) = \ln|y| + C$, $u = \frac{1}{2}x^2y + \ln|y|$

通解:

$$\frac{1}{2}x^2y + \ln|y| = C$$

Rem. 分项组合法: 根据常见的全微分公式

例 5 $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

解 5

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$d(\arctan \frac{x}{y}) = \left(\frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right) dy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

因此通解:

$$\arctan \frac{x}{y} = C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

考虑方程 $ydx - xdy = 0$

方程两边同乘 $\frac{1}{x^2 + y^2}$ 有 $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

方程两边同乘 $\frac{1}{y^2}$ 有 $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$

Rem. 积分因子: $\frac{1}{x^2 + y^2}$ 与 $\frac{1}{y^2}$ 不唯一

二、积分因子

1. 定义

对于微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{*}$$

若方程 (*) 不是全微分方程, 但存在一个连续可微函数 $\mu = \mu(x, y)$, s.t.

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{**}$$

为全微分方程, 则 $\exists v = v(x, y)$ s.t.

$$dv(x, y) = \mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy$$

则称 $\mu(x, y)$ 为方程 (*) 的一个积分因子

Rem. (i) 可以证明, (*) 式与 (**) 式为同解方程。 (ii) $\mu(x, y)$ 为积分因子的充要条件。

Thm.1 若 $M(x, y), N(x, y), \mu(x, y)$ 均连续可微, 则 $\mu(x, y)$ 为 (*) 的积分因子 $\Leftrightarrow N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$

Thm.2 设 $M(x, y), N(x, y), \varphi(x, y)$ 在区域 G 内连续可微, 则方程 (*) 有形如 $\mu = \mu[\varphi(x, y)]$ 的积分因子 \Leftrightarrow

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{N \frac{\partial \varphi}{\partial y} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

仅是 φ 的函数, 记为 $f(\varphi)$ 。则 $\mu = e^{\int f(\varphi) d\varphi} = e^{G(\varphi)}$ 是积分因子。

证明 \Rightarrow 若 (*) 有积分因子 μ , 且 $\mu = \mu[\varphi(x, y)]$, 则:

$$\frac{d\mu}{d\varphi} \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y}} d\varphi = f(\varphi) d\varphi \Rightarrow \mu = e^{\int f(\varphi) d\varphi} = e^{G(\varphi)}$$

\Leftarrow 若 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ 仅关于 φ , 往证 $\mu = e^{G(\varphi)}$ 是方程的解

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = (N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y}) e^{G(\varphi)} f(\varphi) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

因此 $\mu = e^{G(\varphi)}$ 是积分因子。

类型	条件	积分因子
$\varphi(x, y) = b, \mu(x) = x$	$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$	$e^{\int f(x) dx}$
$\varphi(x, y) = y, \mu(y) = y$	$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = f(y)$	$e^{\int f(y) dy}$

例 6 求解方程 $(y^2 - 3xy + 1) dx + (xy - x^2) dy = 0$

解 6

$$M = y^2 - 3xy + 1, \quad N = xy - x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 3x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y - 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = y - x$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}$$

仅是 x 的函数。

积分因子:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

方程两边同乘以 x :

$$(xy^2 - 3x^2y + x)dx + (x^2y - x^3)dy = 0$$

$$d\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{2}x^2\right) = 0$$

通解:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{2}x^2 = C$$

例 7 求解方程 $(xy + y^2)dx + (xy + y + 1)dy = 0$

解 7

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{1}{y} \text{ 仅是 } y \text{ 的函数}$$

积分因子:

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y}$$

当 $y \neq 0$ 时:

$$(x + y)dx + \left(x + \frac{1}{y} + 1\right)dy = 0$$

$$d\left(\frac{1}{2}x^2 + xy + y + \ln|y|\right) = 0$$

因此通解:

$$\frac{3}{2}x^2 + xy + y + \ln|y| = C$$

当 $y = 0$ 时也是解。

例 8 求解方程 $(y^2 + 2x^2y)dx + (xy + x^3)dy = 0$

解 8

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 2x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y + 3x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = y - x^2$$

设方程有积分因子 $\mu = \mu(x^\alpha y^\beta)$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\alpha \frac{N}{x} - \beta \frac{M}{y}} \cdot \frac{1}{x^\alpha y^\beta} = \frac{y - x^2}{\alpha(y + x^2) - \beta(y + 2x^2)} \cdot \frac{1}{x^\alpha y^\beta}$$

令

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1, \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 2$$

因此积分因子:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x^3 y^2} dy} = x^3 y^2$$

将方程两边同乘 $\mu = x^3 y^2$:

$$(x^3 y^4 + 2x^5 y^3) dx + (x^4 y^3 + x^6 y^2) dy = 0$$

这是一个全微分方程:

$$d\left(\frac{1}{4}x^4 y^4 + \frac{1}{3}x^6 y^3\right) = 0$$

通解:

$$\frac{1}{4}x^4 y^4 + \frac{1}{3}x^6 y^3 = C$$

§2.4 一阶隐式微分方程

一、一阶隐式方程

$$F(x, y, y') = 0 \quad (*)$$

1. 若可化为 $y' = f(x, y)$

根据显式方程求解即可。

例 1 求解方程 $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$

解 1

$$(y' - x)(y' - y) = 0$$

所以通解为 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ 或 $y = Ce^x$

2. 可解出 y 的方程: $y = f(x, y')$, 其中 $f \in C^{(1)}$

令 $y' = p$, 则 $y = f(x, p)$

两边关于 x 求导:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$$

即

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = F(x, p)$$

(关于 x, p 的一阶显式微分方程)

① 若 $p = \varphi(x, c)$, 代入有 $y = f[x, \varphi(x, c)]$

② 若 $x = \psi(p, c)$, 代入有

$$\begin{cases} x = \psi(p, c), \\ y = f(x, p) \end{cases}$$

其中 p 为参数, c 为任意常数。

③ 若 $\Phi(x, p, c) = 0$, 代入有

$$\begin{cases} \Phi(x, p, c) = 0, \\ y = f(x, p) \end{cases}$$

其中 p 为参数, c 为任意常数。

例 2 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

解 2

$$y = p^3 + 2xp, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

上式左边关于 x 求导:

$$p = 3p^2 \frac{dp}{dx} + 2p + 2x \frac{dp}{dx}$$

即:

$$3p^2 dp + 2xdp + pdx = 0$$

有积分因子 $\mu(p) = p$

$$(3p^3 + 2xp) dp + p^2 dx = 0 \quad (p \neq 0)$$

$$d\left(\frac{3}{4}p^4 + p^2x\right) = 0$$

通解:

$$\frac{3}{4}p^4 + p^2x = C$$

即:

$$x = Cp^{-2} - \frac{3}{4}p^2$$

代入得:

$$y = p^3 + 2xp = \frac{2C}{p} - \frac{1}{2}p^3$$

故原方程为隐式通解为:

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2, \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{1}{2}p^3 \end{cases}$$

其中 p 为参数, C 为任意常数。当 $p = 0$ 时, 有特解 $y = 0$ 。

例 3 求解方程 $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}$

解 3 令 $\frac{dy}{dx} = p$, 则 $y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$ 。

两边对 x 求导:

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - x\frac{dp}{dx} + x$$

$$2p\frac{dp}{dx} - 2p - x\frac{dp}{dx} + x = 0$$

$$\left(\frac{dp}{dx} - 1\right)(2p - x) = 0$$

因此 $\frac{dp}{dx} = 1$ 或 $2p = x$ 。

有通解:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{1}{2}x^2$$

特解为 $y = \frac{1}{4}x^2$ 。(几何上称为“包络线”)

3. 可解出 x 的方程: $x = f(y, p)$

令 $y' = p$, 则 $x = f(y, p)$

两边关于 y 求导:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}$$

即

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial p}} = G(y, p)$$

(关于 y, p 的一阶显式微分方程)

① 若 $\Phi(y, p, c) = 0$, 则原方程通解为:

$$\begin{cases} \Phi(y, p, c) = 0, \\ x = f(y, p) \end{cases}$$

其中 p 为参数, c 为任意常数。

例 4 求解方程 $x\frac{1}{y} = y'^2$

解 4

$$x = yp^2, \quad p = y'$$

两边对 y 求导：

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= p^2 + 2yp \frac{dp}{dy} \\ \frac{dp}{dy} &= \frac{\frac{1}{p} - p^2}{2py} = \frac{1 - p^3}{2yp^2} \\ \frac{p^2}{1 - p^3} dp &= \frac{1}{2y} dy\end{aligned}$$

积分：

$$-\frac{1}{3} \ln(1 - p^2) = \frac{1}{2} \ln|y| + C$$

原方程通解：

$$-\frac{1}{3} \ln(1 - p^2) = \frac{1}{2} \ln|y| + C, x = yp^2$$

其中 p 为参数， C 为任意常数。当 $p = 1$ 时显然也是解； $y = 0$ 时也是解。

例 5 求解方程 $y = xy' + \varphi(y')$ ，其中 $\varphi \in C^{(2)}$ 且 $\varphi'' \neq 0$ 。（Clairaut Equation）

解 5 令 $y' = p$ ，则 $y = xp + \varphi(p)$ 。

两边对 x 求导：

$$\begin{aligned}p &= p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx} \\ [x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} &= 0\end{aligned}$$

① 若 $\frac{dp}{dx} = 0$ ，则 $p = C$ ，此时原方程通解为：

$$\left\{ y = xp + \varphi(p)p = C \right.$$

② 若 $x + \varphi'(p) = 0$ ，此时原方程的一个特解为：

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -p\varphi'(p) + \varphi(p), \\ x = -\varphi'(p) \end{array} \right.$$

Rem. 上述方程称为 Clairaut 方程。

例 6 求解方程 $y = xy' + (y')^2$

解 6

$$\varphi(u) = u^2, \quad \varphi'(u) = 2u, \quad \varphi''(u) = 2 \neq 0$$

通解为：

$$y = Cx^2 + C^2$$

特解为：

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) = -2p^2 + p^2 = -p^2, \\ x = -\varphi'(p) = -2p \end{array} \right.$$

即 $y = -\frac{x^2}{4}$ 。

4. 不显含 y 的方程 $F(x, y') = 0$

令 $y' = p$, 则 $F(x, p) = 0$ 。

设其为参数方程:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ p = \psi(t) \end{cases}$$

由于 $dy = p dx = \psi(t) d\varphi(t)$, 从而 $dy = \psi(t)\varphi'(t) dt$

两边积分得:

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C$$

原方程的参数形式通解:

$$\begin{cases} y = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C, \\ x = \varphi(t) \end{cases}$$

其中 t 为参数, C 为任意常数。

例 7 求解方程 $x\sqrt{1+(y')^2} = y'$

解 7 令 $y' = p$, 则 $F(x, p) = x\sqrt{1+p^2} - p = 0$

设:

$$x = \sin t, \quad p = \tan t$$

由于 $dy = p dx$, 有

$$y = \int \tan t \cos t dt = \int \sin t dt = -\cos t + C$$

原方程通解:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + C \end{cases}$$

例 8 求解方程 $x^3 + xy'^3 - 3xy' = 0$

解 8 令 $y' = p$, 则 $x^3 + p^3 - 3xp = 0$

设 $x = t^3$, 则

$$p = \frac{3t^2}{1+t^3}, x = \frac{3t}{1+t^3}$$

$$\text{由于 } dy = p dx = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3(1+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt$$

$$y = \int \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^3} + C$$

原方程参数形式通解:

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+4t^3}{(1+t^3)^3} + C \end{cases}$$

5. 不显含 x 的方程 $F(y, y') = 0$

令 $y' = p$, 则 $F(y, p) = 0$ 。设其为参数方程:

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ p = \psi(t), \end{cases} \quad t \text{ 为参数。}$$

由于 $dy = p dx$, 故 $dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$

两边积分得:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C$$

原方程的参数形式通解:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

当 $p = 0$ 时, 若 $F(y, 0) = 0$, 则有常数解 $y = k$ 。

例 9 求解方程 $y^2(1 - y') = (2 - y')^2$

解 9 令 $y' = p$, 则 $y^2(1 - p) = (2 - p)^2$

设 $2 - p = ty$, 则 $ty - 1 = t^2$, $y = t + \frac{1}{t}$, $p = 1 - t^2$ ($p \neq 0$), 得

又因为 $dx = \frac{1}{p} dy = \frac{1 - \frac{1}{t}}{1 - t^2} dt = -\frac{1}{t^2} dt$, $x = \int -\frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{t} + C$

原方程通解:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + C, \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

或写作:

$$y = x - C + \frac{1}{x - C}$$

当 $p = 0$ 时, 有 $y^2 = 4$, 即 $y = \pm 2$ 也是特解。

6. 一般的一阶隐式方程 $F(x, y, y') = 0$

令 $y' = p$, 则 $F(x, y, p) = 0$ 。

令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad p = h(u, v)$$

代入：

$$dy = p dx, \quad \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = h(u, v) \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right)$$

即：

$$M(u, v) du + N(u, v) dv = 0$$

求出其通解或特解，从而可求出原方程的通解。

例 10 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0$

解 10 令 $p = \frac{dy}{dx}$, 则 $p^2 + y - x = 0$

设 $x = u$, $p = v$, $y = u - v^2$

由 $dy = p dx$,

$$d(u - v^2) = v du \Rightarrow (1 - v) du = 2v dv$$

积分得：

$$u = -2v - \ln(v - 1)^2 + C \quad \text{特解为 } v = 1$$

原方程通解：

$$\begin{cases} x = -2v - \ln(v - 1)^2 + C, \\ y = -2v - \ln(v - 1)^2 - v^2 + C \end{cases}$$

C 为任意常数。

特解： $y = x - 1$

思考：

1. Riccati 方程： $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ 除特例外，一般没有初等解法。
2. $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$ 的解不唯一， $y \equiv 0$, $y = x^2$ 都是解。
3. 考虑 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解的**存在性、唯一性**以及**连续性**。