

1 Minimum Weighted Vertex Cover Problem

有一个无权无向图 $G(V, E)$ ，节点的权重为 $W = \{w_i | \forall v_i \in V\}$ ，求一个权重和最小的节点子集 S ，满足 $\forall (u, v) \in E, u \in S \text{ or } v \in S$

现设计贪心算法ALG1：

1. 初始化 $S = \emptyset$ ；
2. 计算当前 $G(V, E)$ 中各个节点权重与度的比值 w_i/d_i ；
3. 选取节点权重与度比值最小的节点 v_j ，加入到 S 中，并在 $G(V, E)$ 中删除 v_j 及其所有连边；
4. 重复步骤2、3直到 E 为空，输出 S 。

试问，算法ALG1的近似比 α 是多少？

2 List Scheduling

有 m 个机器， n 个任务，第 i 个任务在第 j 个机器上的运行时间为 t_{ij} ，求最快完成这些任务的调度方案。

优化问题为

$$\begin{aligned} \min_X \max_i \sum_j x_{ij} t_{ij} \\ \text{s.t. (1) } x_{ij} \in \{0, 1\}, \\ \text{(2) } \sum_j x_{i,j} = 1, \forall i. \end{aligned} \tag{1}$$

现设计近似算法ALG2，将(1)放缩为线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min_X \max_i \sum_j x_{ij} t_{ij} \\ \text{s.t. (1) } x_{ij} \in [0, 1], \\ \text{(2) } \sum_j x_{i,j} = 1, \forall i. \end{aligned} \tag{2}$$

试问，如何根据(2)的解得到原问题的解？以及近似算法ALG2的近似比 α 是多少？