§4 高阶微分方程

内容：

- 理解线性微分方程的一般理论；
- 能够求解高阶常系数线性微分方程；
- 掌握非齐次线性微分方程的常用解法；
- 掌握带有常系数非齐次线性微分方程的特定系数方法和 Laplace 变换法；
- 高阶方程降阶法和幂级数解法。

§4.1 线性微分方程的一般理论

一、n 阶线性微分方程的存在唯一性定理

1. n 阶线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+a_n(t)y=f(t) \tag{4.1}$$

式 (4.1) 中，若 $f(t)\equiv 0$，则为齐次微分方程，此时记为

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+a_n(t)y=0 \tag{4.2}$$

$f(t)\neq 0$ 则为非齐次微分方程。其中 $a_i(t),\, i=1,2,\ldots,n$ 和 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数。

2. 存在唯一性定理

Thm. 若 $a_i(t),\, i=1,2,\ldots,n$ 及 $f(t)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $\forall t_0\in[a,b]$ 及 $y_0, y_0^{(1)},\ldots,y_0^{(n-1)}$，方程 (4.1) 存在唯一解 $y=\varphi(t)$，定义在 $t\in[a,b]$ 上，且满足初值条件

$$\varphi(t_0)=y_0,\quad \varphi'(t_0)=y_0^{(1)},\quad \ldots,\quad \frac{d^{(n-1)}\varphi}{dt^{(n-1)}}(t_0)=y_0^{(n-1)}.$$

例 1 判断下列方程的线性、齐次性、常系数性

(1) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+(t^2-n^2)x=0 \quad (n\text{为常数})$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+3x=0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4x=\sin t$

(4) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+a_1t\dfrac{dy}{dt}+a_2x=f(t)\quad(a_1,a_2\text{为常数})$

解 1 (1)～(4) 均为线性方程，其中 (1)(2) 为齐次，(3)(4) 为非齐次，(2)(3) 为常系数方程。

二、齐次线性微分方程解的性质与结构

1. 预备知识

(1) 线性相关与线性无关

Def. 设 $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的函数，如果存在不全为 0 的常数 $C_1,C_2,\dots,C_n$ 使得

$$C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)\equiv 0,\quad \forall t\in[a,b],$$

则称 $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ 线性相关；否则称 $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ 线性无关。

Rem.

(1) 函数组的线性相关性依赖于定义区间。

例： $y_1(t)=|t|,y_2(t)=t$ 它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关，在 $(0,+\infty)$ 上线性相关。

(2) 两个函数 $y_1(t),y_2(t)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，则它们在 $[a,b]$ 上线性无关 $\Longleftrightarrow$ 它们在 $[a,b]$ 上的比值 $y_1(t)/y_2(t)$ 不恒为常数。

判定法则： 设 $y_1(t),\dots,y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关，则 $\exists$ 不全为 0 的常数 $C_1,C_2,\dots,C_n$ 使得

$$\begin{cases}C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)=0,\\ C_1y_1'(t)+\cdots+C_ny_n'(t)=0,\\ \quad\vdots\\ C_1y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(t)=0.\end{cases}$$

联立上述关于 $C_1,\dots,C_n$ 的齐次线性方程组，由方程组一定有非零解，其系数行列式为 0，$\forall t\in[a,b]$。即：

$$\begin{vmatrix}y_1(t)&y_2(t)&\cdots&y_n(t)\\ y_1'(t)&y_2'(t)&\cdots&y_n'(t)\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ y_1^{(n-1)}(t)&y_2^{(n-1)}(t)&\cdots&y_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}=0,\quad\forall t\in[a,b].$$

Def. 设函数 $y_1(t),\dots,y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n-1$ 阶导数，则行列式

$$W[y_1(t),\dots,y_n(t)] \triangleq \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为函数组 $y_1(t),\dots,y_n(t)$ 的 Wronsky 行列式。

Thm 2. 若 $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关，则它们在 $[a,b]$ 上的 Wronsky 行列式恒为 0。

Rem. 定理的逆命题不成立。

例:

$$y_1(t)=\begin{cases} t^2, & -1\le t<0, \\ 0, & 0\le t\le 1, \end{cases} \quad y_2(t)=\begin{cases} t^2, & 0\le t\le 1, \\ 0, & -1\le t<0. \end{cases}$$

在 $[-1,1]$ 上 $W(t)\equiv 0$，但在 $[-1,1]$ 上线性无关。

Cor. 若函数组 $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ 的 Wronsky 行列式在 $[a,b]$ 上某一点 t_0 处 $\neq 0$, 则 $W(t)\neq 0$，函数组在 $[a,b]$ 上线性无关。

Thm 3.（叠加原理） 若 $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ 是齐次线性微分方程 (4.2) 的 n 个解，则 $C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)$ 也是 (4.2) 的解，其中 $C_1,C_2,\dots,C_n$ 为任意常数。

Rem. (1) 当 $k=n$ 时，方程 (4.2) 有解 $y=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)$，但不一定为通解。

2. 齐次线性微分方程解的性质

Thm 4. 若方程 (4.2) 的解 $y_1(t),\dots,y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关，则

$$W[y_1(t),\dots,y_n(t)] \text{ 在}[a,b] \text{ 上任何点都不等于0,} \quad \text{即 } W(t)\neq 0,\ \forall t\in[a,b].$$

证明 若 $\exists t_0\in[a,b]$ 使 $W(t_0)=0$，考虑 $C_1,C_2,\dots,C_n$ 的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} C_1y_1(t_0)+\cdots+C_ny_n(t_0)=0, \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(t_0)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(t_0)=0. \end{cases}$$

且 $W(t_0)=0$，故方程组有非零解 $C_1,C_2,\dots,C_n$。现以这些常数构造函数:

$$y(t)\triangleq C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t), \quad t\in[a,b].$$

下证 $y(t)\equiv 0$。由叠加原理知，$y(t)$ 是方程 (4.2) 的解。注意到

$$y(t_0)=y'(t_0)=\cdots=y^{(n-1)}(t_0)=0.$$

注意到零解也满足上述式，则由解的存在唯一性定理，得

$$y(t)\equiv 0,\quad \forall t\in[a,b].$$

即 $\exists$ 不全为 0 的 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 使得

$$C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)\equiv 0,\quad \forall t\in[a,b],$$

与线性无关矛盾。

Cor. 设 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 是方程 (4.2) 在 $[a,b]$ 上的 n 个解，若 $\exists t_0\in[a,b]$ 使 $W(t_0)=0$，则 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 线性相关。

Cor. 方程 (4.2) 的 n 个解 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\exists t_0\in[a,b]$ 使 $W(t_0)\neq 0$。

3. 齐次线性微分方程通解的结构

Thm 5. n 阶齐次线性微分方程 (4.2) 一定存在 n 个线性无关的解。

证明　由存在唯一性定理知，方程 (4.2) 的解 $y(t)$ 满足以下初始条件:

$$\begin{gathered}y_1(t_0)=1,y_1'(t_0)=0,\cdots,y_1^{(n-1)}(t_0)=0\\ y_2(t_0)=0,y_2'(t_0)=1,\cdots,y_2^{(n-1)}(t_0)=0\\ \vdots\\ y_n(t_0)=0,y_n'(t_0)=0,\cdots,y_n^{(n-1)}(t_0)=1\end{gathered}$$

由解的唯一性定理，n 个解 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 一定存在且不相等

又因为 $W[y_1(t_0),y_2(t_0),\ldots,y_n(t_0)]=W(t_0)=1\neq 0$，故 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关。

Thm 6.（齐次线性微分方程通解的结构定理） 若 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 是方程 (4.2) 的 n 个线性无关的解，则方程通解可表示为

$$y=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t)\tag{*}$$

其中 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 为任意常数，且 (*) 包含方程 (4.2) 的所有解。

证明 (1) 由叠加原理，(*) 是方程 (4.2) 的解，包含 n 个任意常数。

(2) 又因为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial y}{\partial C_n} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial y'}{\partial C_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = W(t) \neq 0$$

故 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 相互独立，因此 (*) 式为通解，下证 (*) 包含所有解。

由解的存在唯一性定理，唯一解取决于初始条件：

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

能唯一确定 (*) 中常数 $C_1, C_2, \ldots, C_n$。令 (*) 式满足该初始值，

$$\begin{cases} C_1 y_1(t_0) + \cdots + C_n y_n(t_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(t_0) + \cdots + C_n y_n'(t_0) = y_0', \\ \quad \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = W(t_0) \neq 0$$

因此方程组有唯一解 $C_1, C_2, \ldots, C_n$，因此 $C_1 y_1(t) + \cdots + C_n y_n(t)$ 为满足方程初始值的解。

例 1 $y'' + y = 0$

解 1 显然，$y_1 = \cos t$，$y_2 = \sin t$ 是方程两线性无关的解。通解为

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \text{ 为任意常数。}$$

例： $y = e^{\pm it}$，代入方程 $y'' + y = 0$，得特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$，$\lambda = \pm i$，$y = e^{it}, y = e^{-it}$ 是方程的解。

由欧拉公式知，$y_1 = \cos t$，$y_2 = \sin t$ 都是解。

Cor. 方程 (4.2) 线性无关解的最大个数为 n。

Cor. n 阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间。

Rem. 方程 (4.2) 的一组 n 个线性无关解称为方程的一个 **基本解组**。当 $W(t_0) \neq 0$ 时，称为标准基本解组。

Thm 7. 设 $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ 是方程 (4.2) 的解，则 TFAE：
(1) 方程 (4.2) 的通解是 $y(t) = C_1y_1(t) + \cdots + C_ny_n(t)$；
(2) $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ 是方程 (4.2) 的一个基本解组；
(3) $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ 线性无关；
(4) 在 (a, b) 上有一点处 Wronsky 行列式 $W(t) \neq 0$（任一点也不为 0）。

例（Liouville 公式） 设 $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ 为方程 (4.2) 的任意 n 个解，这 n 个解构成的 Wronsky 行列式为 $W(t)$。证明：$W(t)$ 满足一阶方程
$$W'(t) + a_1(t)W(t) = 0,$$
且对定义区间 $[a, b]$ 上任一点 t_0 有
$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds}, \quad t_0, t \in [a, b].$$

三、非齐次线性微分方程的性质与结构

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = f(t) \tag{4.1}$$

1. 解的性质

(1) 若 $y_1(t)$ 是非齐次方程 (4.1) 的解，$y_2(t)$ 是相应齐次方程 (4.2) 的解，则 $y_1(t) + y_2(t)$ 也是非齐次方程 (4.1) 的解。
(2) 方程 (4.1) 的任意两个解之差一定是相应齐次方程 (4.2) 的解。
(3)（由叠加原理）若 $y_i(t)$ 分别是非齐次方程的解：
$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = f_i(t), \quad i = 1, 2,$$
则 $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ 是
$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$$
的解。

2. 解的结构

Thm 8. 设 $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ 为相应齐次方程 (4.2) 的基本解组，若 $y_p(t)$ 是非齐次方程 (4.1) 的某一特解，则非齐次方程 (4.1) 的通解可表示为
$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \cdots + C_ny_n(t) + y_p(t) \tag{**}$$
其中 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 为任意常数，且通解包含方程 (4.1) 的所有解。

证明 (1) 由叠加原理，$y(t)=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)+y_p(t)$ 是方程 (4.1) 的解，包含 n 个任意常数。由 Thm 6. 知，n 个任意常数相互独立，故为通解。

(2) 设 $y(t)$ 是方程 (4.1) 的任一解。由性质 (2)，$y(t)-y_p(t)=\tilde{C}_1y_1(t)+\cdots+\tilde{C}_ny_n(t)$ 是齐次方程 (4.2) 的解。

由 Thm 6. 知，$\exists$ 唯一常数 $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\ldots,\tilde{C}_n$ 使得

$$y(t)-y_p(t)=\tilde{C}_1y_1(t)+\cdots+\tilde{C}_ny_n(t).$$

即方程 (4.1) 的任一解可由 (**) 表示。由 $y(t)$ 的任意性，(**) 包含方程 (4.1) 的所有解。

3. 常数变易法

设 $y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)$ 是方程 (4.2) 的基本解组，因而

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\cdots+C_ny_n(t) \tag{*}$$

是齐次方程 (4.2) 的通解。

令

$$y(t)=C_1(t)y_1(t)+C_2(t)y_2(t)+\cdots+C_n(t)y_n(t)$$

是非齐次方程 (4.1) 的解，其中 $C_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 是待定函数。求导有:

$$y'(t)=C_1'(t)y_1(t)+C_2'(t)y_2(t)+\cdots+C_n'(t)y_n(t)+C_1(t)y_1'(t)+C_2(t)y_2'(t)+\cdots+C_n(t)y_n'(t)$$

令

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(t)y_i(t)=0,$$

有

$$y'(t)=C_1'(t)y_1(t)+C_2'(t)y_2(t)+\cdots+C_n'(t)y_n(t)+C_1(t)y_1'(t)+C_2(t)y_2'(t)+\cdots+C_n(t)y_n'(t). \tag{*1}$$

令

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(t)y_i(t)=0,$$

则有

$$y'(t)=C_1(t)y_1'(t)+C_2(t)y_2'(t)+\cdots+C_n(t)y_n'(t). \tag{*2}$$

继续对 t 求导得

$$y''(t)=C_1'(t)y_1'(t)+C_2'(t)y_2'(t)+\cdots+C_n'(t)y_n'(t)+C_1(t)y_1''(t)+C_2(t)y_2''(t)+\cdots+C_n(t)y_n''(t),$$

依次类推:

$$y^{(n-1)}(t)=C_1'(t)y_1^{(n-2)}(t)+\cdots+C_n'(t)y_n^{(n-2)}(t)+C_1(t)y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+C_n(t)y_n^{(n-1)}(t). \tag{*(n-1)}$$

对上式再对 t 求导得:

$$y^{(n)}(t)=C_1'(t)y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+C_n'(t)y_n^{(n-1)}(t)+C_1(t)y_1^{(n)}(t)+\cdots+C_n(t)y_n^{(n)}(t). \tag{*n}$$

将 $(*)$、$(**1)$、$\cdots$、$(*n)$ 代入方程 (4.1)，并注意到 $y_1(t),\ldots,y_n(t)$ 是方程 (4.2) 的解，因此有:

$$y_1^{(n)}(t)C_1'(t)+\cdots+y_n^{(n)}(t)C_n'(t)=f(t).$$

于是得到关于未知函数 $C_i'(t)$ $(i=1,\dots,n)$ 的 n 个方程组：

$$\begin{cases} y_1(t)C_1'(t)+\cdots+y_n(t)C_n'(t)=0,\\ y_1'(t)C_1'(t)+\cdots+y_n'(t)C_n'(t)=0,\\ \vdots\\ y_1^{(n-1)}(t)C_1'(t)+\cdots+y_n^{(n-1)}(t)C_n'(t)=f(t). \end{cases}$$

其系数行列式 $W(t)\neq 0$，方程组有唯一解：

$$C_i'(t)=\varphi_i(t),\quad i=1,2,\dots,n.$$

因此

$$C_i(t)=\int\varphi_i(t)\,dt+\delta_i,\quad i=1,2,\dots,n.$$

代入有：

$$y(t)=\sum_{i=1}^n\left(\int\varphi_i(t)\,dt+\delta_i\right)y_i(t)=\sum_{i=1}^n\int\varphi_i(t)y_i(t)\,dt+\sum_{i=1}^n\delta_iy_i(t).$$

其中第二项为齐次解，第一项为非齐次方程的一个特解。

例 1 求方程 $y''+y=\dfrac{1}{\cos t}$ 的通解。

解 1 其齐次方程 $y''+y=0$。齐次解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$。设 $y=C_1(t)\cos t+C_2(t)\sin t$，则可得：

$$\begin{cases} \cos t\,C_1'(t)+\sin t\,C_2'(t)=0,\\ -\sin t\,C_1'(t)+\cos t\,C_2'(t)=\dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

解得

$$C_1'(t)=-\tan t,\quad C_2'(t)=1.$$

从而

$$C_1(t)=\ln|\cos t|+\delta_1,\quad C_2(t)=t+\delta_2.$$

原方程通解为

$$y=(\ln|\cos t|+\delta_1)\cos t+(t+\delta_2)\sin t=\delta_1\cos t+\delta_2\sin t+\ln|\cos t|\cos t+t\sin t,$$

其中 δ_1,δ_2 为任意常数。

例 2 求方程 $tx''-x'=t^2$ 在 $t\neq 0$ 上的所有解。

解 2 (1) 齐次方程 $x''-\dfrac{1}{t}x'=0$，$x'=C_1t, x=\dfrac{1}{2}C_1t^2+C_2$。基本解组为 1, t^2，通解为 $y=C_1+C_2t^2$.

(2) 非齐次方程 $x''-\dfrac{1}{t}x'=t$。

设 $x(t)=C_1(t)+C_2(t)t^2$，则有

$$\begin{cases} C_1'(t)+t^2C_2'(t)=0,\\ 0\cdot C_1'(t)+2t\cdot C_2'(t)=t, \end{cases}$$

即

$$C_1(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \delta_1, \qquad C_2'(t) = \frac{1}{2}t + \delta_2.$$

原方程通解为

$$x = -\tfrac{1}{6}t^3 + \delta_1 + \left(\tfrac{1}{2}t + \delta_2\right)t^2 = \delta_1 + \delta_2 t + \tfrac{1}{3}t^3,$$

其中 δ_1, δ_2 为任意常数。

§4.2 常系数线性微分方程的解法

一、复值函数与复值解

1. 复值函数

Def. 若 $\forall t \in [a, b]$，根据某种关系 $\exists!$ 复数

$$z(t) = \varphi(t) + i\psi(t),$$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的实函数，则称 $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的复值函数。

Def. 若 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $t \to t_0$ 时有极限，则称复值函数 $z(t)$ 在 $t \to t_0$ 时有极限，且定义:

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = \lim_{t \to t_0} \varphi(t) + i \lim_{t \to t_0} \psi(t).$$

Def. 若 $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = z(t_0)$，则称 $z(t)$ 在 t_0 处连续。

Rem. 已知实函数连续，则类似地复值函数的区间连续性同理成立。

Def. 若 $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$ 存在，则称 $z(t)$ 在 t_0 可微，记为 $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = z'(t_0)$.

Rem. 类似可定义区间可微与高阶导数。设 $z_1(t), z_2(t)$ 在 $[a, b]$ 上可微，C 为复值常数，则:

1. $\dfrac{d}{dt}[z_1(t) + z_2(t)] = \dfrac{d}{dt}z_1(t) + \dfrac{d}{dt}z_2(t)$.
2. $\dfrac{d}{dt}[z_1(t)z_2(t)] = \dfrac{d}{dt}z_1(t) \cdot z_2(t) + \dfrac{d}{dt}z_2(t) \cdot z_1(t)$.
3. $\dfrac{d}{dt}[C \cdot z(t)] = C \cdot \dfrac{d}{dt}z(t)$.

2. 复指数函数（记为 e^{kt}，k 是复值常数）

Def. 设 $k = \alpha + i\beta$ 是任一复数（$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$），$t \in [a, b], (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$，则称

$$e^{kt} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

为定义在区间 $[a, b]$ 上的复指数函数。

Rem.

(1) 由定义有 $\cos\beta t=\frac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}),\quad \sin\beta t=\frac{1}{2i}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})$.

(2) 复指数函数具有复值函数的类似性质。

1. $e^{\bar{k}t}=\overline{e^{kt}}$;
2. $e^{(a+b)t}=e^{at}\cdot e^{bt}$;
3. $\frac{d}{dt}\left(e^{kt}\right)=ke^{kt},\quad \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{kt}\right)=k^ne^{kt}$.

3. 复值解

Def. 若 $[a,b]$ 上的复值函数 $y=z(t)$ 满足方程

$$\frac{d^nz(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)z(t)=f(t),$$

则称 $z(t)$ 为方程 (4.1) 的复值解。

Thm. 1 若齐次方程 (4.1) 中所有系数 $a_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 是实值函数，而 $z=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是方程 (4.2) 的复值解，则函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 和复值共轭函数 $\bar{z}(t)$ 都是该方程的实值解。

Thm. 2 若方程

$$\frac{d^nz(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)z(t)=u(t)+iv(t)$$

有复值解 $U(t)+iV(t)$，其中 $a_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$、$u(t)$、$v(t)$、$U(t)$、$V(t)$ 均是实值函数，则 $U(t)$ 和 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)y(t)=u(t)$$

和方程

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)y(t)=v(t)$$

的解。

二、n 阶常系数齐次线性微分方程

1. 形式

$$L[y]=\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_ny=0,\qquad (*)$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为常数。

Rem. 设线性微分算子

$$L=a_0\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}+a_n$$

2. 解法（Euler 待定指数函数法）

(1) 若

$$\frac{dx}{dt}+ax=0,$$

则令 $x=e^{\lambda t}$，得 $\lambda=-a$，通解为 $y=Ce^{-at}$。

(2) 对于一般方程 $L[x]=0$，设 $x=e^{\lambda t}$，则

$$L[e^{\lambda t}]=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)e^{\lambda t}=0.$$

即

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0\triangleq F(\lambda)$$

称为**特征方程**。若 $x=e^{\lambda t}$ 是方程 $(*)$ 的解，当且仅当 λ 是方程 $F(\lambda)=0$ 的根。

Rem. $F(\lambda)=0$ 的根 λ_i 称为方程 $(*)$ 的**特征根**。

(1) 特征根为互异实根的情形

① 设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 n 个不等实根，则方程 $(*)$ 有如下 n 个解：

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{\lambda_n t}.$$

其中它们的 Wronsky 行列式为：

$$W[e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\ldots,e^{\lambda_n t}]=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}\end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0.$$

因此上述 n 个解**线性无关**。

(a) 若 $\lambda_i(i=1,2,\ldots,n)$ 都是实数，则方程 $(*)$ 的通解可表示为：

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+C_ne^{\lambda_n t},$$

其中 $C_1,C_2,\ldots,C_n$ 为任意常数。

(b) 若 λ_i 有复数，则复根总成对出现。设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是特征根，则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征根。对应的两个复值解为：

$$e^{\lambda_1 t}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),$$
$$e^{\lambda_2 t}=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t).$$

由 Thm.1 知，$e^{\alpha t}\sin\beta t$，$e^{\alpha t}\cos\beta t$ 也是方程 $(*)$ 的解。因此最终有基本解组，可写出通解。

例 1

$$\frac{d^4x}{dt^4}-x=0$$

解 1 特征方程为 $\lambda^4-1=0\ \Rightarrow\ \lambda^4=1$。特征根 $\lambda=\pm1,\pm i$。

基本解组：$\cos t$，$\sin t$，e^t，e^{-t}。通解为：

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3e^t+C_4e^{-t}.$$

例 2

$$x'' = 0$$

解 2 特征方程 $\lambda^2 = 0$，得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。基本解组：1，$t$。通解为：

$$x = C_1 + C_2 t.$$

例 3

$$x'' - 2x' + x = 0$$

解 3 特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$。令 $x = ye^t$，则 $x' = y'e^t + ye^t$，$x'' = y''e^t + 2y'e^t + ye^t$。代入原方程得 $y'' = 0$，因此有两个基本解 e^t，te^t。通解为：

$$x = C_1 e^t + C_2 te^t.$$

(2) 特征根有重根的情形

设特征方程有 k 重根 λ_1，则有：

$$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = \cdots = F^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad F^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

① 若 $\lambda_1 = 0$，则特征方程有因子 λ^k，于是

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0, \quad a_{n-k} \neq 0.$$

特征方程为

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k}\lambda^k = 0,$$

对应的微分方程为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k} = 0.$$

上式方程的解为 $1, t, \ldots, t^{k-1}$。故特征方程的 k 重根对应方程 $L[x] = 0$ 的 k 个线性无关解。

② 设 $\lambda_1 \neq 0$，作变换 $x = ye^{\lambda t}$，则

$$x^{(m)} = y^{(m)}e^{\lambda t} + m\lambda y^{(m-1)}e^{\lambda t} + \cdots + \lambda^m y e^{\lambda t}.$$

可得

$$L[x] = \left[\frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n y\right] e^{\lambda t} \triangleq L_1[y]e^{\lambda t}.$$

于是方程化为

$$L_1[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n y = 0,$$

其中 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为常数，对应特征方程为：

$$\mu^n + b_1\mu^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \triangleq G(\mu).$$

由

$$\begin{cases} L[e^{\lambda t}] = F(\lambda)e^{\lambda t}, \\ L[e^{\mu t}e^{\lambda t}] = L_1[e^{\mu t}]e^{\lambda_1 t}, \\ L_1[e^{\mu t}] = G(\mu)e^{(\mu)t}, \end{cases}$$

可得

$$F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t}=G(\mu)e^{(\mu+\lambda_1)t}.$$

即当 $\lambda=\lambda_1$ 对应于新方程中的零根时，其根的重数相同。因此对应于原特征方程的 k 重根 λ_1，方程的独立解为:

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\lambda_1 t}.$$

同理,若特征方程有其他根 $\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_m$，重数依次为 $k_2,k_3,\ldots,k_m$，且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，则方程 $(*)$ 对应的解为:

$$\begin{gathered}e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t},\\ e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t},\\ \vdots\\ e^{\lambda_m t},\ te^{\lambda_m t},\ \ldots,\ t^{k_m-1}e^{\lambda_m t},\end{gathered}$$

上述解线性无关，因而构成基本解组。

若有 k 重复复根 $\lambda=\alpha+i\beta$，则 $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ 也是 k 重根。对应的实值线性无关解为:

$$\begin{gathered}e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.\end{gathered}$$

Thm. 3 若方程 $(*)$ 的特征方程为

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n\lambda+a_n=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ 是互异的特征根,重数分别为 $n_1,n_2,\ldots,n_r$ $(n_i\geq 1)$,且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则对应的 n 个线性无关的解为

$$\begin{gathered}e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t};\\ e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t};\\ \cdots\\ e^{\lambda_r t},\ te^{\lambda_r t},\ \ldots,\ t^{n_r-1}e^{\lambda_r t}.\end{gathered}$$

上述 n 个解构成方程的一组基本解组。

3. 求解齐次常系数线性微分方程的一般步骤

1. 写出特征方程的根 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$;
2. 写出每个根对应的解;
3. 组合所有解得方程的通解。

例 4

$$\frac{d^3x}{dt^3}-x=0$$

解 4 特征方程为 $\lambda^3-1=0$，得 $\lambda=1$（重根），$\lambda=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\lambda=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。

因此，通解为：

$$x=C_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}(C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数。

例 5

$$\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-x=0$$

解 5 特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$。

通解为：

$$x=e^t(C_1+C_2t+C_3t^2),$$

其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数。

例 6(1) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$,

解 6(1) $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t(C_3\cos t+C_4\sin t)$,

例 6(2) $\dfrac{d^5x}{dt^5}+4\dfrac{d^3x}{dt^3}+4\dfrac{dx}{dt}=0$,

解 6(2) $x=C_1+C_2\cos\sqrt{2}t+C_3\sin\sqrt{2}t+C_4t\cos\sqrt{2}t+C_5t\sin\sqrt{2}t$, 其中 C_i 为任意常数。

考虑方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$$

解答 令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

代入原方程得：

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

其通解为：

$$y=(C_1+C_2t)e^t.$$

Cor. 一般情形的 Euler 方程为:

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0.$$

方法：令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$。有:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

最后化为:

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0.$$

三、n 阶常系数非齐次线性微分方程

例 7

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$$

解 7 先求齐次方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的通解:

$$\lambda^2-1=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=\pm1.$$

故齐次方程的通解为:

$$x_h=C_1e^t+C_2e^{-t}.$$

由常数变易法，设:

$$x=C_1(t)e^t+C_2(t)e^{-t},$$

代入并附加条件:

$$\begin{cases}C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^{-t}=0,\\ C_1'(t)e^t-C_2'(t)e^{-t}=\cos t,\end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases}C_1'(t)=\frac{1}{2}e^{-t}\cos t,\\ C_2'(t)=-\frac{1}{2}e^t\cos t.\end{cases}$$

积分得:

$$\begin{cases}C_1(t)=-\frac{1}{4}(\cos t-\sin t)e^{-t}+C_1,\\ C_2(t)=-\frac{1}{4}(\cos t+\sin t)e^t+C_2.\end{cases}$$

代入得:

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

易得特解 令 $x_p=A\cos t$，代入 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$，有:

$$-A\cos t-A\cos t=\cos t\quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{2}.$$

因此总通解为：

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

例 8

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = e^{at}, \quad (p, q, a \text{ 为常数})$$

Sol. 设特解为 $x^* = Ae^{at}$，代入方程得：

$$(Aa^2 + pAa + qA)e^{at} = e^{at}.$$

1. 若 $a^2 + pa + q \neq 0$（即 a 不是特征根），则
$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q}, \quad x^* = \frac{1}{a^2 + pa + q}e^{at}.$$
2. 若 $a^2 + pa + q = 0$（即 a 是特征根），此时无形如 Ae^{at} 的特解，改设 $x^* = Ate^{at}$，代入得：
$$(2Aa + Aa^2 + pA + pAat + qAt)e^{at} = e^{at}.$$
由此可得：
$$\begin{cases} A(a^2 + pa + q) = 0, \\ (2a + p)A = 1. \end{cases}$$
解得：
$$A = \frac{1}{2a + p}, \quad x^* = \frac{t}{2a + p}e^{at}.$$
3. 若 $2a + p = 0$（即 a 为重根），此时无形如 Ate^{at} 的特解，改设 $x^* = At^2e^{at}$。

Rem. 若特解为 $x^* = At^k e^{at}$，当 $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ 为齐次方程的重根时，k 的取值即为相应的重数。

例 9

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = e^{-t}.$$

Sol. 对应齐次方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0.$$

其特征方程：

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3, -1.$$

因此齐次通解为：

$$x_h = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}.$$

设非齐次特解 $x^* = Ate^{-t}$，代入可得：

$$A = -\frac{1}{4}.$$

于是非齐次通解为：

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}.$$

1. 形式

$$L[x]=\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=f(t),$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为常数，$f(t)$ 为连续函数。

2. 解法

常用方法包括：**待定系数法、Laplace 变换法**

类型 I

若

$$L[x]=f(t)=P_m(t)e^{rt}=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_m)e^{rt},$$

其中 r,b_i 为实常数。

类型 I 求解 设有特解 $x^*=(b_0t^m+\cdots+b_m)t^ke^{rt}$ 代入得，其中的取值取决于齐次方程特征根的重数 k

(i) 若 $r=0$，则 $f(t)=b_0t^m+\cdots+b_m$

(1) 若 $r=0$ 不是特征根，取 $x^*=b_0t^m+\cdots+b_m$

(2) 若 $r=0$ 是上重特征根，相应 $a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_{n-k+1}=0,a_{n-k}\neq0$

则 $\dfrac{d^nx}{dt^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\dfrac{d^kx}{dt^k}=f(t)$

令 $z=\dfrac{d^kx}{dt^k}$，方程化为 $\dfrac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\dfrac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)$

有

$$\frac{d^kx}{dt^k}=b_0t^m+\cdots+b_m$$

可写成 t 的 $m+k$ 次多项式，其中 t 的次数仅小于上的项带有任意常数。取任意常数为 0，有特解

$$x=t^k(a_0t^m+\cdots+a_m),$$

其中 $a_0,\cdots,a_m$ 为待定系数。

例 10（1）

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$$

解 10（1） 齐次方程有通解 $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$

设非齐次方程有特解 $x^*=t^0(At+B)e^{0\cdot t}=At+B$

代入方程：$-2A-3At-3B=3t+1,A=-1,B=\dfrac{1}{3}$

有特解 $x^*=-t+\dfrac{1}{3}$

因此非齐次方程的通解为 $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} - t + \dfrac{1}{3}$

例 10（2） $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} = 3t + 1$

解 10（2） 齐次方程有通解 $x = C_1 + C_2e^t$
设非齐次方程有特解 $x^* = t^1(At + B)$
代入方程：$2A - 2At - B = 3t + 1, A = \dfrac{3}{2}, B = -4$
有特解 $x^* = \dfrac{3}{2}t^2 - 4t$
因此非齐次方程的通解为 $x = C_1 + C_2e^t + \dfrac{3}{2}t^2 - 4t$

(ii) 若 $r \neq 0$, 作变量替换 $x = ye^{rt}$ 方程化为

$$\frac{d^ny}{dt^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dt} + A_ny = b_0t^m + \cdots + b_m$$

其中 $A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n$ 为常数，特征根 r 对应原特征根，且重数相同。
① 若 r 不是原方程特征根, 另设特解 $y^* = B_0t^m + \cdots + B_m$ 其中 $B_0, \cdots, B_m$ 为待定系数。从而 $x^* = (B_0t^m + \cdots + B_m)e^{rt}$
② 若 r 是原方程上重特征根, 则设特解 $y^* = t^k(B_0t^m + \cdots + B_m)$ 从而 $x^* = t^k(B_0t^m + \cdots + B_m)e^{rt}$

例 11

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}(t - 5)$$

解 11 齐次方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + x = 0$
有通解 $x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3t^2e^{-t}$
设特解 $x^* = t^3(At + B)e^{-t}$
代入方程，$(24At + 6B)e^{-t} = e^{-t}(t - 5)$
$A = \dfrac{1}{24}$，$B = -\dfrac{5}{6}$
非齐次方程有特解 $x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-t} + (\dfrac{1}{24}t^4 - \dfrac{5}{6}t^3)e^{-t}$

类型 II

$$L[x] = f(t) = (A_m(t)\cos\beta t + B_p(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

其中 α, β 为实常数, $A_m(t), B_p(t)$ 分别为 m, p 次多项式。设 $L = \max\{m, p\}$。

类型 II 求解 特解形式可设为 $x = t^k(P_L(t)\cos\beta t + Q_L(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$
其中 k 为特征方程的根 $\alpha \pm i\beta$ 的重数，$P_L(t), Q_L(t)$ 为待定次数的 L 次多项式。

由类型 I，当 $f(t)$ 为复数时也成立：

$$\begin{aligned} f(t) &= (A_m(t)\cos\beta t + B_p(t)\sin\beta t) \\ &= \left(A_m(t)\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2} + B_p(t)\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}\right)e^{\alpha t} \\ &= \frac{A_m(t)-iB_p(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{A_m(t)+iB_p(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t} \end{aligned}$$

令 $f_1(t) = \dfrac{(A_m(t)-iB_p(t))}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}$，$f_2(t) = \dfrac{(A_m(t)+iB_p(t))}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$。

由叠加原理，$L[x]=f(t)$ 与 $L[x]=f_1(t)$ 与 $L[x]=f_2(t)$ 的解都应为其线性组合，即必为 $L[x]=f_1(t)+f_2(t)$ 的解。

又 $f_1(t)=\overline{f_2(t)}$, 若 y_1 为 $L[x]=f_1(t)$ 的解, 则 $\overline{y_1}$ 也是 $L[x]=f_2(t)$ 的解。

$L[x]=f_1(t)$ 的特解形式可设为

$$x_1 = t^k D_L(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$$

因此 $L[x]=f(t)$ 的特解形式可设为

$$x = t^k D_L(t)e^{(\alpha+i\beta)t} + \overline{D_L(t)}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

可写为

$$\begin{aligned} x &= t^k\left[D_L(t)(\cos\beta t + i\sin\beta t) + \overline{D_L(t)}(\cos\beta t - i\sin\beta t)\right]e^{\alpha t} \\ &= 2t^k\left[\mathrm{Re}(D_L(t))\cos\beta t + \mathrm{Im}(D_L(t))\sin\beta t\right]e^{\alpha t} \\ &= t^k\left[P_L(t)\cos\beta t + Q_L(t)\sin\beta t\right]e^{\alpha t} \end{aligned}$$

其中 $P_L(t)=2\,\mathrm{Re}(D_L(t)), Q_L(t)=2\,\mathrm{Im}(D_L(t))$ $L=\max\{m,p\}$, 且 k 取值由 $\alpha\pm i\beta$ 特征根重数决定。

例 12(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = \cos 2t$

解 12(1) 齐次方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = \cos 2t$，有通解 $y=(C_1+C_2t)e^{-2t}$

设非齐次方程特解 $y^* = t^0[A\cos 2t + B\sin 2t]\cdot e^{0t} = A\cos 2t + B\sin 2t$

代入方程化简得，

$$8B\cos 2t - 8A\sin 2t = \cos 2t, \quad A=0,\ B=\frac{1}{8}$$

特解 $y^* = \dfrac{1}{8}\sin 2t$，通解 $y=(C_1+C_2t)e^{-2t} + \dfrac{1}{8}\sin 2t$

例 12(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos t + \sin t$

Rem. 也可采用复数法：

$f(t)=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ 或 $f(t)=A(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$

可先求 $L[y]=A(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$ 的解，然后分别取实部、虚部。

例： $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=e^{2it}=\cos 2t$，用类型 I 求解。

有特解 $y^*=\dfrac{1}{-8}e^{2it}=-\dfrac{i}{8}(\cos 2t+i\sin 2t)=-\dfrac{1}{8}\sin 2t-\dfrac{1}{8}\cos 2ti$，取其实部$x^*=\dfrac{1}{8}\sin 2t$

四、质点振动

1. 无阻尼自由振动

切向速度 $v=L\dfrac{d\varphi}{dt}$

由 $F=ma$, $-mg\sin\varphi=m\dfrac{d^2s}{dt^2}=mL\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\varphi=0$$

当 φ 很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$，$\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+\dfrac{g}{L}\varphi=0$，特征方程 $\lambda^2+\omega^2=0,\omega^2=\dfrac{g}{L}$

$$\Rightarrow\varphi=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,\quad C_1,C_2 \text{ 为任意常数}$$

Rem.

(1) $\varphi=A\sin(\omega t+\theta)$, $\quad A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\sin\theta=\dfrac{C_1}{A}$, $\cos\theta=\dfrac{C_2}{A}\Rightarrow\theta=\arctan\dfrac{C_1}{C_2}$

(2) 初始条件：$\varphi(t_0)=\varphi_0$, $\dfrac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=t_0}=0\Rightarrow$ 特解$\varphi=\varphi_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$

2. 有阻尼自由振动

阻力与速度成正比，设阻力系数为 μ，得：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega_0^2\varphi=0,\quad \text{其中}2n=\frac{\mu}{m},\ \omega_0^2=\frac{g}{L}$$

特征方程 $\lambda^2+2n\lambda+\omega_0^2=0$

特征根 $\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega_0^2}$

① $n<\omega_0$，$\lambda_{1,2}$ 为共轭复根，记 $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-n^2}$，$\lambda_{1,2}=-n\pm i\omega_1$

$$\text{通解}\varphi=e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)$$

② $n>\omega_0$，λ_1,λ_2 为两个不同实根，

$$\text{通解}\varphi=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$$

③ $n=\omega_0$，$\lambda_1=\lambda_2=-n$ 为两相等实根，

$$\text{通解}\varphi=e^{-nt}(C_1+C_2t)$$

3. 无阻尼强迫振动

受到外力 $F(t)$, 有:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{L}\varphi=\frac{1}{mL}F(t)$$

若 $\mu=0$, $\omega_0^2=\frac{g}{L}$, 设 $F(t)=H\sin pt$，则:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega_0^2\varphi=H\sin pt$$

齐次方程通解:

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)$$

非齐次方程: 若

$$\omega\neq p,\ 设\varphi=M\cos pt+N\sin pt$$

代入得，$M=0$, $N=\dfrac{H}{\omega_0^2-p^2}$

通解 $\varphi=A\sin(\omega t+\theta)+\dfrac{H}{\omega_0^2-p^2}\sin pt$

若 $\omega=p$, 设 $\varphi=t(M\cos pt+N\sin pt)$

代入得 $M=-\dfrac{H}{2\omega}$, $N=0$

通解 $\varphi=A\sin(\omega t+\theta)-\dfrac{Ht}{2\omega}\cos pt$

4. 有阻尼强迫振动

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega_0^2\varphi=H\sin pt$$

$n<\omega_0$ 时，有齐次方程通解

$$\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta),\quad \omega_1=\sqrt{\omega_0^2-n^2}$$

非齐次方程特解

$$\varphi_p=\frac{-2npH}{(\omega_0^2-p^2)^2+4n^2p^2}\cos pt+\frac{(\omega_0^2-p^2)H}{(\omega_0^2-p^2)^2+4n^2p^2}\sin pt$$

4.3 高阶方程的降阶及积分法解法

一、可降阶方程的降阶和幂级数解法

n 阶微分方程：$F(t,y,y',\ldots,y^{(n)})\equiv 0$

例 1

$$\frac{d^5y}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4y}{dt^4}=0$$

解 1 令 $\dfrac{d^4x}{dt^4}=y$, 则 $\dfrac{d^5y}{dt^5}=\dfrac{dy}{dt}$，因此 $\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{1}{t}y=0$
求解可得 $y=Ct$，积分有:

$$y=C_1t^5+C_2t^3+C_2t^2+C_4t+C_5$$

Rem. 第一类：不显含未知函数及其 $k-1$ 阶导数的微分方程 $(1\leq k\leq n)$

$$F(t,y,y',\dots,y^{(n)})=0$$

令 $y^{(k)}=p$, 则 $F(t,y,\dots,y^{(k-1)},p,\dots,y^{(n-1)})=0$

$$\Rightarrow y^{(k)}=\psi(t,C_1,C_2,\dots,C_{n-k})$$

则 $y^{(n)}$ 为 $\psi(t,C_1,C_2,\dots,C_n)$

例 2

$$xx''+(x')^2=0$$

解 2 令 $x'=y$, 则 $x''=y\dfrac{dy}{dx}$，因此 $xy\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$
求解有 $y=0$ 或 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$
即 $x'=0$, $xx'=C$, 或 $x^2=C_1t+C_2$

Rem. 第二类：不显含自变量的自治方程

$$F(y,y',\dots,y^{(n)})=0$$

令 $y'=p$, 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，$y^{(3)}=p\dfrac{d}{dy}\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)$，依此类推:
方程可化为

$$G(p,\frac{dp}{dy},\dots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}})=0$$

求解后代回 $y'=p$ 求得对应通解。

例 3

$$txx''+tx'^2-xx'=0$$

解 3 令 $x=e^u$, 则有 $x'=u'e^u$, $x''=e^u(u''+u'^2)$
代入得 $(tu''+tu'^2)-u'=0$ （Bernoulli 方程）
解得:

$$z=\frac{t}{t^2+C_1},\quad x=e^u=e^{\int z\,dt}=e^{\frac{1}{2}\ln\left(C_1+t^2\right)}+C=C_2\sqrt{C_1+t^2}$$

Rem. 第三类：齐次微分方程

$$F(t,y,\dots,y^{(n)})=0,$$

F 是关于 $y,y',\dots,y^{(n)}$ 的齐次 k 次函数。

可得

$$F(t, \alpha y, \alpha y', \ldots, \alpha y^{(n)}) = \alpha^k F(t, y, \ldots, y^{(n)}).$$

令 $y = e^u$, 则方程化为 $G(t, 1, u', \ldots, u^{(n)}) = 0$, 不显含未知函数 y。

若以 $z = e^u$, 则方程化为 $G(t, z, \ldots, z^{(n-1)}) = 0$。

例 4

$$x^2 y'' + (2x+1)y' = 0$$

Sol. 令 $y' = z$, 则 $y'' = z'y' = z\dfrac{dz}{dy}$, 故 $x^2 z'(2x+1)z = 0$。

另法：$(x^2 y'' + 2xy') + y' = 0$，即 $(x^2 y' + y)' = 0$。

通解为 $y = C_1 + C_2 e^{\frac{1}{x}}$。

Rem. 第四类：恰当微分方程 若

$$F(t, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

满足

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

显然可得

$$\varphi(t, y, \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Rem. 第五类：已知非零特解的齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) y = 0$$

例 5

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$$

已知 $x_1 \neq 0$, 则通解为

$$x = x_1 \left(C_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int P(t)dt} dt + C_2 \right)$$

证明 由于 $x_1 \neq 0$, 令 $y = x_1 y$, 则 $x' = x_1' y + x_1 y'$, $y'' = x_1'' y + 2x_1' y' + x_1 y''$

代入得：

$$x_1'' y + (2x_1' + P(t)x_1)y' + (x_1'' + P(t)x_1' + Q(t)x_1)y_2 = 0$$

由 $x_1'' + P(t)x_1' + Q(t)x_1 = 0$，得

$$x_1 y'' + (2x_1' + P(t)x_1)y' = 0$$

积分得

$$x = \frac{C}{x_1^2} e^{-\int P(t)dt}$$

再积分：

$$x = x_1 y = x_1(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(t)dt} dt + C_2)$$

此为原方程通解。

例 6

$$x'' - 2(1 + \frac{1}{t})x' + (1 + \frac{2}{t})x = 0$$

解 6 $x_1 = e^t$ 是原方程的一个特解, $P(t) = -2(1 + \frac{1}{t})$。

$$x_1 = e^t \left(C_1 \int e^{-t} e^{-\int (1+\frac{1}{t})dt} dt + C_2 \right) = C_1 e^t t^3 + C_2 e^t$$