

定义

Home Page

Title Page



Page 1 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

矩 阵 论

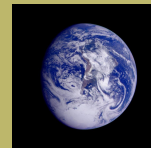
研究生公共基础课

第1页,共27页

矩阵论

● First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back ● Full Screen ● Close ● Quit

第六章 矩阵的Kronecker积 与Hadamard积



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 2 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

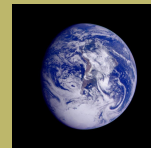
[Close](#)

[Quit](#)

§6.1 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的定义

定义 6.1 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{s \times t}$, 则 A 与 B 的 **Kronecker积** $A \otimes B$ 定义为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{ms \times nt}. \quad (6-1)$$



定义

Home Page

Title Page



Page 3 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§6.1 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的定义

定义 6.1 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{s \times t}$, 则 A 与 B 的 **Kronecker积** $A \otimes B$ 定义为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{ms \times nt}. \quad (6-1)$$

如果 A 与 B 是同阶矩阵, 即 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 A 与 B 的 **Hadamard积** $A \circ B$ 定义为

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}. \quad (6-2)$$



定义

Home Page

Title Page



Page 3 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§6.1 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的定义

定义 6.1 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{s \times t}$, 则 A 与 B 的 **Kronecker积** $A \otimes B$ 定义为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{ms \times nt}. \quad (6-1)$$

如果 A 与 B 是同阶矩阵, 即 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 A 与 B 的 **Hadamard积** $A \circ B$ 定义为

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}. \quad (6-2)$$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 3 of 27

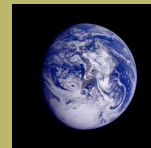
Go Back

Full Screen

Close

Quit

矩阵的Kronecker积也称为直积或张量积. 矩阵的Hadamard积也称为Schur积.



定义

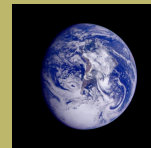
[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 4 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

矩阵的Kronecker积也称为直积或张量积. 矩阵的Hadamard积也称为Schur积.

例 6.1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, 计算 $A \otimes B$, $B \otimes A$, $A \circ B$, $B \circ A$.



定义

Home Page

Title Page



Page 4 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

矩阵的Kronecker积也称为**直积**或**张量积**. 矩阵的Hadamard积也称为**Schur积**.

例 6.1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, 计算 $A \otimes B$, $B \otimes A$, $A \circ B$, $B \circ A$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad A \otimes B &= \begin{pmatrix} B & 2B \\ 3B & 4B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & -3 & 8 & -6 \\ \hline -3 & 15 & -4 & 20 \\ 12 & -9 & 16 & -12 \end{array} \right), \\ B \otimes A &= \begin{pmatrix} -A & 5A \\ 4A & -3A \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 5 & 10 \\ -3 & -4 & 15 & 20 \\ \hline 4 & 8 & -3 & -6 \\ 12 & 16 & -9 & -12 \end{array} \right), \end{aligned}$$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 4 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

矩阵的Kronecker积也称为**直积**或**张量积**. 矩阵的Hadamard积也称为**Schur积**.

例 6.1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, 计算 $A \otimes B$, $B \otimes A$, $A \circ B$, $B \circ A$.

$$\text{解} \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} B & 2B \\ 3B & 4B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & -3 & 8 & -6 \\ \hline -3 & 15 & -4 & 20 \\ 12 & -9 & 16 & -12 \end{array} \right),$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} -A & 5A \\ 4A & -3A \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 5 & 10 \\ -3 & -4 & 15 & 20 \\ \hline 4 & 8 & -3 & -6 \\ 12 & 16 & -9 & -12 \end{array} \right),$$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 4 of 27

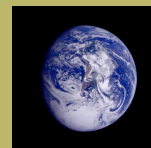
Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$A \circ B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}, B \circ A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 5 of 27](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

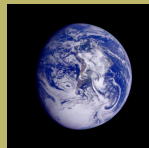
$$A \circ B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}, B \circ A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

性质 6.1 ① $\mathbf{0} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

② $I \otimes I = I, I \circ I = I.$

③ 如果 A 是对角矩阵, 则 $A \otimes B$ 是准对角矩阵, $A \circ B$ 是对角矩阵,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & & \\ & a_{22}B & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn}B \end{pmatrix},$$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

Page 5 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)

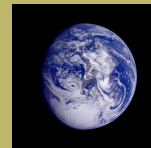
Page 6 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6.1 设 A, B, C 是矩阵, k 是数, 则下列性质成立

- ① $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B),$
- ② $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C, (B+C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A,$
- ③ $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C,$
- ④ $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H,$



定义

Home Page

Title Page



Page 6 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6.1 设 A, B, C 是矩阵, k 是数, 则下列性质成立

- ① $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B),$
- ② $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C, (B+C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A,$
- ③ $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C,$
- ④ $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H,$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 6 of 27

Go Back

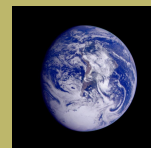
Full Screen

Close

Quit

定理 6.2 设矩阵 A, B, C, D 是使下列运算有意义的矩阵, 则有

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$$



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 7 of 27](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 6.2 设矩阵 A, B, C, D 是使下列运算有意义的矩阵, 则有

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$$

证明 设 $(A \otimes B)_{ik}$ 表示矩阵按 B 阶数分块中的第 i 行, 第 k 列子块矩阵.

因此, 用分块矩阵的乘法, 有

$$\begin{aligned} ((A \otimes B)(C \otimes D))_{ij} &= \sum_{k=1}^n (A \otimes B)_{ik} (C \otimes D)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik} B) (c_{kj} D) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} (BD) = (AC)_{ij} BD \end{aligned}$$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 7 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit



定义

Home Page

Title Page



Page 8 of 27

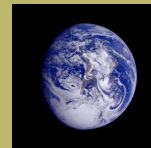
Go Back

Full Screen

Close

Quit

从而 $(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$ ■ ■



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 8 of 27](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

从而 $(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$ ■ ■

推论 6.1 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则

$$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n).$$



定义

Home Page

Title Page



Page 8 of 27

Go Back

Full Screen

Close

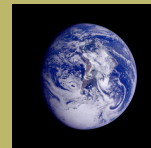
Quit

从而 $(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$ ■ ■

推论 6.1 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则

$$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n).$$

定理6.2给出了Kronecker积与矩阵乘法的关系式, 应用它可以得到许多涉及Kronecker积运算得到的矩阵的重要性质.



定义

Home Page

Title Page



Page 8 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

从而 $(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$ ■ ■

推论 6.1 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则

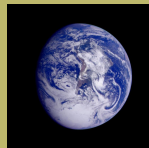
$$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n).$$

定理6.2给出了Kronecker积与矩阵乘法的关系式, 应用它可以得到许多涉及Kronecker积运算得到的矩阵的重要性质. 矩阵的Hadamard积比较简单, 易于验证下列性质成立:

性质 6.2 ① $(kA) \circ B = A \circ (kB),$

② $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C,$

③ $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C),$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 8 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$\textcircled{4} \quad (A \circ B)^H = A^H \circ B^H.$$



定义

Home Page

Title Page



Page 9 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$\textcircled{4} \quad (A \circ B)^H = A^H \circ B^H.$$

Hadamard积 $A \circ B$ 事实上是Kronecker积 $A \otimes B$ 的一个子矩阵:

定理 6.3 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 集合 $S = \{1, n+2, 2n+3, 3n+4, \dots, (n-1)n+n\}$, 则Hadamard积 $A \circ B$ 是Kronecker积 $A \otimes B$ 中同时取 S 中的数对应的行和列得到的子矩阵, 记为 $A \otimes B\{S\} = A \circ B$.



定义

Home Page

Title Page



Page 9 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$\textcircled{4} \quad (A \circ B)^H = A^H \circ B^H.$$

Hadamard积 $A \circ B$ 事实上是Kronecker积 $A \otimes B$ 的一个子矩阵:

定理 6.3 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 集合 $S = \{1, n+2, 2n+3, 3n+4, \dots, (n-1)n+n\}$, 则Hadamard积 $A \circ B$ 是Kronecker积 $A \otimes B$ 中同时取 S 中的数对应的行和列得到的子矩阵, 记为 $A \otimes B\{S\} = A \circ B$.



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 9 of 27

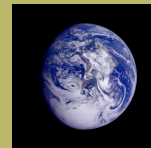
Go Back

Full Screen

Close

Quit

§6.2 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的性质



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§6.2 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的性质

这一节主要从矩阵的角度, 讨论 $A \otimes B$ 和 $A \circ B$ 的一些性质.



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§6.2 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的性质

这一节主要从矩阵的角度, 讨论 $A \otimes B$ 和 $A \circ B$ 的一些性质.

定理 6.4 设 A 和 B 是使下列运算有意义的矩阵, 对 A 与 B 的Kronecker积矩阵 $A \otimes B$, 下列性质成立.

① 若 A, B 可逆, 则矩阵 $A \otimes B$ 可逆, 且 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;

② 当方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 时, 方阵 $A \otimes B$ 的行列式

$$|A \otimes B| = |B \otimes A| = |A|^n |B|^m;$$


定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- ③ 若 A 和 B 都是Hermite矩阵, 则 $A \otimes B$ 是Hermite矩阵;
- ④ 若 A 与 B 都是酉矩阵, 则 $A \otimes B$ 是酉矩阵.



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 27

[Go Back](#)

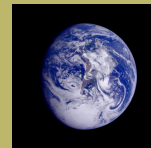
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- ③ 若 A 和 B 都是Hermite矩阵, 则 $A \otimes B$ 是Hermite矩阵;
- ④ 若 A 与 B 都是酉矩阵, 则 $A \otimes B$ 是酉矩阵.

证明 ① A^{-1} 和 B^{-1} 存在, 由定理6.2,

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I \otimes I = I,$$


定义

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 11 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- ③ 若 A 和 B 都是Hermite矩阵, 则 $A \otimes B$ 是Hermite矩阵;
- ④ 若 A 与 B 都是酉矩阵, 则 $A \otimes B$ 是酉矩阵.

证明 ① A^{-1} 和 B^{-1} 存在, 由定理6.2,
 $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I \otimes I = I,$
 故 $A \otimes B$ 可逆, 且 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$



定义

Home Page

Title Page



Page 11 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- ③ 若 A 和 B 都是Hermite矩阵, 则 $A \otimes B$ 是Hermite矩阵;
- ④ 若 A 与 B 都是酉矩阵, 则 $A \otimes B$ 是酉矩阵.

证明

① A^{-1} 和 B^{-1} 存在, 由定理6.2,

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I \otimes I = I,$$

故 $A \otimes B$ 可逆, 且 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

② 对方阵 A , 存在可逆矩阵 P 和Jordan矩阵 J_A , 使 $A = PJ_AP^{-1}$, 其中

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 11 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{且 } |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

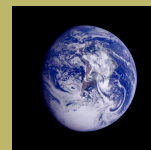
[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{且 } |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

由定理6.2及其推论,

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (I_m \otimes B)(A \otimes I_n) = (I_m \otimes B)((PJ_AP^{-1}) \otimes I_n) \\ &= (I_m \otimes B)(P \otimes I)(J_A \otimes I_n)(P \otimes I)^{-1}, \end{aligned}$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 12 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{且 } |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

由定理6.2及其推论,

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (I_m \otimes B)(A \otimes I_n) = (I_m \otimes B)((PJ_AP^{-1}) \otimes I_n) \\ &= (I_m \otimes B)(P \otimes I)(J_A \otimes I_n)(P \otimes I)^{-1}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} |A \otimes B| &= |I_m \otimes B| |J_A \otimes I_n| \\ &= \begin{vmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n I \end{vmatrix} \\ &= |B|^m \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) = |A|^n |B|^m. \end{aligned}$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



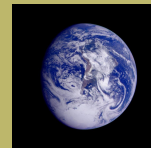
Page 12 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定义

Home Page

Title Page



Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证

$$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

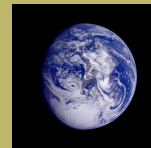
[Close](#)

[Quit](#)

同理可证

$$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

- ③ 由 $A^H = A, B^H = B$, 则 $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$,
故 $A \otimes B$ 也是 Hermite 矩阵.



定义

Home Page

Title Page



Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证

$$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

③ 由 $A^H = A, B^H = B$, 则 $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$,
故 $A \otimes B$ 也是 Hermite 矩阵.

④ 由 $A^H A = A A^H = I, B^H B = B B^H = I$, 则

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^H (A \otimes B) &= (A^H \otimes B^H) (A \otimes B) \\ &= (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I. \end{aligned}$$



定义

Home Page

Title Page



Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证

$$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

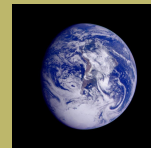
③ 由 $A^H = A, B^H = B$, 则 $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$,
故 $A \otimes B$ 也是 Hermite 矩阵.

④ 由 $A^H A = A A^H = I, B^H B = B B^H = I$, 则

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^H (A \otimes B) &= (A^H \otimes B^H) (A \otimes B) \\ &= (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I. \end{aligned}$$

同理可验证

$$(A \otimes B) (A \otimes B)^H = I,$$



定义

Home Page

Title Page



Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证

$$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

③ 由 $A^H = A, B^H = B$, 则 $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$,
故 $A \otimes B$ 也是 Hermite 矩阵.

④ 由 $A^H A = A A^H = I, B^H B = B B^H = I$, 则

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^H (A \otimes B) &= (A^H \otimes B^H) (A \otimes B) \\ &= (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I. \end{aligned}$$

同理可验证

$$(A \otimes B)(A \otimes B)^H = I,$$

故 $A \otimes B$ 是酉矩阵. ■ ■



定义

Home Page

Title Page



Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证

$$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

③ 由 $A^H = A, B^H = B$, 则 $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$,
故 $A \otimes B$ 也是 Hermite 矩阵.

④ 由 $A^H A = A A^H = I, B^H B = B B^H = I$, 则

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^H (A \otimes B) &= (A^H \otimes B^H) (A \otimes B) \\ &= (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I. \end{aligned}$$

同理可验证

$$(A \otimes B)(A \otimes B)^H = I,$$

故 $A \otimes B$ 是酉矩阵. ■ ■

定理 6.5 设 A, B 使下列运算有意义, 则有



定义

Home Page

Title Page



Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- ① 设 A, B 为同阶矩阵, 且 A 等价于 B , 则对任意单位矩阵 I , $(A \otimes I)$ 等价于 $(B \otimes I)$.
- ② 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A 相似于 J_A , B 相似于 J_B , 则 $A \otimes B$ 相似于 $J_A \otimes J_B$.



定义

Home Page

Title Page



Page 14 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- ① 设 A, B 为同阶矩阵, 且 A 等价于 B , 则对任意单位矩阵 I , $(A \otimes I)$ 等价于 $(B \otimes I)$.
- ② 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A 相似于 J_A , B 相似于 J_B , 则 $A \otimes B$ 相似于 $J_A \otimes J_B$.

证明 ① A 等价于 B , 故存在可逆矩阵 P, Q , 使 $PAQ = B$. 对任意单位矩阵 I , $P \otimes I$ 和 $Q \otimes I$ 仍然是可逆矩阵, 由

$$(P \otimes I)(A \otimes I)(Q \otimes I) = (PAQ) \otimes I = B \otimes I,$$

所以 $(A \otimes I)$ 等价于 $(B \otimes I)$.



定义

Home Page

Title Page



Page 14 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

- ① 设 A, B 为同阶矩阵, 且 A 等价于 B , 则对任意单位矩阵 I , $(A \otimes I)$ 等价于 $(B \otimes I)$.
- ② 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A 相似于 J_A , B 相似于 J_B , 则 $A \otimes B$ 相似于 $J_A \otimes J_B$.

证明 ① A 等价于 B , 故存在可逆矩阵 P, Q , 使 $PAQ = B$. 对任意单位矩阵 I , $P \otimes I$ 和 $Q \otimes I$ 仍然是可逆矩阵, 由

$$(P \otimes I)(A \otimes I)(Q \otimes I) = (PAQ) \otimes I = B \otimes I,$$

所以 $(A \otimes I)$ 等价于 $(B \otimes I)$.

- ② 设 $P^{-1}AP = J_A$, $Q^{-1}BQ = J_B$, 则 $P \otimes Q$ 仍然是可逆矩



定义

Home Page

Title Page



Page 14 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

阵, 且

$$\begin{aligned}(P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q) &= (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) \\ &= J_A \otimes J_B. \blacksquare\end{aligned}$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

阵, 且

$$\begin{aligned}(P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q) &= (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) \\ &= J_A \otimes J_B. \blacksquare \quad \blacksquare\end{aligned}$$

定理 6.6 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, A 的特征值是 λ_i , 相应的特征向量是 \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, m$. 方阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, B 的特征值是 μ_i , 相应的特征向量是 \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 则

- ① $A \otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i \mu_j$, 对应的特征向量是 $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$.
- ② 方阵 A 的 **Kronecker** 和 $A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i + \mu_j$, 对应的特征向量是 $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$.



定义

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

阵, 且

$$\begin{aligned}(P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q) &= (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) \\ &= J_A \otimes J_B. \blacksquare\end{aligned}$$

定理 6.6 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, A 的特征值是 λ_i , 相应的特征向量是 \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, \dots, m$. 方阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, B 的特征值是 μ_i , 相应的特征向量是 \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 则

- ① $A \otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i \mu_j$, 对应的特征向量是 $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$.
- ② 方阵 A 的 **Kronecker** 和 $A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i + \mu_j$, 对应的特征向量是 $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$.



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

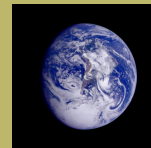
Page 15 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 16 of 27

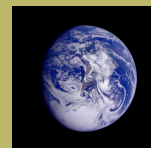
[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 6.7 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 的特征值是 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, 方阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的特征值是 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则矩阵

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^T c_{ij} A^i \otimes B^j$$

的特征值是

$$P(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^T c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$



定义

Home Page

Title Page

Page 16 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.7 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 的特征值是 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, 方阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的特征值是 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则矩阵

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^T c_{ij} A^i \otimes B^j$$

的特征值是

$$P(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^T c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

定理 6.8 设 $f(z)$ 为解析函数, $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 且 $f(A)$ 存在, 则

$$f(I_m \otimes A) = I_m \otimes f(A),$$

$$f(A \otimes I_m) = f(A) \otimes I_m.$$



定义

Home Page

Title Page

Page 16 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.7 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$ 的特征值是 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, 方阵 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的特征值是 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则矩阵

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^T c_{ij} A^i \otimes B^j$$

的特征值是

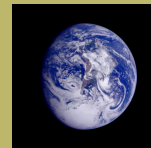
$$P(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^T c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

定理 6.8 设 $f(z)$ 为解析函数, $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 且 $f(A)$ 存在, 则

$$f(I_m \otimes A) = I_m \otimes f(A),$$

$$f(A \otimes I_m) = f(A) \otimes I_m.$$

定理 6.9 (Schur积定理) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A, B 是半正定(正定)矩阵, 则 $A \circ B$ 也是半正定(正定)矩阵.



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 6.9 (Schur积定理) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A, B 是半正定(正定)矩阵, 则 $A \circ B$ 也是半正定(正定)矩阵.

证明 设 A, B 分别是秩为 k 和 l 的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^H + \cdots + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H,$$

$$B = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^H + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^H + \cdots + \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^H,$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定义

Home Page

Title Page



Page 17 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.9 (Schur积定理) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A, B 是半正定(正定)矩阵, 则 $A \circ B$ 也是半正定(正定)矩阵.

证明 设 A, B 分别是秩为 k 和 l 的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^H + \cdots + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H,$$

$$B = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^H + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^H + \cdots + \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H,$$



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 17 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.9 (Schur积定理) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A, B 是半正定(正定)矩阵, 则 $A \circ B$ 也是半正定(正定)矩阵.

证明 设 A, B 分别是秩为 k 和 l 的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^H + \cdots + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H,$$

$$B = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^H + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^H + \cdots + \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H,$$

其中 $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j$.



定义

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 17 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.9 (Schur积定理) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A, B 是半正定(正定)矩阵, 则 $A \circ B$ 也是半正定(正定)矩阵.

证明 设 A, B 分别是秩为 k 和 l 的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^H + \cdots + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H,$$

$$B = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^H + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^H + \cdots + \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H,$$

其中 $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j$.

而 $\mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H$ 是半正定矩阵, 故其和 $A \circ B$ 是半正定矩阵.



定义

Home Page

Title Page

Page 17 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.9 (Schur积定理) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 如果 A, B 是半正定(正定)矩阵, 则 $A \circ B$ 也是半正定(正定)矩阵.

证明 设 A, B 分别是秩为 k 和 l 的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^H + \cdots + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H,$$

$$B = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^H + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^H + \cdots + \mathbf{w}_l \mathbf{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H,$$

其中 $\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j$.

而 $\mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H$ 是半正定矩阵, 故其和 $A \circ B$ 是半正定矩阵.

当 A, B 是正定矩阵时, 我们只需证 $A \circ B$ 非奇异.

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H (A \circ B) \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$



定义

Home Page

Title Page



Page 18 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H (A \circ B) \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

这导出

$$\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = 0, \text{ 或 } \mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = 0,$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H (A \circ B) \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

这导出

$$\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = 0, \text{ 或 } \mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = 0,$$

又 $\mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = (\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)^H \mathbf{w}_j = 0$, 这说明 $(\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)$ 与 \mathbb{F}^n 中正交基 $\{\mathbf{w}_j\}$ 中的每一个正交, 因此有



定义

Home Page

Title Page



Page 18 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H (A \circ B) \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

这导出

$$\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = 0, \text{ 或 } \mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = 0,$$

又 $\mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = (\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)^H \mathbf{w}_j = 0$, 这说明 $(\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)$ 与 \mathbb{F}^n 中正交基 $\{\mathbf{w}_j\}$ 中的每一个正交, 因此有

$$\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H (A \circ B) \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

这导出

$$\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = 0, \text{ 或 } \mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = 0,$$

又 $\mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = (\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)^H \mathbf{w}_j = 0$, 这说明 $(\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)$ 与 \mathbb{F}^n 中正交基 $\{\mathbf{w}_j\}$ 中的每一个正交, 因此有

$$\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

注意到 $\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_i^H \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H(A \circ B)\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

这导出

$$\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = 0, \text{ 或 } \mathbf{x}^H(\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = 0,$$

又 $\mathbf{x}^H(\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = (\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)^H \mathbf{w}_j = 0$, 这说明 $(\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)$ 与 \mathbb{F}^n 中正交基 $\{\mathbf{w}_j\}$ 中的每一个正交, 因此有

$$\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

注意到 $\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_i^H \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$
故 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 这与 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 矛盾. ■



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

用反证法. 设 $A \circ B$ 是奇异矩阵, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 但 $(A \circ B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\mathbf{x}^H (A \circ B) \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \mathbf{x}^H \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x}\|_2^2 = 0,$$

这导出

$$\mathbf{u}_{ij}^H \mathbf{x} = 0, \text{ 或 } \mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = 0,$$

又 $\mathbf{x}^H (\mathbf{v}_i \circ \mathbf{w}_j) = (\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)^H \mathbf{w}_j = 0$, 这说明 $(\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i)$ 与 \mathbb{F}^n 中正交基 $\{\mathbf{w}_j\}$ 中的每一个正交, 因此有

$$\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

注意到 $\mathbf{x} \circ \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_i^H \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$
故 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 这与 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 矛盾. ■



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§6.3 矩阵的向量化算子与Kronecker积



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 19 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§6.3 矩阵的向量化算子与Kronecker积

定义 6.2 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, 其中 $A_i \in \mathbb{F}^m$ 是 A 的第 i 列, 则 A 的向量算子 $\text{Vec}(A)$, 定义为:

$$\text{Vec}(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{mn}.$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 19 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§6.3 矩阵的向量化算子与Kronecker积

定义 6.2 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, 其中 $A_i \in \mathbb{F}^m$ 是 A 的第 i 列, 则 A 的向量算子 $\text{Vec}(A)$, 定义为:

$$\text{Vec}(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{mn}.$$

例 6.2 $\text{Vec}(A)$ 在 A 上的作用是依 A 的列的顺序将 A 转化为一个列向量. 例如



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 19 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{Vec} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 0 \ 5 \ 1 \ -1 \ 4 \ 4 \ 2 \ 3 \ 3 \ 7 \ 1)^T.$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{Vec} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (2 \ 0 \ 5 \ 1 \ -1 \ 4 \ 4 \ 2 \ 3 \ 3 \ 7 \ 1)^T.$$

性质 6.3 ① 当 A 是 $m \times n$ 矩阵时, $\text{Vec}(A)$ 是 mn 维列向量;

② 当 \mathbf{x} 是向量时, $\text{Vec}(\mathbf{x}) = \text{Vec}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$;

③ 当 \mathbf{x} 是 m 维向量, \mathbf{y} 是 n 维向量时, $\text{Vec}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$;

④ Vec 是线性变换, 即 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, a, b 是数,

$$\text{Vec}(aA + bB) = a\text{Vec}(A) + b\text{Vec}(B);$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 20 of 27

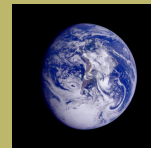
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- ⑤ 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是线性空间 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中的线性无关向量组, 则 $\text{Vec}(A_1), \text{Vec}(A_2), \dots, \text{Vec}(A_k)$ 是空间 \mathbb{F}^{mn} 中的线性无关向量组.



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 21 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

- ⑤ 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是线性空间 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中的线性无关向量组, 则 $\text{Vec}(A_1), \text{Vec}(A_2), \dots, \text{Vec}(A_k)$ 是空间 \mathbb{F}^{mn} 中的线性无关向量组.

定理 6.10 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times k}, B \in \mathbb{F}^{k \times s}, C \in \mathbb{F}^{s \times n}$, 则

$$\text{Vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{Vec}(B). \quad (6-3)$$


定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 21 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- ⑤ 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是线性空间 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中的线性无关向量组, 则 $\text{Vec}(A_1), \text{Vec}(A_2), \dots, \text{Vec}(A_k)$ 是空间 \mathbb{F}^{mn} 中的线性无关向量组.

定理 6.10 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times k}, B \in \mathbb{F}^{k \times s}, C \in \mathbb{F}^{s \times n}$, 则

$$\text{Vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{Vec}(B). \quad (6-3)$$

证明 设

$$B = (B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_s), \ C = (c_{ij}) = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n),$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 21 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

⑤ 若 A_1, A_2, \dots, A_k 是线性空间 $\mathbb{F}^{m \times n}$ 中的线性无关向量组, 则 $\text{Vec}(A_1), \text{Vec}(A_2), \dots, \text{Vec}(A_k)$ 是空间 \mathbb{F}^{mn} 中的线性无关向量组.

定理 6.10 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times k}, B \in \mathbb{F}^{k \times s}, C \in \mathbb{F}^{s \times n}$, 则

$$\text{Vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{Vec}(B). \quad (6-3)$$

证明 设

$$B = (B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_s), \ C = (c_{ij}) = (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n),$$

则

$$ABC = A \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s c_{j1} B_j & \sum_{j=1}^s c_{j2} B_j & \cdots & \sum_{j=1}^s c_{jn} B_j \end{pmatrix}$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 21 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A \sum_{j=1}^s c_{j1} B_j & A \sum_{j=1}^s c_{j2} B_j & \cdots & A \sum_{j=1}^s c_{jn} B_j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s c_{j1} A B_j & \sum_{j=1}^s c_{j2} A B_j & \cdots & \sum_{j=1}^s c_{jn} A B_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 22 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} A \sum_{j=1}^s c_{j1} B_j & A \sum_{j=1}^s c_{j2} B_j & \cdots & A \sum_{j=1}^s c_{jn} B_j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s c_{j1} A B_j & \sum_{j=1}^s c_{j2} A B_j & \cdots & \sum_{j=1}^s c_{jn} A B_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\text{Vec}(ABC) &= \begin{pmatrix} c_{11}A & c_{21}A & \cdots & c_{s1}A \\ c_{12}A & c_{22}A & \cdots & c_{s2}A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n}A & c_{2n}A & \cdots & c_{sn}A \end{pmatrix} \text{Vec}(B) \\
&= (C^T \otimes A) \text{Vec}(B). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



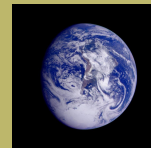
[Page 22 of 27](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定义

Home Page

Title Page



Page 23 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

推论 6.2 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$, $X \in \mathbb{F}^{k \times s}$, $C \in \mathbb{F}^{s \times n}$, 则有

$$\textcircled{1} \quad \text{Vec}(AX) = (I_n \otimes A)\text{Vec}(X);$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Vec}(XC) = (C^T \otimes I_k)\text{Vec}(X).$$



定义

Home Page

Title Page

Page 23 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

推论 6.2 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$, $X \in \mathbb{F}^{k \times s}$, $C \in \mathbb{F}^{s \times n}$, 则有

$$\textcircled{1} \quad \text{Vec}(AX) = (I_n \otimes A)\text{Vec}(X);$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Vec}(XC) = (C^T \otimes I_k)\text{Vec}(X).$$

例 6.3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程 $AX + XB = D$.

解 用向量化算子 Vec 作用在方程两边, 有 $\text{Vec}(AX) + \text{Vec}(XB) = \text{Vec}(D)$, 故

$$(I_2 \otimes A + B^T \otimes I_2)\text{Vec}(X) = \text{Vec}(D),$$

研究生公共基础课

第23页, 共27页

矩阵论

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (6-4)$$



定义

[Home Page](#)
[Title Page](#)


Page 24 of 27

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (6-4)$$

解得

$$\text{Vec}(X) = (0 \ 1 \ 2 \ -1)^T.$$



定义

[Home Page](#)
[Title Page](#)


Page 24 of 27

[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (6-4)$$

解得

$$\text{Vec}(X) = (0 \ 1 \ 2 \ -1)^T.$$

因此, 原方程组的解矩阵是 $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ■



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 24 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (6-4)$$

解得

$$\text{Vec}(X) = (0 \ 1 \ 2 \ -1)^T.$$

因此, 原方程组的解矩阵是 $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ■

例 6.4 设 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程

研究生公共基础课

第24页, 共27页

矩阵论



定义

Home Page

Title Page



Page 24 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$$\text{程 } A_1 Z B_1 + A_2 Z B_2 = D.$$

解 用向量化算子 Vec 作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2) \text{Vec}(Z) = \text{Vec}(D),$$


定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 25 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{程 } A_1 Z B_1 + A_2 Z B_2 = D.$$

解 用向量化算子 Vec 作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2) \text{Vec}(Z) = \text{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 25 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{程 } A_1 Z B_1 + A_2 Z B_2 = D.$$

解 用向量化算子 Vec 作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2) \text{Vec}(Z) = \text{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解得该方程组的惟一解为

$$\text{Vec}(Z) = (1 \quad -1 \quad -2 \quad 0)^T,$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 25 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\text{程 } A_1 Z B_1 + A_2 Z B_2 = D.$$

解 用向量化算子 Vec 作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2) \text{Vec}(Z) = \text{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解得该方程组的惟一解为

$$\text{Vec}(Z) = (1 \quad -1 \quad -2 \quad 0)^T,$$

即

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 25 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§6.3. 向量化算子



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



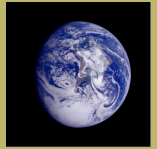
[Page 26 of 27](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定义

Home Page

Title Page



Page 26 of 27

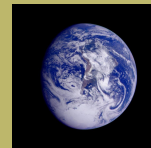
Go Back

Full Screen

Close

Quit

定义 6.3 称 $K_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij}^T \otimes E_{ij}^T$ 为交换矩阵.



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 26 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

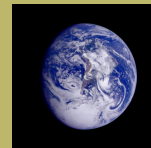
定义 6.3 称 $K_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij}^T \otimes E_{ij}^T$ 为交换矩阵.

性质 6.4 交换矩阵有下列性质,

$$\textcircled{1} \quad K_{mn}^T = K_{nm};$$

$$\textcircled{2} \quad K_{1n} = K_{n1} = I_n;$$

$$\textcircled{3} \quad K_{mn} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_j^T \otimes I_m \otimes \mathbf{e}_j).$$



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 26 of 27

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定义 6.3 称 $K_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij}^T \otimes E_{ij}^T$ 为交换矩阵.

性质 6.4 交换矩阵有下列性质,

$$\textcircled{1} \quad K_{mn}^T = K_{nm};$$

$$\textcircled{2} \quad K_{1n} = K_{n1} = I_n;$$

$$\textcircled{3} \quad K_{mn} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_j^T \otimes I_m \otimes \mathbf{e}_j).$$

定理 6.11 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则

$$\text{Vec}(A) = K_{mn}^T \text{Vec}(A^T).$$

§6.3. 向量化算子



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 27 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



定义

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 27 of 27

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 6.12 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times q}$, 则

$$K_{mn}(B \otimes A)K_{pq}^T = A \otimes B.$$



定义

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 27 of 27](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 6.12 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times q}$, 则

$$K_{mn}(B \otimes A)K_{pq}^T = A \otimes B.$$