# 研究生公共基础课



Home Page





Page 1 of 69

Go Back

Full Screen

研究生公共基础课

第1页,共<mark>69页</mark> ● First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back

# 前言

- 一、课程介绍
- 研究内容:
  - 矩阵与线性空间和线性变换
    - \* 以矩阵为工具研究问题
    - \* 在其中发展矩阵理论



Home Page

Title Page



**→** 

Page 2 of 69

Go Back

Full Screen

Close

# 前言

- 一、课程介绍
- 研究内容:
  - 矩阵与线性空间和线性变换
    - \* 以矩阵为工具研究问题
    - \* 在其中发展矩阵理论
  - 矩阵在各种意义下的化简与分解
  - 矩阵的分析理论
  - 各类矩阵的性质研究

第2页,共<mark>69</mark>页 ●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back 研究生公共基础课

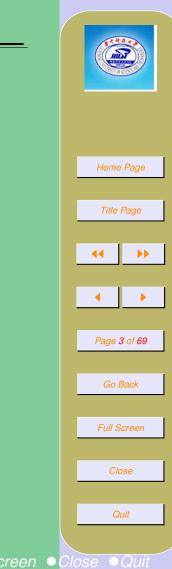


Home Page

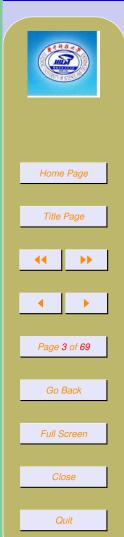
Title Page



Page 2 of 69



• 矩阵被认为是最有用的数学工具, 既适用于应用问题, 又适合现代理论数学的抽象结构.



• 矩阵被认为是最有用的数学工具, 既适用于应用问题, 又适合现代理论数学的抽象结构.

二、教学安排学时配置讲授第1章至第6章(48学时)

第1章: 10学时; 第2章: 8学时;

第3章: 8学时; 第4章: 6学时;

第5章: 8学时: 第6章: 6学时.

三、教学指导意见

• 背景要求: 线性代数.

• 矩阵与计算工具: MATLAB, MAPLE, ···.

• 矩阵与现代应用: 应用选讲.



Home Page

Title Page







Page 3 of 69

Go Back

Full Screen

Close

• 矩阵被认为是最有用的数学工具, 既适用于应用问题, 又适合现代理论数学的抽象结构.

二、教学安排学时配置讲授第1章至第6章(48学时)

第1章: 10学时; 第2章: 8学时;

第3章: 8学时; 第4章: 6学时;

第5章: 8学时; 第6章: 6学时.

三、教学指导意见

• 背景要求: 线性代数.

• 矩阵与计算工具: MATLAB, MAPLE, ···.

• 矩阵与现代应用: 应用选讲.



Home Page

Title Page





Page 3 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课 第3页,共69页 矩阵论 ●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen

#### • 教学参考书:

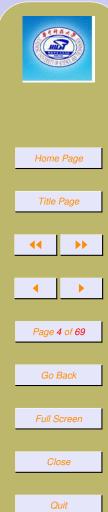
- ① 余鄂西,矩阵论,高等教育出版社,1995.
- ② 方保熔等,矩阵论,清华大学出版社,2004.
- 3 Fuzhen Zhang, Matrix Theory, Springer, 1999.
- 4 Denis Serre, Matrices Theory and Applications, Springer, 2002.
- ⑤ 矩阵论历年试题及其解答.



#### • 教学参考书:

- 余鄂西,矩阵论,高等教育出版社,1995.
- 方保熔等,<mark>矩阵论</mark>,清华大学出版社,2004.
- Fuzhen Zhang, Matrix Theory, Springer, 1999.
- Denis Serre, Matrices Theory and Applications, Springer, 2002.
- 矩阵论历年试题及其解答.

• 不交作业,但应该重视练习环节.



研究生公共基础课

●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back

# 第一章 线性空间 线性变换

#### • 内容:

- 发性空间的一般概念(重点:空间结构和其中的数量关系)
- 线性变换(重点:其中的矩阵处理方法)

## • 特点:

- 研究代数结构——具有线性运算的集合.
- 看重的不是研究对象本身,而是对象之间的结构 关系.
- 研究的关注点:对象之间数量关系的矩阵处理.
- 学习特点:具有抽象性和一般性.



Home Page

Title Page





Page 5 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课 第5页,共69页 矩阵论 ●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Scree

如果数集F中任意两个数作某一运算后的结果仍在F中,我们就称数集F对这个运算是封闭的.特别地,对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算封闭的数集F称为数域.

### 1. 线性空间的概念

定义 1.1 设V是一个以 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ··· 为元素的非空集合, F是一个数域. 在基中定义两种运算, 一种叫加法:  $\forall \alpha$ ,  $\beta \in V$ ,  $\alpha + \beta \in V$ ; 另一种叫数量乘法:  $\forall k \in F$ ,  $\alpha \in V$ ,  $k\alpha \in V$ , 并且满足下列八条运算法则:



Home Page

Title Page





Page 6 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ① 加法交换律:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
- ② 加法结合律:  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;
- ③ V中存在零元素:  $\exists \alpha_0 \in V, \forall \alpha \in V, \alpha + \alpha_0 = \alpha,$  记 $\alpha_0 = 0$ 或 $\overrightarrow{0}$ ;
- ④ 负元素存在:  $\alpha \in V$ ,  $\exists \beta \in V$ ,  $(\alpha + \beta) = 0$ ,  $(\alpha + \beta) = -\alpha$ ;



Title Page





Page 7 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ① 加法交换律:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
- ② 加法结合律:  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;
- ③ V中存在零元素:  $\exists \alpha_0 \in V, \forall \alpha \in V, \alpha + \alpha_0 = \alpha,$  记 $\alpha_0 = 0$ 或 $\overrightarrow{0}$ ;
- ④ 负元素存在:  $\alpha \in V$ ,  $\exists \beta \in V$ ,  $(\alpha + \beta) = 0$ ,  $(\alpha +$
- ⑤ 数乘结合律:  $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ ;
- ⑥  $\overline{parta} \in F$ ,  $\overline{parta} = \alpha$ ;



Title Page





Page 7 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ① 加法交换律:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
- ② 加法结合律:  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;
- ③ V中存在零元素:  $\exists \alpha_0 \in V, \forall \alpha \in V, \alpha + \alpha_0 = \alpha,$  记 $\alpha_0 = 0$ 或 $\overrightarrow{0}$ ;
- ④ 负元素存在:  $\alpha \in V$ ,  $\exists \beta \in V$ ,  $(\alpha + \beta) = 0$ ,  $(\alpha +$
- ⑤ 数乘结合律:  $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ ;
- ⑥ 存在 $1 \in F$ , 使 $1\alpha = \alpha$ ;
- ⑦ 分配律:  $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;
- ⑧ 分配律:  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ ;



Title Page





Page 7 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ① 加法交换律:  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
- ② 加法结合律:  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;
- ③ V中存在零元素:  $\exists \alpha_0 \in V, \forall \alpha \in V, \alpha + \alpha_0 = \alpha$ ,
- ④ 负元素存在:  $\alpha \in V$ ,  $\exists \beta \in V$ ,  $(\alpha + \beta) = 0$ ,  $(\alpha +$
- ⑤ 数乘结合律:  $(kl)\alpha = k(l\alpha)$ ;
- ⑥ 存在 $1 \in F$ , 使 $1\alpha = \alpha$ ;
- ⑦ 分配律:  $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;
- ③ 分配律:  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ ;



Title Page





Page 7 of 69

Go Back

则称V为数域F上的线性空间. V中元素称为向量. F为实(复)数域时, 称V是实(复)数线性空间.



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

则称V为数域F上的<mark>线性空间</mark>. V中元素称为向量. F为实(复)数域时, 称V是实(复)数线性空间.

**例** 1.1 对给定的数域F,集合 $F^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in F\}$ ,对通常的向量的加法和数乘运算, $F^n$ 为数域F上的线性空间. 当F为实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 时, $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 是它的两种具体形式.



Home Page

Title Page





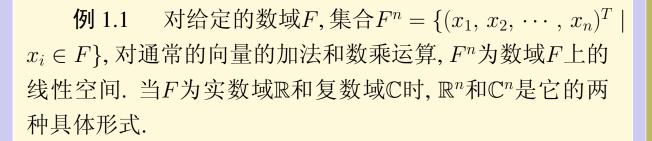
Page 8 of 69

Go Back

Full Screen

Close

则称V为数域F上的<mark>线性空间</mark>. V中元素称为向量. F为实(复)数域时, 称V是实(复)数线性空间.



**例** 1.2  $V = F^{m \times n} = \{A = (a_{ij})_{m \times n} \mid a_{ij} \in F\}$ , 它在矩阵的加法和数乘运算下构成数域F上的线性空间, 称为矩阵空间, 其中 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 为由一切 $m \times n$ 实矩阵构成的实矩阵空间.

研究生公共基础课 第8页,共69页

矩阵论

THE STATE OF THE S

Home Page

Title Page





Page 8 of 69

Go Back

Full Screen

Close



Home Page

Title Page







Page 9 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.3 实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过n-1次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\},\,$$

在通常的多项式加法与多项式数乘多项式运算下构成线性空间, 称为多项式空间 $P_n[x]$ .



Home Page

Title Page





Page 9 of 69

Go Back

Full Screen

Class

**例** 1.3 实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过n-1次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\},\,$$

在通常的多项式加法与多项式数乘多项式运算下构成线性空间, 称为多项式空间 $P_n[x]$ .

**例** 1.4  $V = C[a, b] = \{f(x) \mid f(x)$ 是区间[a, b]上实连续函数 $\}$ ,对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.



Home Page

Title Page





Page 9 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.3 实数域 $\mathbb{R}$ 上次数不超过n-1次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\},\,$$

在通常的多项式加法与多项式数乘多项式运算下构成线性空间, 称为多项式空间 $P_n[x]$ .

**例** 1.4  $V = C[a, b] = \{f(x) \mid f(x)$ 是区间[a, b]上实连续函数 $\}$ ,对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.



Home Page

Title Page





Page 9 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第9页,共69页

矩阵论

• Close

• 011

**例** 1.5  $V = L^p(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid f(x) \neq \mathbb{R} \perp p$ 次方可积函数 $\}$ ,对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.



Home Page

Title Page





Page 10 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.5  $V = L^p(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid f(x) \in \mathbb{R} \perp p$ 次方可积函数 $\}$ ,对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

**例** 1.6 取集合为正数集合 $\mathbb{R}^+$ , F为实数域 $\mathbb{R}$ , 加法 $\oplus$ 和数乘 $\circ$ 定义如下:

 $\oplus$ :  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \oplus b = ab;$ 

 $\circ: \forall k \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{R}^+, k \circ a = a^k.$ 



Home Page

Title Page





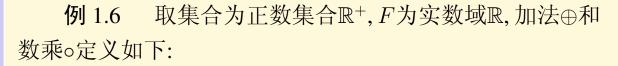
Page 10 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.5  $V = L^p(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid f(x) \in \mathbb{R} \perp p$ 次方可积函数 $\}$ ,对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.



 $\oplus$ :  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \oplus b = ab;$ 

 $\circ: \forall k \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{R}^+, k \circ a = a^k.$ 

在此运算下, ℝ+是ℝ上的一个线性空间.



Home Page

Title Page





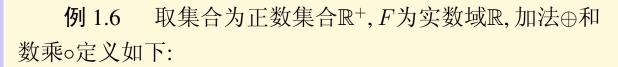
Page 10 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.5  $V = L^p(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid f(x) \in \mathbb{R} \perp p$ 次方可积函数}, 对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.



 $\oplus$ :  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \oplus b = ab;$ 

 $\circ : \forall k \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{R}^+, k \circ a = a^k.$ 

在此运算下,  $\mathbb{R}^+$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间. 加法零元素是 $\mathbb{R}^+$ 中的数1,  $\mathbb{R}^+$ 中的元素a的负元素是 $a^{-1}$ .



Home Page

Title Page





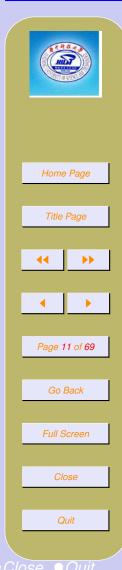
Page 10 of 69

Go Back

Full Screen

Close

# 定理 1.1 线性空间V有如下性质:



# 定理 1.1 线性空间V有如下性质:

- ① V中的零元素惟一;
- ② V中任一元素的负元素惟一;



## 定理 1.1 线性空间V有如下性质:

- ① V中的零元素惟一;
- ② V中任一元素的负元素惟一;
- ③ 设0为数零,  $\overrightarrow{0}$ 为V中零向量, 则

(a) 
$$0 \cdot \alpha = \overrightarrow{0}$$
,

(b) 
$$k \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, k \in F$$
,

(d) 
$$(-1)\alpha = -\alpha$$
;

④ V中的元对加法满足消去律, 即,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ , 由 $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ 可以得到 $\alpha = \beta$ .



Home Page

Title Page





Page 11 of 69

Go Back

Full Screen

Close

## 定理 1.1 线性空间V有如下性质:

- ① V中的零元素惟一;
- ② V中任一元素的负元素惟一;
- ③ 设0为数零,  $\overrightarrow{0}$ 为V中零向量, 则

(a) 
$$0 \cdot \alpha = \overrightarrow{0}$$
,

(b) 
$$k \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, k \in F$$
,

(c) 
$$\overline{a}k \cdot \alpha = \overrightarrow{0}$$
, 则一定有 $k = 0$ 或 $\alpha = \overrightarrow{0}$ ,

(d) 
$$(-1)\alpha = -\alpha$$
;

④ V中的元对加法满足消去律, 即,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ , 由 $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ 可以得到 $\alpha = \beta$ .



Home Page

Title Page





Page 11 of 69

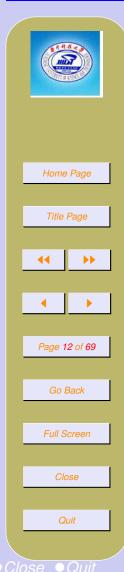
Go Back

Full Screen

Close

#### 2. 线性空间的基与维数

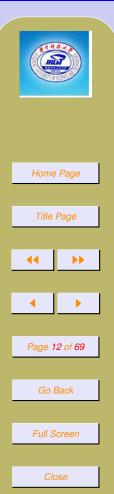
线性空间的基与维数等概念几乎重复了n维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的相关讨论. 因此,  $\mathbb{R}^n$ 中线性组合, 线性表示, 线性相关, 线性无关等概念及与这些概念相关的性质与结果都可以平移到线性空间中, 在此不再赘述.



#### 2. 线性空间的基与维数

线性空间的基与维数等概念几乎重复了n维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的相关讨论. 因此,  $\mathbb{R}^n$ 中线性组合, 线性表示, 线性相关, 线性无关等概念及与这些概念相关的性质与结果都可以平移到线性空间中, 在此不再赘述.

定义 1.2 设V是线性空间, 若存在一组线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 使空间中任一向量可由它们线性表示, 则称向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为V的一组基. 基所含向量个数为V的维数, 记为dim V = n或者 $n = +\infty$ .



**例 1.7** 向量组 $\{\vec{e}_1 = (100 \cdots 0)^T, \vec{e}_2 = (010 \cdots 0)^T, \vec{e}_n = (000 \cdots 01)^T\}$ 是 $F^n$ 的一组基, 所以dim  $F^n = n$ .



Home Page

Title Page







Page 13 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.7 向量组{ $\vec{e}_1 = (100 \cdots 0)^T$ ,  $\vec{e}_2 = (010 \cdots 0)^T$ ,  $\vec{e}_n = (000 \cdots 01)^T$ }是 $F^n$ 的一组基, 所以dim  $F^n = n$ .

例 1.8  $\{E_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ 是矩阵空间 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 的一组基, dim  $\mathbb{R}^{m \times n} = mn$ .



Home Page

Title Page





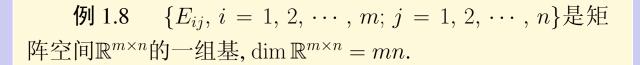
Page 13 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.7 向量组{ $\vec{e_1} = (100 \cdots 0)^T$ ,  $\vec{e_2} = (010 \cdots 0)^T$ ,  $\vec{e_n} = (000 \cdots 01)^T$ }是 $F^n$ 的一组基, 所以dim  $F^n = n$ .



例 1.9 向量组 $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ 是线性空间 $P_n[x]$ 的一组基,  $\dim P_n[x] = n$ .



Home Page

Title Page





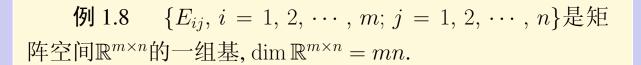
Page 13 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.7 向量组{ $\vec{e_1} = (100 \cdots 0)^T$ ,  $\vec{e_2} = (010 \cdots 0)^T$ ,  $\vec{e_n} = (000 \cdots 01)^T$ }是 $F^n$ 的一组基, 所以dim  $F^n = n$ .



例 1.9 向量组 $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ 是线性空间 $P_n[x]$ 的一组基,  $\dim P_n[x] = n$ .

以上例子中,空间维数 $\dim V$ 都为有限数,这样的空间称为有限维线性空间.若 $\dim V$ 不是有限数,则称V为无限维线性空间.



Home Page

Title Page





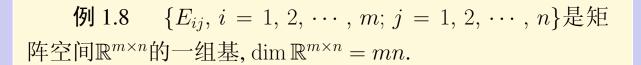
Page 13 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.7 向量组 $\{\vec{e}_1 = (100 \cdots 0)^T, \vec{e}_2 = (010 \cdots 0)^T, \vec{e}_n = (000 \cdots 01)^T\}$ 是 $F^n$ 的一组基, 所以dim  $F^n = n$ .



例 1.9 向量组 $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ 是线性空间 $P_n[x]$ 的一组基,  $\dim P_n[x] = n$ .

以上例子中,空间维数 $\dim V$ 都为有限数,这样的空间称为有限维线性空间. 若 $\dim V$ 不是有限数,则称V为无限维线性空间.

研究生公共基础课 第13页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 13 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.10  $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots\} \subseteq C[a, b]$ , 因此  $\dim C[a, b] = \infty$ .



Home Page

Title Page





Page 14 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.10  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \dots\} \subseteq C[a, b]$ , 因此  $\dim C[a, b] = \infty$ .

这里我们只讨论有限维空间.



Home Page

Title Page





Page 14 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.10  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \dots\} \subseteq C[a, b]$ , 因此  $\dim C[a, b] = \infty$ .

这里我们只讨论有限维空间.

约定记号 $V_n(F)$ 表示V是数域F上的n维线性空间.



Home Page

Title Page





Page 14 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.10  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \dots\} \subseteq C[a, b]$ , 因此  $\dim C[a, b] = \infty$ .

这里我们只讨论有限维空间.

约定记号 $V_n(F)$ 表示V是数域F上的n维线性空间.

我们指出,线性空间的基不是惟一的:

**定理** 1.2 n维线性空间中任意n个线性无关的向量构成的向量组都是空间的基.



Home Page

Title Page





Page 14 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### 3. 坐标

**定义** 1.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 $V_n(F)$ 的一组基,  $\forall \beta \in V_n(F)$ , 若

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1-1}$$

则称数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $\beta$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的 $\Psi$ 标, (1–1)式中向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 $\beta$ 的 $\Psi$ 标向量,也简称为坐标。



Home Page

Title Page





Page 15 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.11  $P_4[x]$ 中向量 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 在 基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 和 $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ 下的坐标分 别为 $(a_0 a_1 a_2 a_3)$ 和 $(f(1), f'(1), \frac{1}{2}f''(1), \frac{1}{3!}f'''(1))$ .



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

01

0...4

例 1.11  $P_4[x]$ 中向量 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 和 $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ 下的坐标分别为 $(a_0 a_1 a_2 a_3)$ 和 $(f(1), f'(1), \frac{1}{2}f''(1), \frac{1}{3!}f'''(1))$ .

定理 1.3 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是n维线性空间 $V_n(F)$ 的一组基,  $V_n(F)$ 中向量 $\beta_i$ 在该基下坐标为 $X_i \in F^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 则 $V_n(F)$ 中向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 线性相关的充分必要条件是其坐标向量组 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 是 $F^n$ 中的线性相关组.



Home Page

Title Page





Page 16 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.11  $P_4[x]$ 中向量 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 和 $\{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ 下的坐标分别为 $(a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3)$ 和 $(f(1), f'(1), \frac{1}{2}f''(1), \frac{1}{3!}f'''(1))$ .

定理 1.3 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是n维线性空间 $V_n(F)$ 的一组基,  $V_n(F)$ 中向量 $\beta_i$ 在该基下坐标为 $X_i \in F^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 则 $V_n(F)$ 中向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 线性相关的充分必要条件是其坐标向量组 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 是 $F^n$ 中的线性相关组.

证明 在固定基 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 的情况下, 作映 射 $\sigma: V_n(F) \longrightarrow F^n$ , 对应法则是 研究生公共基础课 第16页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





Page 16 of 69

Go Back

Full Screen

Close

 $V_n(F)$ 中向量 $\beta \longmapsto X(\beta$ 在基A下的坐标),



 $V_n(F)$ 中向量 $\beta \longmapsto X$  ( $\beta$ 在基A下的坐标), 则 $\sigma$ 线性空间 $V_n(F)$ 到 $F^n$ 的一一对应,并且  $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta),$   $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha).$ 



Home Page

Title Page





Page 17 of 69

Go Back

Full Screen

Close

 $V_n(F)$ 中向量 $\beta \longmapsto X (\beta 在基A下的坐标),$ 

则 $\sigma$ 线性空间 $V_n(F)$ 到 $F^n$ 的一一对应,并且

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha).$$

设 $V_n(F)$ 中向量 $\beta_i$ 的坐标为 $X_i$ , i = 1, 2,

 $\dots, m,$ 则 $\beta_i$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^m k_i\beta_i$ 的坐标是 $\sum_{i=1}^m k_iX_i$ ,所以

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \beta_i = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \vec{0} (= (0, 0, \dots, 0)^T),$$



Home Page

Title Page





Page 17 of 69

Go Back

Full Screen

Close

 $V_n(F)$ 中向量 $\beta \longmapsto X(\beta$ 在基A下的坐标),

则 $\sigma$ 线性空间 $V_n(F)$ 到 $F^n$ 的一一对应,并且

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha).$$

设 $V_n(F)$ 中向量 $\beta_i$ 的坐标为 $X_i$ , i = 1, 2,

 $\dots, m, 则 \beta_i$ 的线性组合 $\sum k_i \beta_i$ 的坐标是 $\sum k_i X_i$ , 所以

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \beta_i = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \vec{0} (= (0, 0, \dots, 0)^T),$$

定理由此得证.■



Home Page

Title Page





Page 17 of 69

Go Back

研究生公共基础课

第17页,共69页

矩阵论

例 1.12 讨论 $P_4[x]$ 中向量 $f_1 = 1 + 2x + 4x^3$ ,  $f_2 = x + x^2 + 4x^3$ ,  $f_3 = 1 + x - 3x^2$ ,  $f_4 = -2x^2 + x^3$ 的线性相关性.



Home Page

Title Page





Page 18 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.12 讨论 $P_4[x]$ 中向量 $f_1 = 1 + 2x + 4x^3$ ,  $f_2 = x + x^2 + 4x^3$ ,  $f_3 = 1 + x - 3x^2$ ,  $f_4 = -2x^2 + x^3$ 的线性相关性.

解 向量 $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ 在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 下的坐标分别为 $(1\ 2\ 0\ 4)^T$ ,  $(0\ 1\ 1\ 4)^T$ ,  $(1\ 1\ -3\ 0)^T$ ,  $(0\ 0\ -2\ 1)^T$ , 写成矩阵形式有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Home Page

Title Page





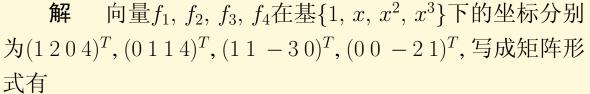
Page 18 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.12 讨论 $P_4[x]$ 中向量 $f_1 = 1 + 2x + 4x^3$ ,  $f_2 = x + x^2 + 4x^3$ ,  $f_3 = 1 + x - 3x^2$ ,  $f_4 = -2x^2 + x^3$ 的线性相关性.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

rank(A) = 4, 因此 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 线性无关.■



Home Page

Title Page





Page 18 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第18页,共69页

Last ●Go Ba

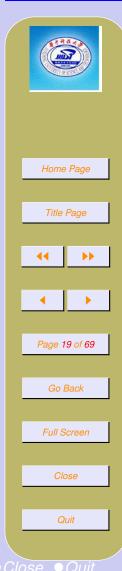
Rack OF

矩阵论

Clock



4. 基变换与坐标变换



#### 4. 基变换与坐标变换

定义 1.4 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 是n维线性空间 $V_n(F)$ 的两组基, 若有矩阵 $C \in F^{n \times n}$ , 使

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C,$$

则称矩阵C是从基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵(基变换矩阵).



Home Page

Title Page





Page 19 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### 4. 基变换与坐标变换

定义 1.4 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 是n维 线性空间 $V_n(F)$ 的两组基, 若有矩阵 $C \in F^{n \times n}$ , 使

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C,$$

则称矩阵C是从基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵(基变换矩阵).

定理 1.4 设线性空间 $V_n(F)$ 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  到另一组基 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵为 $C, V_n(F)$ 中向量 $\alpha$ 在两组基下坐标分别为X, Y, 则有<math>X = CY.



Home Page

Title Page





Page 19 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第19页,共69页

矩阵论

• Close

• () []

**例** 1.13 求 $P_4[x]$ 中基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 到基 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  (见例1.12)的过渡矩阵,并求向量 $f = 1 + x + x^2 + x^3$ 在基 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 下的坐标.



Home Page

Title Page





Page 20 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.13 求 $P_4[x]$ 中基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 到基 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  (见例1.12)的过渡矩阵,并求向量 $f = 1 + x + x^2 + x^3$ 在基 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 下的坐标.

解 显然有 $f_i$ 在基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 下的坐标 $C_i$ ,所以从基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 到基 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 的过渡矩阵是

$$C = (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4) = \begin{pmatrix} 1 \ 0 & 1 & 0 \\ 2 \ 1 & 1 & 0 \\ 0 \ 1 - 3 - 2 \\ 4 \ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Home Page

Title Page





Page 20 of 69

Go Back

Full Screen

Close

又

$$f = 1 + x + x^{2} + x^{3} = (1 \ x \ x^{2} \ x^{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4)C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$



Home Page

Title Page





Page 21 of 69

Go Back

Full Screen

Close

又

$$f = 1 + x + x^{2} + x^{3} = (1 \ x \ x^{2} \ x^{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4)C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$Y = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

研究生公共基础课 第21页,共69页 矩阵论



Home Page





Page 21 of 69

Go Back

Close



研究生公共基础课 第22页,共69页

矩阵论 ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

## 5. 子空间



#### 5. 子空间

**定义** 1.5 设 $V_n(F)$ 为线性空间, W是V的非空子集. 若W的元素关于V中加法与数乘运算也构成线性空间, 则称W是V的一个子空间.



#### 子空间

**定义** 1.5 设 $V_n(F)$ 为线性空间, W是V的非空子集. 若W的元素关于V中加法与数乘运算也构成线性空间,则 称W是V的一个子空间.

**定理** 1.5 设W是线性空间 $V_n(F)$ 的非空子集,则W是  $V_n(F)$ 的子空间的充分必要条件是

- ① 若 $\alpha$ ,  $\beta \in W$ , 则 $\alpha + \beta \in W$ ;
- ② 若 $\alpha \in W, k \in F, 则k\alpha \in W.$



Home Page





Page 23 of 69

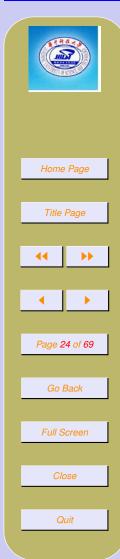
研究生公共基础课

第23页,共69页

矩阵论



证明 必要性是显然的,我们只证充分性.



证明 必要性是显然的,我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.



Home Page

Title Page







Page 24 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 必要性是显然的,我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

因为 $k\alpha \in W$ , 取k = 0, 则 $0\alpha = \mathbf{0} \in W$ . 又取k = -1, 则 $-\alpha = (-1)\alpha \in W$ , 即W中存在零元素和一个元素的负元素. 又因为 $W \subseteq V$ , 对V中加法与数乘, 定义1.1中其余6条法则对W中元素进行运算时必须满足, 故由定义1.1, W是线性空间, 从而是 $V_n(F)$ 的子空间.



Home Page

Title Page





Page 24 of 69

Go Back

Full Screen

Class

证明 必要性是显然的,我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

因为 $k\alpha \in W$ , 取k = 0, 则 $0\alpha = \mathbf{0} \in W$ . 又取k = -1, 则 $-\alpha = (-1)\alpha \in W$ , 即W中存在零元素和一个元素的负元素. 又因为 $W \subseteq V$ , 对V中加法与数乘, 定义1.1中其余6条法则对W中元素进行运算时必须满足, 故由定义1.1, W是线性空间, 从而是 $V_n(F)$ 的子空间.

例 1.14 在线性空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中, 讨论集合

$$W_1 = \{ A \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ A^T = A \},$$

$$W_2 = \{ B \mid B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mid B \not= 0 \},$$

是否为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.



Home Page

Title Page





Go Back

Full Screen

Close

证明 必要性是显然的,我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

因为 $k\alpha \in W$ , 取k = 0, 则 $0\alpha = \mathbf{0} \in W$ . 又取k = -1, 则 $-\alpha = (-1)\alpha \in W$ , 即W中存在零元素和一个元素的负元素. 又因为 $W \subseteq V$ , 对V中加法与数乘, 定义1.1中其余6条法则对W中元素进行运算时必须满足, 故由定义1.1, W是线性空间, 从而是 $V_n(F)$ 的子空间.

**例** 1.14 在线性空间 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中, 讨论集合

$$W_1 = \{ A \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ A^T = A \},$$

$$W_2 = \{ B \mid B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mid B \neq 0 \},$$

是否为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间.



Home Page

Title Page





Go Back

Full Screen

Close

解 由于
$$\forall A_1, A_2 \in W_1$$
,有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$
  
 $(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$ 



Home Page

Title Page





Page 25 of 69

Go Back

Full Screen

Close

 $\mathbf{m}$  由于 $\forall A_1, A_2 \in W_1$ ,有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

由定理1.5,  $W_1$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间.



Home Page

Title Page





Page 25 of 69

Go Back

Full Screen

Close

 $\mathbf{m}$  由于 $\forall A_1, A_2 \in W_1$ ,有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

由定理1.5,  $W_1$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间.

因为 $0 \notin W_2$ , 所以 $W_2$ 不是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间. ■



Home Page

Title Page





Page 25 of 69

Go Back

Full Screen

Close

## **解** 由于 $\forall A_1, A_2 \in W_1$ ,有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$
  
 $(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$ 

由定理1.5,  $W_1$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间.

因为 $0 \notin W_2$ , 所以 $W_2$ 不是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间. ■

**例** 1.15 设V是线性空间,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ···,  $\alpha_m$ 是V中一组 向量,则由它们的一切线性组合构成的集合:

$$L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = \left\{\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i, k_i \in F\right\}$$

是V的一个子空间, 称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的子空间.



Home Page

Title Page





Page 25 of 69

Go Back

Full Screen

Close

# **解** 由于 $\forall A_1, A_2 \in W_1$ , 有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$
  
 $(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$ 

由定理1.5,  $W_1$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间.

因为 $0 \notin W_2$ , 所以 $W_2$ 不是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间. ■

**例** 1.15 设V是线性空间,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ···,  $\alpha_m$ 是V中一组 向量,则由它们的一切线性组合构成的集合:

$$L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = \left\{\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i, k_i \in F\right\}$$

是V的一个子空间, 称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的子空间.



Home Page

Title Page





Page 25 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$  设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m} (k_i + l_i) \alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m} (kk_i) \alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$



Home Page

Title Page





Page 26 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 
$$\forall \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$
 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{\substack{i=1 \\ m}}^{m} (k_i + l_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} (kk_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

故 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 为V的子空间. ■



Home Page

Title Page





Page 26 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$  设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m} (k_i + l_i) \alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m} (kk_i) \alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$

故 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 为V的子空间. ■

注 1.1  $L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 为V中包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的子空间中最小的一个子空间.



Home Page

Title Page





Page 26 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$  设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m} (k_i + l_i) \alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m} (kk_i) \alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$

故 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 为V的子空间. ■

注 1.1  $L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ 为V中包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的子空间中最小的一个子空间.

研究生公共基础课 第26页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 26 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**例** 1.16 对一个矩阵 $A \in F^{m \times n}$ , 有如下两个子空间:

$$N(A) = \{ \boldsymbol{X} \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \} \subseteq F^n,$$

$$R(A) = L\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq F^m,$$
 (1-2)



Home Page

Title Page







Go Back

Close

**例** 1.16 对一个矩阵 $A \in F^{m \times n}$ , 有如下两个子空间:

$$N(A) = \{ \boldsymbol{X} \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \} \subseteq F^n,$$

$$R(A) = L\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq F^m,$$
 (1-2)

其中 $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 是矩阵A的n个列向量. 子空间N(A)称为矩阵A的零空间; R(A)称为矩阵A的列空间.



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

## **例** 1.16 对一个矩阵 $A \in F^{m \times n}$ , 有如下两个子空间:

$$N(A) = \{ \boldsymbol{X} \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \} \subseteq F^n,$$

$$R(A) = L\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq F^m,$$
 (1-2)

其中 $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 是矩阵A的n个列向量. 子空间N(A)称为矩阵A的零空间; R(A)称为矩阵A的列空间.

## **定理** 1.6 设 $W_1$ , $W_2$ 是线性空间V的子空间,则有

- ①  $W_1 = W_2$ 的交集 $W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1 \leq 1 \leq \alpha \in W_2\}$ 是V的子空间, 称为 $W_1 = W_2$ 的交空间.
- ②  $W_1$ 与 $W_2$ 的和

$$W_1+W_2 = \{\alpha \mid \alpha = \alpha_1+\alpha_2, \ \alpha_1 \in W_1, \ \alpha_2 \in W_2\}$$
 (1-3) 是 $V$ 的子空间, 称为 $W_1$ 与 $W_2$ 的和空间.

研究生公共基础课 第27页,共69页

矩阵论

THAT IN THE STATE OF THE STATE

Home Page

Title Page





Page 27 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 ① 对于 $\alpha$ ,  $\beta \in W_1 \cap W_2$ , 那么 $\alpha$ ,  $\beta \in W_i$ , i=1,2; 因为 $W_i$ 为子空间, 故 $\alpha+\beta\in W_i$ ,  $k\alpha\in W_i$ , 因 此 $\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$ ,  $k\alpha \in W_1 \cap W_2$ , 所以 $W_1 \cap W_2$ 是V的 子空间.







Page 28 of 69

Go Back

证明 ① 对于 $\alpha$ ,  $\beta \in W_1 \cap W_2$ , 那么 $\alpha$ ,  $\beta \in W_i$ , i = 1, 2; 因为 $W_i$ 为子空间, 故 $\alpha + \beta \in W_i$ ,  $k\alpha \in W_i$ , 因此 $\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$ ,  $k\alpha \in W_1 \cap W_2$ , 所以 $W_1 \cap W_2$ 是V的子空间.

② 由定义 $W_1 + W_2 \subseteq V$ , 并且非空.  $\forall \alpha, \beta \in W_1 + W_2$ , 则∃  $\alpha_i, \beta_i \in W_i, i = 1, 2, \ \text{使}\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2.$  由  $\alpha + \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2),$   $k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2,$ 



Home Page

Title Page





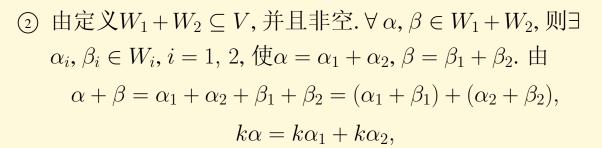
Page 28 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 ① 对于 $\alpha$ ,  $\beta \in W_1 \cap W_2$ , 那么 $\alpha$ ,  $\beta \in W_i$ , i = 1, 2; 因为 $W_i$ 为子空间, 故 $\alpha + \beta \in W_i$ ,  $k\alpha \in W_i$ , 因此 $\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$ ,  $k\alpha \in W_1 \cap W_2$ , 所以 $W_1 \cap W_2$ 是V的子空间.



因为 $W_i$ 为子空间, 故 $\alpha_1 + \beta_1 \in W_1$ ,  $\alpha_2 + \beta_2 \in W_2$ ,  $k\alpha_1 \in W_1$ ,  $k\alpha_2 \in W_2$ , 所以 $\alpha + \beta$ ,  $k\alpha \in W_1 + W_2$ , 即 $W_1 + W_2$ 为V的子空间.



Home Page

Title Page





Page 28 of 69

Go Back

Full Screen

Close

注 1.2  $W_1$ 与 $W_2$ 的并集 $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ ,但不一定是线性子空间.



Home Page

Title Page





Page 29 of 69

Go Back

Full Screen

Close

注 1.2  $W_1$ 与 $W_2$ 的并集 $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ ,但不一定是线性子空间.

例 1.17 设 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $W_1 = L\{e_1\}, W_2 = L\{e_2\},$ 其中 $e_1 = (1\ 0\ 0)^T, e_2 = (0\ 1\ 0)^T, 则<math>W_1 + W_2 = L\{e_1, e_2\}.$ 



Home Page

Title Page





Page 29 of 69

Go Back

Full Screen

Closo

注 1.2  $W_1$ 与 $W_2$ 的并集 $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ ,但不一定是线性子空间.



Home Page

Title Page

**(** 

Page 29 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例 1.17 设 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $W_1 = L\{e_1\}, W_2 = L\{e_2\},$ 其中 $e_1 = (1\ 0\ 0)^T, e_2 = (0\ 1\ 0)^T, 则<math>W_1 + W_2 = L\{e_1, e_2\}.$ 

注 1.3 ① 一般来说, 若
$$W_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$$
,  $W_2 = L\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ , 则有  $W_1 + W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ .

② 对V的子空间 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ , 有如下包含 关系:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

② 对V的子空间 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ , 有如下包含 关系:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$

自然有dim  $(W_1 \cap W_2) \le \dim W_i \le \dim (W_1 + W_2) \le \dim V$ .



Home Page

Title Page





Page 30 of 69

Go Back

Full Screen

Close

② 对V的子空间 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ , 有如下包含 关系:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$

自然有dim  $(W_1 \cap W_2) \le \dim W_i \le \dim (W_1 + W_2) \le \dim V$ .

**定理** 1.7 设 $W_1$ 和 $W_2$ 是线性空间V的子空间,则有如下维数公式:

 $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2). \quad (1-5)$ 



Home Page

Title Page





Page 30 of 69

Go Back

Full Screen

Close

② 对V的子空间 $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ , 有如下包含 关系:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$

自然有dim  $(W_1 \cap W_2) \le \dim W_i \le \dim (W_1 + W_2) \le \dim V$ .

**定理** 1.7 设 $W_1$ 和 $W_2$ 是线性空间V的子空间,则有如下维数公式:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2). \quad (1-5)$$

证明 设dim  $(W_1 \cap W_2) = r$ , dim  $W_1 = s_1$ , dim  $W_2 = s_2$ , 研究生公共基础课 第30页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





Page 30 of 69

Go Back

Full Screen

Close

设 $W_1 \cap W_2$ 的基为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ ,由(1-4)式,它们可分别扩充为:

 $W_1$ 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$  $W_2$ 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$ 



Home Page

Title Page





Page 31 of 69

Go Back

Full Screen

Close

设 $W_1 \cap W_2$ 的基为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ ,由(1-4)式,它们可分别扩充为:

$$W_1$$
的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$ 

$$W_2$$
的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$ 

故

$$W_1 = L\{\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots, \, \alpha_r, \, \beta_{r+1}, \, \cdots, \, \beta_{s_1}\},$$

$$W_2 = L\{\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots, \, \alpha_r, \, \gamma_{r+1}, \, \cdots, \, \gamma_{s_2}\},$$

$$W_1+W_2=L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}.$$



Home Page

Title Page





Page 31 of 69

Go Back

Full Screen

Close

设 $W_1 \cap W_2$ 的基为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ ,由(1-4)式,它们可分别扩充为:

$$W_1$$
的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$ 

$$W_2$$
的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$ 

故

$$W_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},\$$

$$W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},\$$

$$W_1+W_2=L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}.$$

下面证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{s_2}\}$ 为线性无关组.



Home Page

Title Page





Page 31 of 69

Go Back

Full Screen

Close

矩阵论

设 $W_1 \cap W_2$ 的基为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ ,由(1-4)式,它们可分别扩充为:

$$W_1$$
的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$ 

$$W_2$$
的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$ 

故

$$W_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},\$$

$$W_2 = L\{\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots, \, \alpha_r, \, \gamma_{r+1}, \, \cdots, \, \gamma_{s_2}\},$$

$$W_1+W_2=L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}.$$

下面证明 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{s_2}\}$ 为线性无关组.

任取 $k_i$ ,  $q_i$ ,  $p_i$ , 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i \gamma_i = \mathbf{0}.$$
 (1-6)

研究生公共基础课  $\mathbf{\hat{g}}_{31}^{i=r+1}$  **第**31**页**,共**6**9**页** 



Home Page

Title Page





Page 31 of 69

Go Back

Full Screen

Close



Title Page







Page 32 of 69

Go Back

Full Screen

Close

将上式改写为
$$-\sum_{i=r+1}^{r-1} q_i \beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{r-1} p_i \gamma_i$$
,



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

将上式改写为
$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i = \sum_{i=1}^r k_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i \gamma_i$$
,

等式左边是 $W_1$ 中的向量组 $\{\beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$ 的线性组合,故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i \in W_1,$$

而等式右边是 $W_2$ 中的向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{s_2}\}$ 的线性组合, 故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i \in W_2,$$

所以有 $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i \in W_1 \cap W_2$ . 借助 $W_1 \cap W_2$ 的基,  $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i$ 可以表示为



Home Page

Title Page





Page 32 of 69

Go Back

Full Screen

Close

将上式改写为
$$-\sum_{i=r+1}^{r+1} q_i \beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{r+1} p_i \gamma_i$$
,

等式左边是 $W_1$ 中的向量组 $\{\beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$ 的线性组合,故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i \in W_1,$$

而等式右边是 $W_2$ 中的向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{s_2}\}$ 的线性组合, 故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i \in W_2,$$

所以有 $-\sum_{i=r+1}^{n} q_i \beta_i \in W_1 \cap W_2$ . 借助 $W_1 \cap W_2$ 的基,  $-\sum_{i=r+1}^{n} q_i \beta_i$ 可以表示为

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i,$$

研究生公共基础课 第32页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page



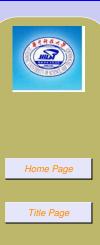


Page 32 of 69

Go Back

Full Screen

Close









Page 33 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^r n_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i = \mathbf{0}.$$



Home Page

Title Page







Page 33 of 69

Go Back

Full Screen

Close

即
$$\sum_{i=1}^{r} n_{i}\alpha_{i} + \sum_{i=r+1}^{s_{1}} q_{i}\beta_{i} = \mathbf{0}.$$
  
由 $\{\alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{r}, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{s_{1}}\}$ 的线性无关性,  $q_{i} = 0$ ,  $i = r+1, \dots, s_{1}$ . 代入 $(1-6)$ 得到
$$\sum_{i=r+1}^{r} k_{i}\alpha_{i} + \sum_{s_{2}}^{s_{2}} p_{i}\gamma_{i} = \mathbf{0},$$



Home Page

Title Page





Page 33 of 69

Go Back

Full Screen

Close

即
$$\sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i = \mathbf{0}$$
.  
由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{s_1}\}$ 的线性无关性,  $q_i = 0$ ,  $i = r+1, \dots, s_1$ . 代入 $(1-6)$ 得到

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i \gamma_i = \mathbf{0},$$

注意其中 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$ 为 $W_2$ 的基,于是 $k_i = 0$   $(i = 1, 2, \cdots, r), p_i = 0$   $(i = r + 1, \cdots, s_2),$  所以  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$ 线性无关,这样



Home Page

Title Page





Page 33 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$\mathbb{P}\sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i \beta_i = \mathbf{0}.$$

$$\mathbb{P}\left\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \alpha_r, \beta_r, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_$$

由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_{s_1}\}$ 的线性无关性,  $q_i = 0$ , i = $r+1, \dots, s_1$ . 代入(1-6)得到

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i \gamma_i = \mathbf{0},$$

注意其中 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{s_2}\}$ 为 $W_2$ 的基,于是 $k_i =$  $0 (i = 1, 2, \dots, r), p_i = 0 (i = r + 1, \dots, s_2),$ 所以  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$ 线性无关, 这 样

 $\dim (W_1 + W_2) = r + (s_1 - r) + (s_2 - r) = s_1 + s_2 - r,$ 这就是(1-5). ■



Home Page





Page 33 of 69

Go Back

**定义** 1.6 设 $W_1$ 和 $W_2$ 是线性空间V的子空间,  $W = W_1 + W_2$ , 如果 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ , 则称 $W = W_1 = W_2$ 的直和子空间. 记为 $W = W_1 \oplus W_2$ .



**定义** 1.6 设 $W_1$ 和 $W_2$ 是线性空间V的子空间,  $W = W_1 + W_2$ , 如果 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ , 则称W是 $W_1$ 与 $W_2$ 的<mark>直和</mark>子空间. 记为 $W = W_1 \oplus W_2$ .

对直和子空间,有如下等价条件.

**定理** 1.8 设 $W_1$ 与 $W_2$ 是V的子空间,  $W = W_1 + W_2$ , 则以下命题等价:

- (1)  $W = W_1 \oplus W_2$ ;
- ②  $\forall X \in W, X$ 有惟一的表示式:  $X = X_1 + X_2$ , 其中 $X_1 \in W_1, X_2 \in W_2$ ;



Home Page

Title Page





Page 34 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要 $\mathbf{0} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{X}_1 \in W_1, \mathbf{X}_2 \in W_2$ , 就有 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ ;
- ④ 维数公式:  $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$ .



Home Page

Title Page





Page 35 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要 $\mathbf{0} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{X}_1 \in W_1, \mathbf{X}_2 \in W_2$ , 就有 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$ ;
- ④ 维数公式:  $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$ .

证明 (略)



Home Page

Title Page





Page 35 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要 $\mathbf{0} = X_1 + X_2$ ,  $X_1 \in W_1, X_2 \in W_2$ , 就有 $X_1 = \mathbf{0}, X_2 = \mathbf{0}$ ;
- ④ 维数公式:  $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$ .

证明 (略)

**例** 1.18 设
$$I_r$$
表示 $r$ 阶单位矩阵, 对 $n$ 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} I_r \ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix}$$
. 它们的列空间为 $R(A)$ ,  $R(B)$ , 证明: 
$$\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B).$$



Home Page

Title Page





Page 35 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- W中零向量的表达式是惟一的, 即只要 $\mathbf{0} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ ,  $X_1 \in W_1, X_2 \in W_2$ , 就有 $X_1 = 0, X_2 = 0$ :
- 维数公式:  $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$ .

证明 (略)

**例** 1.18 设
$$I_r$$
表示 $r$ 阶单位矩阵, 对 $n$ 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} I_r \ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix}$$
. 它们的列空间为 $R(A)$ ,  $R(B)$ , 证明: 
$$\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B).$$



Home Page





证明 
$$\forall \boldsymbol{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n, 有$$

$$\mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T,$$



Home Page

Title Page





Page 36 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall x = (a_1 a_2 \cdots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T,$$
  
由于 $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T \in R(A), (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T \in R(B),$ 所以 $\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B),$ 又显然 $\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B),$ 从而 $\mathbb{R}^n = R(A) + R(B).$ 



Home Page

Title Page





Page 36 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall \boldsymbol{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T,$$
  
由于 $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T \in R(A), (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T \in R(B),$ 所以 $\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B),$ 又显然 $\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B),$ 从而 $\mathbb{R}^n = R(A) + R(B).$ 

又dim R(A) + dim  $R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$ , 由 定理1.8,  $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$ .



Home Page

Title Page





Page 36 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall \mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$x = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T,$$
  
由于 $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T \in R(A), (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T \in R(B),$ 所以 $\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B),$ 又显然 $\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B),$ 从而 $\mathbb{R}^n = R(A) + R(B).$ 

又dim R(A) + dim  $R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$ , 由 定理1.8,  $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$ .

注 1.4 对n维空间V的任何子空间W, 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 为W的基, r < n,把它们扩充为V的基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n\},\$$



Home Page

Title Page





Page 36 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall x = (a_1 a_2 \cdots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T,$$
  
由于 $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T \in R(A), (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T \in R(B),$ 所以 $\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B),$ 又显然 $\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B),$ 从而 $\mathbb{R}^n = R(A) + R(B).$ 

又dim R(A) + dim  $R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$ , 由 定理1.8,  $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$ .

注 1.4 对n维空间V的任何子空间W, 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 为W的基, r < n,把它们扩充为V的基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n\},\$$

设
$$U = L\{\beta_{r+1}, \dots, \beta_n\}$$
, 则成立

$$V = W \oplus U$$
.



Home Page

Title Page





Page 36 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明  $\forall \boldsymbol{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\mathbf{x} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T + (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T,$$
  
由于 $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \ 0 \ \cdots \ 0)^T \in R(A), (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ a_{r+1} \ \cdots \ a_n)^T \in R(B),$ 所以 $\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B),$ 又显然 $\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B),$ 从而 $\mathbb{R}^n = R(A) + R(B).$ 

又dim R(A) + dim  $R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$ , 由 定理1.8,  $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$ .

注 1.4 对n维空间V的任何子空间W, 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 为W的基, r < n,把它们扩充为V的基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n\},\$$

设
$$U = L\{\beta_{r+1}, \dots, \beta_n\}$$
, 则成立

$$V = W \oplus U$$
.

我们称U是W的<mark>直和补子空间</mark>. 研究生公共基础课 第36页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 36 of 69

Go Back

Full Screen

Close









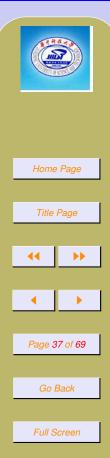
Page 37 of 69

Go Back

Full Screen

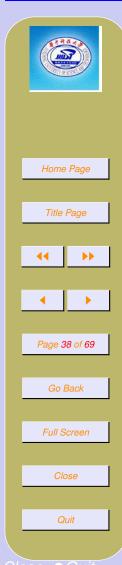
Close

注 1.5 上述定义的子空间的交、和、直和等概念可 推广到有限个子空间的情形.

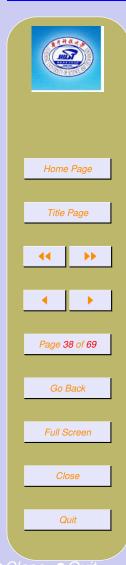


第37页,共69页 研究生公共基础课

矩阵论



这一节,我们将把 $\mathbb{R}^n$ 中的内积推广到抽象的线性空间V中.



这一节,我们将把 $\mathbb{R}^n$ 中的内积推广到抽象的线性空间V中.

**定义** 1.7 对数域F上的n维线性空间V,定义一个从V中向量到数域F的二元运算 $(\alpha,\beta):V\times V\longrightarrow F$ ,如果这个运算满足

- ① 对称性:  $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ , 其中 $\overline{(\beta, \alpha)}$ 表示 $(\beta, \alpha)$ 的复共 轭:
- ② 线性性:  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta), (\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta);$

研究生公共基础课 第38页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 38 of 69

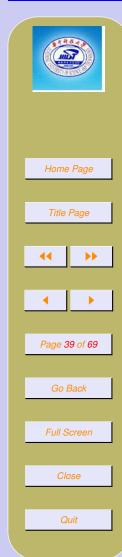
Go Back

Full Screen

Close

③ 正定性:  $(\alpha, \alpha) \ge 0$ , 且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 的充要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$ ,

则称 $(\alpha, \beta)$ 是V的一个内积,并称其中定义了内积的线性空间 $[V; (\alpha, \beta)]$ 为内积空间.

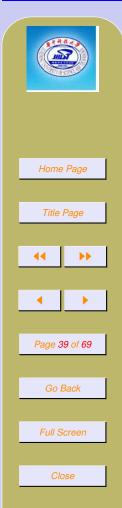


③ 正定性:  $(\alpha, \alpha) \ge 0$ ,  $\underline{\mathbf{L}}(\alpha, \alpha) = 0$ 的充要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$ ,

则称 $(\alpha, \beta)$ 是V的一个内积,并称其中定义了内积的线性空间 $[V; (\alpha, \beta)]$ 为内积空间.

注 1.6 如果V是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 则 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ 为实内积, 对称性相应为 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ,  $[V; (\alpha, \beta)]$ 为欧氏空间.

同理V是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间时,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ 为复内积, 称 $[V; (\alpha, \beta)]$ 为酉空间.



③ 正定性:  $(\alpha, \alpha) \ge 0$ ,  $\underline{\mathbf{1}}(\alpha, \alpha) = 0$ 的充要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$ ,

则称 $(\alpha, \beta)$ 是V的一个内积,并称其中定义了内积的线性空间 $[V; (\alpha, \beta)]$ 为内积空间.

注 1.6 如果V是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 则 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ 为实内积, 对称性相应为 $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ,  $[V; (\alpha, \beta)]$ 为欧氏空间.

同理V是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间时,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ 为复内积, 称 $[V; (\alpha, \beta)]$ 为西空间.

介绍几个关于复矩阵的记号.

研究生公共基础课 第39页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





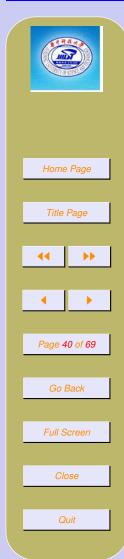
Page 39 of 69

Go Back

Full Screen

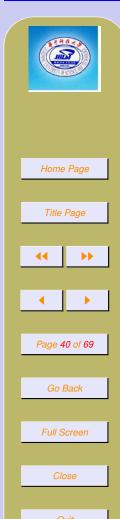
Close

矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , A的共轭是在A中对每一个元素 取其共轭复数后得到的矩阵. 用 $\bar{A}$ 记A的共轭矩阵. A的共轭 转置矩阵记为 $A^H$ ,  $A^H = (\bar{A})^T$ .



矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , A的共轭是在A中对每一个元素 取其共轭复数后得到的矩阵. 用 $\bar{A}$ 记A的共轭矩阵. A的共轭 转置矩阵记为 $A^H$ ,  $A^H = (\bar{A})^T$ .

#### 例 1.19 常见的酉空间:



矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , A的共轭是在A中对每一个元素 取其共轭复数后得到的矩阵. 用 $\bar{A}$ 记A的共轭矩阵. A的共轭 转置矩阵记为 $A^H$ ,  $A^H = (\bar{A})^T$ .

#### **例** 1.19 常见的酉空间:



Home Page

Title Page





Page 40 of 69

Go Back

Full Screen

Class

矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , A的共轭是在A中对每一个元素 取其共轭复数后得到的矩阵. 用 $\bar{A}$ 记A的共轭矩阵. A的共轭 转置矩阵记为 $A^H$ ,  $A^H = (\bar{A})^T$ .

#### 例 1.19 常见的酉空间:

定义 1.8 设 $[V; (\alpha, \beta)]$ 为内积空间, 称  $\parallel \alpha \parallel = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$  (1-7)

为向量 $\alpha$ 的长度, 若||  $\alpha$  ||= 1, 则称 $\alpha$ 为单位向量.

研究生公共基础课 第40页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 40 of 69

Go Back

Full Screen

Close

定理 1.9 (Cauchy不等式) 设[V;  $(\alpha, \beta)$ ]是内积空间,则

对空间中任意向量 $\alpha$ ,  $\beta \in V$ , 都有

$$|(\alpha, \beta)|^2 \le (\alpha, \alpha)(\beta, \beta),$$

其中等式成立的充要条件是 $\alpha$ 与 $\beta$ 线性相关.



Home Page

Title Page





Page 41 of 69

Go Back

Full Screen

Close

定理 1.9 (Cauchy不等式) 设[V;  $(\alpha, \beta)$ ]是内积空间,则 对空间中任意向量 $\alpha, \beta \in V$ ,都有

$$|(\alpha, \beta)|^2 \le (\alpha, \alpha)(\beta, \beta),$$

其中等式成立的充要条件是 $\alpha$ 与 $\beta$ 线性相关.

#### 注 1.7 利用Cauchy不等式易证三角不等式

$$\parallel \alpha + \beta \parallel \leq \parallel \alpha \parallel + \parallel \beta \parallel$$



Home Page

Title Page





Page 41 of 69

Go Back

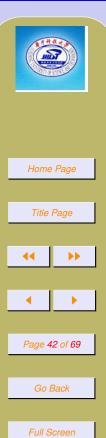
Full Screen

Close

#### **定义** 1.9 在内积空间中, 若向量 $\alpha$ , $\beta$ 满足

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 是正交的.



Close

#### **定义** 1.9 在内积空间中, 若向量 $\alpha$ , $\beta$ 满足

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 是正交的.

我们可以仿照 $\mathbb{R}^n$ 中标准正交基的概念, 在抽象的内积空间中定义标准正交基, 并且也有Gram—Schmidt正交化方法.



Home Page

Title Page





Page 42 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### **定义** 1.9 在内积空间中, 若向量 $\alpha$ , $\beta$ 满足

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 是正交的.

我们可以仿照 $\mathbb{R}^n$ 中标准正交基的概念, 在抽象的内积空间中定义标准正交基, 并且也有Gram—Schmidt正交化方法.

下面, 我们讨论内积空间的分解.











Page 42 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### 在内积空间中, 若向量 $\alpha$ , $\beta$ 满足 定义 1.9

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量 $\alpha$ 与 $\beta$ 是正交的.

我们可以仿照 $\mathbb{R}^n$ 中标准正交基的概念, 在抽象的内积空间 中定义标准正交基,并且也有Gram-Schmidt正交化方法.

下面,我们讨论内积空间的分解.

定理 1.10 设U为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]的一个子空间, 定义V的一个子集

$$U^{\perp} = \{ \alpha \mid \alpha \in V, \ \forall \ \beta \in U, \ (\alpha, \ \beta) = 0 \}, \tag{1-8}$$

证明 (1)  $U^{\perp}$ 是V的子空间, 称为U的正交补子空间;

(2) 
$$V = U \oplus U^{\perp}$$
.

研究生公共基础课 第42页,共69页

矩阵论



Home Page





Page 42 of 69



Title Page







Page 43 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 (1) 显然
$$\mathbf{0} \in U^{\perp}$$
, 所以 $U^{\perp} \neq \emptyset$ .   
又  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U^{\perp}$ , 对 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 和 $\forall \beta \in U$ ,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) = 0,$$



Home Page

Title Page





Page 43 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 (1) 显然
$$\mathbf{0} \in U^{\perp}$$
, 所以 $U^{\perp} \neq \emptyset$ .

又 
$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U^{\perp}$$
, 对 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 和 $\forall \beta \in U$ ,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) = 0,$$

因此 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$ . 故 $U^{\perp}$ 是V的子空间.



Home Page

Title Page





Page 43 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 (1) 显然 $\mathbf{0} \in U^{\perp}$ , 所以 $U^{\perp} \neq \emptyset$ .

又 
$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U^{\perp}$$
, 对 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 和 $\forall \beta \in U$ ,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) = 0,$$

因此 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$ . 故 $U^{\perp}$ 是V的子空间.

(2) 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ 是U的标准正交基,把它扩充为V的

标准正交基
$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \cdots, \eta_n\}$$
,则

$$V = L\{\varepsilon_1, \, \varepsilon_2, \, \cdots, \, \varepsilon_r, \, \eta_{r+1}, \, \cdots, \, \eta_n\},$$
 
$$U = L\{\varepsilon_1, \, \varepsilon_2, \, \cdots, \, \varepsilon_r\},$$
 
$$U^{\perp} = L\{\eta_{r+1}, \, \cdots, \, \eta_n\},$$



Home Page

Title Page





Page 43 of 69

Go Back

Full Screen

Close

证明 (1) 显然 $\mathbf{0} \in U^{\perp}$ , 所以 $U^{\perp} \neq \emptyset$ .

又 
$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U^{\perp}$$
, 对 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 和 $\forall \beta \in U$ ,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) = 0,$$

因此 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$ . 故 $U^{\perp}$ 是V的子空间.

(2) 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ 是U的标准正交基, 把它扩充为V的 标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_n\}$ , 则

$$V = L\{\varepsilon_1, \, \varepsilon_2, \, \cdots, \, \varepsilon_r, \, \eta_{r+1}, \, \cdots, \, \eta_n\},$$

$$U = L\{\varepsilon_1, \, \varepsilon_2, \, \cdots, \, \varepsilon_r\},$$

$$U^{\perp} = L\{\eta_{r+1}, \cdots, \eta_n\},\$$

所以,  $V = U + U^{\perp}$ .



Home Page

Title Page





Page 43 of 69

Go Back

Full Screen

Close



证明 (1) 显然 $\mathbf{0} \in U^{\perp}$ , 所以 $U^{\perp} \neq \emptyset$ .

又 
$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U^{\perp}$$
, 对 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 和 $\forall \beta \in U$ ,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta) + k_2(\alpha_2, \beta) = 0,$$

因此 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$ . 故 $U^{\perp}$ 是V的子空间.

(2) 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ 是U的标准正交基,把它扩充为V的标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_n\}$ ,则

$$V = L\{\varepsilon_1, \, \varepsilon_2, \, \cdots, \, \varepsilon_r, \, \eta_{r+1}, \, \cdots, \, \eta_n\},$$
 
$$U = L\{\varepsilon_1, \, \varepsilon_2, \, \cdots, \, \varepsilon_r\},$$
 
$$U^{\perp} = L\{\eta_{r+1}, \, \cdots, \, \eta_n\},$$

所以,  $V = U + U^{\perp}$ .

又 $\forall \xi \in U$ ,而且 $\xi \in U^{\perp}$ ,从而 $(\xi, \xi) = 0$ ,即 $\xi = \mathbf{0}$ ,这说明 $V = U \oplus U^{\perp}$ .

研究生公共基础课 第43页,共69页

矩阵论

Home Page

Title Page





Page 43 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

irst ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Scre



这一节建立线性变换的概念, 重点是借助矩阵来刻画线性变换的性质.



这一节建立线性变换的概念, 重点是借助矩阵来刻画线性变换的性质.

#### 1. 线性变换



这一节建立线性变换的概念, 重点是借助矩阵来刻画线性变换的性质.

#### 1. 线性变换

**定义** 1.10 设V是一个线性空间, 若有V上的对应关系T, 使 $\forall \alpha \in V$ , 都有确定的向量 $\alpha' = T(\alpha) \in V$ 与之对应,则称T为V上一个变换,  $\alpha'$ 为 $\alpha$ 在T下的 $\alpha'$ 0,  $\alpha$ 3,  $\alpha$ 4,  $\alpha$ 5,  $\alpha$ 6,  $\alpha$ 7,  $\alpha$ 8,  $\alpha$ 9,  $\alpha$ 



Home Page

Title Page





Page 44 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### 又若T对线性空间中的线性运算,满足

① 
$$\forall \alpha, \beta \in V, T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta);$$

$$\textcircled{2} \ \forall \ k \in F, \forall \ \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$



Home Page

Title Page





Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

① 
$$\forall \alpha, \beta \in V, T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta);$$

② 
$$\forall k \in F, \forall \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

则称T是线性空间V上的一个线性变换.



Home Page

Title Page





Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

② 
$$\forall k \in F, \forall \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

则称T是线性空间V上的一个<mark>线性变换</mark>.

**例** 1.20 线性空间V上的相似变换T:  $\forall \alpha \in V$ ,  $T(\alpha) = \lambda \alpha$ 是线性变换, 其中 $\lambda$ 为给定的数,  $\lambda \in F$ . 特别地,



Home Page

Title Page





Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

① 
$$\forall \alpha, \beta \in V, T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta);$$

② 
$$\forall k \in F, \forall \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

则称T是线性空间V上的一个<mark>线性变换</mark>.



Home Page

Title Page





Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

① 
$$\forall \alpha, \beta \in V, T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta);$$

② 
$$\forall k \in F, \forall \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

则称T是线性空间V上的一个<mark>线性变换</mark>.



Home Page

Title Page





Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

① 
$$\forall \alpha, \beta \in V, T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta);$$

② 
$$\forall k \in F, \forall \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

则称T是线性空间V上的一个<mark>线性变换</mark>.



Home Page

Title Page





Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

① 
$$\forall \alpha, \beta \in V, T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta);$$

② 
$$\forall k \in F, \forall \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$$

则称T是线性空间V上的一个<mark>线性变换</mark>.



Home Page

Title Page





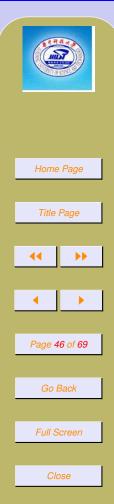
Page 45 of 69

Go Back

Full Screen

Close

例 1.21 微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是线性空间 $P_n[x]$ 上的线性变换.



**例** 1.21 微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是线性空间 $P_n[x]$ 上的线性变换.

注 1.8 积分变换 $J_x$ :  $J_x(p(x)) = \int_a^x p(t) dt \, \text{不是} P_n[x]$ 上的线性变换.



Home Page

Title Page





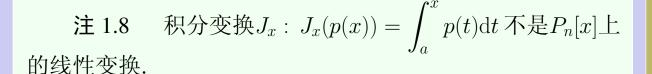
Page 46 of 69

Go Back

Full Screen

Close

# **例** 1.21 微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是线性空间 $P_n[x]$ 上的线性变换.



**例** 1.22 线性空间 $F^n$ 中, 定义如下的线性变换 $T_A$ :

$$\forall \mathbf{X} \in F^n, \ T_A(\mathbf{X}) = A\mathbf{X},$$

其中 $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ 是一个给定的方阵.



Home Page

Title Page





Page 46 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第46页,共69页

Last • Go Back

矩阵论

Close • Q

## V上的线性变换T具有如下简单性质:

① 
$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0};$$

② 
$$T(-\alpha) = -T(\alpha)$$
;

$$(3) T\left(\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{r} k_i T(\alpha_i);$$



Home Page

Title Page





Page 47 of 69

Go Back

Full Screen

Close

0...4

## V上的线性变换T具有如下简单性质:

① 
$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0};$$

② 
$$T(-\alpha) = -T(\alpha)$$
;

$$(3) T\left(\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{r} k_i T(\alpha_i);$$

④ 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 是线性相关的向量组,则  $\{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_s)\}$ 也是线性相关的向量组.



Home Page

Title Page





Page 47 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### **定理** 1.11 设T是线性空间V上的线性变换,则有:

- ①  $R(T) = \{\beta \mid \exists \alpha \in V, \ \notin \beta = T(\alpha)\}$ 是V的子空间, 称为T的像空间.
- ②  $N(T) = \{\alpha \mid T(\alpha) = \mathbf{0}\}$ 是V的子空间, 称为T的零空间.



Home Page

Title Page





Page 48 of 69

Go Back

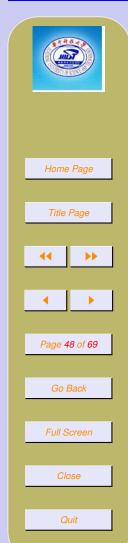
Full Screen

Close

## 定理 1.11 设T是线性空间V上的线性变换,则有:

- ①  $R(T) = \{\beta \mid \exists \alpha \in V, \ \notin \beta = T(\alpha)\}$ 是V的子空间, 称为T的像空间.
- ②  $N(T) = \{\alpha \mid T(\alpha) = \mathbf{0}\}$ 是V的子空间, 称为T的零空间.

我们称子空间R(T)的维数 $\dim R(T)$ 为线性变换T的秩,  $\dim N(T)$ 为T的零度.



## **定理** 1.11 设T是线性空间V上的线性变换,则有:

- ①  $R(T) = \{\beta \mid \exists \alpha \in V, \ \notin \beta = T(\alpha)\}$ 是V的子空间, 称为T的像空间.
- ②  $N(T) = \{\alpha \mid T(\alpha) = \mathbf{0}\}$ 是V的子空间, 称为T的零空间.

我们称子空间R(T)的维数 $\dim R(T)$ 为线性变换T的秩,  $\dim N(T)$ 为T的零度.



Home Page

Title Page





Page 48 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第48页,共69页

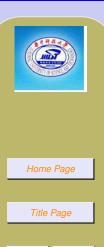
矩阵论

een •Clo

se •Qı

**定义** 1.11 设 $T_1$ 与 $T_2$ 都是线性空间V上的线性变换, 定义如下运算:

① 变换的乘积 $T_1T_2$ :  $\forall \alpha \in F, (T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha));$ 







Page 49 of 69



Full Screen

Close

**定义** 1.11 设 $T_1$ 与 $T_2$ 都是线性空间V上的线性变换, 定义如下运算:

- ① 变换的乘积 $T_1T_2$ :  $\forall \alpha \in F$ ,  $(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$ ;
- ② 变换的加法 $T_1 + T_2$ :  $\forall \alpha \in F$ ,  $(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$ ;



Home Page

Title Page





Page 49 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**定义** 1.11 设 $T_1$ 与 $T_2$ 都是线性空间V上的线性变换, 定义如下运算:

- ① 变换的乘积 $T_1T_2$ :  $\forall \alpha \in F$ ,  $(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$ ;
- ② 变换的加法 $T_1 + T_2$ :  $\forall \alpha \in F$ ,  $(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$ ;
- ③ 数乘变换kT:  $\forall \alpha \in F$ ,  $(kT)(\alpha) = kT(\alpha)$ ;



Home Page

Title Page





Page 49 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**定义** 1.11 设 $T_1$ 与 $T_2$ 都是线性空间V上的线性变换, 定义如下运算:

- ① 变换的乘积 $T_1T_2$ :  $\forall \alpha \in F$ ,  $(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$ ;
- ② 变换的加法 $T_1 + T_2$ :  $\forall \alpha \in F$ ,  $(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$ ;
- ③ 数乘变换kT:  $\forall \alpha \in F$ ,  $(kT)(\alpha) = kT(\alpha)$ ;
- ④ 可逆变换: 对变换 $T_1$ , 如果存在变换 $T_2$ , 使 $T_1T_2 = T_2T_1 = I$ , 则称 $T_1$ 为可逆变换,  $T_2$ 是 $T_1$ 的逆变换, 记为 $T_2 = T_1^{-1}$ .



Home Page

Title Page





Page 49 of 69

Go Back

Full Screen

Close

# 2. 线性变换的矩阵



#### 2. 线性变换的矩阵

定义 1.12 设T是线性空间V上的线性变换,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为V的基,若存在n阶方阵 $A \in F^{n \times n}$ ,使  $T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A$ , (1-9) 则称A为T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵.



Home Page

Title Page





Page 50 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### 2. 线性变换的矩阵

定义 1.12 设T是线性空间V上的线性变换,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为V的基,若存在n阶方阵 $A \in F^{n \times n}$ ,使  $T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)A$ , (1-9) 则称A为T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵.

- **注** 1.9 ① 在选定的基下, 线性变换T与n阶方阵之间有一个一一对应关系.
- ② 在给定的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下,确定向量 $\alpha$ 的像 $T(\alpha)$ 只 需确定它的坐标Y.



Home Page

Title Page





Page 50 of 69

Go Back

Full Screen

Close

#### 2. 线性变换的矩阵

定义 1.12 设T是线性空间V上的线性变换,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为V的基,若存在n阶方阵 $A \in F^{n \times n}$ ,使  $T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)A$ , (1-9) 则称A为T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵.

- **注** 1.9 ① 在选定的基下, 线性变换T与n阶方阵之间有一个一一对应关系.
- ② 在给定的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下,确定向量 $\alpha$ 的像 $T(\alpha)$ 只 需确定它的坐标**Y**.

研究生公共基础课 第50页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





Page 50 of 69

Go Back

Full Screen

Close

对于 $\alpha \in V$ , 设 $\alpha$ 与 $T(\alpha)$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下坐标分别为X与Y, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{X}, \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{Y}.$$



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

对于 $\alpha \in V$ , 设 $\alpha$ 与 $T(\alpha)$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下坐标分别为X与Y, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{X}, \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{Y}.$$

$$T(\alpha) = T[(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \mathbf{X}]$$
$$= T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \mathbf{X}$$
$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) A \mathbf{X},$$



Home Page

Title Page





Page 51 of 69

Go Back

Full Screen

Close

对于 $\alpha \in V$ , 设 $\alpha$ 与 $T(\alpha)$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下坐标分别为X与Y, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{X}, \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{Y}.$$

$$T(\alpha) = T[(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \mathbf{X}]$$
$$= T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \mathbf{X}$$
$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) A \mathbf{X},$$

得Y = AX.



Home Page

Title Page





Page 51 of 69

Go Back

Full Screen

Close

对于 $\alpha \in V$ , 设 $\alpha$ 与 $T(\alpha)$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下坐标分别为X与Y, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{X}, \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \boldsymbol{Y}.$$

$$T(\alpha) = T[(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \mathbf{X}]$$
$$= T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) \mathbf{X}$$
$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) A \mathbf{X},$$

得Y = AX.

**定理** 1.12 设 $T_1$ ,  $T_2$ 是线性空间V上的两个线性变换, 对基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , 它们的矩阵分别是 $A_1$ 和 $A_2$ , 则在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下,

研究生公共基础课 第51页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 51 of 69

Go Back

Full Screen

Close

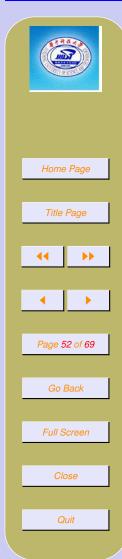
①  $T_1 + T_2$ 的矩阵为 $A_1 + A_2$ ;



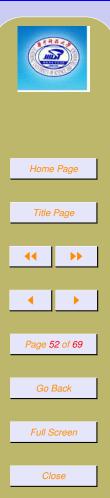
- ①  $T_1 + T_2$ 的矩阵为 $A_1 + A_2$ ;
- ②  $T_1T_2$ 的矩阵为 $A_1A_2$ ;



- ①  $T_1 + T_2$ 的矩阵为 $A_1 + A_2$ ;
- ②  $T_1T_2$ 的矩阵为 $A_1A_2$ ;
- ③  $kT_1$ 的矩阵为 $kA_1$ ;



- $T_1 + T_2$ 的矩阵为 $A_1 + A_2$ ;
- $T_1T_2$ 的矩阵为 $A_1A_2$ ;
- $kT_1$ 的矩阵为 $kA_1$ ;
- $T_1$ 为可逆变换的充分必要条件是 $A_1$ 为可逆矩阵,且 $T_1^{-1}$ 的矩阵为 $A_1^{-1}$ .



- ①  $T_1 + T_2$ 的矩阵为 $A_1 + A_2$ ;
- ②  $T_1T_2$ 的矩阵为 $A_1A_2$ ;
- ③  $kT_1$ 的矩阵为 $kA_1$ ;
- ④  $T_1$ 为可逆变换的充分必要条件是 $A_1$ 为可逆矩阵,且 $T_1^{-1}$ 的矩阵为 $A_1^{-1}$ .

证明 由已知条件,有

$$T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1,$$

$$T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2.$$



Home Page

Title Page





Page 52 of 69

Go Back

Full Screen

Close

- ①  $T_1 + T_2$ 的矩阵为 $A_1 + A_2$ ;
- ②  $T_1T_2$ 的矩阵为 $A_1A_2$ ;
- ③  $kT_1$ 的矩阵为 $kA_1$ ;
- ④  $T_1$ 为可逆变换的充分必要条件是 $A_1$ 为可逆矩阵,且 $T_1^{-1}$ 的矩阵为 $A_1^{-1}$ .

证明 由已知条件,有

$$T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1,$$

$$T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2.$$

由此,

研究生公共基础课 第52页,共69页

共<mark>69</mark>页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 52 of 69

Go Back

Full Screen

Close

1

$$(T_1 + T_2)(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) + T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1 + (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)(A_1 + A_2).$$



Home Page

Title Page





Page 53 of 69

Go Back

Full Screen

Close

(1)

$$(T_1 + T_2)(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) + T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1 + (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)(A_1 + A_2).$$

(2)

$$T_1T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2,$$
  
=  $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1A_2.$ 



Home Page

Title Page





Page 53 of 69

Go Back

Close

Ouit

(1)

$$(T_1 + T_2)(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) + T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1 + (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)(A_1 + A_2).$$

(2)

$$T_1T_2(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = T_1(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_2,$$
  
=  $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A_1A_2.$ 

(3)

研究生公共基础课 第53页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





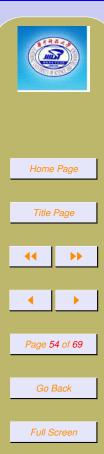
Page 53 of 69

Go Back

Full Screen

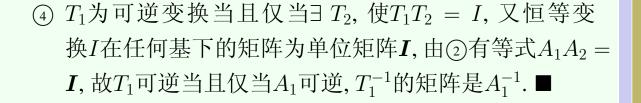
Close

$$=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)(kA_1).$$



Close

$$=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)(kA_1).$$





Home Page

Title Page





Page 54 of 69

Go Back

Full Screen

Close

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.



下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 是V的两组基,它们之间的关系为

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C,$$



Home Page

Title Page





Page 55 of 69

Go Back

Full Screen

Close

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 是V的两组基,它们之间的关系为

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C,$$

定理 1.13 设线性空间V的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 到基  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵为C,又V上的线性变换T在上 述两组基下的矩阵分别为A和B,由有

$$B = C^{-1}AC. (1-10)$$



Home Page

Title Page





Page 55 of 69

Go Back

Full Screen

Close

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 是V的两组基,它们之间的关系为

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C,$$

定理 1.13 设线性空间V的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 到基  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的过渡矩阵为C,又V上的线性变换T在上 述两组基下的矩阵分别为A和B,由有

$$B = C^{-1}AC. (1-10)$$

证明 由

 $T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A$ , 研究生公共基础课 第55页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 55 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)B,$$



Home Page

Title Page







Page 56 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)B,$$

故

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = T[(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C]$$
$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)AC$$
$$= (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)C^{-1}AC,$$



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)B,$$

故

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = T[(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C]$$
$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)AC$$
$$= (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)C^{-1}AC,$$

所以 $B = C^{-1}AC$ .

例 1.24 设单位向量 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ,定义 $\mathbb{R}^3$ 上 正交投影变换P为

$$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u},$$

求P在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵A.



Home Page

Title Page





Page 56 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)B,$$

故

$$T(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = T[(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C]$$
$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)AC$$
$$= (\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n)C^{-1}AC,$$

所以 $B=C^{-1}AC$ .

**例** 1.24 设单位向量 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , 定义 $\mathbb{R}^3$ 上 正交投影变换P为

$$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u},$$

求P在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵A.



Home Page

Title Page





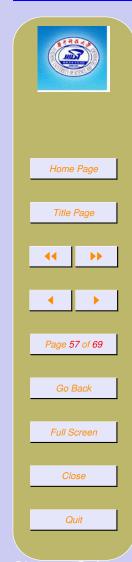
Page 56 of 69

Go Back

### 3. 不变子空间



**定义** 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果 $\forall \alpha \in W$ , 有 $T(\alpha) \in W$ , 即值域 $T(W) \subseteq W$ , 则称W是T的不变子空间.



定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的 子空间, 如果 $\forall \alpha \in W$ , 有 $T(\alpha) \in W$ , 即值域 $T(W) \subseteq W$ , 则 称W是T的不变子空间.

例 1.25 ① 整个空间V和零子空间 $\{0\}$ ,对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;



定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的 子空间, 如果 $\forall \alpha \in W$ , 有 $T(\alpha) \in W$ , 即值域 $T(W) \subseteq W$ , 则 称W是T的不变子空间.

**例** 1.25 ① 整个空间V和零子空间 $\{0\}$ ,对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;

② T的像空间R(T)与零空间N(T)都是T的不变子空间;



**定义** 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果 $\forall \alpha \in W$ , 有 $T(\alpha) \in W$ , 即值域 $T(W) \subseteq W$ , 则称W是T的不变子空间.

- **例** 1.25 ① 整个空间V和零子空间 $\{0\}$ ,对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;
- ② T的像空间R(T)与零空间N(T)都是T的不变子空间;
- ③ 若线性变换 $T_1$ 与 $T_2$ 是可交换的,则 $T_2$ 的像空间 $R(T_2)$ 与零空间 $N(T_2)$ 都是 $T_1$ 的不变子空间;



Home Page

Title Page





Page 57 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**定义** 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果 $\forall \alpha \in W$ , 有 $T(\alpha) \in W$ , 即值域 $T(W) \subseteq W$ , 则称W是T的不变子空间.

**例** 1.25 ① 整个空间V和零子空间 $\{0\}$ ,对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;

- ② T的像空间R(T)与零空间N(T)都是T的不变子空间;
- ③ 若线性变换 $T_1$ 与 $T_2$ 是可交换的,则 $T_2$ 的像空间 $R(T_2)$ 与零空间 $N(T_2)$ 都是 $T_1$ 的不变子空间;

研究生公共基础课 第57页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





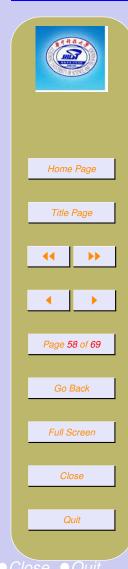
Page 57 of 69

Go Back

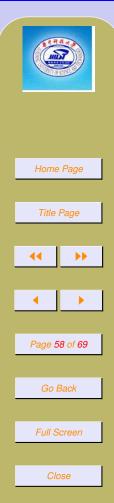
Full Screen

Close

④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;



- ④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;
- ⑤ 对 $\mathbb{R}^3$ 上正交投影 $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}$ 是单位向量,  $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $W = L\{\boldsymbol{u}\}$ 和 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$ 都 是P的不变子空间.



- ④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;
- ⑤ 对 $\mathbb{R}^3$ 上正交投影 $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}$ 是单位向量,  $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $W = L\{\boldsymbol{u}\}$ 和 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$ 都 是P的不变子空间.

由于子空间W中向量在线性变换T下的像仍在W中,这就有可能不必在整个空间V中来考虑T,而只要在不变子空间W中考虑T,即把T看成是W的一个线性变换,记为T  $|_{W}$ ,在不引起歧意的情况下,仍然可以记为T.



- ④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;
- ⑤ 对 $\mathbb{R}^3$ 上正交投影 $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}$ 是单位向量,  $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $W = L\{\boldsymbol{u}\}$ 和 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$ 都 是P的不变子空间.

由于子空间W中向量在线性变换T下的像仍在W中,这就有可能不必在整个空间V中来考虑T,而只要在不变子空间W中考虑T,即把T看成是W的一个线性变换,记为T  $|_{W}$ ,在不引起歧意的情况下,仍然可以记为T.

下面讨论不变子空间与矩阵化简之间的关系.



矩阵论

- ④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;
- ⑤ 对 $\mathbb{R}^3$ 上正交投影 $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}$ 是单位向量,  $\mathbb{R}^3$ 的子空间 $W = L\{\boldsymbol{u}\}$ 和 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$ 都 是P的不变子空间.

由于子空间W中向量在线性变换T下的像仍在W中,这就有可能不必在整个空间V中来考虑T,而只要在不变子空间W中考虑T,即把T看成是W的一个线性变换,记为T  $|_{W}$ ,在不引起歧意的情况下,仍然可以记为T.

下面讨论不变子空间与矩阵化简之间的关系.

设T是n维线性空间V的线性变换,W是T的不变子空间. 在W中取一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ ,并把它扩充成V的一组

Home Page **44 >> →** Page 58 of 69 Go Back

研究生公共基础课 第58页,共69页

rst ● Prev ● Next ● Last ● Go Back

基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \beta_n.$$
 (1-11)







Page 59 of 69

Go Back

Full Screen

Close

基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \beta_n.$$
 (1-11)

则

$$T(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \beta_{r+1} \beta_{r+2} \beta_n)$$

$$= (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \beta_{r+1} \beta_{r+2} \beta_n) \begin{pmatrix} A_1 A_3 \\ \mathbf{0} A_2 \end{pmatrix}$$



Home Page

Title Page





Page 59 of 69

Go Back

Full Screen

Close

基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \beta_n.$$
 (1-11)

则

$$T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_r \ \beta_{r+1} \ \beta_{r+2} \ \beta_n)$$

$$= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_r \ \beta_{r+1} \ \beta_{r+2} \ \beta_n) \begin{pmatrix} A_1 \ A_3 \\ \mathbf{0} \ A_2 \end{pmatrix}$$

其中的准上三角矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} \cdots a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(1-12)



Home Page





Page 59 of 69

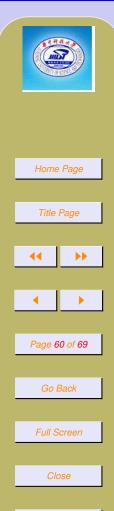
Go Back

研究生公共基础课 第59页,共69页

矩阵论



左上角的r阶矩阵 $A_1$ 就是 $T \mid_W$ 在W的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵.



左上角的r阶矩阵 $A_1$ 就是 $T |_W$ 在W的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵.

这是因为W是T的不变子空间,所以像 $T(\alpha_1)$ ,  $T(\alpha_2)$ , · · · ,  $T(\alpha_r)$ 仍在W中. 它们可以通过W的基 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , · · · · ,  $\alpha_r$ 线性表示

$$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{r1}\alpha_r,$$

$$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{r2}\alpha_r,$$

. . . . . .

$$T(\alpha_r) = a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r.$$



Home Page

Title Page





Page 60 of 69

Go Back

Full Screen

Close

左上角的r阶矩阵 $A_1$ 就是 $T|_W$ 在W的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵.

这是因为W是T的不变子空间,所以像 $T(\alpha_1)$ ,  $T(\alpha_2)$ , · · · ,  $T(\alpha_r)$ 仍在W中. 它们可以通过W的基 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , · · · · ,  $\alpha_r$ 线性表示

$$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{r1}\alpha_r,$$

$$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{r2}\alpha_r,$$

. . . . . .

$$T(\alpha_r) = a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r.$$

从而T在基(1 – 11)下的矩阵具有形状(1 – 12),  $T \mid_W$ 在W的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵是 $A_1$ .



Home Page

Title Page





Page 60 of 69

Go Back

Full Screen

Close

左上角的r阶矩阵 $A_1$ 就是 $T |_W$ 在W的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵.

这是因为W是T的不变子空间,所以像 $T(\alpha_1)$ ,  $T(\alpha_2)$ , ...,  $T(\alpha_r)$ 仍在W中. 它们可以通过W的基 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_r$ 线性表示

$$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{r1}\alpha_r,$$

$$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{r2}\alpha_r,$$

. . . . . .

$$T(\alpha_r) = a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r.$$

从而T在基(1 – 11)下的矩阵具有形状(1 – 12),  $T \mid_W$ 在W的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 下的矩阵是 $A_1$ .

反之,如果T在基(1 – 11)下的矩阵是(1 – 12),不难证明, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 生成的子空间 $W = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 是T的 研究生公共基础课 第60页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





Page 60 of 69

Go Back

Full Screen

Close

不变子空间.



设V分解成若干个不变子空间的直和 $V=W_1\oplus W_2\oplus \cdots \oplus W_s$ .



设V分解成若干个不变子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$ .

在每一个不变子空间Wi中取基

$$\alpha_{i1}, \, \alpha_{i2}, \, \cdots, \, \alpha_{in_i}, \, i = 1, 2, \, \cdots, \, s,$$
 (1-13)



设V分解成若干个不变子空间的直和 $V=W_1\oplus W_2\oplus \cdots \oplus W_s$ .

在每一个不变子空间Wi中取基

$$\alpha_{i1}, \, \alpha_{i2}, \, \cdots, \, \alpha_{in_i}, \, i = 1, 2, \, \cdots, \, s,$$
 (1-13)

并把它们合并起来成为V的一组基.则在这组基下, T的矩阵为准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \tag{1-14}$$



Home Page

Title Page





Page 61 of 69

Go Back

Full Screen

Close

设V分解成若干个不变子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$  $\cdots \oplus W_{s}$ .

在每一个不变子空间Wi中取基

$$\alpha_{i1}, \, \alpha_{i2}, \, \cdots, \, \alpha_{in_i}, \, i = 1, 2, \, \cdots, \, s,$$
 (1-13)

并把它们合并起来成为V的一组基. 则在这组基下, T的矩 阵为准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \tag{1-14}$$

其中 $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,就是 $T|_{W_i}$ 在基(1-13)下的矩阵.

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 61 of 69

Go Back

研究生公共基础课

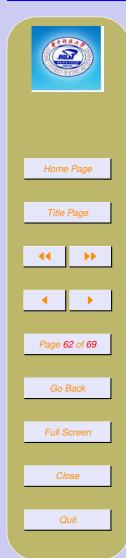
第61页,共69页

反之,如果线性变换T在基(1-13)下的矩阵是准对角矩阵(1-14),由(1-13)生成的子空间 $W_i$ 是T的不变子空间.



反之,如果线性变换T在基(1-13)下的矩阵是准对角矩阵(1-14),由(1-13)生成的子空间 $W_i$ 是T的不变子空间.

由此可知,矩阵分解为准对角形与线性空间分解为不变子空间的直和是相当的.

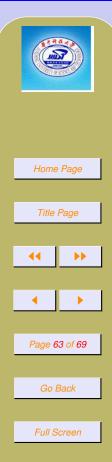


4. 正交变换与酉变换



#### 4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]上的线性变换,如果T不改变向量的内积,即 $\forall \alpha, \beta \in [V; (\alpha, \beta)]$ ,都有  $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta),$ 



定义 1.14 设T为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]上的线性变换,如果T不改变向量的内积,即 $\forall \alpha, \beta \in [V; (\alpha, \beta)]$ ,都有  $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$ ,

则称T为内积空间上的正交变换.



Home Page

Title Page





Page 63 of 69

Go Back

Full Screen

Close

定义 1.14 设T为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]上的线性变换,如果T不改变向量的内积,即 $\forall \alpha, \beta \in [V; (\alpha, \beta)]$ ,都有  $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$ ,

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换;



Home Page

Title Page





Page 63 of 69

Go Back

Full Screen

Close

定义 1.14 设T为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]上的线性变换,如果T不改变向量的内积,即 $\forall \alpha, \beta \in [V; (\alpha, \beta)]$ ,都有  $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$ ,

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换; 若空间为酉空间, 则称T为酉变换. 正交(酉)变换在标准正交基下的矩阵称为正交(酉)矩阵.



Home Page

Title Page





Page 63 of 69

Go Back

Full Screen

Close

定义 1.14 设T为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]上的线性变换,如果T不改变向量的内积,即 $\forall \alpha, \beta \in [V; (\alpha, \beta)]$ ,都有  $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$ ,

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换; 若空间为酉空间, 则称T为酉变换. 正交(酉)变换在标准正交基下的矩阵称为正交(酉)矩阵.

正交(酉)变换的定义有几种等价的形式, 我们把它们归纳为如下的定理.



Home Page

Title Page





Page 63 of 69

Go Back

Full Screen

Close

定义 1.14 设T为内积空间[V;  $(\alpha, \beta)$ ]上的线性变换,如果T不改变向量的内积,即 $\forall \alpha, \beta \in [V; (\alpha, \beta)]$ ,都有  $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$ ,

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换; 若空间为酉空间, 则称T为酉变换. 正交(酉)变换在标准正交基下的矩阵称为正交(酉)矩阵.

正交(酉)变换的定义有几种等价的形式, 我们把它们归纳为如下的定理.



Home Page

Title Page





Page 63 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第63页,共69页

矩阵论

• Close

• **• • •** 

**定理** 1.14 设T是内积空间上的线性变换,则下列命题等价:

- ① T是正交(酉)变换;
- ② T保持向量的长度不变;
- ③ T把空间V的标准正交基变换为标准正交基;
- ④ 正交变换关于任一标准正交基的矩阵C满足 $C^TC = CC^T = I$ ; 酉变换关于任一标准正交基的矩阵U满足 $U^HU = UU^H = I$ .



Home Page

Title Page





Page 64 of 69

Go Back

Full Screen

Close

**定理** 1.14 设T是内积空间上的线性变换,则下列命题等价:

- ① T是正交(酉)变换;
- ② T保持向量的长度不变;
- ③ T把空间V的标准正交基变换为标准正交基;
- ④ 正交变换关于任一标准正交基的矩阵C满足 $C^TC = CC^T = I$ ; 酉变换关于任一标准正交基的矩阵U满足 $U^HU = UU^H = I$ .

证明 ①  $\Longrightarrow$  ② 由①,  $\forall \alpha, \beta \in V$ ,  $(T(\alpha), T(\beta)) =$ 

研究生公共基础课 第64页,共69页 矩阵论



Home Page

Title Page





Page 64 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$(T(\alpha),\,T(\alpha))=(\alpha,\,\alpha),$$



Title Page







Go Back

Full Screen

Close

$$(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

即 $\forall \alpha \in V, \|\alpha\| = \|T(\alpha)\|,$  故②得证.



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

$$(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

即 $\forall \alpha \in V, \|\alpha\| = \|T(\alpha)\|,$  故②得证.

② 
$$\Longrightarrow$$
 ③ 由②,  $\forall \alpha, \beta \in V$ 有,  $||T(\alpha + \beta)|| = ||\alpha + \beta||$ ,

即

$$(T(\alpha + \beta), T(\alpha + \beta)) - (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0,$$



Home Page

Title Page





Page 65 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

即 $\forall \alpha \in V, \|\alpha\| = \|T(\alpha)\|,$  故②得证.

② ⇒ ③ 由②,  $\forall \alpha, \beta \in V$ 有,  $\|T(\alpha + \beta)\| = \|\alpha + \beta\|$ , 即

$$(T(\alpha + \beta), T(\alpha + \beta)) - (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0,$$

由线性变换定义, 内积定义, 再利用 $(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$ ,  $(T(\beta), T(\beta)) = (\beta, \beta)$ , 得

$$(T(\alpha + \beta), T(\alpha + \beta)) - (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$$

$$= (T(\alpha), T(\alpha)) + (T(\beta), T(\beta)) - (\alpha, \alpha) - (\beta, \beta)$$

$$(T(\alpha), T(\beta)) + (T(\beta), T(\alpha)) - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha)$$

$$= (T(\alpha), T(\beta)) + \overline{(T(\alpha), T(\beta))} - (\alpha, \beta) - \overline{(\alpha, \beta)}$$

研究生公共基础课 第65页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 65 of 69

Go Back

Full Screen

Close

 $= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$ 



Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$\operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] = \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)].$$
 (1-15)



Home Page

Title Page







Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$Re[(T(\alpha), T(\beta))] = Re[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由 $\|T(i\alpha + \beta)\| = \|i\alpha + \beta\|$ , 同理可得 $\mathrm{Re}[i(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha, \beta)]$ , 也就是



Home Page

Title Page





Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Ouit

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$Re[(T(\alpha), T(\beta))] = Re[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由
$$\|T(i\alpha + \beta)\| = \|i\alpha + \beta\|$$
, 同理可得Re $[i(T(\alpha), T(\beta))] =$ Re $[i(\alpha, \beta)]$ , 也就是

$$\operatorname{Im}[(T(\alpha), T(\beta))] = \operatorname{Im}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-16}$$



Home Page

Title Page





Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Ouit

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$Re[(T(\alpha), T(\beta))] = Re[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由 $\|T(i\alpha + \beta)\| = \|i\alpha + \beta\|$ , 同理可得Re $[i(T(\alpha), T(\beta))] =$ Re $[i(\alpha, \beta)]$ , 也就是

$$\operatorname{Im}[(T(\alpha), T(\beta))] = \operatorname{Im}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合(1-15)式及(1-16)式得到,  $\forall \alpha, \beta \in V, (T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta).$ 



Home Page

Title Page





Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$Re[(T(\alpha), T(\beta))] = Re[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由 $\|T(i\alpha + \beta)\| = \|i\alpha + \beta\|$ , 同理可得 $\mathrm{Re}[i(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha, \beta)]$ , 也就是

$$\operatorname{Im}[(T(\alpha), T(\beta))] = \operatorname{Im}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合(1-15)式及(1-16)式得到,  $\forall \alpha, \beta \in V, (T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta).$ 

再取V的标准正交基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ , 在T下的像为 $\{T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), T(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}$ , 由于

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$



Home Page

Title Page





Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$Re[(T(\alpha), T(\beta))] = Re[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由 $\|T(i\alpha + \beta)\| = \|i\alpha + \beta\|$ , 同理可得 $\mathrm{Re}[i(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha, \beta)]$ , 也就是

$$\operatorname{Im}[(T(\alpha), T(\beta))] = \operatorname{Im}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合(1-15)式及(1-16)式得到,  $\forall \alpha, \beta \in V, (T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta).$ 

再取V的标准正交基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \, \cdots, \, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ , 在T下的像为 $\{T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \, T(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \, \cdots, \, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}$ , 由于

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以 $\{T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), T(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}$ 也是V的标准正交基.



Home Page

Title Page





Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$= \operatorname{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \operatorname{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$Re[(T(\alpha), T(\beta))] = Re[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由 $\|T(i\alpha + \beta)\| = \|i\alpha + \beta\|$ , 同理可得Re $[i(T(\alpha), T(\beta))] =$ Re $[i(\alpha, \beta)]$ , 也就是

$$\operatorname{Im}[(T(\alpha), T(\beta))] = \operatorname{Im}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合(1-15)式及(1-16)式得到,  $\forall \alpha, \beta \in V, (T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta).$ 

再取V的标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ , 在T下的像为 $\{T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \cdots, T(\varepsilon_n)\}$ , 由于

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以 $\{T(\boldsymbol{\varepsilon}_1), T(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \cdots, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}$ 也是V的标准正交基.

研究生公共基础课 第66页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 66 of 69

Go Back

Full Screen

Close

③  $\Longrightarrow$  ④ 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 的标准正交基, 把正交变换的矩阵C按列分块为 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ,则 $T(\varepsilon_i)$ 的坐标是 $C_i$ ,从而



③  $\Longrightarrow$  ④ 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 的标准正交基,把正交变换的矩阵C按列分块为 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ,则 $T(\varepsilon_i)$ 的坐标是 $C_i$ ,从而

$$(T(oldsymbol{arepsilon}_i),\,T(oldsymbol{arepsilon}_j)) = oldsymbol{C}_i^T oldsymbol{C}_j = egin{cases} 1, & i = j, \ 0, & i 
eq j, \end{cases}$$



Home Page

Title Page







Page 67 of 69

Go Back

Full Screen

Close

③  $\Longrightarrow$  ④ 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 的标准正交基,把正交变换的矩阵C按列分块为 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ,则 $T(\varepsilon_i)$ 的坐标是 $C_i$ ,从而

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = \boldsymbol{C}_i^T \boldsymbol{C}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以 $C^TC = I$ 



Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

③  $\Longrightarrow$  ④ 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 的标准正交基,把正交变换的矩阵C按列分块为 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ,则 $T(\varepsilon_i)$ 的坐标是 $C_i$ ,从而

$$(T(oldsymbol{arepsilon}_i),\,T(oldsymbol{arepsilon}_j)) = oldsymbol{C}_i^T oldsymbol{C}_j = \left\{egin{array}{ll} 1, & i=j, \ 0, & i 
eq j, \end{array}
ight.$$

所以 $C^TC = I$ 

当V为酉空间时,注意到内积的共轭对称,即可证 $U^HU=I$ .



Home Page

Title Page





Page 67 of 69

Go Back

Full Screen

Close

③  $\Longrightarrow$  ④ 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 的标准正交基,把正交变换的矩阵C按列分块为 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ,则 $T(\varepsilon_i)$ 的坐标是 $C_i$ ,从而

$$(T(oldsymbol{arepsilon}_i),\,T(oldsymbol{arepsilon}_j)) = oldsymbol{C}_i^T oldsymbol{C}_j = egin{cases} 1, & i = j, \ 0, & i 
eq j, \end{cases}$$

所以 $C^TC = I$ 

当V为酉空间时,注意到内积的共轭对称,即可证 $U^HU=I$ .

④  $\Longrightarrow$  ① 取欧氏空间的标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ ,由④,有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C, \ C^TC = I.$$



Home Page

Title Page





Page 67 of 69

Go Back

Full Screen

Close

③  $\Longrightarrow$  ④ 设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ 为欧氏空间 $V(\mathbb{R})$ 的标准正交基,把正交变换的矩阵C按列分块为 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ ,则 $T(\varepsilon_i)$ 的坐标是 $C_i$ ,从而

$$(T(oldsymbol{arepsilon}_i),\,T(oldsymbol{arepsilon}_j)) = oldsymbol{C}_i^T oldsymbol{C}_j = egin{cases} 1, & i=j, \ 0, & i 
eq j, \end{cases}$$

所以 $C^TC = I$ 

当V为酉空间时,注意到内积的共轭对称,即可证 $U^HU=I$ .

④  $\Longrightarrow$  ① 取欧氏空间的标准正交基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ ,由④,有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \, \cdots \, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \, \cdots \, \boldsymbol{\varepsilon}_n)C, \ C^TC = I.$$

研究生公共基础课 第67页,共69页

矩阵论



Home Page

Title Page





Page 67 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{X},$$
  
$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{Y},$$



Home Page

Title Page





Page 68 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{X},$$
$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y} = (\alpha, \beta),$$



Home Page

Title Page





Page 68 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y} = (\alpha, \beta),$$

即T为正交变换.



Home Page

Title Page





Page 68 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \, \cdots \, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \, \cdots \, \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y} = (\alpha, \beta),$$

即T为正交变换.

同理可证酉变换的情形. ■



Home Page

Title Page





Page 68 of 69

Go Back

Full Screen

Close

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_n) C \boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y} = (\alpha, \beta),$$

即T为正交变换.

同理可证酉变换的情形. ■

例 1.26 设 $\mathbf{u}_1$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的单位向量,线性变换

$$S: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \forall \ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n,$$

$$S(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} - 2(\boldsymbol{X}, \, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1,$$

称S为 $\mathbb{R}^n$ 上的镜像变换,可以证明S为正交变换.



Home Page

itle Page





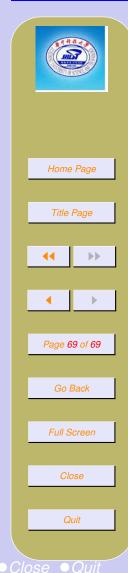
Page 68 of 69

Go Back

Full Screen

Close

5. 线性空间 $V_n$ 到线性空间 $V_m$ 的线性变换



在实际应用中,许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换.这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上,并建立相应的概念及矩阵处理.



在实际应用中,许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换.这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上,并建立相应的概念及矩阵处理.

**定义** 1.15 设 $V_n$ 和 $V_m$ 是同一数域F上的两个线性空间,如果变换 $T: V_n \longrightarrow V_m$ 满足条件:  $\forall \alpha, \beta \in V_n$ ,数 $k \in F$ ,有

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta),$$
  
 $T(k\alpha) = kT(\alpha),$ 



Home Page

Title Page





Page 69 of 69

Go Back

Full Screen

Close

在实际应用中,许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换.这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上,并建立相应的概念及矩阵处理.

**定义** 1.15 设 $V_n$ 和 $V_m$ 是同一数域F上的两个线性空间,如果变换 $T: V_n \longrightarrow V_m$ 满足条件:  $\forall \alpha, \beta \in V_n$ ,数 $k \in F$ ,有

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta),$$
  
 $T(k\alpha) = kT(\alpha),$ 

则称T是从 $V_n$ 到 $V_m$ 的一个线性变换.



Home Page

Title Page





Page 69 of 69

Go Back

Full Screen

Close

在实际应用中,许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换.这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上,并建立相应的概念及矩阵处理.

**定义** 1.15 设 $V_n$ 和 $V_m$ 是同一数域F上的两个线性空间,如果变换 $T: V_n \longrightarrow V_m$ 满足条件:  $\forall \alpha, \beta \in V_n$ ,数 $k \in F$ ,有

$$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta),$$
 
$$T(k\alpha) = kT(\alpha),$$

则称T是从 $V_n$ 到 $V_m$ 的一个线性变换.



Home Page

Title Page





Page 69 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第69页,共69页

矩阵论



## **例** 1.27 1. 设 $A \in F^{m \times n}$ . 定义

$$T_A:F^n\to F^m$$

$$X \mapsto AX$$

则 $T_A$  是从 $F^n$ 到 $F^m$ 一个线性变换.

2. 定义

$$T: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \det A$$

不是线性变换.



Home Page

Title Page





Page 70 of 72

Go Back

Full Screen

Close

回顾:设T是线性空间V上的线性变换,

 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为V 的基, 若存在n阶方阵 $A \in F^{n \times n}$ , 使

$$T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A,$$
 (1-17)

则称A为T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 下的<mark>矩阵</mark>.

设T是线性空间 $V_n$ 到 $V_m$ 的线性变换,

 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为 $V_n$  的基,  $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}$ 为 $V_m$  的基.

存在 $m \times n$ 矩阵A, 使

$$T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_m)A, \tag{1-18}$$

称 A为T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$  和 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}$  下的矩阵.

基的改变如何影响矩阵?



Home Page

Title Page





Page 71 of 72

Go Back

Full Screen

Close

像空间: 
$$R(T) = \{T(\alpha); \alpha \in V_n\} \subset V_m$$

零空间: 
$$N(T) = \{ \alpha \in V_n; T(\alpha) = 0 \}$$

定理 1.15 设
$$T: V_n \to V_m$$
是一个线性变换,则 dim  $R(T)$  + dim  $N(T)$  =  $n$ .



Home Page

Title Page





Page 72 of 72

Go Back

Full Screen

Close