§3 一阶微分方程的解的存在性定理

内容

- 解的存在唯一性定理
- 解的延拓性定理
- 解对初值的连续性、可微性

§3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

一、存在唯一性定理

1. 显式一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (*) \\ y(x_0) = y_0, \quad (**) \end{cases}$$

其中 $f(x, y)$ 在矩形域 $D: |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b$ 上连续。

将方程化为积分形式：

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt$$

考虑：

$$\varphi_0(x) = y_0, \quad \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\, dt, \quad \dots, \quad \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt$$

若 $\varphi_n(x)$ 极限存在，记 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$，则：

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

由此得：

$y = \varphi(x)$ 是积分方程的解，从而是微分方程的解。

Thm. (Picard) 若函数 $f(x, y)$ 满足条件：

1. 在矩形域 D 上连续；
2. 在矩形域 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件：

$$\exists L>0 \text{ 使得} \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D, \quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

则初值问题 $(*)$ $(**)$ 存在唯一解—即函数 $y=\varphi(x)$，且在区间 $|x-x_0|\le h$ 上成立，其中：

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$$

下面分五个命题来证明：（只考虑 $x\in[x_0,x_0+h]$,$x\in[x_0-h,x_0]$ 可类似得到）

Prop 1. $y=\varphi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & (*)\\ y(x_0)=y_0, & (**)\end{cases}$$

的定义于区间 $[x_0,x_0+h]$ 上的解 $\Longleftrightarrow$ $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt,\quad x_0\le x\le x_0+h$$

的连续解。

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $y=\varphi(x)$ 是初值问题的解，则

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x)),\quad \varphi(x_0)=y_0.$$

两边关于 x 从 x_0 到 x 积分：

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,dt.$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,dt.$$

因此 $y=\varphi(x)$ 是积分方程的解。又 $\varphi(x)$ 连续，故 $y=\varphi(x)$ 是 $[x_0,x_0+h]$ 上的连续解。

$(\Longleftarrow)$ 设 $y=\varphi(x)$ 是积分方程的解：

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,dt,\quad x_0\le x\le x_0+h.$$

则

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\,dt\right)=f(x,\varphi(x)),\quad \text{且}\quad \varphi(x_0)=y_0.$$

因此 $y=\varphi(x)$ 是初值问题 $(*)(**)$ 的定义于区间 $[x_0,x_0+h]$ 上的解。□

Prop 2. 令 $\varphi_0(x)=y_0$，构造 Picard 序列 $\varphi_n(x)$：

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}f[t,\varphi_{n-1}(t)]\,dt, \quad x_0\le x\le x_0+h, \quad n=1,2,\dots\end{cases}$$

则对所有的 n，上式中函数 $\varphi_n(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有定义、连续，且满足

$$|\varphi_n(x) - y_0| \le b.$$

证明 当 $n=1$ 时，

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_0]\, dt.$$

显然 $\varphi_1(x)$ 在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上有定义且连续，并且

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[t, y_0]\, dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f[t, y_0]|\, dt \le M(x-x_0) \le Mh \le b.$$

设 $k=n$ 时命题成立，则 $\varphi_n(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有定义、连续，且 $|\varphi_n(x) - y_0| \le b$。下证当 $k=n+1$ 时成立：

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_n(t)]\, dt, \quad x_0 \le x \le x_0+h.$$

由于 $f(x,y)$ 在 D 上连续，从而 $f(t, \varphi_n(t))$ 在 $x_0 \le t \le x_0+h$ 上连续，故积分存在，且 $\varphi_{n+1}(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上连续。

同理可得：

$$|\varphi_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_n(t)]\, dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f[t, \varphi_n(t)]|\, dt \le M(x-x_0) \le Mh \le b.$$

因此命题对所有 n 成立。□

Prop 3. 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上是一致收敛的。记 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x), \quad x_0 \le x \le x_0+h$.

证明 构造的数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足

$$\varphi_0(x) = y_0, \quad \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_n(t)]\, dt.$$

部分和

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] = \varphi_n(x).$$

于是 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛性与级数

$$(H): \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$$

一致收敛性等价。

首先对 $n=1$ 估计：

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_0(t)]\, dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f[t, \varphi_0(t)]|\, dt \le M(x-x_0) \le Mh.$$

对 $n=2$：

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))]\, dt\right|$$

$$\begin{aligned}&\leq \int_{x_0}^{x} L\left|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)\right| dt\\&\leq \int_{x_0}^{x} LM(t-x_0)\, dt\\&= \tfrac{1}{2}ML(x-x_0)^2\\&\leq \tfrac{1}{2}MLh^2.\end{aligned}$$

同理:

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| \leq L\int_{x_0}^{x} |\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\, dt \leq \frac{ML^2}{3!}(x-x_0)^3 \leq \frac{ML^2h^3}{3!}.$$

归纳可得：对所有 n，有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n \leq \frac{ML^{n-1}h^n}{n!}.$$

由 Weierstrass 判别法，级数 (H) 在 $[x_0, x_0+h]$ 上一致收敛。因此 $\varphi_n(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上一致收敛于连续函数 $\varphi(x)$。

又由于 $|\varphi_n(x)-y_0| \leq b$，取极限得 $|\varphi(x)-y_0| \leq b$. □

Prop 4. $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

定义在 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续解。

证明 由定义，

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_{n-1}(t)]\, dt.$$

由 Lipschitz 条件，

$$|f[t,\varphi_n(t)] - f[t,\varphi(t)]| \leq L|\varphi_n(t)-\varphi(t)|.$$

有函数列 $\{f[t,\varphi_n(t)]\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 一致收敛至 $f[t,\varphi(t)]$。

因此

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_{n-1}(t)]\, dt$$

两边取 $n\to\infty$ 极限，有

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\, dt.$$

即 $\varphi(x)$ 是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

在 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续解。□

Prop 5. 设 $\varphi(x)$ 是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt$$

在 $[x_0, x_0+h]$ 上的唯一连续解，则 $\varphi(x)=\psi(x)$，$x_0 \le x \le x_0+h$。

证明 设 $g(x)=|\varphi(x)-\psi(x)|$，则 $g(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有定义、连续、非负，且

$$g(x_0)=0, \quad \forall x \in [x_0, x_0+h].$$

由

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\varphi(t)]\,dt, \quad \psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\psi(t)]\,dt,$$

得

$$g(x)=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))]\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))|\,dt.$$

由于 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件，

$$g(x) \le L\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \quad x_0 \le x \le x_0+h.$$

令

$$u(x)=L\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt,$$

则 $u(x)$ 是定义在 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续可微函数，且 $u(x_0)=0$, 并有

$$0 \le g(x) \le u(x), \quad u'(x)=Lg(x) \le Lu(x), \quad u'(x)-Lu(x) \le 0.$$

由微分不等式比较定理得：

$$0 \le g(x) \le u(x) \le 0, \quad 即g(x) \equiv 0,\ x_0 \le x \le x_0+h.$$

因此 $\varphi(x)=\psi(x)$。□

Rem. 对定理的几点说明：

1. 存在唯一性定理保证解存在的区间为

$$h=\min\{a, \tfrac{b}{M}\}.$$

矩形区域：$|x-x_0| \le a$, $|y-y_0| \le b$, 且 $M=\max|f(x,y)|$。
若 $|f(x,y)| \le M, |y'| \le M$，则：
① 若 $a \le \frac{b}{M}$，则 $y=\varphi(x)$ 在 $x_0-a \le x \le x_0+a$ 上有定义。
② 若 $a > \frac{b}{M}$，此时不能保证解在 $x_0-a \le x \le x_0+a$ 上存在，只有当 $0<M(x-x_0)<b$ 时才保证该区间存在解。
因此更广的存在范围应为

$$|x-x_0|<h=\min\{a, \tfrac{b}{M}\}.$$

2. 关于满足 Lipschitz 条件的充分条件，常用以下结论：

Thm. 若 $f(x,y)$ 在矩形域 D 上关于 y 的偏导数 $f_y(x,y)$ 存在且有界，即 $\left|f_y(x,y)\right| \le L$，则 Lipschitz 条件成立。

证明

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \left|\int_{y_2}^{y_1} f_y(x,y)\,dy\right| \le L|y_1-y_2|, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D.$$

但反之不成立，即若 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件，$f(x,y)$ 不一定存在偏导数。

例 $f(x,y)=|y|$ 在任意矩形域上满足 Lipschitz 条件，但在 $y=0$ 处无偏导数。

3. 对于线性方程 $y'=P(x)y+Q(x)$，其中 $P,Q\in C[a,b]$。
当 $P(x),Q(x)\in C[a,b]$ 时，对任一初值 (x_0,y_0)，$x_0\in[a,b]$，所得定解问题在整个区间 $[a,b]$ 上有定义、连续。

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |P(x)|\,|y_1-y_2| \le L|y_1-y_2|.$$

4. 关于满足 Lipschitz 条件是解唯一的充分条件，但**不是必要条件**。

例 证明方程

$$y'=\begin{cases}0, & y=0,\\ y\ \ln|y|, & y\neq 0\end{cases}$$

的解都是唯一的。

证明 当 $y\neq 0$ 时，$f(x,y)=y\ln|y|$ 连续，且 $f_y(x,y)=1+\ln|y|$ 在 $y\neq 0$ 的邻域连续。因此对于初始条件 (x_0,y_0)，方程满足 $y(x_0)=y_0$ 的解是存在唯一的。
此时通解为

$$y=\pm e^{ce^x},$$

其中 $y=e^{ce^x}$ 为上半平面通解，$y=-e^{ce^x}$ 为下半平面通解。
注意到 $y=0$ 是方程的特解。
因此对于初始点位于 $y=0$ 的情况 $(x_0,0)$，只有 $y=0$ 这一个通解。从而保证在 $y=0$ 平面上，$y(x_0)=0$ 的解都是唯一的。
但

$$|f(x,y)-f(x,0)| = |\ln|y||\cdot|y-0|, \lim_{y\to 0}|\ln|y|| = \infty$$

即 $f(x,y)$ 不满足 Lipschitz 条件。□

例 讨论方程

$$y'=3y^{\frac{2}{3}}$$

的初值问题解的唯一性。

解

$$f(x,y)=3y^{\frac{2}{3}}\in C(\mathbb{R}^2), \quad f_y=2y^{-\frac{1}{3}}.$$

因此当 $y \neq 0$ 时，方程过 (x_0, y_0) $(y_0 \neq 0)$ 的解是唯一的。对于过原点一点 $(x_0, 0)$，$y = 0$ 也是解。

2. 隐式一阶微分方程的初值问题

Thm2. 若在点 (x_0, y_0, y_0') 的某一邻域内：

(i) $F(x, y, y')$ 关于所有变量连续且存在连续偏导数；

(ii) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$；

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$；

则方程 $F(x, y, y') = 0$ 存在唯一的解 $y = y(x)$，且在区间 $|x - x_0| \leq h$ 内满足初始条件 $y(x_0) = y_0$，$y'(x_0) = y_0'$。

证明　由 $F(x, y, y') = 0$ 可隐函数存在定理，可把 y' 唯一表示为 $y' = f(x, y)$，且 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续，且 $f(x_0, y_0) = y_0'$。若 F 关于所有变量连续且存在连续偏导数，则 $f(x, y)$ 也关于 x, y 具有连续偏导数，且 $f_y = -\dfrac{F_y}{F_{y'}}$. 有界。

因此由 Thm 1（Picard 定理），方程满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在且唯一。□

二、近似计算与误差估计

1. 近似计算

求方程近似解的方法：Picard 逐次逼近法：

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x) = y_0, \\
\varphi_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_{n-1}(t)]\, dt, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.
\end{cases}
$$

2. 误差估计

$$
|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad |x - x_0| \leq h.
$$

证明

$$
\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_{n-1}(t)]\, dt,
$$

假设

$$
|\varphi_{n-1}(x) - \varphi(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} h^n
$$

成立。

下证：

$$
\begin{aligned}
|\varphi_n(x)-\varphi(x)| &\le \int_{x_0}^{x} |f[t,\varphi_{n-1}(t)]-f[t,\varphi(t)]|\,dt \\
&\le L\int_{x_0}^{x} |\varphi_{n-1}(t)-\varphi(t)|\,dt \\
&\le L\cdot\frac{ML^{n-1}}{n!}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\,dt \\
&= \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}.
$$

例 求方程

$$
y' = x^2+y^2, \qquad y(0)=0
$$

解的存在唯一区间，并求在此区间上的真解与误差不超过 0.05 的近似解。

解 设

$$
D: -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1.
$$

则

$$
h=\min\{a,\tfrac{b}{M}\}=\tfrac{1}{2},\quad a=1,\ b=1,\ M=2.
$$

解的存在区间为：$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$。

由误差估计式：

$$
|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{2\cdot 2^n}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 0.05.
$$

由迭代公式：

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x)=0,\\
\varphi_1(x)=\frac{1}{3}x^3,\\
\varphi_2(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7,\\
\varphi_3(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{1}{59533}x^{15}.
\end{cases}
$$

Rem. (1) 若 $D=\{-2\le x\le 2,\ -2\le y\le 2\}$，方程

$$
\begin{cases}
y'=x^2+y^2,\\
y(0)=0
\end{cases}
$$

有 $M=\max\limits_{D}|x^3+y^3|=8, h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\min\{2,\frac{1}{4}\}=\frac{1}{4}$，解的存在区间：$-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}$。

Rem. (2) 若

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

① 由初值解存在有 $y = \dfrac{1}{1-x}$，存在区间 $(-\infty, 1)$；

② 由存在唯一性定理，对任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，取矩形区域 $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [1-b, 1+b]$。有 $M = \max\limits_{D} |y|^2 = (1+b)^2$，　$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{a, \frac{1}{4}\}$. 存在区间：$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$。□

§3.2 解的延拓

一、微分解与可延拓区间

1. 定义

对定义在区域 $G \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{*}$$

设 $y = \varphi(x)$ 是定义在区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一个解。若方程还有一个定义在区间 $I_1 \subset \mathbb{R}$ 上的解 $y = \psi(x)$，且满足：

1. $I_1 \supset I$, 且 $I_1 \neq I$；
2. 在 I 上有 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$；

则称 $y = \psi(x)$（或 $y = \varphi(x)$）在 I_1 上的 **延拓**。若不存在满足条件的解 $y = \psi(x)$，则称 $y = \varphi(x)$ 在 I 上是方程 (*) 的 **饱和解（或称不可延拓解）**。此时的不可延拓区间 I，称为一个 **饱和区间**。

二、局部 Lipschitz 条件

1. 定义

若函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续，且对 G 内每一点 P，都存在以 P 为中心、完全包含在 G 内的矩形域 R_P，使得 $f(x, y)$ 在 R_P 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，则称 $f(x, y)$ 在 G 上关于 y 满足 **局部 Lipschitz 条件**。

Rem. 对于不同的点，其矩形域 R_P 的大小和 Lipschitz 常数 L 均可能不同。局部 Lipschitz 条件是 Lipschitz 条件的必要而非充分条件。

三、延拓定理

Thm. 若方程 (*) 的右端 $f(x,y)$ 在有界区域 G 内连续，且在 G 内关于 y 满足局部 Lipschitz 条件，则方程 (*) 通过 G 内任一点 (x_0,y_0) 的解都能在 G 上以延拓形式定义，直到 $(x,\varphi(x))$ 逼近 G 的边界为止。

证明 对 $(x_0,y_0)\in G$，由解的存在唯一性定理可知：初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

存在唯一解 $y=\varphi(x)$，且该解在区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 内存在。取 $x_1=x_0+h_1, y_1=\varphi(x_1)$，以 (x_1,y_1) 为中心作小矩形 $R_1\subset G$。

则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_1)=y_1\end{cases}$$

存在唯一解 $y=\psi(x)$，且存在区间 $[x_0+h_1,\ x_0+h_1+h_0]$。

由于 $\varphi(x_1)=\psi(x_1)$，由唯一性，当 $x_0-h_0<x\le x_1$ 时，有 $\varphi(x)=\psi(x)$。

定义函数

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x_0-h_0\le x\le x_0+h_1,\\ \psi(x), & x_0+h_1<x\le x_0+h_1+h_0.\end{cases}$$

则 $\varphi^*(x)$ 是方程 (*) 带初值条件 $y(x_0)=y_0$ 在 $[x_0-h_0,\ x_0+h_0+h_1]$ 上的唯一延拓解。

因此，解 $y=\varphi(x)$ 可有序地沿 x 方向延拓，存在定义区间 $|x-x_0|<h$，一直延拓到区间 $[x_0-h_0,\ x_0+h_0+h_1]$。

同样可将 $y=\varphi(x)$ 向左延拓，最终得到它的 **饱和解** $y=\varphi(x)$。

Cor. 任一解方向延拓至饱和解；饱和区间一定为开区间，若所定义区域中解可延拓至无穷。

Rem. 两种延拓至无穷的情形：
1. $y=\varphi(x)$ 可延拓至 $[x_0,+\infty)$ 或 $(-\infty,x_0]$；
2. $y=\varphi(x)$ 虽能延拓至 $[x_0,d)$，但当 $x\to d^-$ 时，$y=\varphi(x)$ 无界或 $(x,\varphi(x))\to\partial G$。

例 1 讨论方程

$$y'=\frac{y^2-1}{2}$$

分别通过 $(0,0)$ 和 $(\ln 2,-3)$ 的解的存在区间。

解 1 $f(x,y)=\dfrac{y^2-1}{2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上满足存在唯一性定理及延拓定理的条件。

方程有通解:

$$y = \frac{1 + Ce^x}{1 - Ce^x}.$$

当 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 和 $(\ln 2, -3)$ 时，分别有特解:

$$y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}, \quad (-\infty, +\infty),$$

$$y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}, \quad (0, +\infty).$$

当 $x \to 0^+$ 时，$y \to -\infty$。