

左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 1 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

研究生公共基础课

矩 阵 论

研究生公共基础课

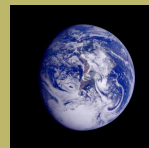
第1页,共47页

矩阵论

● [First](#) ● [Prev](#) ● [Next](#) ● [Last](#) ● [Go Back](#) ● [Full Screen](#) ● [Close](#) ● [Quit](#)

第四章 矩阵的广义逆

矩阵逆的概念只是对非奇异矩阵才有意义,但是在实际问题中,遇到的矩阵不一定是方阵,这就产生了推广矩阵逆的概念问题,产生了各种矩阵的广义逆. 本章就其最重要的Moore-Penrose 广义逆及其应用做简单介绍.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

[Page 2 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

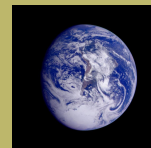
[Close](#)

[Quit](#)

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设 A 是 n 阶矩阵, A 可逆当且仅当存在 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = I$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 3 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

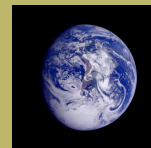
§4.1 矩阵的左逆与右逆

设 A 是 n 阶矩阵, A 可逆当且仅当存在 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = I$$

当 A 可逆时, 其逆惟一, 记为 A^{-1} .

1. 满秩矩阵与单侧逆



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设 A 是 n 阶矩阵, A 可逆当且仅当存在 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = I$$

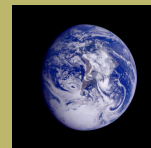
当 A 可逆时, 其逆惟一, 记为 A^{-1} .

1. 满秩矩阵与单侧逆

定义 4.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

$$BA = I_n,$$

则称 A 是**左可逆的**, 称 B 为 A 的一个**左逆矩阵**, 记为 A_L^{-1} .



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 3 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设 A 是 n 阶矩阵, A 可逆当且仅当存在 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = I$$

当 A 可逆时, 其逆惟一, 记为 A^{-1} .

1. 满秩矩阵与单侧逆

定义 4.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

$$BA = I_n,$$

则称 A 是**左可逆的**, 称 B 为 A 的一个**左逆矩阵**, 记为 A_L^{-1} .

若存在矩阵 $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

$$AC = I_m,$$

则称 A 是**右可逆的**, 称 C 为 A 的一个**右逆矩阵**, 记为 A_R^{-1} .



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 3 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 4 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

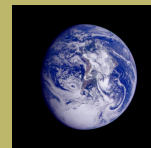
[Close](#)

[Quit](#)

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

定理 4.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则下列条件是等价的:

- ① A 是左可逆的;
- ② A 的零空间 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;
- ③ $m \geq n$, $\text{rank}(A) = n$, 即 A 是列满秩的;
- ④ $A^H A$ 是可逆的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 4 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

定理 4.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则下列条件是等价的:

- ① A 是左可逆的;
- ② A 的零空间 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;
- ③ $m \geq n$, $\text{rank}(A) = n$, 即 A 是列满秩的;
- ④ $A^H A$ 是可逆的.

证明 ① \Rightarrow ② 设 A 是左可逆的, 则存在 $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得 $BA = I_n$, $\forall \mathbf{x} \in N(A)$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是 $\mathbf{x} = I_n \mathbf{x} = BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 故 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 4 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

定理 4.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则下列条件是等价的:

- ① A 是左可逆的;
- ② A 的零空间 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;
- ③ $m \geq n$, $\text{rank}(A) = n$, 即 A 是列满秩的;
- ④ $A^H A$ 是可逆的.

证明 ① \Rightarrow ② 设 A 是左可逆的, 则存在 $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得 $BA = I_n$, $\forall \mathbf{x} \in N(A)$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是 $\mathbf{x} = I_n \mathbf{x} = BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 故 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



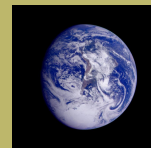
Page 4 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit


[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 5 of 47](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

② \Rightarrow ③ 设 $N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\text{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知 A 是列满秩的, 自然有 $m \geq n$.



② \Rightarrow ③ 设 $N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\text{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知 A 是列满秩的, 自然有 $m \geq n$.

③ \Rightarrow ④ 设 $\text{rank}(A) = n$, 由 $\text{rank}(A^H A) = \text{rank}(A) = n$, 得 $A^H A$ 可逆.



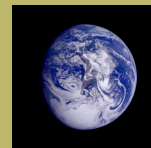
② \Rightarrow ③ 设 $N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\text{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知 A 是列满秩的, 自然有 $m \geq n$.

③ \Rightarrow ④ 设 $\text{rank}(A) = n$, 由 $\text{rank}(A^H A) = \text{rank}(A) = n$, 得 $A^H A$ 可逆.

④ \Rightarrow ① 设 $A^H A$ 可逆, 由 $(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$ 知, $(A^H A)^{-1} A^H$ 是 A 的一个左逆矩阵. ■



② \Rightarrow ③ 设 $N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\text{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知 A 是列满秩的, 自然有 $m \geq n$.

③ \Rightarrow ④ 设 $\text{rank}(A) = n$, 由 $\text{rank}(A^H A) = \text{rank}(A) = n$, 得 $A^H A$ 可逆.

④ \Rightarrow ① 设 $A^H A$ 可逆, 由 $(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$ 知, $(A^H A)^{-1} A^H$ 是 A 的一个左逆矩阵. ■

对于右可逆, 有类似的结果.



② \Rightarrow ③ 设 $N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\text{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知 A 是列满秩的, 自然有 $m \geq n$.

③ \Rightarrow ④ 设 $\text{rank}(A) = n$, 由 $\text{rank}(A^H A) = \text{rank}(A) = n$, 得 $A^H A$ 可逆.

④ \Rightarrow ① 设 $A^H A$ 可逆, 由 $(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$ 知, $(A^H A)^{-1} A^H$ 是 A 的一个左逆矩阵. ■

对于右可逆, 有类似的结果.

定理 4.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则下列条件是等价的:

① A 是右可逆的;

② A 的列空间 $R(A) = \mathbb{C}^m$;

- ③ $m \leq n$, $\text{rank}(A) = m$, 即 A 是行满秩的;
- ④ AA^H 是可逆的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 6 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

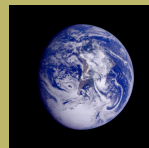
[Quit](#)

③ $m \leq n$, $\text{rank}(A) = m$, 即 A 是行满秩的;

④ AA^H 是可逆的.

例 4.1 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 是右可逆的, 但不是左可逆的. 这是由于

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 6 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

③ $m \leq n$, $\text{rank}(A) = m$, 即 A 是行满秩的;

④ AA^H 是可逆的.

例 4.1 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 是右可逆的, 但不是左可逆的. 这是由于

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

注意到右逆最后一行元素是完全任意的, 故存在无穷多个右逆矩阵.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 6 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

③ $m \leq n$, $\text{rank}(A) = m$, 即 A 是行满秩的;

④ AA^H 是可逆的.

例 4.1 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 是右可逆的, 但不是左可逆的. 这是由于

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

注意到右逆最后一行元素是完全任意的, 故存在无穷多个右逆矩阵.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 6 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

定理 4.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是左可逆的, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 是 A 的一个左逆矩阵, 则线性方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有形如 $\mathbf{X} = B\mathbf{b}$ 解的充分必要条件是

$$(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

定理 4.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是左可逆的, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 是 A 的一个左逆矩阵, 则线性方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有形如 $\mathbf{X} = B\mathbf{b}$ 解的充分必要条件是

$$(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

若上式成立, 则方程组有惟一解

$$\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 7 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

定理 4.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是左可逆的, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 是 A 的一个左逆矩阵, 则线性方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有形如 $\mathbf{X} = B\mathbf{b}$ 解的充分必要条件是

$$(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

若上式成立, 则方程组有惟一解

$$\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 7 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 设方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有解 \mathbf{X}_0 , 则

$$\mathbf{b} = A\mathbf{X}_0 = A(BA)\mathbf{X}_0 = AB\mathbf{b},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



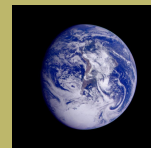
Page 8 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

[Home Page](#)[Title Page](#)

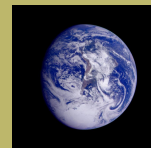
Page 8 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

证明 设方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有解 \mathbf{X}_0 , 则

$$\mathbf{b} = A\mathbf{X}_0 = A(BA)\mathbf{X}_0 = AB\mathbf{b},$$

$$\text{故 } (I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$



证明 设方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有解 \mathbf{X}_0 , 则

$$\mathbf{b} = A\mathbf{X}_0 = A(BA)\mathbf{X}_0 = AB\mathbf{b},$$

故 $(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

反过来, 若 $(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $AB\mathbf{b} = \mathbf{b}$, 故 $\mathbf{X}_0 = B\mathbf{b}$ 是方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的解.



证明 设方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有解 \mathbf{X}_0 , 则

$$\mathbf{b} = A\mathbf{X}_0 = A(BA)\mathbf{X}_0 = AB\mathbf{b},$$

故 $(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

反过来, 若 $(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $AB\mathbf{b} = \mathbf{b}$, 故 $\mathbf{X}_0 = B\mathbf{b}$ 是方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的解.

当方程组有解时, 因为 A 左可逆, 所以 $\text{rank}(A) = n$, 从而方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有惟一解. 由 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, 有

$$(A^H A)^{-1} A^H A\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b},$$



证明 设方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有解 \mathbf{X}_0 , 则

$$\mathbf{b} = A\mathbf{X}_0 = A(BA)\mathbf{X}_0 = AB\mathbf{b},$$

$$\text{故 } (I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

反过来, 若 $(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $AB\mathbf{b} = \mathbf{b}$, 故 $\mathbf{X}_0 = B\mathbf{b}$ 是方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的解.

当方程组有解时, 因为 A 左可逆, 所以 $\text{rank}(A) = n$, 从而方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有惟一解. 由 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, 有

$$(A^H A)^{-1} A^H A\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b},$$

即 $\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b}$ 为 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的惟一解. ■



证明 设方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有解 \mathbf{X}_0 , 则

$$\mathbf{b} = A\mathbf{X}_0 = A(BA)\mathbf{X}_0 = AB\mathbf{b},$$

$$\text{故 } (I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

反过来, 若 $(I_m - AB)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $AB\mathbf{b} = \mathbf{b}$, 故 $\mathbf{X}_0 = B\mathbf{b}$ 是方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的解.

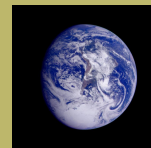
当方程组有解时, 因为 A 左可逆, 所以 $\text{rank}(A) = n$, 从而方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 有惟一解. 由 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, 有

$$(A^H A)^{-1} A^H A\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b},$$

即 $\mathbf{X} = (A^H A)^{-1} A^H \mathbf{b}$ 为 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的惟一解. ■

定理 4.4 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是右可逆的, 则线性方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 对任何 $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ 都有解, 且对 A 的任意一个右逆矩阵 A_R^{-1} , $\mathbf{X} = A_R^{-1} \mathbf{b}$ 是其解, 特别地, $\mathbf{X} = A^H (AA^H)^{-1} \mathbf{b}$ 是方程组 $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ 的解.

b 的一个解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

b 的一个解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 47

[Go Back](#)

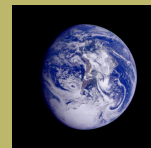
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 10 of 47

Go Back

Full Screen

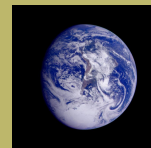
Close

Quit

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

1. 减号广义逆



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 10 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

1. 减号广义逆

定义 4.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

$$AGA = A,$$

则称 G 为 A 的一个 **减号广义逆** 或 **$\{1\}$ -逆**.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 10 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

1. 减号广义逆

定义 4.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

$$AGA = A,$$

则称 G 为 A 的一个 **减号广义逆** 或 **$\{1\}$ -逆**.

注 4.1 A 的全部减号广义逆的集合记为 $A\{1\}$, $A\{1\}$ 的



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

元素用 A_1^-, A_2^-, \dots 表示.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 11 of 47

Go Back

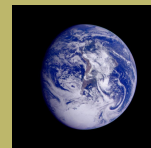
Full Screen

Close

Quit

元素用 A_1^-, A_2^-, \dots 表示.

设 $A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 11 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

元素用 A_1^-, A_2^-, \dots 表示.

设 $A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$.

定理 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 11 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

元素用 A_1^-, A_2^-, \dots 表示.

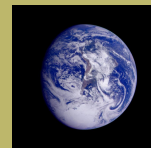
设 $A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$.

定理 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

则 $G \in A\{1\}$ 的充分必要条件是

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 11 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

元素用 A_1^-, A_2^-, \dots 表示.

设 $A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$.

定理 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

则 $G \in A\{1\}$ 的充分必要条件是

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{r \times (m-r)}$, $V \in \mathbb{C}^{(n-r) \times r}$, $W \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ 是任意的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 11 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

元素用 A_1^-, A_2^-, \dots 表示.

设 $A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$.

定理 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

则 $G \in A\{1\}$ 的充分必要条件是

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{r \times (m-r)}$, $V \in \mathbb{C}^{(n-r) \times r}$, $W \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (m-r)}$ 是任意的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 11 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设 G 是 A 的任意一个减号广义逆, 则 $AGA = A$. 令

$$G = Q \begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 12 of 47

Go Back

Full Screen

Close

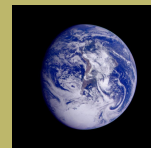
Quit

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设 G 是 A 的任意一个减号广义逆, 则 $AGA = A$. 令

$$G = Q \begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

代入 $AGA = A$ 中, 比较即得 $X = I_r$, 故

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 12 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设 G 是 A 的任意一个减号广义逆, 则 $AGA = A$. 令

$$G = Q \begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

代入 $AGA = A$ 中, 比较即得 $X = I_r$, 故

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P.$$



定理 4.6 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 A 的减号广义逆惟一的充分必要条件是 $m = n$, 且 A^{-1} 存在.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 12 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设 G 是 A 的任意一个减号广义逆, 则 $AGA = A$. 令

$$G = Q \begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

代入 $AGA = A$ 中, 比较即得 $X = I_r$, 故

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P.$$



定理 4.6 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则 A 的减号广义逆惟一的充分必要条件是 $m = n$, 且 A^{-1} 存在.

证明 充分性: 当 $m = n$, 且 A^{-1} 存在时, $A^{-1} \in A\{1\}$.
 $\forall G \in A\{1\}$, 因为 $AGA = A$, 用 A^{-1} 左右乘等式两边得 $G =$
 研究生公共基础课 第12页, 共47页 矩阵论



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 12 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A^{-1} , 故减号广义逆惟一.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

A^{-1} , 故减号广义逆惟一.

必要性: 设 $\text{rank}(A) = r$, 当 $r = 0$ 时, 此时 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$ 与假定不符, 所以 $r > 0$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 13 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A^{-1} , 故减号广义逆惟一.

必要性: 设 $\text{rank}(A) = r$, 当 $r = 0$ 时, 此时 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$ 与假定不符, 所以 $r > 0$.

当 $m \neq n$ 时, 由定理4.5知 $A\{1\}$ 不是单元素集.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 13 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A^{-1} , 故减号广义逆惟一.

必要性: 设 $\text{rank}(A) = r$, 当 $r = 0$ 时, 此时 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$ 与假定不符, 所以 $r > 0$.

当 $m \neq n$ 时, 由定理4.5知 $A\{1\}$ 不是单元素集.

若 A^{-1} 不存在, 则 $r < n$. 此时 $A\{1\}$ 也不是单元素集.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 13 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A^{-1} , 故减号广义逆惟一.

必要性: 设 $\text{rank}(A) = r$, 当 $r = 0$ 时, 此时 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$ 与假定不符, 所以 $r > 0$.

当 $m \neq n$ 时, 由定理4.5知 $A\{1\}$ 不是单元素集.

若 A^{-1} 不存在, 则 $r < n$. 此时 $A\{1\}$ 也不是单元素集.

综上 A^{-1} 存在. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 13 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

A^{-1} , 故减号广义逆惟一.

必要性: 设 $\text{rank}(A) = r$, 当 $r = 0$ 时, 此时 $A\{1\} = \mathbb{C}^{n \times m}$ 与假定不符, 所以 $r > 0$.

当 $m \neq n$ 时, 由定理4.5知 $A\{1\}$ 不是单元素集.

若 A^{-1} 不存在, 则 $r < n$. 此时 $A\{1\}$ 也不是单元素集.

综上 A^{-1} 存在. ■

定理 4.7 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 A^{-} 满足以下性质:

- ① $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(A^{-})$;
- ② AA^{-} 与 $A^{-}A$ 都是幂等矩阵, 且 $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^{-}) = \text{rank}(A^{-}A)$;
- ③ $R(AA^{-}) = R(A)$, $N(A^{-}A) = N(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 13 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.2. 广义逆矩阵



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



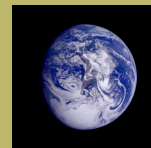
Page 14 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 47

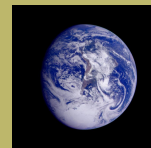
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^-A) \leq \text{rank}(A^-)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 14 of 47

Go Back

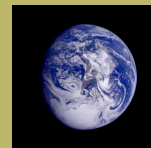
Full Screen

Close

Quit

证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^-A) \leq \text{rank}(A^-)$.

② 因为 $AA^-A = A$, 所以 $(AA^-)^2 = AA^-$, $(A^-A)^2 = A^-A$, 即 AA^- 与 A^-A 都是幂等矩阵.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 14 of 47

Go Back

Full Screen

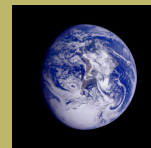
Close

Quit

证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^-A) \leq \text{rank}(A^-).$

② 因为 $AA^-A = A$, 所以 $(AA^-)^2 = AA^-$, $(A^-A)^2 = A^-A$, 即 AA^- 与 A^-A 都是幂等矩阵.

③ $\forall \alpha \in R(AA^-)$, 即存在 $\beta \in \mathbb{C}^m$, 使 $AA^-\beta = \alpha$.
由 $A(A^-\beta) = \alpha$ 得 $R(AA^-) \subseteq R(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 14 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

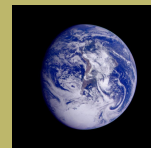
证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^-A) \leq \text{rank}(A^-)$.

② 因为 $AA^-A = A$, 所以 $(AA^-)^2 = AA^-$, $(A^-A)^2 = A^-A$, 即 AA^- 与 A^-A 都是幂等矩阵.

③ $\forall \alpha \in R(AA^-)$, 即存在 $\beta \in \mathbb{C}^m$, 使 $AA^-\beta = \alpha$.
由 $A(A^-\beta) = \alpha$ 得 $R(AA^-) \subseteq R(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A)$, 存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 使 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 于是

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = AA^-(A\mathbf{x}) \in R(AA^-),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 14 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^-A) \leq \text{rank}(A^-)$.

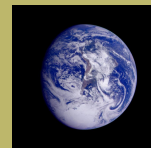
② 因为 $AA^-A = A$, 所以 $(AA^-)^2 = AA^-$, $(A^-A)^2 = A^-A$, 即 AA^- 与 A^-A 都是幂等矩阵.

③ $\forall \alpha \in R(AA^-)$, 即存在 $\beta \in \mathbb{C}^m$, 使 $AA^-\beta = \alpha$.
由 $A(A^-\beta) = \alpha$ 得 $R(AA^-) \subseteq R(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A)$, 存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 使 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 于是

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = AA^-(A\mathbf{x}) \in R(AA^-),$$

故 $R(A) \subseteq R(AA^-)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 14 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^-A) \leq \text{rank}(A^-)$.

② 因为 $AA^-A = A$, 所以 $(AA^-)^2 = AA^-$, $(A^-A)^2 = A^-A$, 即 AA^- 与 A^-A 都是幂等矩阵.

③ $\forall \alpha \in R(AA^-)$, 即存在 $\beta \in \mathbb{C}^m$, 使 $AA^-\beta = \alpha$.
由 $A(A^-\beta) = \alpha$ 得 $R(AA^-) \subseteq R(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A)$, 存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 使 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 于是

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = AA^-(A\mathbf{x}) \in R(AA^-),$$

故 $R(A) \subseteq R(AA^-)$.

$\forall \alpha \in N(A)$, $A\alpha = \mathbf{0}$, 故 $A^-A\alpha = A^-\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 所以 $N(A) \subseteq N(A^-A)$.

§4.2. 广义逆矩阵



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 15 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

又 $\forall \mathbf{x} \in N(A^-A)$, 有 $A^-A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = A(A^-A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

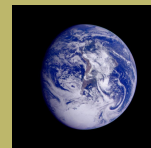
[Close](#)

[Quit](#)

又 $\forall \mathbf{x} \in N(A^-A)$, 有 $A^-A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = A(A^-A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $N(A^-A) \subseteq N(A)$. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

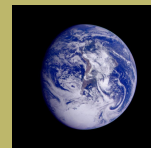
又 $\forall \mathbf{x} \in N(A^-A)$, 有 $A^-A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = A(A^-A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $N(A^-A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A^- \in A\{1\}$, 则当方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解时, 其通解可表示为

$$\mathbf{x} = A^-\mathbf{b} + (I_n - A^-A)\mathbf{z},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 15 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

又 $\forall \mathbf{x} \in N(A^-A)$, 有 $A^-A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = A(A^-A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $N(A^-A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A^- \in A\{1\}$, 则当方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解时, 其通解可表示为

$$\mathbf{x} = A^-\mathbf{b} + (I_n - A^-A)\mathbf{z},$$

这里 \mathbf{z} 是任意的 n 维列向量.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 15 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

又 $\forall \mathbf{x} \in N(A^-A)$, 有 $A^-A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = A(A^-A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $N(A^-A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A^- \in A\{1\}$, 则当方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解时, 其通解可表示为

$$\mathbf{x} = A^-\mathbf{b} + (I_n - A^-A)\mathbf{z},$$

这里 \mathbf{z} 是任意的 n 维列向量.

证明 先看齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$A = AA^-A,$$

对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, 有



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 15 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

又 $\forall \mathbf{x} \in N(A^-A)$, 有 $A^-A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\mathbf{x} = (AA^-A)\mathbf{x} = A(A^-A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故 $N(A^-A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A^- \in A\{1\}$, 则当方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解时, 其通解可表示为

$$\mathbf{x} = A^-\mathbf{b} + (I_n - A^-A)\mathbf{z},$$

这里 \mathbf{z} 是任意的 n 维列向量.

证明 先看齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由

$$A = AA^-A,$$

对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$A(I_n - A^-A)\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

研究生公共基础课

第15页, 共47页

矩阵论



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 15 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.2. 广义逆矩阵



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 16 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

即对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^-A)\mathbf{z}$ 一定是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 16 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

即对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^-A)\mathbf{z}$ 一定是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

要使 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解均可表示成这种形式, 只须证 $I_n - A^-A$ 的秩为 $n - r$, 其中 r 是 A 的秩. 由定理 4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 16 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

即对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^-A)\mathbf{z}$ 一定是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

要使 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解均可表示成这种形式, 只须证 $I_n - A^-A$ 的秩为 $n - r$, 其中 r 是 A 的秩. 由定理 4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

而

$$I_n - A^-A = I_n - Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} PA,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 16 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

即对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^-A)\mathbf{z}$ 一定是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

要使 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解均可表示成这种形式, 只须证 $I_n - A^-A$ 的秩为 $n - r$, 其中 r 是 A 的秩. 由定理 4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

$$I_n - A^-A = I_n - Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} PA,$$

而

故

$$\begin{aligned} \text{rank}(I_n - A^-A) &= \text{rank}(Q^{-1}(I_n - A^-A)Q) \\ &= \text{rank} \left(I_n - \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -V & I_{n-r} \end{pmatrix} \right) = n - r. \end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 16 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

即对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^-A)\mathbf{z}$ 一定是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

要使 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解均可表示成这种形式, 只须证 $I_n - A^-A$ 的秩为 $n - r$, 其中 r 是 A 的秩. 由定理 4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

$$\text{而} \quad I_n - A^-A = I_n - Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} PA,$$

故

$$\begin{aligned} \text{rank}(I_n - A^-A) &= \text{rank}(Q^{-1}(I_n - A^-A)Q) \\ &= \text{rank} \left(I_n - \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -V & I_{n-r} \end{pmatrix} \right) = n - r. \end{aligned}$$

对非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 若它有解, 则由减号广义
研究生公共基础课 第16页, 共47页 矩阵论



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 16 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

逆的定义知 $A^{-}\mathbf{b}$ 必为解, 所以通解为

$$\mathbf{x} = A^{-}\mathbf{b} + (I_n - A^{-}A)\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

逆的定义知 $A^{-}\mathbf{b}$ 必为解, 所以通解为

$$\mathbf{x} = A^{-}\mathbf{b} + (I_n - A^{-}A)\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 18 of 47

Go Back

Full Screen

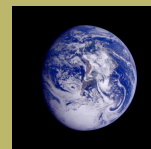
Close

Quit

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

定义 4.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

- ① $AGA = A$;
- ② $GAG = G$;
- ③ $(AG)^H = AG$;
- ④ $(GA)^H = GA$;



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 18 of 47

Go Back

Full Screen

Close

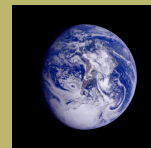
Quit

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

定义 4.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

- ① $AGA = A$;
- ② $GAG = G$;
- ③ $(AG)^H = AG$;
- ④ $(GA)^H = GA$;

则称 G 为 A 的 **Moore-Penrose** 广义逆或加号广义逆, 简称为 A 的 M-P 逆, 记为 A^+ .



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 18 of 47

Go Back

Full Screen

Close

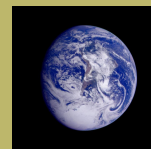
Quit

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

定义 4.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若存在矩阵 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

- ① $AGA = A$;
- ② $GAG = G$;
- ③ $(AG)^H = AG$;
- ④ $(GA)^H = GA$;

则称 G 为 A 的 **Moore-Penrose** 广义逆或 **加号广义逆**, 简称为 A 的 **M-P逆**, 记为 A^+ .



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 18 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例 4.2 由定义直接验算,



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 19 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例 4.2 由定义直接验算,

① 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 是其M-P逆.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



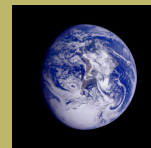
Page 19 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 19 of 47

Go Back

Full Screen

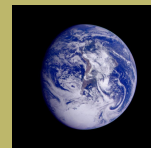
Close

Quit

例 4.2 由定义直接验算,

① 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 是其M-P逆.

② 若 $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2})$ 是其M-P逆.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 19 of 47

Go Back

Full Screen

Close

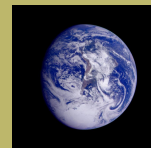
Quit

例 4.2 由定义直接验算,

① 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 是其M-P逆.

② 若 $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$ 是其M-P逆.

③ 若 $C = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, D 为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 是其M-P逆.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 19 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例 4.2 由定义直接验算,

① 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 是其M-P逆.

② 若 $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$ 是其M-P逆.

③ 若 $C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, D 为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是其M-P逆.

定理 4.9 若矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 存在M-P逆, 则 A 的M-P逆是惟一的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 20 of 47

Go Back

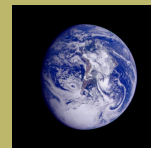
Full Screen

Close

Quit

定理 4.9 若矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 存在M-P逆, 则 A 的M-P逆是惟一的.

证明 设 G_1, G_2 都是 A 的M-P逆, 则 G_1 与 G_2 均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 20 of 47

Go Back

Full Screen

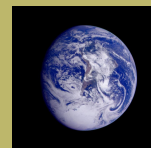
Close

Quit

定理 4.9 若矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 存在M-P逆, 则 A 的M-P逆是惟一的.

证明 设 G_1, G_2 都是 A 的M-P逆, 则 G_1 与 G_2 均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

$$\begin{aligned} G_1 &= (G_1 A) G_1 = (G_1 A)^H G_1 = A^H G_1^H G_1 \\ &= (A^H G_2^H A^H) G_1^H G_1 = (G_2 A)^H (G_1 A)^H G_1 \\ &= G_2 A G_1 A G_1 = G_2 A G_1, \end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 20 of 47

Go Back

Full Screen

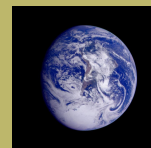
Close

Quit

定理 4.9 若矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 存在M-P逆, 则 A 的M-P逆是惟一的.

证明 设 G_1, G_2 都是 A 的M-P逆, 则 G_1 与 G_2 均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

$$\begin{aligned}
 G_1 &= (G_1 A) G_1 = (G_1 A)^H G_1 = A^H G_1^H G_1 \\
 &= (A^H G_2^H A^H) G_1^H G_1 = (G_2 A)^H (G_1 A)^H G_1 \\
 &= G_2 A G_1 A G_1 = G_2 A G_1, \\
 G_2 &= G_2 (A G) = G_2 (A G_2)^H = G_2 G_2^H A^H \\
 &= G_2 G_2^H (A^H G_1^H A^H) = G_2 (A G_2)^H (A G_1)^H \\
 &= G_2 A G_2 A G_1 = G_2 A G_1,
 \end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 20 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.9 若矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 存在M-P逆, 则 A 的M-P逆是惟一的.

证明 设 G_1, G_2 都是 A 的M-P逆, 则 G_1 与 G_2 均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

$$\begin{aligned}
 G_1 &= (G_1 A) G_1 = (G_1 A)^H G_1 = A^H G_1^H G_1 \\
 &= (A^H G_2^H A^H) G_1^H G_1 = (G_2 A)^H (G_1 A)^H G_1 \\
 &= G_2 A G_1 A G_1 = G_2 A G_1, \\
 G_2 &= G_2 (A G) = G_2 (A G_2)^H = G_2 G_2^H A^H \\
 &= G_2 G_2^H (A^H G_1^H A^H) = G_2 (A G_2)^H (A G_1)^H \\
 &= G_2 A G_2 A G_1 = G_2 A G_1,
 \end{aligned}$$

故

$$G_1 = G_2.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 20 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.2. 广义逆矩阵



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



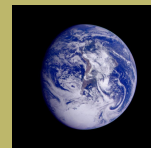
Page 21 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 21 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

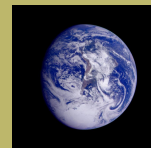
[Close](#)

[Quit](#)

定理 4.10 任意矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 都存在M-P广义逆 A^+ .

设 $\text{rank}(A) = r$, A 的一个满秩分解为

$$A = BC, \quad B \in \mathbb{C}^{m \times r}, \quad C \in \mathbb{C}^{r \times n}, \quad \text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 21 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.10 任意矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 都存在M-P广义逆 A^+ .
 设 $\text{rank}(A) = r$, A 的一个满秩分解为

$$A = BC, \quad B \in \mathbb{C}^{m \times r}, \quad C \in \mathbb{C}^{r \times n}, \quad \text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r,$$

则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 21 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.10 任意矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 都存在M-P广义逆 A^+ .
 设 $\text{rank}(A) = r$, A 的一个满秩分解为

$$A = BC, \quad B \in \mathbb{C}^{m \times r}, \quad C \in \mathbb{C}^{r \times n}, \quad \text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r,$$

则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H.$$

证明 因为 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r$, 由定理4.1, B^HB 是左可逆的, 又由4.2知, CC^H 是右可逆的. 令 $G = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$, 直接验证得, G 满足M-P广义逆定义中的四个条件, 故 G 是 A 的M-P广义逆. 因为 A 的M-P广义逆惟一, 故

$$A^+ = G = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 22 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



例 4.3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的M-P逆.



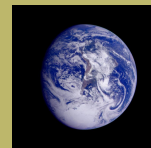
左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 22 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 22 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例 4.3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的M-P逆.

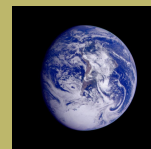
解 首先求A的满秩分解:

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



左逆与右逆

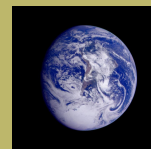
广义逆矩阵

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 23 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

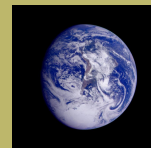
[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 23 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 4.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, A 的奇异值分解为

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 24 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, A 的奇异值分解为

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

则

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^H,$$

其中 Δ 为对角线由 A 的奇异值所构成的对角矩阵.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 24 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, A 的奇异值分解为

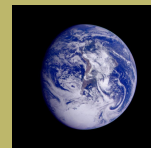
$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

则

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^H,$$

其中 Δ 为对角线由 A 的奇异值所构成的对角矩阵.

例 4.4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的M-P逆.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 24 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, A 的奇异值分解为

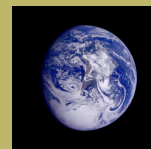
$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

则

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^H,$$

其中 Δ 为对角线由 A 的奇异值所构成的对角矩阵.

例 4.4 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的M-P逆.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 24 of 47

Go Back

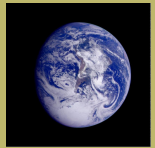
Full Screen

Close

Quit

解 A 的奇异值分解是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



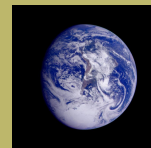
Page 25 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 25 of 47

Go Back

Full Screen

Close

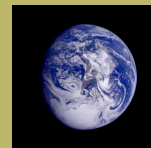
Quit

解 A 的奇异值分解是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 25 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

解 A 的奇异值分解是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



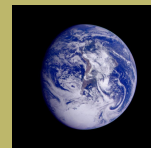
Page 26 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 26 of 47

Go Back

Full Screen

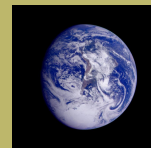
Close

Quit

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

$(AB)^+ = B^+A^+$ 不成立. 例如: 取

$$A = (1 \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 26 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

$(AB)^+ = B^+A^+$ 不成立. 例如: 取

$$A = (1 \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$A^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^+ = (1 \ 0),$$

而

$$(AB)^+ = (1)^+ = (1), \quad B^+A^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 26 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

$(AB)^+ = B^+A^+$ 不成立. 例如: 取

$$A = (1 \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$A^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^+ = (1 \ 0),$$

而

$$(AB)^+ = (1)^+ = (1), \quad B^+A^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 27 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.12 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, 则 A^+ 满足以下性质:

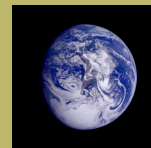
① $(A^+)^+ = A$;

② $(A^+)^H = (A^H)^+$;

③ $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$, 其中 $\lambda^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0, \\ 0, \lambda = 0; \end{cases}$

④ 若 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是列满秩的, 则 $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,
若 A 是行满秩的, 则 $A^+ = A^H (A A^H)^{-1}$;

⑤ 若 A 有满秩分解 $A = BC$, 则 $A^+ = C^+ B^+$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 27 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.12 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, 则 A^+ 满足以下性质:

① $(A^+)^+ = A$;

② $(A^+)^H = (A^H)^+$;

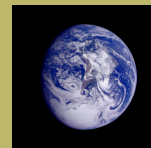
③ $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$, 其中 $\lambda^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0, \\ 0, \lambda = 0; \end{cases}$

④ 若 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是列满秩的, 则 $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,
若 A 是行满秩的, 则 $A^+ = A^H (A A^H)^{-1}$;

⑤ 若 A 有满秩分解 $A = BC$, 则 $A^+ = C^+ B^+$.

证明 ④ 若 A 是列满秩的, 则 A 的满秩分解为 $A = AI_n$, 即取 $B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 28 of 47

Go Back

Full Screen

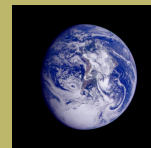
Close

Quit

证明 ④ 若 A 是列满秩的, 则 A 的满秩分解为 $A = AI_n$, 即取 $B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

若 A 是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 28 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ④ 若 A 是列满秩的, 则 A 的满秩分解为 $A = AI_n$, 即取 $B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

若 A 是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

⑤ 若 A 有满秩分解 $A = BC$, 则 B 列满秩, C 行满秩, 由④知

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H, \quad C^+ = C^H (CC^H)^{-1},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 28 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ④ 若 A 是列满秩的, 则 A 的满秩分解为 $A = AI_n$, 即取 $B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

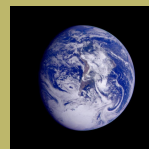
若 A 是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

⑤ 若 A 有满秩分解 $A = BC$, 则 B 列满秩, C 行满秩, 由④知

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H, \quad C^+ = C^H (CC^H)^{-1},$$

故

$$A^+ = C^+ B^+.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 28 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ④ 若 A 是列满秩的, 则 A 的满秩分解为 $A = AI_n$, 即取 $B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

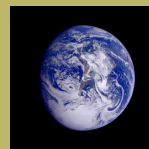
若 A 是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

⑤ 若 A 有满秩分解 $A = BC$, 则 B 列满秩, C 行满秩, 由④知

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H, \quad C^+ = C^H (CC^H)^{-1},$$

故

$$A^+ = C^+ B^+.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 28 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 29 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 证明

- ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+)$;
- ② $\text{rank}(A^+A) = \text{rank}(AA^+) = \text{rank}(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 29 of 47

Go Back

Full Screen

Close

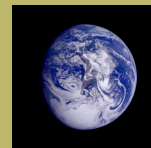
Quit

例 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 证明

- ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+)$;
- ② $\text{rank}(A^+A) = \text{rank}(AA^+) = \text{rank}(A)$.

证明 ① 由 $A = AA^+A$ 得, $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^+A) \leq \text{rank}(A^+)$; 由 $A^+ = A^+AA^+$ 得, $\text{rank}(A^+) \leq \text{rank}(A^+AA^+) \leq \text{rank}(A)$, 故

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+).$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 29 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例 4.5 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 证明

- ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+)$;
- ② $\text{rank}(A^+A) = \text{rank}(AA^+) = \text{rank}(A)$.

证明 ① 由 $A = AA^+A$ 得, $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^+A) \leq \text{rank}(A^+)$; 由 $A^+ = A^+AA^+$ 得, $\text{rank}(A^+) \leq \text{rank}(A^+AA^+) \leq \text{rank}(A)$, 故

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+).$$

② 一方面, $\text{rank}(A^+A) \leq \text{rank}(A)$, 另一方面

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^+A) \leq \text{rank}(A^+A),$$

故

$$\text{rank}(A^+A) = \text{rank}(A).$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 30 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

故 $\text{rank}(A^+A) = \text{rank}(A)$.

同理 $\text{rank}(AA^+) = \text{rank}(A)$. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 30 of 47

[Go Back](#)

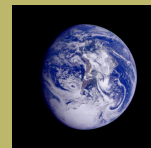
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

故 $\text{rank}(A^+A) = \text{rank}(A)$.

同理 $\text{rank}(AA^+) = \text{rank}(A)$. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

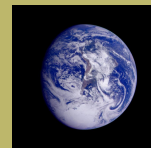
[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 30 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 31 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

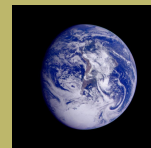
[Close](#)

[Quit](#)

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

1. 投影变换与投影矩阵



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 31 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

1. 投影变换与投影矩阵

定义 4.4 设 $\mathbb{C}^n = L \oplus M$, $x = y + z$, $y \in L$, $z \in M$. 如果线性变换 $\sigma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 满足 $\sigma(x) = y$, 则称 σ 是从 \mathbb{C}^n 沿子空间 M 到子空间 L 上的**投影变换**, 投影变换在空间 \mathbb{C}^n 的一组标准正交基下的矩阵称为**投影矩阵**.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 31 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

1. 投影变换与投影矩阵

定义 4.4 设 $\mathbb{C}^n = L \oplus M$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$. 如果线性变换 $\sigma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 满足 $\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, 则称 σ 是从 \mathbb{C}^n 沿子空间 M 到子空间 L 上的**投影变换**, 投影变换在空间 \mathbb{C}^n 的一组标准正交基下的矩阵称为**投影矩阵**.

投影变换 σ 把 \mathbb{C}^n 映射成子空间 L , 故空间 L 称为**投影子空间**, 它就是 σ 的像空间 $R(\sigma)$, 子空间 M 是投影变换的核空间. 研究生公共基础课 第31页, 共47页 矩阵论



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

Page 31 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

间 $N(\sigma)$.

定理 4.13 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 是幂等变换.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 32 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

间 $N(\sigma)$.

定理 4.13 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 是幂等变换.

证明 必要性: 设 σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换, 则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in M$, 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 32 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

间 $N(\sigma)$.

定理 4.13 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 是幂等变换.

证明 必要性: 设 σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换, 则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in M$, 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

于是
$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sigma[\sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x}),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 32 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

间 $N(\sigma)$.

定理 4.13 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 是幂等变换.

证明 必要性: 设 σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换, 则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in M$, 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

于是 $\sigma^2(\mathbf{x}) = \sigma[\sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x}),$

故 $\sigma^2 = \sigma.$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 32 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

间 $N(\sigma)$.

定理 4.13 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 是幂等变换.

证明 必要性: 设 σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换, 则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\mathbf{y} \in L, \mathbf{z} \in M$, 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y},$$

于是 $\sigma^2(\mathbf{x}) = \sigma[\sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x}),$

故 $\sigma^2 = \sigma.$

充分性: 首先证明

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 32 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.3. 投影变换



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 33 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x}) + [\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})]$. 注意到 $\sigma^2 = \sigma$, 有 $\sigma[\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是 $\sigma(\mathbf{x}) \in R(\sigma)$, $\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 33 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

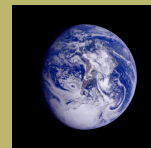
[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x}) + [\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})]$. 注意到 $\sigma^2 = \sigma$, 有 $\sigma[\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是 $\sigma(\mathbf{x}) \in R(\sigma)$, $\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall \mathbf{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为 $\mathbf{x} \in R(\sigma)$, 故存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{y})$. 又由于 $\mathbf{x} \in N(\sigma)$, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是

$$\mathbf{0} = \sigma(\mathbf{x}) = \sigma^2(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 33 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x}) + [\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})]$. 注意到 $\sigma^2 = \sigma$, 有 $\sigma[\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是 $\sigma(\mathbf{x}) \in R(\sigma)$, $\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall \mathbf{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为 $\mathbf{x} \in R(\sigma)$, 故存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{y})$. 又由于 $\mathbf{x} \in N(\sigma)$, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是

$$\mathbf{0} = \sigma(\mathbf{x}) = \sigma^2(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x},$$

故 $R(\sigma) \cap N(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$, 于是

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma).$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 33 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x}) + [\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})]$. 注意到 $\sigma^2 = \sigma$, 有 $\sigma[\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是 $\sigma(\mathbf{x}) \in R(\sigma)$, $\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall \mathbf{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为 $\mathbf{x} \in R(\sigma)$, 故存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{y})$. 又由于 $\mathbf{x} \in N(\sigma)$, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是

$$\mathbf{0} = \sigma(\mathbf{x}) = \sigma^2(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x},$$

故 $R(\sigma) \cap N(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$, 于是

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma).$$

此时, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\mathbf{y} \in R(\sigma)$, $\mathbf{z} \in N(\sigma)$, 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, 并且可以证明 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 33 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x}) + [\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})]$. 注意到 $\sigma^2 = \sigma$, 有 $\sigma[\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})] = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是 $\sigma(\mathbf{x}) \in R(\sigma)$, $\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall \mathbf{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为 $\mathbf{x} \in R(\sigma)$, 故存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{y})$. 又由于 $\mathbf{x} \in N(\sigma)$, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 于是

$$\mathbf{0} = \sigma(\mathbf{x}) = \sigma^2(\mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x},$$

故 $R(\sigma) \cap N(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$, 于是

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma).$$

此时, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\mathbf{y} \in R(\sigma)$, $\mathbf{z} \in N(\sigma)$, 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, 并且可以证明 $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

这是因为, 由 $\mathbf{y} \in R(\sigma)$, 存在 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{C}^n$, 使 $\mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x}_1)$, 又



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 33 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由 $\sigma(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ 得, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \sigma(\mathbf{y}) = \sigma^2(\mathbf{x}_1) = \sigma(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 34 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由 $\sigma(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ 得, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \sigma(\mathbf{y}) = \sigma^2(\mathbf{x}_1) = \sigma(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$.

所以, σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 34 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由 $\sigma(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ 得, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \sigma(\mathbf{y}) = \sigma^2(\mathbf{x}_1) = \sigma(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$.

所以, σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换. ■

推论 4.1 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵是幂等矩阵.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 34 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由 $\sigma(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ 得, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \sigma(\mathbf{y}) = \sigma^2(\mathbf{x}_1) = \sigma(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$.

所以, σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换. ■

推论 4.1 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵是幂等矩阵.

投影矩阵 A 按如下方法求得.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 34 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

由 $\sigma(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ 得, 故 $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \sigma(\mathbf{y}) = \sigma^2(\mathbf{x}_1) = \sigma(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$.

所以, σ 是 \mathbb{C}^n 空间沿 M 到 L 上的投影变换. ■

推论 4.1 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵是幂等矩阵.

投影矩阵 A 按如下方法求得.

设 $\dim L = r$, 则 $\dim M = n - r$. 在子空间 L 和 M 中分别取定基

研究生公共基础课 $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}, \{z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\},$ 第34页, 共47页

矩阵论



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 34 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是 $\{y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\}$ 便构成了 \mathbb{C}^n 的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

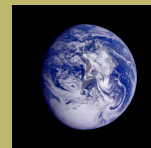
于是 $\{y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\}$ 便构成了 \mathbb{C}^n 的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \dots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \dots, z_{n-r}),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是 $\{y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\}$ 便构成了 \mathbb{C}^n 的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \dots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \dots, z_{n-r}),$$

$$\text{于是} \quad A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是 $\{y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\}$ 便构成了 \mathbb{C}^n 的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \dots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \dots, z_{n-r}),$$

$$\text{于是} \quad A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$

由于 $(B \mid C)$ 是 n 阶可逆方阵, 因此投影矩阵 A 为



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 35 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是 $\{y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\}$ 便构成了 \mathbb{C}^n 的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \dots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \dots, z_{n-r}),$$

$$\text{于是} \quad A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$

由于 $(B \mid C)$ 是 n 阶可逆方阵, 因此投影矩阵 A 为

$$A = (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 35 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是 $\{y_1, y_2, \dots, y_r, z_1, z_2, \dots, z_{n-r}\}$ 便构成了 \mathbb{C}^n 的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$A\mathbf{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n - r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \dots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \dots, z_{n-r}),$$

$$\text{于是} \quad A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$

由于 $(B \mid C)$ 是 n 阶可逆方阵, 因此投影矩阵 A 为

$$A = (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}.$$

例 4.6 设 L 是由向量 $(1 \ 0)^T$ 所生成的空间, M 是向量 $(1 \ -1)^T$ 所生成的子空间, 则 \mathbb{R}^2 沿子空间 M 到子空间 L 上



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 35 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的投影矩阵为



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 36 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的投影矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 36 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的投影矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 36 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的投影矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

投影变换的一个子类-正交投影变换, 具有更好的性质.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 36 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的投影矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

投影变换的一个子类-正交投影变换, 具有更好的性质.

定义 4.5 设 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, $\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma)$, 如果 $R(\sigma)$ 的正交补子空间 $R(\sigma)^\perp = N(\sigma)$, 则称 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的**正交投影变换**. 正交投影变在 \mathbb{C}^n 空间的一组基下的矩阵称为**正交投影矩阵**.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 36 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的投影矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

投影变换的一个子类-正交投影变换, 具有更好的性质.

定义 4.5 设 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, $\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma)$, 如果 $R(\sigma)$ 的正交补子空间 $R(\sigma)^\perp = N(\sigma)$, 则称 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的**正交投影变换**. 正交投影变在 \mathbb{C}^n 空间的一组基下的矩阵称为**正交投影矩阵**.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 36 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 4.14 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是正交投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵 A 为幂等的Hermite矩阵, 即 $A^2 = A$, $A^H = A$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 37 of 47

[Go Back](#)

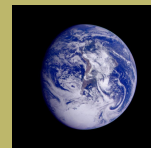
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 4.14 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是正交投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵 A 为幂等的Hermite矩阵, 即 $A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设 A 是线性变换 σ 在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证 $A^H = A$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 37 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 4.14 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是正交投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵 A 为幂等的Hermite矩阵, 即 $A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设 A 是线性变换 σ 在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证 $A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \quad R(\sigma)^\perp = N(\sigma),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 37 of 47](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 4.14 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是正交投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵 A 为幂等的Hermite矩阵, 即 $A^2 = A, A^H = A$.

证明 必要性: 设 A 是线性变换 σ 在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证 $A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \quad R(\sigma)^\perp = N(\sigma),$$

得

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A), \quad R(A)^\perp = N(A),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 37 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.14 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是正交投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵 A 为幂等的Hermite矩阵, 即 $A^2 = A, A^H = A$.

证明 必要性: 设 A 是线性变换 σ 在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证 $A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \quad R(\sigma)^\perp = N(\sigma),$$

得

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A), \quad R(A)^\perp = N(A),$$

又令 $\mathbf{x} \in R(A), \mathbf{y} \in N(A^H)$. 设 $A\mathbf{z} = \mathbf{x}$, 由 $A^2 = A$ 有 $A\mathbf{x} = A(A\mathbf{z}) = A^2\mathbf{z} = A\mathbf{z} = \mathbf{x}$, 于是



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 37 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 37 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 4.14 \mathbb{C}^n 空间上的线性变换 σ 是正交投影变换的充分必要条件是 σ 关于某组基下的矩阵 A 为幂等的Hermite矩阵, 即 $A^2 = A, A^H = A$.

证明 必要性: 设 A 是线性变换 σ 在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证 $A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \quad R(\sigma)^\perp = N(\sigma),$$

得

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A), \quad R(A)^\perp = N(A),$$

又令 $\mathbf{x} \in R(A), \mathbf{y} \in N(A^H)$. 设 $A\mathbf{z} = \mathbf{x}$, 由 $A^2 = A$ 有 $A\mathbf{x} = A(A\mathbf{z}) = A^2\mathbf{z} = A\mathbf{z} = \mathbf{x}$, 于是

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^H \mathbf{y} = \mathbf{x}^H A^H \mathbf{y}$$

$$= (\mathbf{x}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 38 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

故

$$N(A^H) \subseteq R(A)^\perp.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 38 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

故

$$N(A^H) \subseteq R(A)^\perp.$$

另一方面, 对任意 $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 有

$$(A^H \mathbf{y}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, AA^H \mathbf{y}) = 0,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 38 of 47](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

故

$$N(A^H) \subseteq R(A)^\perp.$$

另一方面, 对任意 $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 有

$$(A^H \mathbf{y}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, AA^H \mathbf{y}) = 0,$$

从而 $A^H \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{y} \in N(A^H)$, 故 $R(A)^\perp = N(A^H)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 38 of 47](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

故

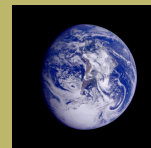
$$N(A^H) \subseteq R(A)^\perp.$$

另一方面, 对任意 $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 有

$$(A^H \mathbf{y}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, AA^H \mathbf{y}) = 0,$$

从而 $A^H \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{y} \in N(A^H)$, 故 $R(A)^\perp = N(A^H)$. 于是

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H), \quad R(A)^\perp = N(A^H),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 38 of 47](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

故

$$N(A^H) \subseteq R(A)^\perp.$$

另一方面, 对任意 $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 有

$$(A^H \mathbf{y}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, AA^H \mathbf{y}) = 0,$$

从而 $A^H \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{y} \in N(A^H)$, 故 $R(A)^\perp = N(A^H)$. 于是

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H), \quad R(A)^\perp = N(A^H),$$

由正交补的惟一性得 $N(A) = N(A^H)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 38 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

故 $N(A^H) \subseteq R(A)^\perp$.

另一方面, 对任意 $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 有

$$(A^H \mathbf{y}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, AA^H \mathbf{y}) = 0,$$

从而 $A^H \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{y} \in N(A^H)$, 故 $R(A)^\perp = N(A^H)$. 于是

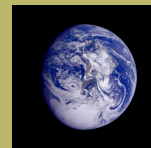
$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H), \quad R(A)^\perp = N(A^H),$$

由正交补的惟一性得 $N(A) = N(A^H)$.

同理, 由 $(A^H)^2 = A^H$, 得

$$\mathbb{C}^n = R(A^H) \oplus N(A), \quad R(A^H)^\perp = N(A),$$

故 $R(A) = R(A^H)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 38 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

故 $N(A^H) \subseteq R(A)^\perp$.

另一方面, 对任意 $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 有

$$(A^H \mathbf{y}, A^H \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, AA^H \mathbf{y}) = 0,$$

从而 $A^H \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{y} \in N(A^H)$, 故 $R(A)^\perp = N(A^H)$. 于是

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H), \quad R(A)^\perp = N(A^H),$$

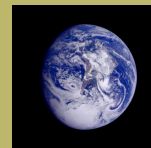
由正交补的惟一性得 $N(A) = N(A^H)$.

同理, 由 $(A^H)^2 = A^H$, 得

$$\mathbb{C}^n = R(A^H) \oplus N(A), \quad R(A^H)^\perp = N(A),$$

故 $R(A) = R(A^H)$.

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, 其中 $\mathbf{y} \in R(A) = R(A^H)$,



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 38 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

$$A^H\mathbf{x} = A^H\mathbf{y} + A^H\mathbf{z} = A^H\mathbf{y} = \mathbf{y},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$Ax = Ay + Az = Ay = y,$$

$$A^H x = A^H y + A^H z = A^H y = y,$$



所以

$$A = A^H.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

$$A^H\mathbf{x} = A^H\mathbf{y} + A^H\mathbf{z} = A^H\mathbf{y} = \mathbf{y},$$



所以

$$A = A^H.$$

充分性: 因 $A^2 = A$, 所以 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

$$A^H\mathbf{x} = A^H\mathbf{y} + A^H\mathbf{z} = A^H\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

所以

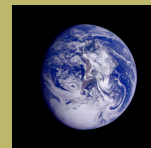
$$A = A^H.$$

充分性: 因 $A^2 = A$, 所以 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall \mathbf{x} \in R(A)^\perp$, 由

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A^H A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

$$A^H\mathbf{x} = A^H\mathbf{y} + A^H\mathbf{z} = A^H\mathbf{y} = \mathbf{y},$$



所以

$$A = A^H.$$

充分性: 因 $A^2 = A$, 所以 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall \mathbf{x} \in R(A)^\perp$, 由

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A^H A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$$

因此, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{x} \in N(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

$$A^H\mathbf{x} = A^H\mathbf{y} + A^H\mathbf{z} = A^H\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

所以

$$A = A^H.$$

充分性: 因 $A^2 = A$, 所以 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall \mathbf{x} \in R(A)^\perp$, 由

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A^H A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$$

因此, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{x} \in N(A)$.

又 $\mathbf{x} \in R(A)$, $\mathbf{y} \in N(A)$, 有

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^H\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{y} + A\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

$$A^H\mathbf{x} = A^H\mathbf{y} + A^H\mathbf{z} = A^H\mathbf{y} = \mathbf{y},$$

所以

$$A = A^H.$$

充分性: 因 $A^2 = A$, 所以 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall \mathbf{x} \in R(A)^\perp$, 由

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A^H A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$$

因此, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{x} \in N(A)$.

又 $\mathbf{x} \in R(A)$, $\mathbf{y} \in N(A)$, 有

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^H\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0,$$

因此, $\mathbf{y} \in R(A)^\perp$, 即 $N(A) \subseteq R(A)^\perp$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$Ax = Ay + Az = Ay = y,$$

$$A^H x = A^H y + A^H z = A^H y = y,$$

所以

$$A = A^H.$$

充分性: 因 $A^2 = A$, 所以 σ 是 \mathbb{C}^n 空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall x \in R(A)^\perp$, 由

$$(Ax, Ax) = (x, A^H Ax) = (x, Ax) = 0$$

因此, $Ax = 0$, 即 $x \in N(A)$.

又 $x \in R(A)$, $y \in N(A)$, 有

$$(x, y) = (Ax, y) = (x, A^H y) = (x, 0) = 0,$$

因此, $y \in R(A)^\perp$, 即 $N(A) \subseteq R(A)^\perp$. 综合起来, 就是 $R(A)^\perp =$

研究生公共基础课

第39页, 共47页

矩阵论



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 39 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$N(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 40 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$N(A)$.



作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵 AA^+ 和 A^+A .



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 40 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

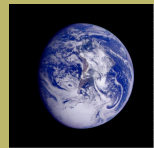
$N(A)$.



作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵 AA^+ 和 A^+A .

定理 4.15 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

- ① $(A^+A)^2 = A^+A, (A^+A)^H = A^+A,$
- ② $\mathbb{C}^n = R(A^+) \oplus N(A), R(A^+)^\perp = N(A);$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 40 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

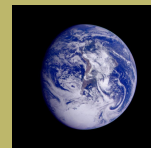
$N(A)$.



作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵 AA^+ 和 A^+A .

定理 4.15 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

- ① $(A^+A)^2 = A^+A, (A^+A)^H = A^+A,$
- ② $\mathbb{C}^n = R(A^+) \oplus N(A), R(A^+)^\perp = N(A);$
- ③ $(AA^+)^2 = AA^+, (AA^+)^H = AA^+,$
- ④ $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), R(A)^\perp = N(A^+).$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 40 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$N(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 40 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵 AA^+ 和 A^+A .

定理 4.15 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

- ① $(A^+A)^2 = A^+A, (A^+A)^H = A^+A,$
- ② $\mathbb{C}^n = R(A^+) \oplus N(A), R(A^+)^\perp = N(A);$
- ③ $(AA^+)^2 = AA^+, (AA^+)^H = AA^+,$
- ④ $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), R(A)^\perp = N(A^+).$

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A, (A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 41 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 41 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明 $R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 41 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明 $R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+A)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+(A\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+)$, 即 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$;



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 41 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 41 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明 $R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+A)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+(A\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+)$, 即

$$R(A^+A) \subseteq R(A^+);$$

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+\mathbf{x} = A^+A(A^+\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+A)$, 即 $R(A^+) \subseteq R(A^+A)$, 所以 $R(A^+A) = R(A^+)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 41 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明 $R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+A)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+(A\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+)$, 即 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$;

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+\mathbf{x} = A^+A(A^+\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+A)$, 即 $R(A^+) \subseteq R(A^+A)$, 所以 $R(A^+A) = R(A^+)$.

$\forall \mathbf{x} \in N(A^+A)$, $A^+A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由 $A\mathbf{x} = A(A^+A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A^+A) \subseteq N(A)$;

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明 $R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+A)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+(A\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+)$, 即 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$;

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+\mathbf{x} = A^+A(A^+\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+A)$, 即 $R(A^+) \subseteq R(A^+A)$, 所以 $R(A^+A) = R(A^+)$.

$\forall \mathbf{x} \in N(A^+A)$, $A^+A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由 $A\mathbf{x} = A(A^+A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A^+A) \subseteq N(A)$;

$\forall \mathbf{x} \in N(A)$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由 $A^+(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A) \subseteq N(A^+A)$, 所以 $N(A^+A) = N(A)$.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 41 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 41 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$ 就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A 是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明 $R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+A)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+(A\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+)$, 即 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$;

$\forall \mathbf{y} \in R(A^+)$, 存在 \mathbf{x} 使 $\mathbf{y} = A^+\mathbf{x} = A^+A(A^+\mathbf{x})$, 故 $\mathbf{y} \in R(A^+A)$, 即 $R(A^+) \subseteq R(A^+A)$, 所以 $R(A^+A) = R(A^+)$.

$\forall \mathbf{x} \in N(A^+A)$, $A^+A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由 $A\mathbf{x} = A(A^+A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A^+A) \subseteq N(A)$;

$\forall \mathbf{x} \in N(A)$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 由 $A^+(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A) \subseteq N(A^+A)$, 所以 $N(A^+A) = N(A)$.

同理可证③, ④. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 42 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

同理可证③, ④. ■

定理 4.16 设 W 是 \mathbb{C}^n 的子空间, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x}_0 \notin W$. 如果 σ 是 \mathbb{C}^n 空间向 W 的正交投影变换, 则 $\sigma(\mathbf{x}_0)$ 是 W 中离 \mathbf{x}_0 最近的向量, 即在欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$ 意义下, $\forall \mathbf{y} \in W$, 都有

$$\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2.$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 42 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

同理可证③, ④. ■

定理 4.16 设 W 是 \mathbb{C}^n 的子空间, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x}_0 \notin W$. 如果 σ 是 \mathbb{C}^n 空间向 W 的正交投影变换, 则 $\sigma(\mathbf{x}_0)$ 是 W 中离 \mathbf{x}_0 最近的向量, 即在欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$ 意义下, $\forall \mathbf{y} \in W$, 都有

$$\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2.$$

证明 因为 σ 是 \mathbb{C}^n 空间向 W 的正交投影变换, 所以

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp, \quad W = R(\sigma), \quad W^\perp = N(\sigma),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 42 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

同理可证③, ④. ■

定理 4.16 设 W 是 \mathbb{C}^n 的子空间, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x}_0 \notin W$. 如果 σ 是 \mathbb{C}^n 空间向 W 的正交投影变换, 则 $\sigma(\mathbf{x}_0)$ 是 W 中离 \mathbf{x}_0 最近的向量, 即在欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$ 意义下, $\forall \mathbf{y} \in W$, 都有

$$\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2.$$

证明 因为 σ 是 \mathbb{C}^n 空间向 W 的正交投影变换, 所以

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp, \quad W = R(\sigma), \quad W^\perp = N(\sigma),$$

$\forall \mathbf{y} \in W$, 由于 $[\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)] \in W$, $[\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0] \in W^\perp$, 因此



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 42 of 47

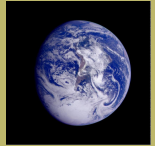
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 &\leq \|\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)\|_2^2 + \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 \\ &= \|[\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)] + [\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0]\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2^2,\end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}
 \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 &\leq \|\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)\|_2^2 + \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 \\
 &= \|[\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)] + [\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0]\|_2^2 \\
 &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2^2,
 \end{aligned}$$

故 $\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2, \forall \mathbf{y} \in W.$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}
 \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 &\leq \|\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)\|_2^2 + \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 \\
 &= \|[\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)] + [\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0]\|_2^2 \\
 &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2^2,
 \end{aligned}$$

故 $\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2, \forall \mathbf{y} \in W.$

正交投影矩阵 A 可按如下方法求得:



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

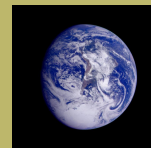
$$\begin{aligned}
\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 &\leq \|\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)\|_2^2 + \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 \\
&= \|[\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)] + [\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0]\|_2^2 \\
&= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2^2,
\end{aligned}$$

故 $\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2, \forall \mathbf{y} \in W.$

正交投影矩阵 A 可按如下方法求得:

假定 $\dim L = r$, 则 $\dim L^\perp = n - r$. 在子空间 L 和 L^\perp 中分别取定基

$$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r\}, \quad \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n-r}\},$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}
\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 &\leq \|\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)\|_2^2 + \|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2^2 \\
&= \|[\mathbf{y} - \sigma(\mathbf{x}_0)] + [\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0]\|_2^2 \\
&= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2^2,
\end{aligned}$$

故 $\|\sigma(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|_2, \forall \mathbf{y} \in W.$

正交投影矩阵 A 可按如下方法求得:

假定 $\dim L = r$, 则 $\dim L^\perp = n - r$. 在子空间 L 和 L^\perp 中分别取定基

$$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r\}, \quad \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{n-r}\},$$

作矩阵

$$B = (\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_r), \quad C = (\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \dots \ \mathbf{z}_{n-r}),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 44 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则 $B^H C = \mathbf{0}$. 由投影矩阵的求法有

$$\begin{aligned}
 A &= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1} \\
 &= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}((B \mid C)^H)^{-1}(B \mid C)^H \\
 &= (B \mid \mathbf{0})((B \mid C)^H(B \mid C))^{-1}(B \mid C)^H \\
 &= (B \mid \mathbf{0}) \begin{pmatrix} B^H B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^H C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
 &= (B \mid \mathbf{0}) \begin{pmatrix} (B^H B)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (C^H C)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
 &= B(B^H B)^{-1}B.
 \end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 44 of 47

[Go Back](#)

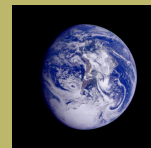
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则 $B^H C = \mathbf{0}$. 由投影矩阵的求法有

$$\begin{aligned}
 A &= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1} \\
 &= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}((B \mid C)^H)^{-1}(B \mid C)^H \\
 &= (B \mid \mathbf{0})((B \mid C)^H(B \mid C))^{-1}(B \mid C)^H \\
 &= (B \mid \mathbf{0}) \begin{pmatrix} B^H B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^H C \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
 &= (B \mid \mathbf{0}) \begin{pmatrix} (B^H B)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (C^H C)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
 &= B(B^H B)^{-1}B.
 \end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 44 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4 最佳的最小二乘解



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 45 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4 最佳的最小二乘解

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in R(A)$. 如果 $\mathbf{b} \in R(A)$, 称方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是相容的, 否则, 称其是不相容的.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 45 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4 最佳的最小二乘解

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in R(A)$. 如果 $\mathbf{b} \in R(A)$, 称方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是**相容的**, 否则, 称其是**不相容的**. 对不相容的方程组, 希望求其近似解 \mathbf{u} , 使得对欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$, 误差 $\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2$ 达到极小.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 45 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§4.4 最佳的最小二乘解

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in R(A)$. 如果 $\mathbf{b} \in R(A)$, 称方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是**相容的**, 否则, 称其是**不相容的**. 对不相容的方程组, 希望求其近似解 \mathbf{u} , 使得对欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$, 误差 $\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2$ 达到极小.

定义 4.6 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 如果存在 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2 \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 45 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4 最佳的最小二乘解

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in R(A)$. 如果 $\mathbf{b} \in R(A)$, 称方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是**相容的**, 否则, 称其是**不相容的**. 对不相容的方程组, 希望求其近似解 \mathbf{u} , 使得对欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$, 误差 $\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2$ 达到极小.

定义 4.6 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 如果存在 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2 \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

则称 \mathbf{u} 是方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个**最小二乘解**.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 45 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4 最佳的最小二乘解

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in R(A)$. 如果 $\mathbf{b} \in R(A)$, 称方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是**相容的**, 否则, 称其是**不相容的**. 对不相容的方程组, 希望求其近似解 \mathbf{u} , 使得对欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$, 误差 $\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2$ 达到极小.

定义 4.6 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 如果存在 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$\|A\mathbf{u} - \mathbf{b}\|_2 \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

则称 \mathbf{u} 是方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个**最小二乘解**.

设 \mathbf{x}_0 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解, 如果对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的每一个最小二乘解 \mathbf{u} , 都有

$$\|\mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{u}\|_2,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 45 of 47

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

则称 \boldsymbol{x}_0 是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

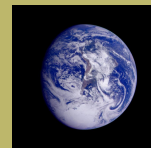
[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

则称 \boldsymbol{x}_0 是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = A^+ \boldsymbol{b}$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最佳的最小二乘解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则称 \boldsymbol{x}_0 是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = A^+ \boldsymbol{b}$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的的最佳的最小二乘解.

证明 由定理4.15知, AA^+ 是 \mathbb{C}^m 空间在 $R(A)$ 上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+ \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则称 \mathbf{x}_0 是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{b}$ 是线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最佳的最小二乘解.

证明 由定理4.15知, AA^+ 是 \mathbb{C}^m 空间在 $R(A)$ 上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+ \mathbf{b}) - \mathbf{b}\|_2 \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

故 $\mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{b}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则称 \mathbf{x}_0 是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{b}$ 是线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最佳的最小二乘解.

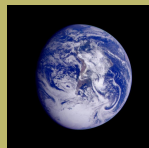
证明 由定理4.15知, AA^+ 是 \mathbb{C}^m 空间在 $R(A)$ 上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+ \mathbf{b}) - \mathbf{b}\|_2 \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

故 $\mathbf{x}_0 = A^+ \mathbf{b}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解.

又由定理4.15, 有

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), \quad R(A)^\perp = N(A^+),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则称 \mathbf{x}_0 是**最佳的最小二乘解**(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\mathbf{x}_0 = A^+\mathbf{b}$ 是线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的**最佳的最小二乘解**.

证明 由定理4.15知, AA^+ 是 \mathbb{C}^m 空间在 $R(A)$ 上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+\mathbf{b}) - \mathbf{b}\|_2 \leq \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$

故 $\mathbf{x}_0 = A^+\mathbf{b}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解.

又由定理4.15, 有

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), \quad R(A)^\perp = N(A^+),$$

每个 $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ 可惟一地分解为

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_1 \in R(A), \quad \mathbf{b}_2 \in N(A^+),$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 46 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.4. 最佳的最小二乘解



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 &= \|(A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2,\end{aligned}$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 &= \|(A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2,\end{aligned}$$



因此, \mathbf{u} 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解当且仅当 \mathbf{u} 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ 的解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 &= \|(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2,\end{aligned}$$



因此, \mathbf{u} 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解当且仅当 \mathbf{u} 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ 的解.

设 \mathbf{u} 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任一个最小二乘解, 因 \mathbf{x}_0 也是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解, 故 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}) = \mathbf{Ax}_0 - \mathbf{Au} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$, 从而 $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}) \in N(\mathbf{A})$. 由定理 4.15 知, $R(\mathbf{A}^+)^\perp = N(\mathbf{A})$, 故从 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b} \in R(\mathbf{A}^+)$ 得 \mathbf{x}_0 与 $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u})$ 正交. 因此

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0 + (\mathbf{u} - \mathbf{x}_0)\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0\|_2^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{x}_0\|_2^2 \geq \|\mathbf{x}_0\|_2^2,$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有


$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 &= \|(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2,\end{aligned}$$



因此, \mathbf{u} 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解当且仅当 \mathbf{u} 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ 的解.

设 \mathbf{u} 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的任一个最小二乘解, 因 \mathbf{x}_0 也是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解, 故 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}) = \mathbf{Ax}_0 - \mathbf{Au} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$, 从而 $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}) \in N(\mathbf{A})$. 由定理4.15知, $R(\mathbf{A}^+)^\perp = N(\mathbf{A})$, 故从 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b} \in R(\mathbf{A}^+)$ 得 \mathbf{x}_0 与 $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u})$ 正交. 因此

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0 + (\mathbf{u} - \mathbf{x}_0)\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0\|_2^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{x}_0\|_2^2 \geq \|\mathbf{x}_0\|_2^2,$$

证得 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最佳的最小二乘解. 



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 &= \|(A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1\|_2^2 + \|\mathbf{b}_2\|_2^2,\end{aligned}$$

因此, \mathbf{u} 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解当且仅当 \mathbf{u} 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ 的解.

设 \mathbf{u} 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的任一个最小二乘解, 因 \mathbf{x}_0 也是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解, 故 $A(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}) = A\mathbf{x}_0 - A\mathbf{u} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$, 从而 $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}) \in N(A)$. 由定理 4.15 知, $R(A^+)^\perp = N(A)$, 故从 $\mathbf{x}_0 = A^+\mathbf{b} \in R(A^+)$ 得 \mathbf{x}_0 与 $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{u})$ 正交. 因此

$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0 + (\mathbf{u} - \mathbf{x}_0)\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0\|_2^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{x}_0\|_2^2 \geq \|\mathbf{x}_0\|_2^2$, 证得 $\mathbf{x}_0 = A^+\mathbf{b}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最佳的最小二乘解. ■



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

推论 4.2 设矩阵方程 $A\mathbf{X} = B$, 其中 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, 则 $\mathbf{X}_0 = A^+B$ 是 $A\mathbf{X} = B$ 的最佳的最小二乘解.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 48 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

推论 4.2 设矩阵方程 $A\mathbf{X} = B$, 其中 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, 则 $\mathbf{X}_0 = A^+B$ 是 $A\mathbf{X} = B$ 的最佳的最小二乘解.

应用最佳最小二乘解, 可以解决在实际中常常要求寻找经验公式的问题. 设由观测得到关于物理量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的一组数据为

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \cdots, (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m).$$



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 48 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§4.4. 最佳的最小二乘解

推论 4.2 设矩阵方程 $A\mathbf{X} = B$, 其中 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, 则 $\mathbf{X}_0 = A^+B$ 是 $A\mathbf{X} = B$ 的最佳的最小二乘解.

应用最佳最小二乘解, 可以解决在实际中常常要求寻找经验公式的问题. 设由观测得到关于物理量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的一组数据为

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \dots, (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m).$$

人们希望通过这些数据, 找出函数 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, 使得以 $\delta_i = f(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i$ $i = 1, 2, \dots, m$ 作为分量的误差向量 $\boldsymbol{\delta}$ 按欧几里得范数 $\|\boldsymbol{\delta}\|_2$ 最小, 称如此得到的函数 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ 的图形是拟合数据 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 的最佳拟合曲线.



左逆与右逆

广义逆矩阵

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 48 of 47

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

推论 4.2 设矩阵方程 $A\mathbf{X} = B$, 其中 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times k}$, 则 $\mathbf{X}_0 = A^+B$ 是 $A\mathbf{X} = B$ 的最佳的最小二乘解.

应用最佳最小二乘解, 可以解决在实际中常常要求寻找经验公式的问题. 设由观测得到关于物理量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的一组数据为

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \dots, (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m).$$

人们希望通过这些数据, 找出函数 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, 使得以 $\delta_i = f(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i$ $i = 1, 2, \dots, m$ 作为分量的误差向量 $\boldsymbol{\delta}$ 按欧几里得范数 $\|\boldsymbol{\delta}\|_2$ 最小, 称如此得到的函数 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ 的图形是拟合数据 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 的最佳拟合曲线.



左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page



Page 48 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit