

向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 1 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

研究生公共基础课

矩 阵 论

研究生公共基础课

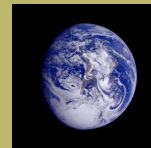
第1页,共51页

矩阵论

● [First](#) ● [Prev](#) ● [Next](#) ● [Last](#) ● [Go Back](#) ● [Full Screen](#) ● [Close](#) ● [Quit](#)

第五章 矩阵分析

本章在引入向量和矩阵的范数及极限的基础上, 借助矩阵的幂级数来定义矩阵函数, 同时讨论函数矩阵的微分和积分, 最后介绍它们在求解微分方程组中的应用.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 2 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.1 向量范数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.1 向量范数

1. 向量范数的概念



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

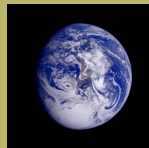
§5.1 向量范数

1. 向量范数的概念

定义 5.1 设 V 是数域 F 上的线性空间, 且对于 V 的任一个向量 \boldsymbol{x} , 对应一个非负实数 $\|\boldsymbol{x}\|$, 满足以下条件:

- ① 正定性: $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
- ② 齐次性: $\|a\boldsymbol{x}\| = |a| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$, $a \in F$;
- ③ 三角不等式: 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 都有 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为向量 \boldsymbol{x} 的**范数**, 称 $[V; \|\cdot\|]$ 为**赋范空间**.



§5.1. 向量范数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 4 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

例 5.1 在 n 维酉空间 \mathbb{C}^n 中, 复向量 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$ 的长度

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为 2-范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_2$.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 4 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



例 5.1 在 n 维酉空间 \mathbb{C}^n 中, 复向量 $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$ 的长度

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作 $\|\boldsymbol{x}\|_2$.

例 5.2 证明 $\|\boldsymbol{x}\| = \max_i |x_i|$ 是 \mathbb{C}^n 上的一种范数. 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \in \mathbb{C}^n$.



例 5.1 在 n 维酉空间 \mathbb{C}^n 中, 复向量 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$ 的长度

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_2$.

例 5.2 证明 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ 是 \mathbb{C}^n 上的一种范数. 其中 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \in \mathbb{C}^n$.

证明 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, x_1, x_2, \cdots, x_n 不全为零, 故 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i| > 0$; $\|\mathbf{x}\| = 0$, 当且仅当 $x_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



例 5.1 在 n 维酉空间 \mathbb{C}^n 中, 复向量 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$ 的长度

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_2$.

例 5.2 证明 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ 是 \mathbb{C}^n 上的一种范数. 其中 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \in \mathbb{C}^n$.

证明 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, x_1, x_2, \cdots, x_n 不全为零, 故 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i| > 0$; $\|\mathbf{x}\| = 0$, 当且仅当 $x_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

对任意 $a \in F$, 有

$$\|a\mathbf{x}\| = \max_i |ax_i| = |a| \max_i |x_i| = |a| \|\mathbf{x}\|.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 5 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)
[Title Page](#)

[Page 5 of 51](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

对任意 $a \in F$, 有

$$\|a\mathbf{x}\| = \max_i |ax_i| = |a| \max_i |x_i| = |a| \|\mathbf{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意 $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$



对任意 $a \in F$, 有

$$\|a\mathbf{x}\| = \max_i |ax_i| = |a| \max_i |x_i| = |a| \|\mathbf{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意 $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

故 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ 是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 ∞ -范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_\infty$. ■



对任意 $a \in F$, 有

$$\|a\mathbf{x}\| = \max_i |ax_i| = |a| \max_i |x_i| = |a| \|\mathbf{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意 $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

故 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ 是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 **∞ -范数**, 记作 $\|\mathbf{x}\|_\infty$. ■

注 5.1 $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 也是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 **1-范数**, 记作 $\|\mathbf{x}\|_1$.



对任意 $a \in F$, 有

$$\|a\mathbf{x}\| = \max_i |ax_i| = |a| \max_i |x_i| = |a| \|\mathbf{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意 $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

故 $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ 是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 ∞ -范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_\infty$. ■

注 5.1 $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 也是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称

这种范数为 1-范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_1$.

一般地, $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < +\infty$) 也是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 p -范数, 记作 $\|\mathbf{x}\|_p$.



向量范数

Home Page

Title Page



Page 6 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

一般地, $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < +\infty$) 也是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 **p -范数**, 记作 $\|\mathbf{x}\|_p$.

例 5.3 设 A 是任意一个 n 阶正定矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维列向量. 证明

$$\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

是一种向量范数, 称为 **加权范数** 或 **椭圆范数**.



向量范数

Home Page

Title Page

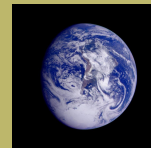
Page 6 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一般地, $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < +\infty$) 也是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 **p -范数**, 记作 $\|\mathbf{x}\|_p$.

例 5.3 设 A 是任意一个 n 阶正定矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维列向量. 证明

$$\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

是一种向量范数, 称为 **加权范数** 或 **椭圆范数**.

证明 因为 A 正定, 所以 $\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \geq 0$, 且 $\|\mathbf{x}\|_A = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



一般地, $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($1 \leq p < +\infty$) 也是 \mathbb{C}^n 上的一种向量范数, 称这种范数为 **p -范数**, 记作 $\|\mathbf{x}\|_p$.

例 5.3 设 A 是任意一个 n 阶正定矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维列向量. 证明

$$\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

是一种向量范数, 称为 **加权范数** 或 **椭圆范数**.

证明 因为 A 正定, 所以 $\|\mathbf{x}\|_A = (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \geq 0$, 且 $\|\mathbf{x}\|_A = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

又对任意 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$\|a\mathbf{x}\|_A = ((a\mathbf{x})^T A (a\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}} = (a^2 \mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$= |a| \|x\|_A.$$



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 7 of 51](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$= |a| \|\mathbf{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = I$, 从而



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= |a| \|\mathbf{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = I$, 从而

$$A = (P^T)^{-1} P^{-1} = B^T B,$$

其中 $B = P^{-1}$ 为可逆矩阵, 于是



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= |a| \|\mathbf{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = I$, 从而

$$A = (P^T)^{-1} P^{-1} = B^T B,$$

其中 $B = P^{-1}$ 为可逆矩阵, 于是

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_A &= (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}^T B^T B \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = ((B\mathbf{x})^T B\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \\ &= \|B\mathbf{x}\|_2, \end{aligned}$$

故



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 7 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= |a| \|\mathbf{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P , 使 $P^T A P = I$, 从而

$$A = (P^T)^{-1} P^{-1} = B^T B,$$

其中 $B = P^{-1}$ 为可逆矩阵, 于是

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_A &= (\mathbf{x}^T A \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}^T B^T B \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = ((B\mathbf{x})^T B\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \\ &= \|B\mathbf{x}\|_2, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_A &= \|B(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|_2 = \|B\mathbf{x} + B\mathbf{y}\|_2 \\ &\leq \|B\mathbf{x}\|_2 + \|B\mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_A + \|\mathbf{y}\|_A. \end{aligned} \quad \blacksquare$$



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 7 of 51

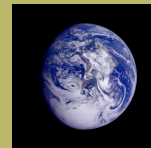
Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. 向量范数的连续性与等价性



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 8 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

2. 向量范数的连续性与等价性

定理 5.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一组基, $\|x\|$ 是 \mathbb{C}^n 空间的任意一个向量范数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|a_i - b_i| < \delta (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 有

$$| \|\alpha\| - \|\beta\| | < \varepsilon.$$



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 8 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

2. 向量范数的连续性与等价性

定理 5.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一组基, $\|\mathbf{x}\|$ 是 \mathbb{C}^n 空间的任意一个向量范数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i \in \mathbb{C}^n$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|a_i - b_i| < \delta (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 有

$$|\|\alpha\| - \|\beta\|| < \varepsilon.$$

证明 令 $M = \max_i \{\|\alpha_i\|\}$, 则 $M > 0$, 选取 δ , 使得 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{nM}$. 对任意向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 当 $|a_i - b_i| < \delta (i =$



向量范数

Home Page

Title Page

Page 8 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$1, 2, \dots, n$)时, 有



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$1, 2, \dots, n$)时, 有

$$\begin{aligned} \left| \|\alpha\| - \|\beta\| \right| &\leq \|\alpha - \beta\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \alpha_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \|\alpha_i\| \leq M \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 9 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

1, 2, ..., n)时, 有

$$\begin{aligned} | \|\alpha\| - \|\beta\| | &\leq \|\alpha - \beta\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \alpha_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \|\alpha_i\| \leq M \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

定义 5.2 设 $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 与 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 是线性空间 V 上定义的两
种范数. 如果存在正数 c_1 与 c_2 , 使得

$$c_1 \|\mathbf{x}\|^{(2)} \leq \|\mathbf{x}\|^{(1)} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^{(2)}, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad (5-1)$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 9 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

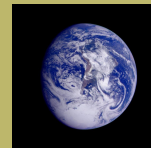
$1, 2, \dots, n$)时, 有

$$\begin{aligned} \left| \|\alpha\| - \|\beta\| \right| &\leq \|\alpha - \beta\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \alpha_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \|\alpha_i\| \leq M \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

定义 5.2 设 $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 与 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 是线性空间 V 上定义的二种范数. 如果存在正数 c_1 与 c_2 , 使得

$$c_1 \|\mathbf{x}\|^{(2)} \leq \|\mathbf{x}\|^{(1)} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^{(2)}, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad (5-1)$$

则称这两个向量范数是**等价的**.



向量范数

Home Page

Title Page



Page 9 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$1, 2, \dots, n)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \|\alpha\| - \|\beta\| \right| &\leq \|\alpha - \beta\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \alpha_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \|\alpha_i\| \leq M \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

定义 5.2 设 $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 与 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 是线性空间 V 上定义的两
种范数. 如果存在正数 c_1 与 c_2 , 使得

$$c_1 \|\mathbf{x}\|^{(2)} \leq \|\mathbf{x}\|^{(1)} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^{(2)}, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad (5-1)$$

则称这两个向量范数是**等价的**.

定理 5.2 有限维线性空间的任意两种向量范数都是等价的.



向量范数

Home Page

Title Page



Page 9 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$1, 2, \dots, n)$ 时, 有

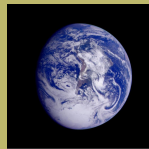
$$\begin{aligned} |\|\alpha\| - \|\beta\|| &\leq \|\alpha - \beta\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \alpha_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \|\alpha_i\| \leq M \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \varepsilon. \blacksquare \end{aligned}$$

定义 5.2 设 $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 与 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 是线性空间 V 上定义的两
种范数. 如果存在正数 c_1 与 c_2 , 使得

$$c_1 \|\mathbf{x}\|^{(2)} \leq \|\mathbf{x}\|^{(1)} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^{(2)}, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad (5-1)$$

则称这两个向量范数是**等价的**.

定理 5.2 有限维线性空间的任意两种向量范数都是
等价的.



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 9 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 因为 n 维线性空间 V 和 \mathbb{C}^n 空间是同构的, 所以只就 \mathbb{C}^n 空间来证明.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 10 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 因为 n 维线性空间 V 和 \mathbb{C}^n 空间是同构的, 所以只就 \mathbb{C}^n 空间来证明.

设 $\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的任意两种范数. 当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时, 不等式(5-1)显然满足.



向量范数

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 10 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 因为 n 维线性空间 V 和 \mathbb{C}^n 空间是同构的, 所以只就 \mathbb{C}^n 空间来证明.

设 $\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的任意两种范数. 当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时, 不等式(5-1)显然满足.

下面证明对 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 不等式(5-1)也成立.



向量范数

Home Page

Title Page



Page 10 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 因为 n 维线性空间 V 和 \mathbb{C}^n 空间是同构的, 所以只就 \mathbb{C}^n 空间来证明.

设 $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 和 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的任意两种范数. 当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时, 不等式(5-1)显然满足.

下面证明对 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 不等式(5-1)也成立. 在 \mathbb{C}^n 空间中, 单位球面

$$S_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathbf{x}\|^{(1)} = 1\},$$

$$S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathbf{x}\|^{(2)} = 1\}$$

是有界闭集. $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 和 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 都是 S_1 与 S_2 上的连续函数, 于是可取到最大值, 设



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 10 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit



证明 因为 n 维线性空间 V 和 \mathbb{C}^n 空间是同构的, 所以只就 \mathbb{C}^n 空间来证明.

设 $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 和 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的任意两种范数. 当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时, 不等式(5-1)显然满足.

下面证明对 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 不等式(5-1)也成立. 在 \mathbb{C}^n 空间中, 单位球面

$$S_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathbf{x}\|^{(1)} = 1\},$$

$$S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathbf{x}\|^{(2)} = 1\}$$

是有界闭集. $\|\mathbf{x}\|^{(1)}$ 和 $\|\mathbf{x}\|^{(2)}$ 都是 S_1 与 S_2 上的连续函数, 于是可取到最大值, 设

$$t_1 = \max_{\mathbf{x} \in S_1} \{\|\mathbf{x}\|^{(2)}\},$$

$$t_2 = \max_{\mathbf{x} \in S_2} \{\|\mathbf{x}\|^{(1)}\},$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 11 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

则 $t_1, t_2 > 0$, 对任意 $\mathbf{x} \neq 0$, 有 $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \in S_1, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \in S_2$, 于是



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 11 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§5.1. 向量范数

则 $t_1, t_2 > 0$, 对任意 $\mathbf{x} \neq 0$, 有 $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \in S_1, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \in S_2$, 于是

$$t_1 \geq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \right\|^{(2)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{(2)}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}},$$

$$t_2 \geq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \right\|^{(1)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{(1)}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}}. \quad \blacksquare$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则 $t_1, t_2 > 0$, 对任意 $\mathbf{x} \neq 0$, 有 $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \in S_1, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \in S_2$, 于是

$$t_1 \geq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \right\|^{(2)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{(2)}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}},$$

$$t_2 \geq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \right\|^{(1)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{(1)}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}}. \quad \blacksquare$$

取 $c_2 = t_2, c_1 = 1/t_1$, 就有

$$c_1 \|\mathbf{x}\|^{(2)} \leq \|\mathbf{x}\|^{(1)} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^{(2)}. \quad \blacksquare$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 11 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则 $t_1, t_2 > 0$, 对任意 $\mathbf{x} \neq 0$, 有 $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \in S_1, \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \in S_2$, 于是

$$t_1 \geq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}} \right\|^{(2)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{(2)}}{\|\mathbf{x}\|^{(1)}},$$

$$t_2 \geq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}} \right\|^{(1)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^{(1)}}{\|\mathbf{x}\|^{(2)}}.$$

取 $c_2 = t_2, c_1 = 1/t_1$, 就有

$$c_1 \|\mathbf{x}\|^{(2)} \leq \|\mathbf{x}\|^{(1)} \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^{(2)}. \blacksquare$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 11 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§5.2 矩阵范数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 12 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

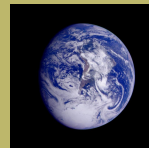
[Close](#)

[Quit](#)

§5.2 矩阵范数

矩阵空间 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 是一个 mn 维线性空间, 将 $m \times n$ 矩阵 A 看作线性空间 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 中的向量, 可以按向量范数的办法来定义范数. 但是, 矩阵之间还有乘法运算, 它应该在定义矩阵时予以体现. 本书只涉及方阵的范数, 至于不是方阵的范数可类似定义.

1. 矩阵范数的概念



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 12 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.2 矩阵范数

矩阵空间 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 是一个 mn 维线性空间, 将 $m \times n$ 矩阵 A 看作线性空间 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 中的向量, 可以按向量范数的办法来定义范数. 但是, 矩阵之间还有乘法运算, 它应该在定义矩阵时予以体现. 本书只涉及方阵的范数, 至于不是方阵的范数可类似定义.

1. 矩阵范数的概念

定义 5.3 设 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 上定义一个非负实数函数, 使得对任意矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 对应一个非负实数 $\|A\|$, 满足以下四个条件:

① 正定性: $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = \mathbf{0}$;



向量范数

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 12 of 51](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

- ② 齐次性: $\|aA\| = |a| \|A\|, a \in \mathbb{F}$;
- ③ 三角不等式: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- ④ 相容性: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- ② 齐次性: $\|aA\| = |a| \|A\|, a \in \mathbb{F}$;
- ③ 三角不等式: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- ④ 相容性: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;

则称 $\|A\|$ 为 **矩阵 A 的范数**.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

② 齐次性: $\|aA\| = |a| \|A\|, a \in \mathbb{F};$

③ 三角不等式: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$

④ 相容性: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|;$

则称 $\|A\|$ 为矩阵 A 的范数.

例 5.4 证明: 对任意 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ 是矩阵范数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 13 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

- ② 齐次性: $\|aA\| = |a| \|A\|, a \in \mathbb{F}$;
- ③ 三角不等式: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- ④ 相容性: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 都有 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;

则称 $\|A\|$ 为 **矩阵 A 的范数**.

例 5.4 证明: 对任意 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ 是矩阵范数.}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 13 of 51

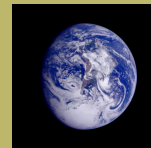
[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 14 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|,\end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 14 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|, \\ \|AB\| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (|a_{i1}b_{1j}| + \cdots + |a_{in}b_{nj}|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|) \cdot \sum_{j=1}^n (|b_{1j}| + \cdots + |b_{nj}|)\end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)
[Title Page](#)
[<<](#)
[>>](#)
[<](#)
[>](#)
[Page 14 of 51](#)
[Go Back](#)
[Full Screen](#)
[Close](#)
[Quit](#)

§5.2. 矩阵范数

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| \|B\|. \blacksquare$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| \|B\|. \blacksquare \quad \blacksquare$$

例 5.5 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 证明

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = [\operatorname{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为 **Frobenius 范数**, 简称为 F-范数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| \|B\|. \blacksquare \quad \blacksquare$$

例 5.5 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 证明

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = [\text{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为 **Frobenius 范数**, 简称为 F-范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| \|B\|. \blacksquare \quad \blacksquare$$

例 5.5 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 证明

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = [\text{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为 **Frobenius 范数**, 简称为 F-范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 15 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| \|B\|. \blacksquare \quad \blacksquare$$

例 5.5 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 证明

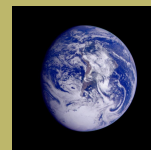
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = [\text{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为 **Frobenius 范数**, 简称为 F-范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则

$$\|A + B\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 15 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|A\|_F + \|B\|_F, \end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 16 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\|_F + \|B\|_F,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\
&= \|A\|_F^2 \|B\|_F^2.
\end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 16 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|A\|_F + \|B\|_F,$$

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\ &= \|A\|_F^2 \|B\|_F^2. \end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 16 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

注 5.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是矩阵 A 的奇异值, 则

$$\operatorname{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 17 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是矩阵 A 的奇异值, 则

$$\text{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

2. 诱导范数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 17 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是矩阵 A 的奇异值, 则

$$\text{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

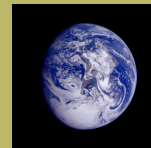
故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

定义 5.4 设 $\|\mathbf{x}\|$ 是向量范数, $\|A\|$ 是矩阵范数, 若

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 17 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是矩阵 A 的奇异值, 则

$$\text{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

定义 5.4 设 $\|\mathbf{x}\|$ 是向量范数, $\|A\|$ 是矩阵范数, 若

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

则称矩阵范数 $\|A\|$ 与向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 17 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是矩阵 A 的奇异值, 则

$$\text{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

定义 5.4 设 $\|\mathbf{x}\|$ 是向量范数, $\|A\|$ 是矩阵范数, 若

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

则称矩阵范数 $\|A\|$ 与向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 17 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.3 矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的. 这是因为, 由

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 18 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.3 矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的. 这是因为, 由

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|\mathbf{x}\|_2^2, \end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

注 5.3 矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的. 这是因为, 由

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x}\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|\mathbf{x}\|_2^2, \end{aligned}$$

于是 $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 19 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 5.3 设 $\|\mathbf{x}\|$ 是向量范数, 则

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\}$$

是与向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 相容的矩阵范数. 称其为由向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 所诱导的诱导范数.



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 19 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 5.3 设 $\|\mathbf{x}\|$ 是向量范数, 则

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\}$$

是与向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 相容的矩阵范数. 称其为由向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 所诱导的诱导范数.

证明 正定性与齐次性显然.



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 19 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

定理 5.3 设 $\|\mathbf{x}\|$ 是向量范数, 则

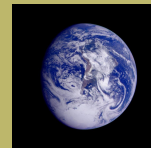
$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\}$$

是与向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 相容的矩阵范数. 称其为由向量范数 $\|\mathbf{x}\|$ 所诱导的诱导范数.

证明 正定性与齐次性显然.

根据向量范数的三角不等式, 有

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|(A + B)\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} + \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

下证矩阵范数的相容性. 设 $B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right\} \cdot \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

下证矩阵范数的相容性. 设 $B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right\} \cdot \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\|. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

$B = \mathbf{0}$ 或存在 \mathbf{x} , 使 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明 $\|A\|$ 与 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

下证矩阵范数的相容性. 设 $B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right\} \cdot \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

$B = \mathbf{0}$ 或存在 \mathbf{x} , 使 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明 $\|A\|$ 与 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 20 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

下证矩阵范数的相容性. 设 $B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right\} \cdot \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

$B = \mathbf{0}$ 或存在 \mathbf{x} , 使 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明 $\|A\|$ 与 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \\ \|A\mathbf{x}\| &\leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$

所以



向量范数

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

下证矩阵范数的相容性. 设 $B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right\} \cdot \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

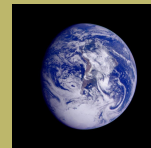
$B = \mathbf{0}$ 或存在 \mathbf{x} , 使 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明 $\|A\|$ 与 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

所以

注 5.4 由 $\|\mathbf{x}\|_p$ 所诱导的矩阵范数称为矩阵的 p -范数.



向量范数

Home Page

Title Page



Page 20 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

下证矩阵范数的相容性. 设 $B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\mathbf{x})\|}{\|B\mathbf{x}\|} \right\} \cdot \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\|.\end{aligned}$$

$B = \mathbf{0}$ 或存在 \mathbf{x} , 使 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明 $\|A\|$ 与 $\|\mathbf{x}\|$ 是相容的.

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\} \geq \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

所以

注 5.4 由 $\|\mathbf{x}\|_p$ 所诱导的矩阵范数称为矩阵的 p -范数.

我们不加证明地给出三种 p -范数的计算方法:
研究生公共基础课

第20页, 共51页

矩阵论



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 20 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

① $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, 称为列和范数;

② $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1 为 $A^H A$ 的最大特征值, 称为谱范数;

③ $\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$, 称为行和范数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 21 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

① $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, 称为列和范数;

② $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1 为 $A^H A$ 的最大特征值, 称为谱范数;

③ $\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$, 称为行和范数.



向量范数

Home Page

Title Page



Page 21 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 22 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设 $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \cdots \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \dots$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 如果当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 它的 n 个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i, \ i = 1, 2, \dots, n,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 22 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设 $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \cdots \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \dots$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 如果当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 它的 n 个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i, \ i = 1, 2, \dots, n,$$

则称向量序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是 **按分量收敛的**. 向量 $\alpha = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \alpha$ 或 $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \alpha$.



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 22 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设 $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \cdots \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \dots$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 如果当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 它的 n 个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i, \ i = 1, 2, \dots, n,$$

则称向量序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是**按分量收敛的**. 向量 $\alpha = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \alpha$ 或 $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \alpha$.

如果至少有一个分量数列是发散的, 则称向量序列是**发散的**.



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

Page 22 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设 $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \cdots \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \dots$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 如果当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 它的 n 个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i, \ i = 1, 2, \dots, n,$$

则称向量序列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是**按分量收敛的**. 向量 $\alpha = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \alpha$ 或 $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \alpha$.

如果至少有一个分量数列是发散的, 则称向量序列是**发散的**.

定义 5.6 设 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, $\|\mathbf{x}\|$ 是 \mathbb{C}^n 矩阵论



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 22 of 51

Go Back

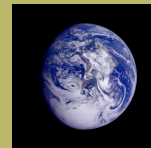
Full Screen

Close

Quit

§5.3. 序列的极限

空间的一个向量范数. 如果存在向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\mathbf{x}^{(k)} - \alpha\| \rightarrow 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于 α .



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 23 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

空间的一个向量范数. 如果存在向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\mathbf{x}^{(k)} - \alpha\| \rightarrow 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于 α .

定理 5.4 设 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 它按分量收敛的充分必要条件是它按 \mathbb{C}^n 空间的任意一个向量范数收敛.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 23 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

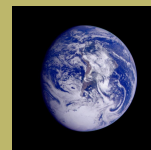
[Close](#)

[Quit](#)

空间的一个向量范数. 如果存在向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\mathbf{x}^{(k)} - \alpha\| \rightarrow 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于 α .

定理 5.4 设 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 它按分量收敛的充分必要条件是它按 \mathbb{C}^n 空间的任意一个向量范数收敛.

证明 利用范数的等价性, 取 $\|\mathbf{x}\|_\infty$ 来证明. ■



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

Page 23 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

空间的一个向量范数. 如果存在向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\mathbf{x}^{(k)} - \alpha\| \rightarrow 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于 α .

定理 5.4 设 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ 是 \mathbb{C}^n 空间的一个向量序列, 它按分量收敛的充分必要条件是它按 \mathbb{C}^n 空间的任意一个向量范数收敛.

证明 利用范数的等价性, 取 $\|\mathbf{x}\|_\infty$ 来证明. ■

定义 5.7 设 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\{A^{(k)}\}$ 是一个矩阵序列. 如果当 $k \rightarrow \infty$ 时, 它的 n^2 个数列 $\{a_{ij}^{(k)}\}$ 都收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 23 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§5.3. 序列的极限



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 24 of 51

[Go Back](#)

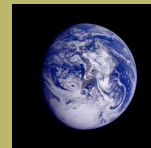
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.3. 序列的极限

则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ **按元素数列收敛**. 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$ 或 $A^{(k)} \rightarrow A$.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 24 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

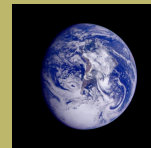
[Close](#)

[Quit](#)

§5.3. 序列的极限

则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ **按元素数列收敛**. 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$ 或 $A^{(k)} \rightarrow A$.

如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是**发散**的.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 24 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

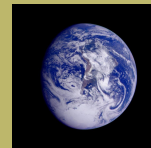
§5.3. 序列的极限

则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ **按元素数列收敛**. 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$ 或 $A^{(k)} \rightarrow A$.

如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是**发散的**.

矩阵序列有如下性质:

- ① 设 $A^{(k)} \rightarrow A, B^{(k)} \rightarrow B$, 则
- $$aA^{(k)} + bB^{(k)} \rightarrow aA + bB, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 24 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 按元素数列收敛. 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$ 或 $A^{(k)} \rightarrow A$.

如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是发散的.

矩阵序列有如下性质:

① 设 $A^{(k)} \rightarrow A, B^{(k)} \rightarrow B$, 则

$$aA^{(k)} + bB^{(k)} \rightarrow aA + bB, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

② 设 $A^{(k)} \rightarrow A, B^{(k)} \rightarrow B$, 则

$$A^{(k)}B^{(k)} \rightarrow AB.$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 24 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ **按元素数列收敛**. 矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是它的极限, 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$ 或 $A^{(k)} \rightarrow A$.

如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是**发散的**.

矩阵序列有如下性质:

① 设 $A^{(k)} \rightarrow A, B^{(k)} \rightarrow B$, 则

$$aA^{(k)} + bB^{(k)} \rightarrow aA + bB, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

② 设 $A^{(k)} \rightarrow A, B^{(k)} \rightarrow B$, 则

$$A^{(k)}B^{(k)} \rightarrow AB.$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 24 of 51

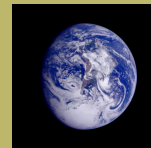
Go Back

Full Screen

Close

Quit

③ 设 $A^{(k)}$ 与 A 都是可逆矩阵, 且 $A^{(k)} \rightarrow A$, 则
$$(A^{(k)})^{-1} \rightarrow A^{-1}.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 25 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

③ 设 $A^{(k)}$ 与 A 都是可逆矩阵, 且 $A^{(k)} \rightarrow A$, 则

$$(A^{(k)})^{-1} \rightarrow A^{-1}.$$

定义 5.8 设 $\{A^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵序列, $\|A\|$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵范数. 如果存在矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0$, 则称矩阵序列按矩阵的范数收敛于 A .



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 25 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

③ 设 $A^{(k)}$ 与 A 都是可逆矩阵, 且 $A^{(k)} \rightarrow A$, 则

$$(A^{(k)})^{-1} \rightarrow A^{-1}.$$

定义 5.8 设 $\{A^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵序列, $\|A\|$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵范数. 如果存在矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0$, 则称矩阵序列按矩阵的范数收敛于 A .

定理 5.5 设 $\{A^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵序列, 它按元素数列收敛的充分必要条件是它按 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的任意一个矩阵范数收敛.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 25 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

③ 设 $A^{(k)}$ 与 A 都是可逆矩阵, 且 $A^{(k)} \rightarrow A$, 则

$$(A^{(k)})^{-1} \rightarrow A^{-1}.$$

定义 5.8 设 $\{A^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵序列, $\|A\|$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵范数. 如果存在矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0$, 则称矩阵序列按矩阵的范数收敛于 A .

定理 5.5 设 $\{A^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的一个矩阵序列, 它按元素数列收敛的充分必要条件是它按 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 空间的任意一个矩阵范数收敛.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 25 of 51

[Go Back](#)

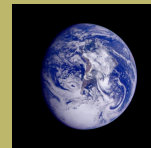
[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定义 5.9 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 是有界的,如果存在常数 $M > 0$, 使得对所有 k 都有

$$|a_{ij}^{(k)}| < M, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 26 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

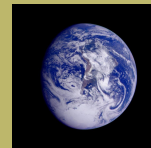
[Quit](#)

定义 5.9 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 是有界的,如果存在常数 $M > 0$,使得对所有 k 都有

$$|a_{ij}^{(k)}| < M, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

在矩阵序列中, 常见的是由一个方阵的幂构成的序列, 关于这样的矩阵序列有以下概念和结果.

定义 5.10 设 A 为方阵, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $A^k \rightarrow 0$, 则称 A 为收敛矩阵.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 26 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定义 5.9 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 是有界的, 如果存在常数 $M > 0$, 使得对所有 k 都有

$$|a_{ij}^{(k)}| < M, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

在矩阵序列中, 常见的是由一个方阵的幂构成的序列, 关于这样的矩阵序列有以下概念和结果.

定义 5.10 设 A 为方阵, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $A^k \rightarrow 0$, 则称 A 为收敛矩阵.

例 5.6 对 n 阶方阵 A 的方幂所作成的矩阵序列 $\{A^k\}$, 如果对某一种矩阵范数有 $\|A\| < 1$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, 即 A 为收敛矩阵.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 26 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定义 5.9 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 是有界的,如果存在常数 $M > 0$,使得对所有 k 都有

$$|a_{ij}^{(k)}| < M, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

在矩阵序列中, 常见的是由一个方阵的幂构成的序列, 关于这样的矩阵序列有以下概念和结果.

定义 5.10 设 A 为方阵, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $A^k \rightarrow 0$, 则称 A 为收敛矩阵.

例 5.6 对 n 阶方阵 A 的方幂所作成的矩阵序列 $\{A^k\}$, 如果对某一种矩阵范数有 $\|A\| < 1$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, 即 A 为收敛矩阵.



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 26 of 51

Go Back

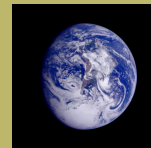
Full Screen

Close

Quit

§5.3. 序列的极限

证明 由矩阵范数的相容性, 有 $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, 又 $\|A\| < 1$, 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$, 由定理5.5, 得 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$. ■



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 27 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 由矩阵范数的相容性, 有 $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, 又 $\|A\| < 1$, 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$, 由定理5.5, 得 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$. ■



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 27 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

§5.4 矩阵幂级数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 28 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 28 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

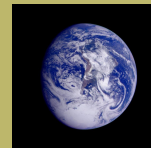
[Close](#)

[Quit](#)

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则称 $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ 为 A 的 **谱半径**.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 28 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

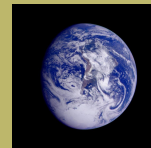
[Quit](#)

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则称 $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ 为 A 的 **谱半径**.

所以, A 的全部特征值分布在复平面上以原点为中心, $\rho(A)$ 为半径的圆盘上.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 28 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.4 矩阵幂级数

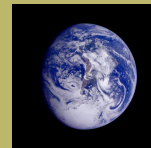
1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则称 $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ 为 A 的 **谱半径**.

所以, A 的全部特征值分布在复平面上以原点为中心, $\rho(A)$ 为半径的圆盘上.

例 5.7 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则

$$\rho(A^k) = (\rho(A))^k.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 28 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则称 $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ 为 A 的 **谱半径**.

所以, A 的全部特征值分布在复平面上以原点为中心, $\rho(A)$ 为半径的圆盘上.

例 5.7 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则

$$\rho(A^k) = (\rho(A))^k.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 28 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^k 的全部特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 29 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^k 的全部特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 29 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^k 的全部特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$.

定理 5.6 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则对 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上任意一种矩阵范数 $\|A\|$, 都有

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 29 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Page 29 of 51](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^k 的全部特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$.

定理 5.6 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则对 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上任意一种矩阵范数 $\|A\|$, 都有

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

即 A 的谱半径是 A 的任意一种范数的下界.



向量范数

Home Page

Title Page

Page 29 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A^k 的全部特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$.

定理 5.6 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则对 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上任意一种矩阵范数 $\|A\|$, 都有

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

即 A 的谱半径是 A 的任意一种范数的下界.

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 是 λ 对应的特征向量, 作一个 n 阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Page 30 of 51

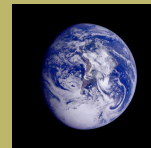
[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 是 λ 对应的特征向量, 作一个 n 阶方阵

$$B = (\mathbf{x} \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 有 $AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 30 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 是 λ 对应的特征向量, 作一个 n 阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有 $AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又 $B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以 $|\lambda| \leq \|A\|$, 从而 $\rho(A) \leq \|A\|$. ■



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 30 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 是 λ 对应的特征向量, 作一个 n 阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有 $AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又 $B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以 $|\lambda| \leq \|A\|$, 从而 $\rho(A) \leq \|A\|$. ■

定理 5.7 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在某种矩阵范数 $\|A\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 30 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 是 λ 对应的特征向量, 作一个 n 阶方阵

$$B = (\mathbf{x} \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 有 $AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又 $B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以 $|\lambda| \leq \|A\|$, 从而 $\rho(A) \leq \|A\|$. ■

定理 5.7 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在某种矩阵范数 $\|A\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

即 A 的谱半径是 A 的所有矩阵范数的下确界.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 30 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 是 λ 对应的特征向量, 作一个 n 阶方阵

$$B = (\mathbf{x} \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 有 $AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又 $B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以 $|\lambda| \leq \|A\|$, 从而 $\rho(A) \leq \|A\|$. ■

定理 5.7 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在某种矩阵范数 $\|A\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

即 A 的谱半径是 A 的所有矩阵范数的下确界.

如果在圆周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho(A)\}$ 上的特征值 λ 对应的Jordan子

研究生公共基础课

第30页, 共51页

矩阵论



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 30 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 31 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 31 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

一个 n 阶复方阵 A 的数值范围(或值域)定义为

$$W(A) = \{\mathbf{x}^H A \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{C}\}.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 31 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

一个 n 阶复方阵 A 的数值范围(或值域)定义为

$$W(A) = \{ \mathbf{x}^H A \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{C} \}.$$

对于数值范围 $W(A)$, 定义

$$w(A) = \sup \{ |z| \mid z \in W(A) \},$$

称为 A 的数值半径, 即

$$w(A) = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} | \mathbf{x}^H A \mathbf{x} |.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 31 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

一个 n 阶复方阵 A 的数值范围(或值域)定义为

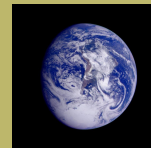
$$W(A) = \{\mathbf{x}^H A \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{C}\}.$$

对于数值范围 $W(A)$, 定义

$$w(A) = \sup \{ |z| \mid z \in W(A) \},$$

称为 A 的数值半径, 即

$$w(A) = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |\mathbf{x}^H A \mathbf{x}|.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 31 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 5.8 设 A 是一个复方阵, 则

$$\rho(A) \leq w(A) \leq \sigma_1(A) \leq 2w(A),$$

其中 σ_1 为 A 的最大奇异值.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 32 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

定理 5.8 设 A 是一个复方阵, 则

$$\rho(A) \leq w(A) \leq \sigma_1(A) \leq 2w(A),$$

其中 σ_1 为 A 的最大奇异值.

3. 矩阵幂级数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 32 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 32 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 5.8 设 A 是一个复方阵, 则

$$\rho(A) \leq w(A) \leq \sigma_1(A) \leq 2w(A),$$

其中 σ_1 为 A 的最大奇异值.

3. 矩阵幂级数

定义 5.12 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 称

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k + \dots$$

为矩阵 A 的**幂级数**, 记为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.



向量范数

Home Page

Title Page

Page 33 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定义 5.13 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的前 $N+1$ 项的和 $S_N(A)$

$= \sum_{k=0}^N a_k A^k$ 称为矩阵幂级数的部分和. 若矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的

部分和序列 $\{S_N(A)\}$ 收敛, 则称 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛; 否则, 称其

为发散. 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(A) = S$, 则称 S 为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的和矩阵.



向量范数

Home Page

Title Page

Page 33 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定义 5.13 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的前 $N+1$ 项的和 $S_N(A)$

$= \sum_{k=0}^N a_k A^k$ 称为矩阵幂级数的部分和. 若矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的

部分和序列 $\{S_N(A)\}$ 收敛, 则称 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛; 否则, 称其

为发散. 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(A) = S$, 则称 S 为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的和矩阵.

定理 5.9 若复变量 z 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 R , 而方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的谱半径为 $\rho(A)$, 则

① 当 $\rho(A) < R$ 时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛;

② 当 $\rho(A) > R$ 时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 34 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

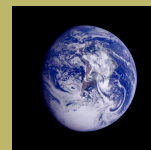
[Close](#)

[Quit](#)

② 当 $\rho(A) > R$ 时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

证明 对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 存在可逆矩阵 P , 使得

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 34 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

② 当 $\rho(A) > R$ 时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散.

证明 对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 存在可逆矩阵 P , 使得

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\text{其中 } J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, m.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

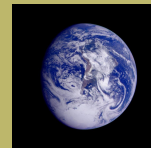
Page 34 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 35 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是

$$\begin{aligned}
 S_N(A) &= \sum_{k=0}^N a_k A^k = P S_N(J) P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} S_N(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_N(J_m) \end{pmatrix} P^{-1},
 \end{aligned}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是

$$S_N(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k = P S_N(J) P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} S_N(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_N(J_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

因此, 矩阵序列 $\{S_N(A)\}$ 收敛当且仅当 m 个矩阵序列 $\{S_N(J_i)\}$ 收敛, $i = 1, 2, \dots, m$. 而



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 35 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

于是

$$S_N(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k = P S_N(J) P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} S_N(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_N(J_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

因此, 矩阵序列 $\{S_N(A)\}$ 收敛当且仅当 m 个矩阵序列 $\{S_N(J_i)\}$ 收敛, $i = 1, 2, \dots, m$. 而

$$S_N(J_i) = \begin{pmatrix} S_N(\lambda_i) & S'_N(\lambda_i) & \frac{1}{2!} S''_N(\lambda_i) & \cdots & \frac{S_N^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & S_N(\lambda_i) & S'_N(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & S'_N(\lambda_i) \\ & & & & S_N(\lambda_i) \end{pmatrix},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

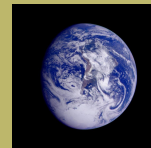
Page 35 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 36 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.4. 矩阵幂级数

其中 $S_N^{(t)}(\lambda_i)$ 表示 $S_N(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_i$ 处的 t 阶导数, n_i 是 J_i 的阶数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#)

[▶▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

Page 36 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

其中 $S_N^{(t)}(\lambda_i)$ 表示 $S_N(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_i$ 处的 t 阶导数, n_i 是 J_i 的阶数.

① 若 $\rho(A) < R$, 则 $|\lambda_i| < R$, 此时

$$\{S_N(\lambda_i)\}, \{S'_N(\lambda_i)\}, \dots, \{S_N^{(n_i-1)}(\lambda_i)\}$$

皆收敛, 故 $\{S_N(J_i)\}$ 收敛, 所以 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛.

② 若 $\rho(A) > R$, 则存在某个特征值 λ_{i_0} , 使 $|\lambda_{i_0}| > R$, 于是幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_{i_0}^k$ 发散, 从而 $\{S_N(J_i)\}$ 发散, 故 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散. ■



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 36 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

其中 $S_N^{(t)}(\lambda_i)$ 表示 $S_N(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_i$ 处的 t 阶导数, n_i 是 J_i 的阶数.

① 若 $\rho(A) < R$, 则 $|\lambda_i| < R$, 此时

$$\{S_N(\lambda_i)\}, \{S'_N(\lambda_i)\}, \dots, \{S_N^{(n_i-1)}(\lambda_i)\}$$

皆收敛, 故 $\{S_N(J_i)\}$ 收敛, 所以 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛.

② 若 $\rho(A) > R$, 则存在某个特征值 λ_{i_0} , 使 $|\lambda_{i_0}| > R$, 于是幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_{i_0}^k$ 发散, 从而 $\{S_N(J_i)\}$ 发散, 故 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 发散. ■

例 5.9 讨论矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 36 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 37 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量 z 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 的收敛半径 $R = 1$, 故当 $\rho(A) < 1$, 即 A 的所有特征值的模小于1时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 37 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

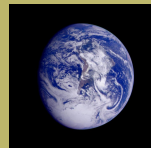
的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量 z 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 的收敛半径 $R = 1$, 故当 $\rho(A) < 1$, 即 A 的所有特征值的模小于1时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛.

当 $\rho(A) < 1$ 时, 1不是 A 的特征值, $|I - A| \neq 0$, 故 $I - A$ 可逆, 又

$$S_N(A) = I + A + A^2 + \cdots + A^N,$$

$$I - A^{N+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^N) = (I - A)S_N(A),$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 37 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量 z 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 的收敛半径 $R = 1$, 故当 $\rho(A) < 1$, 即 A 的所有特征值的模小于1时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛.

当 $\rho(A) < 1$ 时, 1不是 A 的特征值, $|I - A| \neq 0$, 故 $I - A$ 可逆, 又

$$S_N(A) = I + A + A^2 + \cdots + A^N,$$

$$I - A^{N+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^N) = (I - A)S_N(A),$$

于是
$$\lim_{N \rightarrow \infty} (I - A)S_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} I - A^{N+1} = I,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 37 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量 z 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 的收敛半径 $R = 1$, 故当 $\rho(A) < 1$, 即 A 的所有特征值的模小于1时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛.

当 $\rho(A) < 1$ 时, 1不是 A 的特征值, $|I - A| \neq 0$, 故 $I - A$ 可逆, 又

$$S_N(A) = I + A + A^2 + \cdots + A^N,$$

$$I - A^{N+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^N) = (I - A)S_N(A),$$

于是
$$\lim_{N \rightarrow \infty} (I - A)S_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} I - A^{N+1} = I,$$

故
$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(A) = (I - A)^{-1}.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

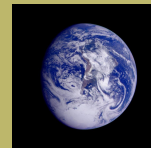
Page 37 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 38 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 38 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

注 5.5 ① 当计算 A 的特征值比较困难时, 由定理5.6知 A 的每个范数都是谱半径 $\rho(A)$ 的上界, 只要能找到一种特殊的矩阵范数 $\|A\|$, 使 $\|A\| < R$, 便可断定该矩阵幂级数是收敛的.

② 当矩阵的谱半径 $\rho(A)$ 等于幂级数的收敛半径 R 时, 定理5.9的判定方法失效, 须单独考虑.



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 38 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

注 5.5 ① 当计算 A 的特征值比较困难时, 由定理5.6知 A 的每个范数都是谱半径 $\rho(A)$ 的上界, 只要能找到一种特殊的矩阵范数 $\|A\|$, 使 $\|A\| < R$, 便可断定该矩阵幂级数是收敛的.

② 当矩阵的谱半径 $\rho(A)$ 等于幂级数的收敛半径 R 时, 定理5.9的判定方法失效, 须单独考虑.

例 5.10 讨论矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 的敛散性, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$



向量范数

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 38 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

注 5.5 ① 当计算 A 的特征值比较困难时, 由定理5.6知 A 的每个范数都是谱半径 $\rho(A)$ 的上界, 只要能找到一种特殊的矩阵范数 $\|A\|$, 使 $\|A\| < R$, 便可断定该矩阵幂级数是收敛的.

② 当矩阵的谱半径 $\rho(A)$ 等于幂级数的收敛半径 R 时, 定理5.9的判定方法失效, 须单独考虑.

例 5.10 讨论矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 的敛散性, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

解 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径 $R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知 A 不能对角化, 于是, 存在可逆阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



向量范数

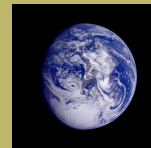
[Home Page](#)[Title Page](#)[Page 39 of 51](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

解 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径 $R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知 A 不能对角化, 于是, 存在可逆阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而

$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 39 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

解 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径 $R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知 A 不能对角化, 于是, 存在可逆阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而

$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 39 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

解 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径 $R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知 A 不能对角化, 于是, 存在可逆阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而

$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ 均收敛, 因此 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 收敛. ■



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 39 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

解 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径 $R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知 A 不能对角化, 于是, 存在可逆阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而

$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ 均收敛, 因此 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 收敛. ■



向量范数

Home Page

Title Page



Page 39 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§5.5 矩阵函数



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 40 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.5 矩阵函数

1. 矩阵函数的定义与性质



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 40 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.5 矩阵函数

1. 矩阵函数的定义与性质

定义 5.14 设 $f(z)$ 是复变量的解析函数, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 R , 如果矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的谱半径 $\rho(A) < R$, 则称

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A^k$$

为 A 的矩阵函数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 40 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

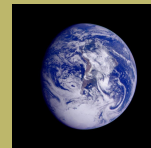
§5.5 矩阵函数

1. 矩阵函数的定义与性质

定义 5.14 设 $f(z)$ 是复变量的解析函数, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 R , 如果矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的谱半径 $\rho(A) < R$, 则称

$$f(A) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k A^k$$

为 A 的矩阵函数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀

▶

◀

▶

Page 40 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 41 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例 5.11 函数

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

在整个复平面上都是收敛的, 于是无论 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是任何矩阵, 有



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Page 41 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

例 5.11 函数

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

在整个复平面上都是收敛的, 于是无论 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是任何矩阵, 有

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k},$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 42 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

分别称之为矩阵 A 的指数函数, 余弦函数, 正弦函数.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 42 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

分别称之为矩阵 A 的指数函数, 余弦函数, 正弦函数.

同样地, 由

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

在复平面 $|z| < 1$ 内是收敛的, 于是对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 当 $\rho(A) < 1$ 时, 有



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 42 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

分别称之为矩阵 A 的指数函数, 余弦函数, 正弦函数.

同样地, 由

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

在复平面 $|z| < 1$ 内是收敛的, 于是对 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 当 $\rho(A) < 1$ 时, 有

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 42 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\ln(I + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\ln(I + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k.$$

需要注意的是, 数学分析中关于基本初等函数的许多运算性质, 在矩阵分析中一般不再成立, 例如

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

一般不成立.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\ln(I + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k.$$

需要注意的是, 数学分析中关于基本初等函数的许多运算性质, 在矩阵分析中一般不再成立, 例如

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

一般不成立. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B e^A = \begin{pmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 43 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\ln(I + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} A^k.$$

需要注意的是, 数学分析中关于基本初等函数的许多运算性质, 在矩阵分析中一般不再成立, 例如

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

一般不成立. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B e^A = \begin{pmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{而 } e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

但是, 如果矩阵 A 和 B 可交换, 就有 $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$. 同样地, 在 A 和 B 可交换的条件下, 数学分析中许多三角恒等



向量范数

Home Page

Title Page



Page 43 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

式也可以推广到矩阵分析中, 例如

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 44 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

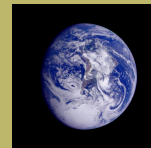
[Close](#)

[Quit](#)

式也可以推广到矩阵分析中, 例如

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

2. 矩阵函数的求法



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 44 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

式也可以推广到矩阵分析中, 例如

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

2. 矩阵函数的求法

定理 5.10 设 $f(z)$ 是复变量 z 的解析函数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且存在可逆矩阵 P , 使得

$$A = PJP^{-1} = P \operatorname{diag}(J_1, J_2, \dots, J_m)P^{-1},$$

则

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P \operatorname{diag}(f(J_1), f(J_2), \dots, f(J_m))P^{-1},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 44 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

其中

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i \times n_i},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 45 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

其中

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i \times n_i},$$

上述计算矩阵函数的方法比较繁琐, 下面介绍的最小多项式法, 比上述方法简便些.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 45 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

其中

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i \times n_i},$$

上述计算矩阵函数的方法比较繁琐,下面介绍的最小多项式法,比上述方法简便些.

定理 5.11 设 n 阶矩阵 A 的最小多项式为

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的所有不同特征值, $\sum_{i=1}^s n_i = m$, $f(\lambda)$ 是



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 45 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

复变量 λ 的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 46 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

复变量 λ 的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则 $f(A) = g(A)$ 的充分必要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad j = 0, 1, \cdots, n_i - 1$$

(5-2)



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 46 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

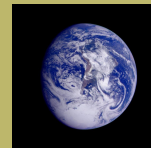
复变量 λ 的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则 $f(A) = g(A)$ 的充分必要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad j = 0, 1, \cdots, n_i - 1 \quad (5-2)$$

例 5.12 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 e^A , $\sin A$, e^{At} .



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 46 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

复变量 λ 的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则 $f(A) = g(A)$ 的充分必要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad j = 0, 1, \cdots, n_i - 1 \quad (5-2)$$

例 5.12 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 e^A , $\sin A$, e^{At} .

解 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda,$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 46 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 47 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

解得 $c_0 = f(2) - 2f'(2)$, $c_1 = f'(2)$, 故

$$f(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{pmatrix}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

解得 $c_0 = f(2) - 2f'(2)$, $c_1 = f'(2)$, 故

$$f(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{pmatrix}$$

当 $f(z) = e^z$ 时, $f(2) = e^2$, $f'(2) = e^2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & e^2 \\ e^2 & -e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

解得 $c_0 = f(2) - 2f'(2)$, $c_1 = f'(2)$, 故

$$f(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{pmatrix}$$

当 $f(z) = e^z$ 时, $f(2) = e^2$, $f'(2) = e^2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & e^2 \\ e^2 & -e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 47 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

当 $f(z) = \sin z$ 时, $f(2) = \sin 2$, $f'(2) = \cos 2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 - \cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2 + \cos 2 \end{pmatrix}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



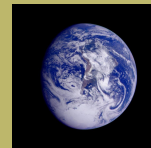
[Page 48 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



向量范数

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 48 of 51

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

当 $f(z) = \sin z$ 时, $f(2) = \sin 2$, $f'(2) = \cos 2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 - \cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2 + \cos 2 \end{pmatrix}$$

当 $f(z) = e^{tz}$ 时, $f(2) = e^{2t}$, $f'(2) = te^{2t}$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} & te^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}$$

当 $f(z) = \sin z$ 时, $f(2) = \sin 2$, $f'(2) = \cos 2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2 - \cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2 + \cos 2 \end{pmatrix}$$

当 $f(z) = e^{tz}$ 时, $f(2) = e^{2t}$, $f'(2) = te^{2t}$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} & te^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 48 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.6 函数矩阵的微分与积分

考虑矩阵元素是实变量 t 的实函数矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$A(t)$ 中所有的元素 $a_{ij}(t)$ 定义在同一区间 $[a, b]$ 上.



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 49 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.6 函数矩阵的微分与积分

考虑矩阵元素是实变量 t 的实函数矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$A(t)$ 中所有的元素 $a_{ij}(t)$ 定义在同一区间 $[a, b]$ 上.

$A(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 连续, 可微, 可积是指所有的 $a_{ij}(t)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 连续, 可微, 可积. 因此, 数学分析中的相关运算都可以平行地推广到函数矩阵上. 例如:

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = \frac{d}{dt}A(t) + \frac{d}{dt}B(t),$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{d}{dt}A(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \frac{d}{dt}B(t),$$



向量范数

Home Page

Title Page



Page 49 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§5.6. 函数矩阵的微分与积分

③ 若 $A(t)$ 与 $A^{-1}(t)$ 都可微, 则

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt}A(t) \right) A^{-1}(t),$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 50 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.6. 函数矩阵的微分与积分

③ 若 $A(t)$ 与 $A^{-1}(t)$ 都可微, 则

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt}A(t) \right) A^{-1}(t),$$

④ $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A,$

⑤ $\frac{d}{dt}\cos(tA) = -A\sin(tA) = -(\sin tA)A,$

⑥ $\frac{d}{dt}\sin(tA) = A\cos(tA) = (\cos tA)A,$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 50 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

③ 若 $A(t)$ 与 $A^{-1}(t)$ 都可微, 则

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt}A(t) \right) A^{-1}(t),$$

④ $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A,$

⑤ $\frac{d}{dt}\cos(tA) = -A\sin(tA) = -(\sin tA)A,$

⑥ $\frac{d}{dt}\sin(tA) = A\cos(tA) = (\cos tA)A,$

⑦ $\int [aA(t) + bB(t)]dt = a \int A(t)dt + b \int B(t)dt,$

⑧ $\int C \cdot A(t)dt = C \int A(t)dt,$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



[Page 50 of 51](#)

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

§5.6. 函数矩阵的微分与积分

$$\textcircled{9} \quad \int A(t)B'(t)dt = A(t)B(t) - \int A'(t)B(t)dt.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 51 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

$$\textcircled{9} \quad \int A(t)B'(t)dt = A(t)B(t) - \int A'(t)B(t)dt.$$



向量范数

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 51 of 51

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)