研究生公共基础课



线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page





Page 1 of 64

Go Back

Close

研究生公共基础课

第1页,共<mark>64页</mark> ● First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back

矩阵论 Full Screen

第二章 Jordan标准形介绍



线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





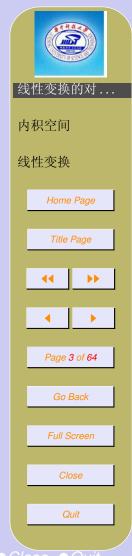
Page 2 of 64

研究生公共基础课

第2页,共<mark>64页</mark> ● First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back

§2.1 线性变换的对角矩阵表示

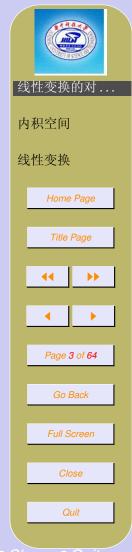
首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.



§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

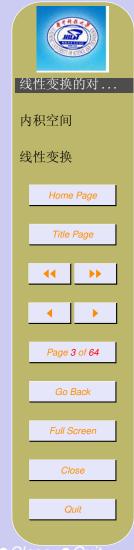


§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.1 设T为线性空间V上的线性变换, 若存在 $\xi \in V$ 和数 $\lambda \in F$, $\xi \neq \mathbf{0}$, 使 $T(\xi) = \lambda \xi$, 则称数 λ 为T的特征值, 向量 ξ 为线性变换T的对应于特征值 λ 的特征向量.



首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.1 设T为线性空间V上的线性变换, 若存在 $\xi \in V$ 和数 $\lambda \in F$, $\xi \neq \mathbf{0}$, 使 $T(\xi) = \lambda \xi$, 则称数 λ 为T的特征值, 向量 ξ 为线性变换T的对应于特征值 λ 的特征向量.

定理 2.1 设V上线性变换T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下 矩阵为A,则A的特征值 λ 就是变换T的特征值; 若X是A的特征向量,则 $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ X就是T的特征向量.



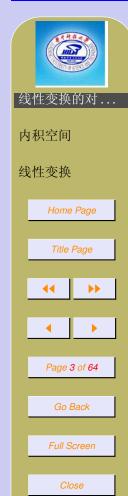
Close

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.1 设T为线性空间V上的线性变换, 若存在 $\xi \in V$ 和数 $\lambda \in F$, $\xi \neq \mathbf{0}$, 使 $T(\xi) = \lambda \xi$, 则称数 λ 为T的特征值, 向量 ξ 为线性变换T的对应于特征值 λ 的特征向量.

定理 2.1 设V上线性变换T在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下 矩阵为A,则A的特征值 λ 就是变换T的特征值; 若X是A的 特征向量, 则 $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) X$ 就是T的特征向量.



注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即 $B = P^{-1}AP$ 或PB = AP.

$$AX = \lambda X \iff B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X),$$

因此*B与A*的特征值是一样的,特征向量不一样.也就是说, *T*的特征值是由*T*决定的,和基的选择无关.



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Doge



<u>`</u>

Page 4 of 64

Go Back

Full Screen

Close

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即 $B = P^{-1}AP$ 或PB = AP.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此*B*与*A*的特征值是一样的,特征向量不一样.也就是说, *T*的特征值是由*T*决定的,和基的选择无关.

应用定理2.1, 我们可以从*T*的一个矩阵*A*求得*T*的特征值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 4 of 64

Go Back

Full Screen

Close

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即 $B = P^{-1}AP$ 或PB = AP.

$$AX = \lambda X \iff B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X),$$

因此*B*与*A*的特征值是一样的,特征向量不一样.也就是说, *T*的特征值是由*T*决定的,和基的选择无关.

应用定理2.1,我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征 值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

① 选择V的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的 矩阵A;



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 4 of 64

Go Back

Full Screen

Close

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即 $B = P^{-1}AP$ 或PB = AP.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此*B*与*A*的特征值是一样的,特征向量不一样.也就是说, *T*的特征值是由*T*决定的,和基的选择无关.

应用定理2.1,我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征 值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

- ① 选择V的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的 矩阵A;
- ② 求矩阵A的特征值, 先求A的特征多项式 $f(\lambda) = | \lambda I A |, f(\lambda) = 0$ 的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 即为A的全部特征值;



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即 $B = P^{-1}AP$ 或PB = AP.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此*B*与*A*的特征值是一样的,特征向量不一样.也就是说, *T*的特征值是由*T*决定的,和基的选择无关.

应用定理2.1,我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征 值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

- ① 选择V的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的 矩阵A;
- ② 求矩阵A的特征值, 先求A的特征多项式 $f(\lambda) = | \lambda I A |, f(\lambda) = 0$ 的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 即为A的全部特征值; 一般我们也称A的特征多项式 $f(\lambda) = | \lambda I A |$ 为线性变换T的特征多项式;



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 4 of 64

Go Back

Full Screen

Close

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即 $B = P^{-1}AP$ 或PB = AP.

$$AX = \lambda X \iff B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X),$$

因此*B*与*A*的特征值是一样的,特征向量不一样.也就是说, *T*的特征值是由*T*决定的,和基的选择无关.

应用定理2.1,我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征 值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

- ① 选择V的基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的 矩阵A;
- ② 求矩阵A的特征值, 先求A的特征多项式 $f(\lambda) = | \lambda I A |, f(\lambda) = 0$ 的根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 即为A的全部特征值; 一般我们也称A的特征多项式 $f(\lambda) = | \lambda I A |$ 为线性

变换T的特征多项式;

研究生公共基础课 第4页,共64页

矩阵论



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 4 of 64

Go Back

Full Screen

Close

③ 求矩阵A关于 λ_i 的特征向量 X_i , 即($\lambda_i I - A$) $X = \mathbf{0}$ 的 非零解, 它们给出T的特征值 λ_i 对应的特征向量关于 基{ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ }的坐标.



③ 求矩阵A关于 λ_i 的特征向量 X_i , 即($\lambda_i I - A$) $X = \mathbf{0}$ 的 非零解, 它们给出T的特征值 λ_i 对应的特征向量关于 基{ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ }的坐标.

下面,我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.



③ 求矩阵A关于 λ_i 的特征向量 X_i , 即($\lambda_i I - A$) $X = \mathbf{0}$ 的 非零解, 它们给出T的特征值 λ_i 对应的特征向量关于 基{ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ }的坐标.

下面,我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

定义 2.2 设 λ 为线性变换T的特征值, ξ_1 , ξ_2 , \cdots , ξ_t 是T对应于 λ 的特征向量的极大线性无关组, 则称子空间 $V_{\lambda} = L\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t\}$ 为T关于 λ 的特征子空间.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

③ 求矩阵A关于 λ_i 的特征向量 X_i , 即($\lambda_i I - A$) $X = \mathbf{0}$ 的 非零解, 它们给出T的特征值 λ_i 对应的特征向量关于 基{ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ }的坐标.

下面,我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

定义 2.2 设 λ 为线性变换T的特征值, ξ_1 , ξ_2 , \cdots , ξ_t 是T对应于 λ 的特征向量的极大线性无关组, 则称子空间 $V_{\lambda} = L\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t\}$ 为T关于 λ 的特征子空间.

应该注意到, $V_{\lambda} - \{\mathbf{0}\}$ 才是线性变换T的全部特征向量; 并且 $V_{\lambda} = N(T - \lambda \mathcal{I})$.



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

③ 求矩阵A关于 λ_i 的特征向量 X_i , 即($\lambda_i I - A$) $X = \mathbf{0}$ 的 非零解, 它们给出T的特征值 λ_i 对应的特征向量关于 基{ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ }的坐标.

下面,我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

定义 2.2 设 λ 为线性变换T的特征值, ξ_1 , ξ_2 , \cdots , ξ_t 是T对应于 λ 的特征向量的极大线性无关组, 则称子空间 $V_{\lambda} = L\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t\}$ 为T关于 λ 的特征子空间.

应该注意到, $V_{\lambda} - \{\mathbf{0}\}$ 才是线性变换T的全部特征向量; 并且 $V_{\lambda} = N(T - \lambda \mathcal{I})$.

研究生公共基础课 第5页,共64页

矩阵论



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page

(4)

← →

Page 5 of 64

Go Back

Full Screen

Close

如果线性变换T有s个互异的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$,它们就会对应s个特征子空间: $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_s}$. 特征子空间有如下性质:



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 6 of 64

Go Back

Full Screen

Close

如果线性变换T有s个互异的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$,它们就会对应s个特征子空间: $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_s}$. 特征子空间有如下性质:

定理 2.2 设 λ_1 , λ_2 , · · · · , λ_s 是线性空间 $V_n(F)$ 上线性变换T的互异的特征值. V_{λ_i} 是 λ_i 的特征子空间, $i=1,2,\cdots,s$,则有

- ① V_{λ_i} 是T的不变子空间;
- ② $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\};$
- ③ 若 λ_i 是T的 k_i 重特征值, 则dim $V_{\lambda_i} \leq k_i$.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第6页,共64页

F

矩阵论

• Close

Qu

① 由 V_{λ_i} 的定义, $\forall \alpha \in V_{\lambda_i}$, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 证明 所以 V_{λ_i} 是T的不变子空间.



Title Page



Page 7 of 64

Go Back

Close

证明 ① 由 V_{λ_i} 的定义, $\forall \alpha \in V_{\lambda_i}$, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 所以 V_{λ_i} 是T的不变子空间.

② $\forall \alpha \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, 则有 $\alpha \in V_{\lambda_i}$ 且 $\alpha \in V_{\lambda_j}$, 因此有, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha$ 而且 $T(\alpha) = \lambda_j \alpha$. 两式相减得 $(\lambda_i - \lambda_j)\alpha = \mathbf{0}$, 又 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以 $\alpha = \mathbf{0}$, 即

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}, \ \lambda_i \neq \lambda_j.$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 7 of 64

Go Back

Full Screen

Close

证明 ① 由 V_{λ_i} 的定义, $\forall \alpha \in V_{\lambda_i}$, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 所以 V_{λ_i} 是T的不变子空间.

② $\forall \alpha \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, 则有 $\alpha \in V_{\lambda_i}$ 且 $\alpha \in V_{\lambda_j}$, 因此有, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha$ 而且 $T(\alpha) = \lambda_j \alpha$. 两式相减得 $(\lambda_i - \lambda_j)\alpha = \mathbf{0}$, 以 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以 $\alpha = \mathbf{0}$, 即

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}, \ \lambda_i \neq \lambda_j.$$

③ 设T的矩阵为A,则T的特征多项式表为 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$ $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$,即 λ_i 为T的 k_i 重特征值. 我们用反证法来证明③.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





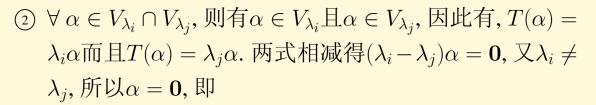
Page 7 of 64

Go Back

Full Screen

Close

证明 ① 由 V_{λ_i} 的定义, $\forall \alpha \in V_{\lambda_i}$, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 所以 V_{λ_i} 是T的不变子空间.



$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}, \ \lambda_i \neq \lambda_j.$$

③ 设T的矩阵为A,则T的特征多项式表为 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$ $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$,即 λ_i 为T的 k_i 重特征值. 我们用反证法来证明③.

设 $\dim V_{\lambda_i} = t_i > k_i$,则可取 V_{λ_i} 的基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{it_i}\}$,研究生公共基础课 第7页,共64页 矩阵论



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 7 of 64

Go Back

Full Screen

Close

并把它扩充为V的基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$, 故 $V = V_{\lambda_i} \oplus U$, 其中 $U = L\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$. 由①, V_{λ_i} 为T的不变子空间,且 $T(\xi_{ij}) = \lambda_i \xi_{ij}$,可得T在基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$ 下的矩阵



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



Page 8 of 64

Go Back

Full Screen

Close

并把它扩充为V的基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$, 故 $V = V_{\lambda_i} \oplus U$, 其中 $U = L\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$. 由①, V_{λ_i} 为T的不变子空间,且 $T(\xi_{ij}) = \lambda_i \xi_{ij}$,可得T在基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{t_i} C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} , \qquad (2-1)$$

其中 I_{t_i} 为 t_i 阶单位矩阵.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 8 of 64

Go Back

Full Screen

Close

并把它扩充为V的基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$, 故 $V = V_{\lambda_i} \oplus U$, 其中 $U = L\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$. 由①, V_{λ_i} 为T的不变子空间,且 $T(\xi_{ij}) = \lambda_i \xi_{ij}$,可得T在基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{t_i} C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} , \qquad (2-1)$$

其中 I_{t_i} 为 t_i 阶单位矩阵.

由于B和A相似,B应与A有相同的特征多项式,故 λ_i 是B的 k_i 重根. 但是,从(2-1)式知, $|\lambda I - B| = (\lambda - \lambda_i)^{t_i}q(\lambda)$,其中 $q(\lambda)$ 是矩阵D的特征多项式,这说明 λ_i 至少是B的 t_i 重根,故 $t_i > k_i$,矛盾! 所以dim $V_{\lambda_i} \leq k_i$.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 8 of 64

Go Back

Full Screen

Close

并把它扩充为V的基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$, 故 $V = V_{\lambda_i} \oplus U$, 其中 $U = L\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$. 由①, V_{λ_i} 为T的不变子空间,且 $T(\xi_{ij}) = \lambda_i \xi_{ij}$,可得T在基 $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-t_i}\}$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{t_i} C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} , \qquad (2-1)$$

其中 I_{t_i} 为 t_i 阶单位矩阵.

由于B和A相似,B应与A有相同的特征多项式,故 λ_i 是B的 k_i 重根. 但是,从(2-1)式知, $|\lambda I - B| = (\lambda - \lambda_i)^{t_i}q(\lambda)$,其中 $q(\lambda)$ 是矩阵D的特征多项式,这说明 λ_i 至少是B的 t_i 重根,故 $t_i > k_i$,矛盾! 所以dim $V_{\lambda_i} \leq k_i$.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 8 of 64

Go Back

Full Screen

Close

注 2.2 ① 此定理说明

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V,$$

并且 $\sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} \le \dim V = n.$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 9 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Out

注 2.2 ① 此定理说明

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V,$$

并且 $\sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} \le \dim V = n.$

如果
$$\sum_{i=1}^{s}\dim V_{\lambda_i}=n$$
,则有 $V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}=V.$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 9 of 64

Go Back

Full Screen

Close

注 2.2 ① 此定理说明

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V,$$

并且 $\sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} \le \dim V = n.$

如果
$$\sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} = n$$
,则有 $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V$.

② $\dim V_{\lambda_i}$ 称为特征值 λ_i 的几何重数, 而 k_i 称为 λ_i 的代数重数.



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





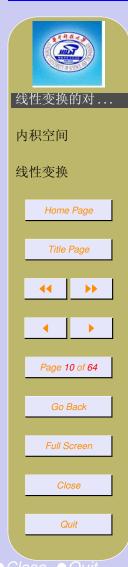
Page 9 of 64

Go Back

Full Screen

Close

例 2.1 求 $P_4[x]$ 上微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特征值与特征向量.



例 2.1 求 $P_4[x]$ 上微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特征值与特征向量.

解 取 $P_4[x]$ 中基 $\{1, x, x^2, x^3\}$,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在该基下矩阵是

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 10 of 64

Go Back

Full Screen

Close

例 2.1 求 $P_4[x]$ 上微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特征值与特征向量.

解 取 $P_4[x]$ 中基 $\{1, x, x^2, x^3\}$,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在该基下矩阵是

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

 $|\lambda I - A| = \lambda^4$, 所以线性变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





GO Back

Full Screen

Close

例 2.1 求 $P_4[x]$ 上微分变换 $\frac{d}{dx}$ 的特征值与特征向量.

解 取 $P_4[x]$ 中基 $\{1, x, x^2, x^3\}$,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在该基下矩阵是

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

 $|\lambda I - A| = \lambda^4$, 所以线性变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$

又从 $(0 \cdot I - A)$ **X** = **0**求得A关于 λ = 0的特征向量**X** = $k(1\ 0\ 0\ 0), k \neq 0$,所以 $\frac{d}{dx}$ 的特征向量为 $\xi = k \in P_4[x], k \neq 0$.

研究生公共基础课 第10页,共64页

矩阵论



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



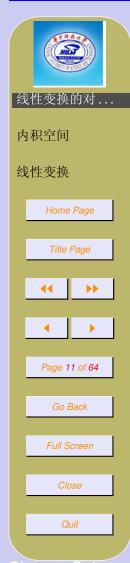


Go Back

Full Screen

Close

例 2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 证明AB = BA有相同的非零特征值.



例 2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 证明AB = BA有相同的非零特征值.



 \mathbf{M} 2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 证明AB = BA有相同的非零特征值.

因此, AB与BA有相同的特征值.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 11 of 64

Go Back

Full Screen

Close

 \mathbf{M} 2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 证明AB = BA有相同的非零特征值.

因此, AB与BA有相同的特征值.

对一般的情形, $AB \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $BA \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 取非奇异矩阵

$$\left(egin{array}{c} I_m \ A \ \mathbf{0} \ I_n \end{array}
ight),$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 11 of 64

Go Back

Full Screen

Close

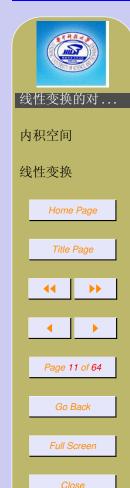
设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 证明AB = BA有 相同的非零特征值.

因此, AB与BA有相同的特征值.

对一般的情形, $AB \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $BA \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 取非奇异矩 阵

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}$$
,

由于



研究生公共基础课 第11页,共64页

矩阵论

$$\begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 12 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Ouit

$$\begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right| = \left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix}\right|,$$



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 12 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right| = \left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix}\right|,$$

从而 $\lambda^n \mid \lambda I - AB \mid = \lambda^m \mid \lambda I - BA \mid$.



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 12 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right| = \left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix}\right|,$$

从而 $\lambda^n \mid \lambda I - AB \mid = \lambda^m \mid \lambda I - BA \mid$.

対 $\lambda \neq 0$, 有 $|\lambda I - AB| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - BA| = 0$,



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 12 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Ouit

$$\begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right| = \left|\lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix}\right|,$$

从而 $\lambda^n \mid \lambda I - AB \mid = \lambda^m \mid \lambda I - BA \mid$.

 $\forall \lambda \neq 0$, 有 $|\lambda I - AB| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - BA| = 0$,

即AB与BA有一样的非零特征值,且代数重数也相同.■



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





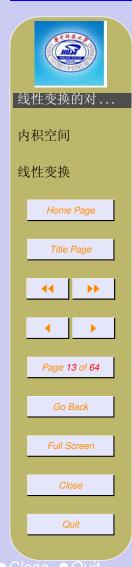
Page 12 of 64

Go Back

Full Screen

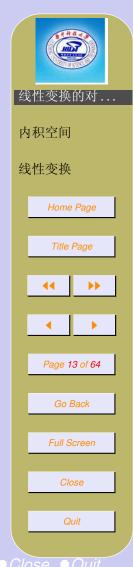
Close

2. 线性变换矩阵的对角化



2. 线性变换矩阵的对角化

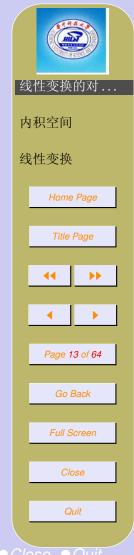
本段主要从变换T和空间分解的角度给出线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件.



2. 线性变换矩阵的对角化

本段主要从变换T和空间分解的角度给出线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件.

定理 2.3 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是T有n个线性无关的特征向量.



2. 线性变换矩阵的对角化

本段主要从变换T和空间分解的角度给出线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件.

定理 2.3 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是T有n个线性无关的特征向量.

证明 必要性: 设存在基 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, 使T的矩阵 为对角矩阵, 则有

$$T(\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_n) = (\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_n) \left(egin{array}{ccc} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{array} \right)$$

研究生公共基础课 第13页,共64页

What the third

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 14 of 64

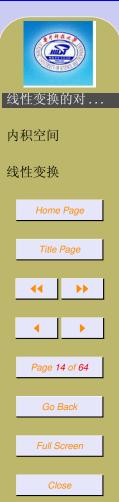
Go Back

Full Screen

Close

Out

它等价于 $T(\xi_i) = \lambda_i \xi_i, i = 1, 2, \dots, n$,



它等价于 $T(\xi_i) = \lambda_i \xi_i, i = 1, 2, \dots, n$,

所以 λ_i 为T的特征值, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 为T的n个线性无关的特征向量.



它等价于 $T(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, 所以 λ_i 为T的特征值, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 为T的n个线性无关的特征向量.

充分性: 若T有n个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$,则可取 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 为线性空间V的基, T在该基下的矩阵即为对角矩阵

$$\left(egin{array}{ccc} \lambda_1 & & & & \ & \lambda_2 & & & \ & & \ddots & & \ & & & \lambda_n \end{array}
ight)$$

其中 $λ_i$ 为 $ξ_i$ 所对应的特征值. ■



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 14 of 64

Go Back

Full Screen

Close

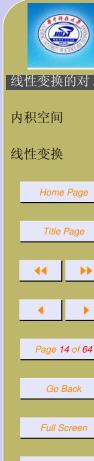
它等价于 $T(\xi_i) = \lambda_i \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, 所以 λ_i 为T的特征值, $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 为T的n个线性无关的特征向量.

充分性: 若T有n个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$,则可取 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ 为线性空间V的基, T在该基下的矩阵即为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $λ_i$ 为 $ξ_i$ 所对应的特征值. ■

前面已讨论过,特征子空间 V_{λ_i} 是T的不变子空间,特别地,线性变换T在不变子空间 V_{λ_i} 上矩阵为对角矩阵 $\lambda_i I_{t_i}$. 从

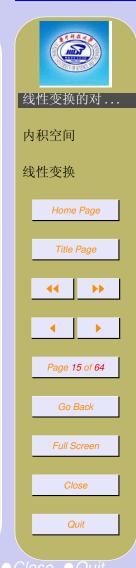


Close

Quit

研究生公共基础课 第14页,共64页 矩阵论 ● First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back ● Full Screen

空间分解的角度,我们有下列定理:



空间分解的角度,我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换*T*有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$



Go Back

空间分解的角度,我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换*T*有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

推论 2.1 若线性变换T有n个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则必有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V,$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 15 of 64

Go Back

Full Screen

Close

空间分解的角度,我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换*T*有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

推论 2.1 若线性变换T有n个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则必有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V,$$

从而T有对角线上元素互异的对角矩阵表示.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 15 of 64

Go Back

Full Screen

Close

空间分解的角度,我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换*T*有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

推论 2.1 若线性变换T有n个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则必有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V,$$

从而T有对角线上元素互异的对角矩阵表示.

推论 2.2 线性变换*T*有对角矩阵表示的充分必要条件是*V*可分解成*T*的一维不变子空间的直和. 研究生公共基础课 第15页,共64页 矩阵论



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 15 of 64

Go Back

Full Screen

Close



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 16 of 64

Go Back

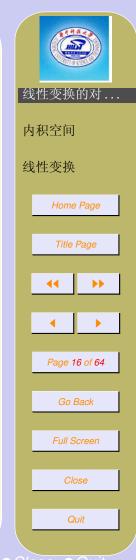
Full Screen

Close

Out

例 2.3 证明 $P_4[x]$ 上的微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 没有对角矩阵表

示.



例 2.3 证明 $P_4[x]$ 上的微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 没有对角矩阵表示.

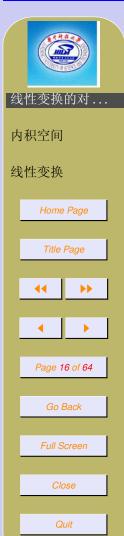
证明 从例2.1知, $\lambda = 0$ 是微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的四重特征值, $\mathrm{mdim}\,V_{\lambda=0} = 1 < 4$,所以T没有对角矩阵表示. ■



例 2.3 证明 $P_4[x]$ 上的微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 没有对角矩阵表示.

证明 从例2.1知, $\lambda = 0$ 是微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的四重特征值, $\mathrm{mdim}\,V_{\lambda=0} = 1 < 4$,所以T没有对角矩阵表示. ■

当线性变换T有对角矩阵表示时,我们也常简称为线性变换T可对角化.



例 2.3 证明 $P_4[x]$ 上的微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 没有对角矩阵表示.

证明 从例2.1知, $\lambda = 0$ 是微分变换 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的四重特征值, $\mathrm{mdim}\,V_{\lambda=0} = 1 < 4$,所以T没有对角矩阵表示. ■

当线性变换T有对角矩阵表示时,我们也常简称为线性变换T可对角化.

例 2.4 n阶方阵A, 若满足条件 $A^2 = A$, 则称A为幂等矩阵; 若满足 $A^2 = I$, 则称A为乘方矩阵. 证明

研究生公共基础课 第16页,共64页 矩阵论



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 16 of 64

Go Back

Full Screen

Close

- ① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$,其中r为矩阵A的秩.
- ② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_s \\ -I_t \end{pmatrix}$, 其中s+t=n.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 17 of 64

Go Back

Full Screen

Close

- ① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$,其中r为矩阵A的秩.
- ② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_s \\ -I_t \end{pmatrix}$, 其中s+t=n.

证明 充分性是显然的,下证必要性.



- ① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$,其中r为矩阵A的秩.
- ② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_s \\ -I_t \end{pmatrix}$, 其中s+t=n.

证明 充分性是显然的,下证必要性.

① 设 λ 是幂等矩阵的特征值,则从 $A^2 = A$ 可导出 λ 满足条件 $\lambda^2 = \lambda$,因此 $\lambda = 1$ 或0.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

.....







Go Back

Full Screen

Close

- A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 其中r为矩阵A的秩.
- A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_s \\ -I_t \end{pmatrix}$, 其中s+t=n.

证明 充分性是显然的,下证必要性.

① 设 λ 是幂等矩阵的特征值,则从 $A^2 = A$ 可导出 λ 满足条 件 $\lambda^2 = \lambda$, 因此 $\lambda = 1$ 或0. 又dim $V_{\lambda=1} = n - \text{rank}(I - A)$, $\dim V_{\lambda=0} = n - \operatorname{rank}(0 \cdot I - A) = n - \operatorname{rank}(A).$



内积空间

线性变换





Page 17 of 64

研究生公共基础课

第17页,共64页

矩阵论



Close

 $\mathcal{M}A^2 = A \Rightarrow A(I-A) = \mathbf{0} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I-A) \leq n,$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

从上面两个不等式导出结论 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 18 of 64

Go Back

Full Screen

Close

从上面两个不等式导出结论 ${\rm rank}(A)+{\rm rank}(I-A)=n.$ 从而

 $\dim V_{\lambda=1} + \dim V_{\lambda=0} = 2n - [\operatorname{rank}(I-A) + \operatorname{rank}(A)] = n,$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 18 of 64

Go Back

Full Screen

Close

从上面两个不等式导出结论 ${\rm rank}(A)+{\rm rank}(I-A)=n.$ 从而

 $\dim V_{\lambda=1} + \dim V_{\lambda=0} = 2n - [\operatorname{rank}(I-A) + \operatorname{rank}(A)] = n,$ 即A有n个线性无关的特征向量. 所以A相似于对角矩

阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ddots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i = 1$ 或0.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 18 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第18页,共64页

左 Saak O E

矩阵论

Close •

• Опі



Title Page







Page 19 of 64

Go Back

Full Screen

Close

从
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
得,当 $\operatorname{rank}(A) = r$ 时, A 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



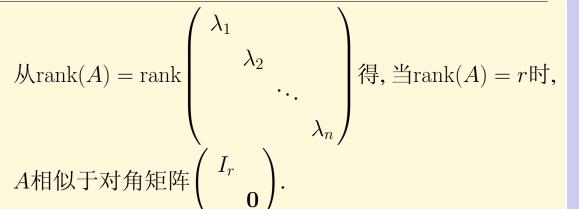


Page 19 of 64

Go Back

Full Screen

Close



② 从 $A^2 = I$ 得出A的特征值是 $\lambda = 1$ 或-1.



线性变换的对..

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



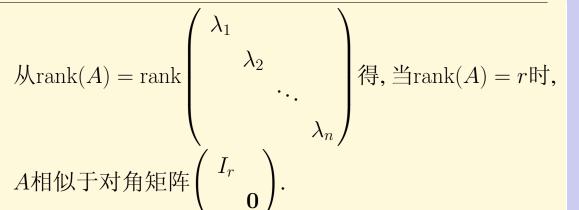


Page 19 of 64

Go Back

Full Screen

Close



② 从 $A^2 = I$ 得出A的特征值是 $\lambda = 1$ 或-1. 又 $A^2 = I$ 时, A为可逆矩阵, $\operatorname{rank}(A) = n$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



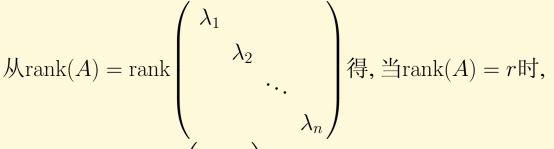


Page 19 of 64

Go Back

Full Screen

Close



A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

② 从 $A^2 = I$ 得出A的特征值是 $\lambda = 1$ 或-1.

又
$$A^2 = I$$
时, A 为可逆矩阵, $\operatorname{rank}(A) = n$.

由于

$$A^{2} = I \Rightarrow (I - A)(-I - A) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(-I - A) \le n,$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page

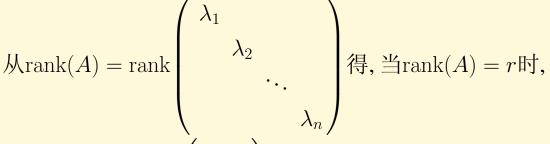




Go Back

Full Screen

Close



A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

② 从 $A^2 = I$ 得出A的特征值是 $\lambda = 1$ 或-1.

又
$$A^2 = I$$
时, A 为可逆矩阵, $rank(A) = n$.

由于

$$A^{2} = I \Rightarrow (I - A)(-I - A) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(-I - A) \le n,$$

$$(I - A) + (-I - A) = -2A$$

研究生公共基础课 第19页,共64页

矩阵论



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 19 of 64

Go Back

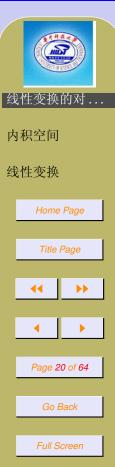
Full Screen

Close

Quit

Close • Q

 $\Rightarrow {\rm rank}(I-A) + {\rm rank}(-I-A) \geq n,$



Close

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(-I - A) \ge n,$$

故
$$\operatorname{rank}(I-A) + \operatorname{rank}(-I-A) = n$$
. 因此

$$\dim V_{\lambda=1} + \dim V_{\lambda=-1} = 2n - [\operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(-I - A)] = n,$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 20 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(-I - A) \ge n,$$

$$\operatorname{brank}(I-A) + \operatorname{rank}(-I-A) = n$$
. 因此

$$\dim V_{\lambda=1} + \dim V_{\lambda=-1} = 2n - [\operatorname{rank}(I - A) + \operatorname{rank}(-I - A)] = n,$$

从而A可相似于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} I_s \\ -I_t \end{pmatrix}$$
,

其中 $s+t=\dim V_{\lambda=1}+\dim V_{\lambda=-1}=n$.



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page

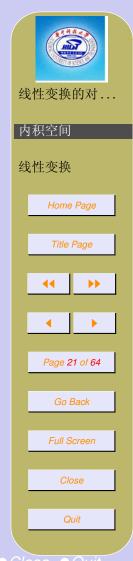






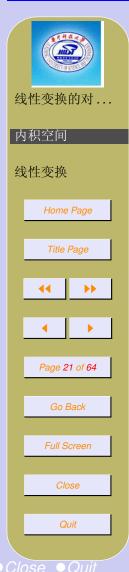
Go Back

§2.2 Jordan矩阵介绍



§2.2 Jordan矩阵介绍

1. Jordan矩阵



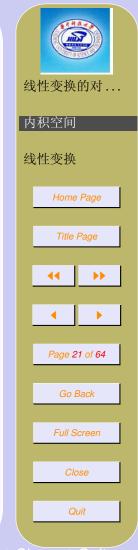
§2.2 Jordan矩阵介绍

1. Jordan矩阵

定义 2.3 形如

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{2-3}$$

的r阶方阵称为一个r阶Jordan块, 其中 λ 是复数.



Jordan矩阵介绍

Jordan矩阵

定义 2.3 形如

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{2-3}$$

的r阶方阵称为一个r阶Jordan块, 其中 λ 是复数. 由若干 个Jordan块 $J_i(\lambda_i)$ 构成的准对角矩阵



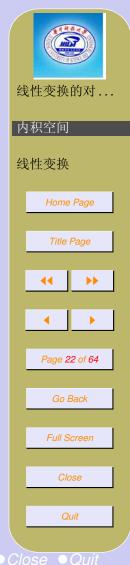
研究生公共基础课

第21页,共64页

矩阵论

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix},$$
 (2-4)

称为Jordan矩阵.



$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}, \qquad (2-4)$$

称为Jordan矩阵.

例如

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(5) & & & \\ & J_2(2) & & \\ & & J_3(i) \end{pmatrix}$$

研究生公共基础课 第22页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



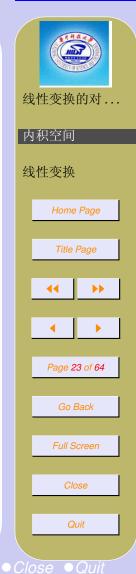


Go Back

Full Screen

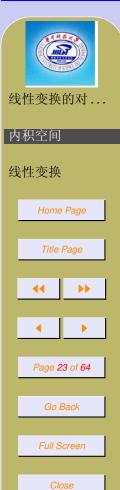
Close

就是一个5阶Jordan矩阵,它的三个Jordan块分别是



就是一个5阶Jordan矩阵,它的三个Jordan块分别是

$$J_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{pmatrix}; J_2(2) = (2); J_3(i) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ & i \end{pmatrix}.$$



就是一个5阶Jordan矩阵,它的三个Jordan块分别是

$$J_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{pmatrix}; J_2(2) = (2); J_3(i) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ & i \end{pmatrix}.$$

Jordan矩阵是准对角形矩阵, 呈上三角形, 对角线上是它的全部特征值. Jordan块的特点是主对角线上元素相等, 紧邻上方元素 $a_{ii+1} = 1$, 其余元素为0. Jordan块都是一阶的Jordan矩阵就是对角矩阵.



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 23 of 64

Go Back

Full Screen

Close

就是一个5阶Jordan矩阵,它的三个Jordan块分别是

$$J_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{pmatrix}; J_2(2) = (2); J_3(i) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ & i \end{pmatrix}.$$

Jordan矩阵是淮对角形矩阵,呈上三角形,对角线上是它的全部特征值. Jordan块的特点是主对角线上元素相等,紧邻上方元素 $a_{ii+1}=1$,其余元素为0. Jordan块都是一阶的Jordan矩阵就是对角矩阵.

定理 2.5 设T是复数域上n维线性空间V的一个线性变换, 在V中必定存在一组基, 使T在这组基下的矩阵是Jordan矩阵, 并且这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外, 是被T惟一决定的, 它称为T的Jordan标准形.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page







Page 23 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第23页,共64页

act OCo Dook O

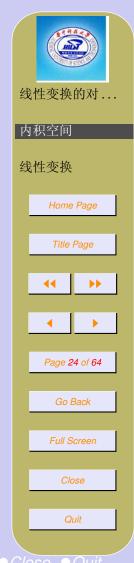
矩阵论

• Close

• 0

上述结果用矩阵的话说就是:

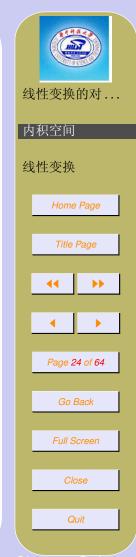
定理 2.6 每个n阶复数矩阵A都与一个Jordan矩阵相似,这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外,是被矩阵A惟一决定的,它称为A的Jordan标准形.



上述结果用矩阵的话说就是:

定理 2.6 每个n阶复数矩阵A都与一个Jordan矩阵相似,这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外,是被矩阵A惟一决定的,它称为A的Jordan标准形.

2. 用 λ -矩阵构造Jordan标准形

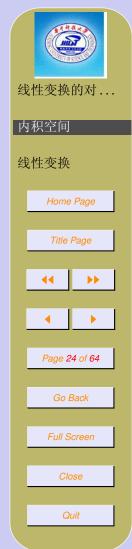


上述结果用矩阵的话说就是:

定理 2.6 每个n阶复数矩阵A都与一个Jordan矩阵相似,这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外,是被矩阵A惟一决定的,它称为A的Jordan标准形.

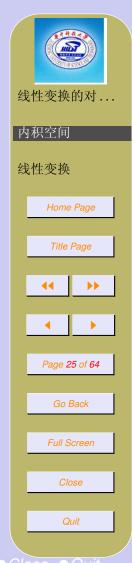
2. 用 λ -矩阵构造Jordan标准形

若一个矩阵的元是 λ 的多项式,就称为 λ -矩阵.



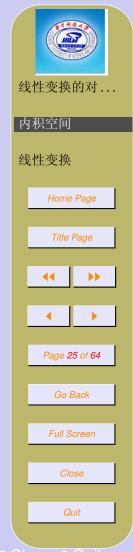
定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;



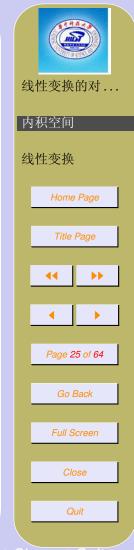
定义 2.4 下面的三种变换称为 λ -矩阵的 $\overline{0}$ 7等变换:

- ① 矩阵的两行(列)互换位置;
- ② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;



定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

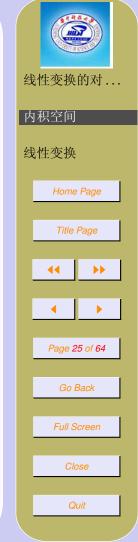
- ① 矩阵的两行(列)互换位置;
- ② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;
- ③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍, $\varphi(\lambda)$ 是一个多项式.



定义 2.4 下面的三种变换称为 λ -矩阵的 $\overline{0}$ 7等变换:

- ① 矩阵的两行(列)互换位置;
- ② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;
- ③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍, $\varphi(\lambda)$ 是一个 多项式.

定义 2.5 如果 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可以经过一系列初等变换 化为 $B(\lambda)$,则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

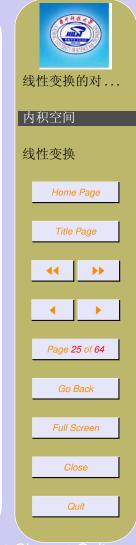


定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

- ① 矩阵的两行(列)互换位置;
- ② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;
- ③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍, $\varphi(\lambda)$ 是一个多项式.

定义 2.5 如果 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可以经过一系列初等变换 化为 $B(\lambda)$, 则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

我们不加证明地给出以下定理:



定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

- ① 矩阵的两行(列)互换位置;
- ② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;
- ③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍, $\varphi(\lambda)$ 是一个 多项式.

定义 2.5 如果 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 可以经过一系列初等变换 化为 $B(\lambda)$,则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

我们不加证明地给出以下定理:

研究生公共基础课 第25页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





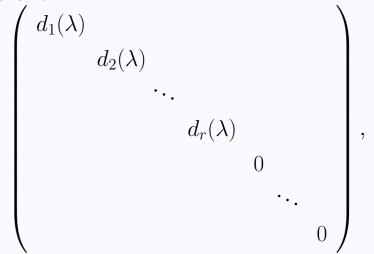


Go Back

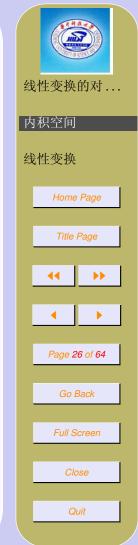
Full Screen

Close

定理 2.7 任意一个非零的 $s \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 都惟一 地等价于标准形:



其中 $r \geq 1$, $d_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 是首项系数为1的多项式, 且 $d_i(\lambda)$ 整除 $d_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$.



研究生公共基础课

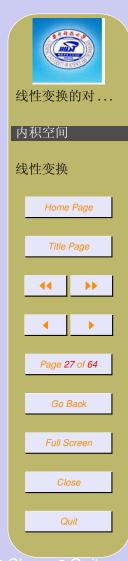
第26页,共64页

Last • Go Back • I

矩阵论

Close •

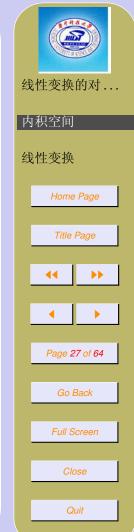
定义 2.6 标准形的主对角线上非零元 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 称为 λ -矩阵的不变因子.



定义 2.6 标准形的主对角线上非零元 $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, · · · , $d_r(\lambda)$ 称为 λ -矩阵的不变因子.

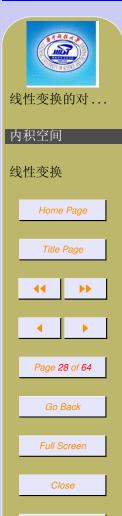
矩阵A的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的不变因子以后就简称为A的不变因子.

定义 2.7 把矩阵A(或线性变换T)的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为矩阵A(或线性变换T)的初等因子.



例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是 $\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{9}$, $(\lambda-1)^2$,

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$



设12阶矩阵的不变因子是1, 1, \cdots , 1, $(\lambda-1)^2$, 例 2.5 9个

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

按定义,它的初等因子有7个,即 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2$. 其中 $(\lambda-1)^2$ 出现三次, $\lambda+1$ 出 现两次.



Title Page





Page 28 of 64

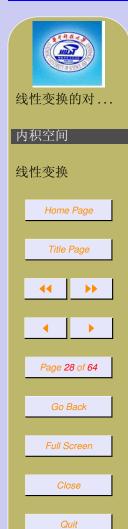
Go Back

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是 $\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{9}$, $(\lambda - 1)^2$,

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

按定义, 它的初等因子有7个, 即 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1,\lambda+1,(\lambda-i)^2$, $(\lambda+i)^2$. 其中 $(\lambda-1)^2$ 出现三次, $\lambda+1$ 出现两次.

定理 2.8 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.



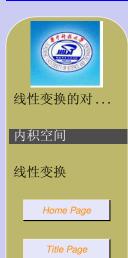
例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是 $\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{9}$, $(\lambda - 1)^2$,

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

按定义, 它的初等因子有7个, 即 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1,\lambda+1,(\lambda-i)^2$, $(\lambda+i)^2$. 其中 $(\lambda-1)^2$ 出现三次, $\lambda+1$ 出现两次.

定理 2.8 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

下面的定理给出了一个求初等因子的方法,它不必事先知道不变因子.



Page 28 of 64

Go Back

Full Screen

Close

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是 $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{0}$, $(\lambda - 1)^2$,

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2.$$

接定义, 它的初等因子有7个, 即 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1,\lambda+1,(\lambda-i)^2$, $(\lambda+i)^2$. 其中 $(\lambda-1)^2$ 出现三次, $\lambda+1$ 出现两次.

定理 2.8 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

下面的定理给出了一个求初等因子的方法,它不必事先知道不变因子.

研究生公共基础课 第28页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



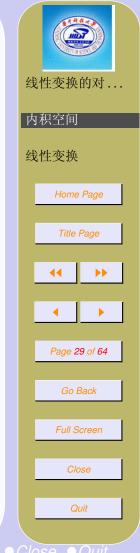
Page 28 of 64

Go Back

Full Screen

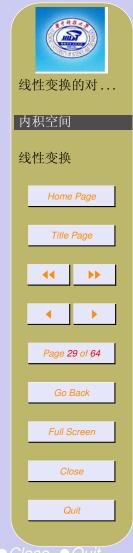
Close

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为对角形,然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.



定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为对角形,然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块 $(J_i(\lambda_i))_{k_i \times k_i}$ 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

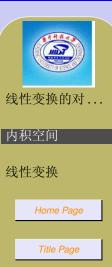


定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为对角形,然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块 $(J_i(\lambda_i))_{k_i \times k_i}$ 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵 $J(\lambda)$ 的全部初等因子是:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, (\lambda - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$



Page 29 of 64

Go Back

Full Screen

Close

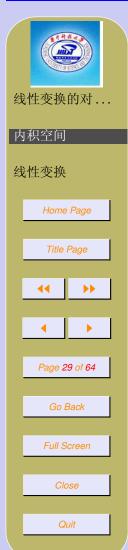
定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为对角形,然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块 $(J_i(\lambda_i))_{k_i \times k_i}$ 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵 $J(\lambda)$ 的全部初等因子是:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}$$
, $(\lambda - \lambda_2)^{k_2}$, \cdots , $(\lambda - \lambda_s)^{k_s}$.

根据代数学基本定理,这也是矩阵A的初等因子.



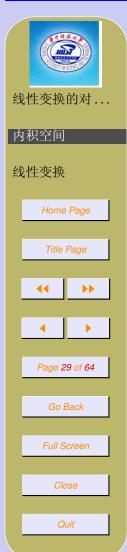
定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为对角形,然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块 $(J_i(\lambda_i))_{k_i \times k_i}$ 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵 $J(\lambda)$ 的全部初等因子是:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, (\lambda - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

根据代数学基本定理, 这也是矩阵A的初等因子. 所以, A相似于Jordan矩阵 $J(\lambda)$.



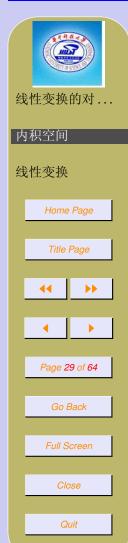
定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I - A$ 为对角形,然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块 $(J_i(\lambda_i))_{k_i \times k_i}$ 的初等因子是 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵 $J(\lambda)$ 的全部初等因子是:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, (\lambda - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

根据代数学基本定理, 这也是矩阵A的初等因子. 所以, A相似于Jordan矩阵 $J(\lambda)$.



研究生公共基础课

第29页,共64页

矩阵论

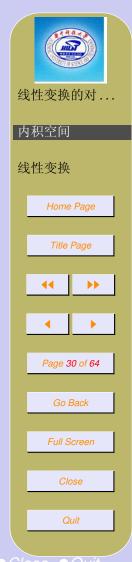
Full Screen

• Close • C

例 2.6 求矩阵

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

的Jordan标准形.



例 2.6 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的Jordan标准形.

解 首先求 $\lambda I - A$ 的初等因子:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\lambda + 1 & -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \\ 0 & \lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

矩阵论

线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page

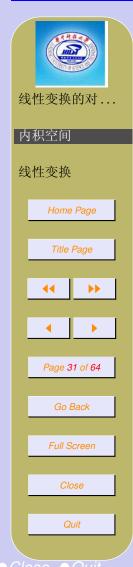




Page 30 of 64

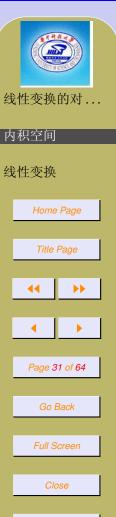


因此, A的初等因子是 $\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, 所以A的Jordan标准形是



因此, A的初等因子是 $\lambda - 1$, $(\lambda - 1)^2$, 所以A的Jordan标准形是

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \blacksquare$$



因此, A的初等因子是 $\lambda - 1$, $(\lambda - 1)^2$, 所以A的Jordan标准形是

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \blacksquare$$



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 31 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第31页,共64页

Last OGn Ra

矩阵论

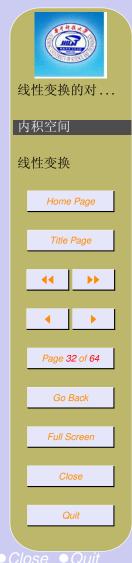
• Close

• (2)

例 2.7 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J及P, 使 $P^{-1}AP = J$.



设 例 2.7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J及P, 使 $P^{-1}AP = J$.

解 用初等变换把 $\lambda I - A$ 化成对角形矩阵.

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

矩阵论

线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page

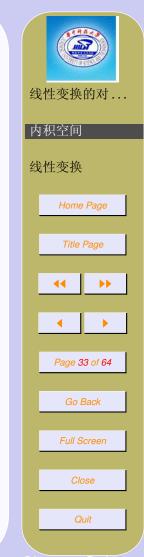




Page 32 of 64

研究生公共基础课

第32页,共64页



$$\frac{r(2) \times (\lambda - 3) + r(1)}{r(3) \times (-\lambda) + r(4)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda - 1)^2 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\
-(\lambda + 3) & -1 & \lambda - 2 & -(\lambda - 1)^2 \\
5\lambda - 1 & 5 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 33 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\frac{r2\times(\lambda-3)+r1}{r3\times(-\lambda)+r4} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda-1)^2 & \lambda+1 & 0 & 0 \\
-(\lambda+3) & -1 & \lambda-2 & -(\lambda-1)^2 \\
5\lambda-1 & 5 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\frac{l(1) \times (-(\lambda+1)) + l(2)}{l(1) \times (-1) + l(3), \ l(1) \times (5) + l(4)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda - 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\
-(\lambda + 3) & 0 & \lambda - 2 & -(\lambda - 1)^2 \\
5\lambda - 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 33 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\frac{r(2) \times (\lambda - 3) + r(1)}{r(3) \times (-\lambda) + r(4)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda - 1)^2 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\
-(\lambda + 3) & -1 & \lambda - 2 & -(\lambda - 1)^2 \\
5\lambda - 1 & 5 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\frac{l(1) \times (-(\lambda+1)) + l(2)}{l(1) \times (-1) + l(3), \ l(1) \times (5) + l(4)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda - 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\
-(\lambda + 3) & 0 & \lambda - 2 & -(\lambda - 1)^2 \\
5\lambda - 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{l \underbrace{(4) \times (2 - \lambda) + l \underbrace{3}}_{\text{5}\lambda - 1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda - 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -5(\lambda - 1)^2 & 0 & 0 & -(\lambda - 1)^2 \\ 5\lambda - 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Co Pook

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

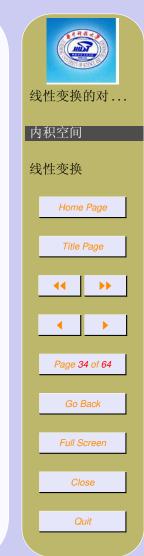
第33页,共64页

Nact AGo Rad

矩阵论

Class

Qu



$$\frac{r(4)\times(-5)+r(1)}{r(3)\times(1-5\lambda)+r(1)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





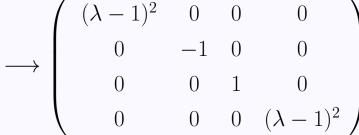
Page 34 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\frac{r(4)\times(-5)+r(1)}{r(3)\times(1-5\lambda)+r(1)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$





线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 34 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$\frac{r(4)\times(-5)+r(1)}{r(3)\times(1-5\lambda)+r(1)} \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} (\lambda - 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{array} \right)$$

A的初等因子为 $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, 相应的Jordan块为



内积空间

线性变换

Home Page

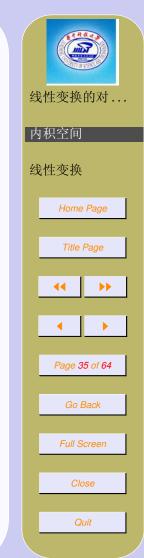
Title Page





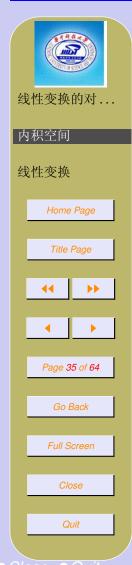
Page 34 of 64

Go Back



故A的Jordan标准形为

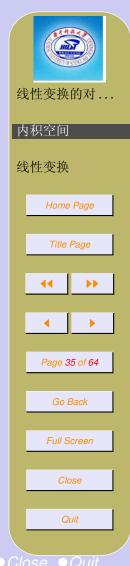
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



故A的Jordan标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求P使 $P^{-1}AP = J$.



故A的Jordan标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求P使 $P^{-1}AP=J$.

由
$$P^{-1}AP = J$$
, 得 $AP = PJ$, 令 $P = (\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \mathbf{X}_3 \ \mathbf{X}_4)$,

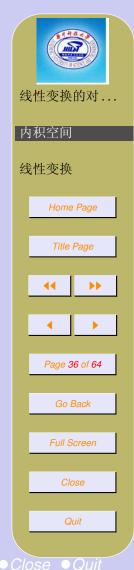
由

$$A(\boldsymbol{X}_1 \ \boldsymbol{X}_2 \ \boldsymbol{X}_3 \ \boldsymbol{X}_4) = (\boldsymbol{X}_1 \ \boldsymbol{X}_2 \ \boldsymbol{X}_3 \ \boldsymbol{X}_4) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ \hline 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 1 \end{array} \right),$$



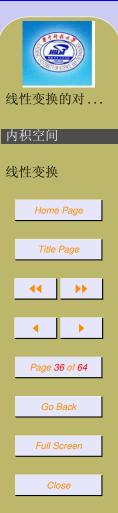
矩阵论

得



$$AX_1 = X_1,$$

 $AX_2 = X_1 + X_2,$
 $AX_3 = X_3,$
 $AX_4 = X_3 + X_4,$



$$AX_1 = X_1,$$

$$A\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2,$$

$$AX_3 = X_3,$$

$$AX_4 = X_3 + X_4,$$

从而有

$$(I-A)\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{0}, \tag{2-5}$$

$$(A-I)\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1, \tag{2-6}$$

$$(I - A)\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{0},\tag{2-7}$$

$$(A-I)\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{X}_3. \tag{2-8}$$



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 36 of 64

Go Back

Full Screen

Close

得

$$AX_1 = X_1,$$

$$A\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2,$$

$$AX_3 = X_3$$

$$AX_4 = X_3 + X_4,$$

从而有

$$(I-A)\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{0}, \tag{2-5}$$

$$(A-I)\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1, \tag{2-6}$$

$$(I - A)\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{0},\tag{2-7}$$

$$(A-I)\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{X}_3. \tag{2-8}$$

解方程组(I - A)**X** = **0**, 求得A的属于 λ = 1的两个特征向量**X**₁ = $(1 - 2 - 4 0)^T$, **X**₃ = $(0 0 1 - 1)^T$.

研究生公共基础课

第36页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





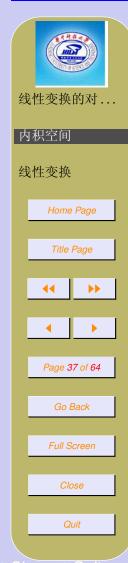
Page 36 of 64

Go Back

Full Screen

Close

把 X_1 代入方程组(2-6), 求得一个解 $X_2 = (0\ 1\ -6\ 1)^T$.



把 X_1 代入方程组(2-6), 求得一个解 $X_2 = (0\ 1\ -6\ 1)^T$.

把 X_3 代入方程组(2-8), 求得一个解 $X_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$.



把 X_1 代入方程组(2-6), 求得一个解 $X_2 = (0\ 1\ -6\ 1)^T$.

把 X_3 代入方程组(2 - 8), 求得一个解 $X_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$. 于是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





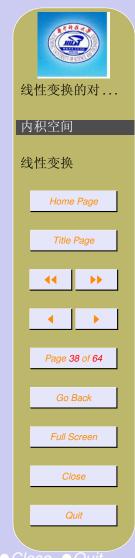
Page 37 of 64

Go Back

Full Screen

Close

3. 用分析确定法构造Jordan标准形



3. 用分析确定法构造Jordan标准形

我们介绍另一种构造Jordan标准形 J_A 及相应变换矩阵P的方法,这就是以存在定理为前提的分析确定法.

设A的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

其中 λ_i 是A的 k_i 重特征值. $\sum_{i=1}^s k_i = n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互异, 所

以

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}, \tag{2-9}$$

线性变换的对 内积空间 线性变换 Home Page Page 38 of 64 Go Back

Quit

研究生公共基础课

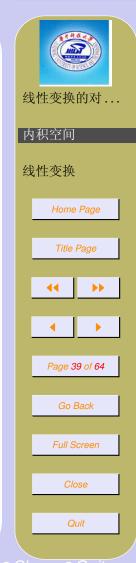
第38页,共64页

矩阵论

ıll Screen ●Clo

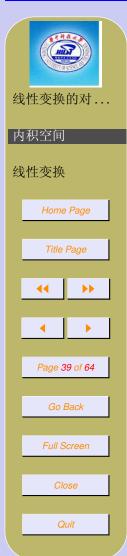
Close Qu

 $J_i(\lambda_i)$ 是主对角线元素为 λ_i 的 k_i 阶Jordan矩阵. 它是同一特征值 λ_i 对应的Jordan块放在一起得到的Jordan矩阵.



 $J_i(\lambda_i)$ 是主对角线元素为 λ_i 的 k_i 阶Jordan矩阵. 它是同一特征值 λ_i 对应的Jordan块放在一起得到的Jordan矩阵.

把相似变换的可逆矩阵P依(2 - 9)式所示 J_A 的结构,相应取 k_1 列, k_2 列, ···, k_s 列分块为 $P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_s)$, $p_i \in \mathbb{C}^{n \times k_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $AP = PJ_A$ 可表示为 $(Ap_1 \ Ap_2 \ \cdots \ Ap_s) = (p_1J_1(\lambda_1) \ p_2J_2(\lambda_2) \ \cdots \ p_sJ_s(\lambda_s))$



 $J_i(\lambda_i)$ 是主对角线元素为 λ_i 的 k_i 阶Jordan矩阵. 它是同一特征值 λ_i 对应的Jordan块放在一起得到的Jordan矩阵.

把相似变换的可逆矩阵P依(2 - 9)式所示 J_A 的结构,相应取 k_1 列, k_2 列, ···, k_s 列分块为 $P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_s)$, $p_i \in \mathbb{C}^{n \times k_i}$, $i = 1, 2, \cdots$,s, $AP = PJ_A$ 可表示为 $(Ap_1 \ Ap_2 \ \cdots \ Ap_s) = (p_1J_1(\lambda_1) \ p_2J_2(\lambda_2) \ \cdots \ p_sJ_s(\lambda_s))$

$$Ap_i = p_i J_i(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, s.$$
 (2-10)



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 39 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

从而有

我们不妨取 $Ap_1 = p_1 J_1(\lambda_1)$ 为代表来分析. 设

$$J_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} J_{11}(\lambda_1) & & & \\ & J_{12}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{1t}(\lambda_1) \end{pmatrix},$$

其中 J_{1i} 为 n_i 阶Jordan块, $\sum_{i=1}^{n} n_i = k_i$. 故

$$J_{1i}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$
 (2-11)



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 40 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第40页,共64页

Nact AGo Ra

矩阵论

• Close

再把 p_1 依 n_1 列, n_2 列, ..., n_t 列分块, $p_1 = (p_1^{(1)} p_2^{(1)} \cdots p_t^{(1)})$,

从(2-10)式有

$$Ap_j^{(1)} = p_j^{(1)} J_{1j}(\lambda_1), j = 1, 2, \dots, t.$$
 (2-12)



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 41 of 64

Go Back

Full Screen

Close

再把 p_1 依 n_1 列, n_2 列, ..., n_t 列分块, $p_1 = (p_1^{(1)} p_2^{(1)} \cdots p_t^{(1)})$,

$$Ap_j^{(1)} = p_j^{(1)} J_{1j}(\lambda_1), j = 1, 2, \dots, t.$$
 (2-12)

设
$$p_j^{(1)} = (\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}), 用(2-11)$$
式, $(2-12)$ 式化为

$$A(\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}) = (\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \ 1 \\ \lambda_1 \ 1 \\ & \ddots \ 1 \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 41 of 64

Go Back

Full Screen

Close

再把 p_1 依 n_1 列, n_2 列, \dots , n_t 列分块, $p_1 = (p_1^{(1)} p_2^{(1)} \dots p_t^{(1)})$,

$$Ap_j^{(1)} = p_j^{(1)} J_{1j}(\lambda_1), j = 1, 2, \dots, t.$$
 (2-12)

设
$$p_j^{(1)} = (\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}), 用(2-11)$$
式, $(2-12)$ 式化为

$$A(\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}) = (\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \ 1 \\ \lambda_1 \ 1 \\ & \ddots \ 1 \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$



线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page





Page 41 of 64

研究生公共基础课 第41页,共64页 矩阵论

上述矩阵等价于如下的方程组

$$\begin{cases}
(A - \lambda_1 I)\alpha_1 = 0, \\
(A - \lambda_1 I)\beta_2 = \alpha_1, \\
(A - \lambda_1 I)\beta_3 = \beta_2, \\
\vdots \\
(A - \lambda_1 I)\beta_{n_j} = \beta_{n_j - 1}.
\end{cases}$$
(2-13)









Page 42 of 64

Go Back

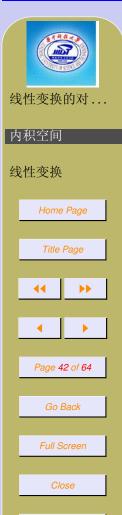
Full Screen

Close

上述矩阵等价于如下的方程组

$$\begin{cases}
(A - \lambda_1 I)\alpha_1 = 0, \\
(A - \lambda_1 I)\beta_2 = \alpha_1, \\
(A - \lambda_1 I)\beta_3 = \beta_2, \\
\vdots \\
(A - \lambda_1 I)\beta_{n_j} = \beta_{n_j - 1}.
\end{cases}$$
(2-13)

从(2 – 13)式求得一组向量 $\{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_j}\}$, 我们称之为Jordan链. 链中的第一个向量 α_1 是特征向量, $\beta_2, \dots, \beta_{n_j}$ 称为广义特征向量. 链的长度 n_j 就是 $J_{1j}(\lambda_1)$ 的阶数. (2 – 13)式给出一个递归过程, 该过程到线性方程组 $(A - \lambda_1 I)\beta_{n_j+1} = \beta_{n_j}$ 无解时终止.

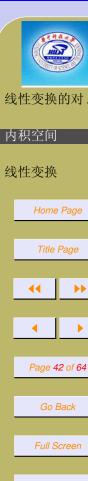


上述矩阵等价于如下的方程组

$$\begin{cases}
(A - \lambda_1 I)\alpha_1 = 0, \\
(A - \lambda_1 I)\beta_2 = \alpha_1, \\
(A - \lambda_1 I)\beta_3 = \beta_2, \\
\vdots \\
(A - \lambda_1 I)\beta_{n_j} = \beta_{n_j - 1}.
\end{cases}$$
(2-13)

从(2-13)式求得一组向量 $\{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_i}\}$,我们称之 为Jordan链. 链中的第一个向量 α_1 是特征向量, $\beta_2, \dots, \beta_{n_i}$ 称 为广义特征向量. 链的长度 n_i 就是 $J_{1i}(\lambda_1)$ 的阶数. (2-13)式 给出一个递归过程, 该过程到线性方程组 $(A - \lambda_1 I)\beta_{n_i+1} =$ β_{n_i} 无解时终止.

我们把上述计算步骤归纳如下:



① 求A的特征多项式

 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互异, 则 λ_i 为A的 k_i 重特征值, 其代数重数 k_i 决定Jordan矩阵 $J_i(\lambda_i)$ 的阶数为 k_i .

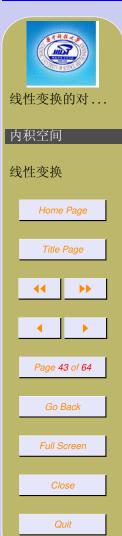


① 求A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互异, 则 λ_i 为 A 的 k_i 重特征值, 其代数重数 k_i 决定Jordan矩阵 $J_i(\lambda_i)$ 的阶数为 k_i .

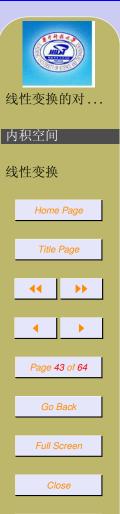
② 对于每一个 λ_i ,由 $(A - \lambda_i I)X = 0$,求出A的线性无关的特征向量 α_1 , α_2 ,…, α_{t_i} . 几何重数 t_i 决定 $J_i(\lambda_i)$ 中有 t_i 个Jordan块.



① 求A的特征多项式

 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互异, 则 λ_i 为A的 k_i 重特征值, 其代数重数 k_i 决定Jordan矩阵 $J_i(\lambda_i)$ 的阶数为 k_i .

- ② 对于每一个 λ_i ,由 $(A \lambda_i I)X = 0$,求出A的线性无关的特征向量 α_1 , α_2 ,…, α_{t_i} . 几何重数 t_i 决定 $J_i(\lambda_i)$ 中有 t_i 个Jordan块.
- ③ 若 $k_i = t_i$,则 λ_i 对应的Jordan矩阵为 k_i 阶对角矩阵. 若 $t_i < k_i$,则选择适当的特征向量 α_i ,由(2 – 13)式确定Jordan链的长度 n_i ,从而得到 J_A 的结构.



① 求A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互异, 则 λ_i 为 A 的 k_i 重特征值, 其代数重数 k_i 决定Jordan矩阵 $J_i(\lambda_i)$ 的阶数为 k_i .

- ② 对于每一个 λ_i ,由 $(A \lambda_i I)X = 0$,求出A的线性无关的特征向量 α_1 , α_2 ,…, α_{t_i} . 几何重数 t_i 决定 $J_i(\lambda_i)$ 中有 t_i 个Jordan块.
- ③ 若 $k_i = t_i$,则 λ_i 对应的Jordan矩阵为 k_i 阶对角矩阵. 若 $t_i < k_i$,则选择适当的特征向量 α_i ,由(2 – 13)式确定Jordan链的长度 n_i ,从而得到 J_A 的结构.
- ④ 所有Jordan链构成的矩阵P就是Jordan标准形的变换 矩阵.

矩阵.
研究生公共基础课 第43页,共64页 矩阵论
• First • Prev • Next • Last • Go Back • Full Screen



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





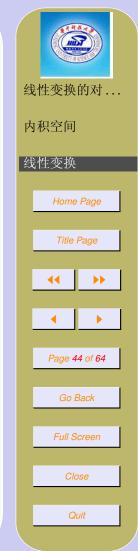
Page 43 of 64

Go Back

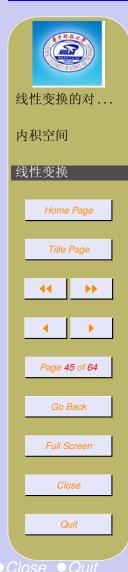
Full Screen

Close

一个方阵 $A_{n\times n}$ 的Jordan标准形J在和矩阵A相似的一切矩阵构成的相似类中,是形式最简单的. A和J又都具有相似不变性,因此,在讨论关于A的一些问题时,常利用J的简单形式,先就J进行讨论,得到A的相应结论,这就是Jordan化方法. 这一节用Jordan化方法先讨论A的矩阵多项式的计算问题,由此证明Cayley定理,再给出矩阵A的最小多项式及其性质.



1. 矩阵多项式



1. 矩阵多项式

定义 2.8 设 $A \in F^{n \times n}$, $a_i \in F$, $g(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$ 是一个多项式,则称矩阵 $g(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$ 为A的矩阵多项式.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

1. 矩阵多项式

定义 2.8 设 $A \in F^{n \times n}$, $a_i \in F$, $g(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$ 是一个多项式,则称矩阵 $g(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$ 为A的矩阵多项式.

定理 2.10 设 $A \in F^{n \times n}$, g(A)是A的矩阵多项式, 则有如下结果:

- ② 如果A相似于B, 即 $P^{-1}AP = B$, 则g(A)相似于g(B), 且 $P^{-1}g(A)P = g(B)$.

研究生公共基础课 第45页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 45 of 64

Go Back

Full Screen

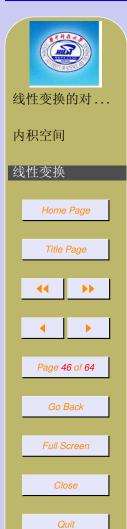
Close

Quit

irst ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Scree

③ 如果A为准对角矩阵,则g(A)也是准对角矩阵.而且,

君
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, A_i 为 方子块, 则 $g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix}$.$$



③ 如果A为准对角矩阵,则g(A)也是准对角矩阵.而且,

若
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, A_i 为 方子块,则 $g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix}$.$$

下面, 我们讨论g(A)的计算问题, 即已知方阵A和多项式 $g(\lambda)$, 如何计算方阵g(A)的问题. 设 $g(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 46 of 64

Go Back

Full Screen

Close

③ 如果A为准对角矩阵,则g(A)也是准对角矩阵.而且,

若
$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ & \ddots \\ & A_k \end{pmatrix}, A_i 为 方子块,则 $g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) \\ & g(A_2) \\ & \ddots \\ & & g(A_k) \end{pmatrix}.$$$

下面, 我们讨论g(A)的计算问题, 即已知方阵A和多项式 $g(\lambda)$, 如何计算方阵g(A)的问题. 设 $g(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$.

研究生公共基础课 第46页,共64页

矩阵论

线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 46 of 64

Go Back

Full Screen

Close

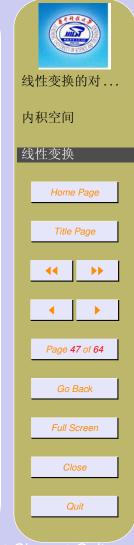
Quit

540火,矢04火 irst ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Scree

为计算g(A),用Jordan化方法.设

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

其中 $J_1(\lambda_1)$, $J_2(\lambda_2)$, ..., $J_s(\lambda_s)$ 为J的全部Jordan块.



为计算g(A),用Jordan化方法.设

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中 $J_1(\lambda_1)$, $J_2(\lambda_2)$, ..., $J_s(\lambda_s)$ 为J的全部Jordan块.

由定理2.10知

$$g(A) = Pg(A)P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix} P^{-1},$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 47 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第47页,共64页

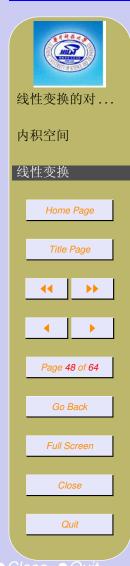
l ast • Go Back

矩阵论

Close

• Опі

因此计算g(A)的问题转化为对Jordan块 $J_i(\lambda_i)$ 计算 $g(J_i(\lambda_i))$ 的问题.



因此计算g(A)的问题转化为对Jordan块 $J_i(\lambda_i)$ 计算 $g(J_i(\lambda_i))$ 的问题.

取一个r阶Jordan块为代表作分析.

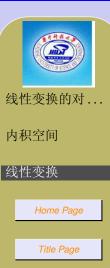


因此计算g(A)的问题转化为对Jordan块 $J_i(\lambda_i)$ 计算 $g(J_i(\lambda_i))$ 的问题.

取一个r阶Jordan块为代表作分析.

设

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r} = \lambda I + U_r,$$











Full Screen

Close

因此计算g(A)的问题转化为对Jordan块 $J_i(\lambda_i)$ 计算 $g(J_i(\lambda_i))$ 的问题.

取一个r阶Jordan块为代表作分析.

设

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r} = \lambda I + U_r,$$

首先有

$$J^{k}(\lambda) = (\lambda I + U_{r})^{k} = \lambda^{k} I + C_{k}^{1} \lambda^{k-1} U + C_{k}^{2} \lambda^{k-2} U^{2} + \dots + U^{k},$$
(2-14)

研究生公共基础课 第48页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 48 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

7年のソン・テスプローソン AET中でし rst のPrev のNext のLast のGo Back のFull Scree

利用

$$U_r^k = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ k < r, \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0, & & & k \ge r, \end{array} \right.$$
 (2-15)



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





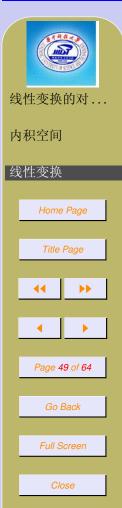
Page 49 of 64

Go Back

Full Screen

Close

利用
$$U_r^k = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \end{pmatrix}, \ k < r, \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \end{pmatrix} \right.$$
 (2-15)



$$U_r^k = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \end{pmatrix}, \ k < r, \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \end{pmatrix}, \ k < r, \\ 2-15)$$

其中
$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$
.

(2-14)式表示成矩阵形式是

研究生公共基础课 第49页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 49 of 64

Go Back

$$J^k(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda^k & \mathbf{C}_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & 1 & 0 \\ & \lambda^k & \mathbf{C}_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \mathbf{C}_k^1 \lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{array} \right., \quad k < r,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & \mathbf{C}_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & \mathbf{C}_k^{r-1} \lambda^{k-r+1} \\ & \lambda^k & \mathbf{C}_k^1 \lambda^{k-1} & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda^k \end{array} \right., \quad k \ge r,$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page

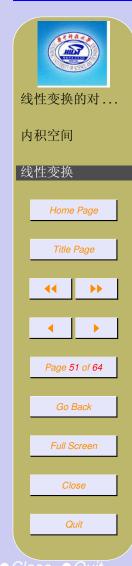




Page 50 of 64

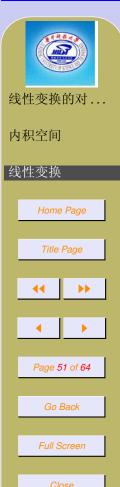
Go Back

代入 $g(J(\lambda))$,并合并U的相同幂次项得



代入 $g(J(\lambda))$,并合并U的相同幂次项得

在
$$m \ge r$$
时, $g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{k=i}^m a_k C_k^i \lambda^{k-i} \right) U^i$.



代入 $g(J(\lambda))$,并合并U的相同幂次项得

在
$$m \ge r$$
时, $g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{k=i}^m a_k C_k^i \lambda^{k-i} \right) U^i$.

又

$$\sum_{k=i}^{m} a_k C_k^i \lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{m} \frac{a_k k!}{(k-i)! i!} \lambda^{k-i} = \frac{1}{i!} \sum_{k=i}^{m} a_k \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i} (\lambda^k)$$
$$= \frac{1}{i!} g^{(i)}(\lambda),$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

代入 $g(J(\lambda))$,并合并U的相同幂次项得

在
$$m \ge r$$
时, $g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1} \left(\sum_{k=i}^m a_k C_k^i \lambda^{k-i} \right) U^i$.

又

$$\sum_{k=i}^{m} a_k C_k^i \lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{m} \frac{a_k k!}{(k-i)! i!} \lambda^{k-i} = \frac{1}{i!} \sum_{k=i}^{m} a_k \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i} (\lambda^k)$$
$$= \frac{1}{i!} g^{(i)}(\lambda),$$

故

$$g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{g^{(i)}(\lambda)}{i!} U^{i}$$

$$= \begin{pmatrix} g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{g^{(r-1)}}{(r-1)!} \\ g(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & \ddots & g'(\lambda) \\ & & & g(\lambda) \end{pmatrix};$$



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课 第51页,共64页

写51页,共<mark>64页</mark> 矩阵论 rst ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Scree

• Close

$$g(J(\lambda)) = \begin{pmatrix} g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} & 0 & \cdots & 0 \\ & g(\lambda) & & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & & \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & g'(\lambda) \\ & & & & g(\lambda) \end{pmatrix}$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page







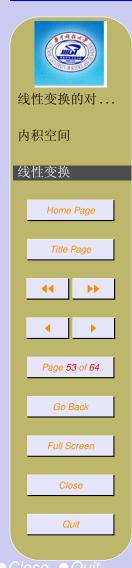
Page 52 of 64

Go Back

Full Screen

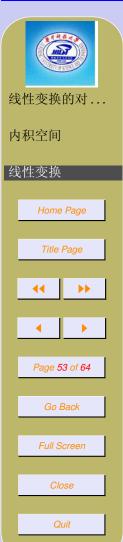
Close

2. 方阵的化零多项式



2. 方阵的化零多项式

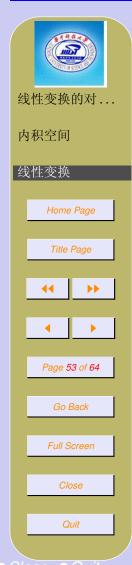
对n阶方阵A,若存在多项式 $g(\lambda)$,使矩阵 $g(A) = \mathbf{0}$,则称 $g(\lambda)$ 为矩阵A的化零多项式.



2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A,若存在多项式 $g(\lambda)$,使矩阵 $g(A) = \mathbf{0}$,则称 $g(\lambda)$ 为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设 $A \in F^{n \times n}$,则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

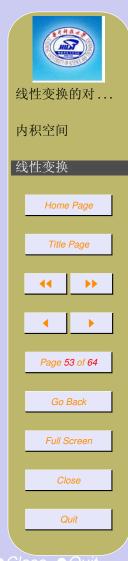


2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A,若存在多项式 $g(\lambda)$,使矩阵 $g(A) = \mathbf{0}$,则称 $g(\lambda)$ 为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设 $A \in F^{n \times n}$,则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

证明 用Jordan化方法证明.



2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A,若存在多项式 $g(\lambda)$,使矩阵 $g(A) = \mathbf{0}$,则称 $g(\lambda)$ 为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设 $A \in F^{n \times n}$,则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

证明 用Jordan化方法证明.

设 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$, 其中 $\sum_{i=1}^s r_i = n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 53 of 64

Go Back

Full Screen

Close

2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A,若存在多项式 $g(\lambda)$,使矩阵 $g(A) = \mathbf{0}$,则称 $g(\lambda)$ 为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设 $A \in F^{n \times n}$,则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

证明 用Jordan化方法证明.

设
$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$
, 其中 $\sum_{i=1}^{r} r_i = n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 五不相同.

研究生公共基础课 第53页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page



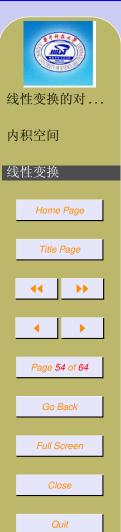


Page 53 of 64

Go Back

Full Screen

Close



 $J_i(\lambda_i)$ 是对角线元素为 λ_i 的 t_i 阶Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 不必 互异, $i = 1, 2, \dots, m$, 则

$$f(A) = P \begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & f(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & f(J_m(\lambda_m)) \end{pmatrix} P^{-1},$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 54 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

研究生公共基础课

第54页,共64页

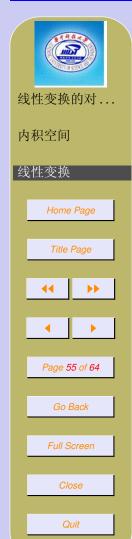
Last ●Go Bad

及 BCK OF

矩阵论

Close Ou

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & f'(\lambda_i) & \\ & & f'(\lambda_i) & \\ \end{pmatrix}_{t_i \times t_i}$$



$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & f'(\lambda_i) & \\ & & f'(\lambda_i) & \end{pmatrix}_{t_i \times t}$$

我们看 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第1行元素,由于 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i} g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \leq r_i$, 所以 $t_i - 1 < r_i$, 从而 $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, \cdots , $f^{(t_i-1)}(\lambda)$ 中均含有 $(\lambda - \lambda_i)$, 因此



$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & f'(\lambda_i) & \\ & & f'(\lambda_i) & \end{pmatrix}_{t_i \times}$$

我们看 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第1行元素,由于 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i}g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \leq r_i$,所以 $t_i - 1 < r_i$,从而 $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$,…, $f^{(t_i-1)}(\lambda)$ 中均含有 $(\lambda - \lambda_i)$,因此 $f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \dots = f^{(t_i-1)}(\lambda_i) = 0,$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

Full Screen

Close

$$f(J_{i}(\lambda_{i})) = \begin{pmatrix} f(\lambda_{i}) & f'(\lambda_{i}) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_{i}) & \cdots & \frac{1}{(t_{i}-1)!}f^{(t_{i}-1)}(\lambda_{i}) \\ & f(\lambda_{i}) & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & f'(\lambda_{i}) & \\ & & f'(\lambda_{i}) & \\ & & f_{i} \times t_{i} \end{pmatrix}_{t_{i} \times t_{i}}$$

我们看 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第1行元素,由于 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i}g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \leq r_i$,所以 $t_i - 1 < r_i$,从而 $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$,…, $f^{(t_i-1)}(\lambda)$ 中均含有 $(\lambda - \lambda_i)$,因此 $f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \cdots = f^{(t_i-1)}(\lambda_i) = 0,$

即 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第一行元素全为零,由 $f(J_i(\lambda_i))$ 的结构有



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page









Go Back

Full Screen

Close

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & f'(\lambda_i) & \\ & & f'(\lambda_i) & \\ & & f_i \times i \end{pmatrix}$$

我们看 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第1行元素,由于 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i} g(\lambda)$ 中 含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \leq r_i$, 所以 $t_i - 1 < r_i$, 从而 $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $\dots, f^{(t_i-1)}(\lambda)$ 中均含有 $(\lambda - \lambda_i)$,因此

$$f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \cdots = f^{(t_i-1)}(\lambda_i) = 0,$$

即 $f(J_i(\lambda_i))$ 的第一行元素全为零,由 $f(J_i(\lambda_i))$ 的结构有

$$f(J_i(\lambda_i)) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

所以f(A) = 0.1研究生公共基础课

第55页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

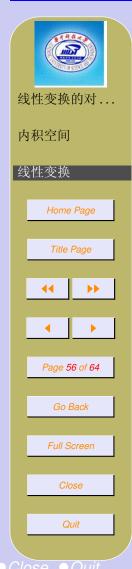




Page 55 of 64

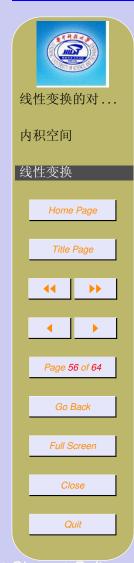
Go Back

3. 最小多项式



3. 最小多项式

对 $A \in F^{n \times n}$, Cayley定理指出它有化零多项式, 事实上, A有很多化零多项式.



3. 最小多项式

对 $A \in F^{n \times n}$, Cayley定理指出它有化零多项式, 事实上, A有很多化零多项式.

若A是V上线性变换T的矩阵, 对A的化零多项式 $f(\lambda)$, 相应地用多项式得到线性变换f(T)就是零变换. 所以线性变换T的化零多项式也是存在的, 而且

线性变换 $f(T) = \mathbf{0} \iff$ 矩阵 $f(A) = \mathbf{0}$.



3. 最小多项式

对 $A \in F^{n \times n}$, Cayley定理指出它有化零多项式, 事实上, A有很多化零多项式.

若A是V上线性变换T的矩阵, 对A的化零多项式 $f(\lambda)$, 相应地用多项式得到线性变换f(T)就是零变换. 所以线性变换T的化零多项式也是存在的, 而且

线性变换 $f(T) = \mathbf{0} \iff$ 矩阵 $f(A) = \mathbf{0}$.

定义 2.9 设T是线性空间V上的线性变换, $m_T(\lambda)$ 是 一个关于文字 λ 的多项式, 如果 $m_T(\lambda)$ 满足

① $m_T(\lambda)$ 的最高次项系数为1, 研究生公共基础课 第56页,共64页

矩阵论



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 56 of 64

Go Back

Full Screen

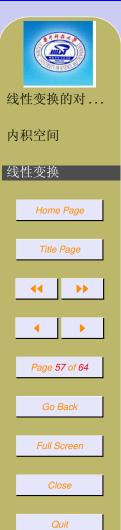
Close

Quit

First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back ● Full Scree

- ② $m_T(\lambda)$ 是T的一个化零多项式, 即 $m_T(T) = \mathbf{0}$,
- ③ $m_T(\lambda)$ 是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称 $m_T(\lambda)$ 是T的最小多项式.



- ② $m_T(\lambda)$ 是T的一个化零多项式, 即 $m_T(T) = \mathbf{0}$,
- ③ $m_T(\lambda)$ 是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称 $m_T(\lambda)$ 是T的最小多项式.

定理 2.12 T的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m_T(\lambda)$ 有相同的根(重数不计). 即若 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$,则 $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1}(\lambda - \lambda_2)^{t_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{t_s}$, $1 \le t_i \le r_i$, $i = 1, 2, \dots, s$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page









Go Back

Full Screen

Close

- ② $m_T(\lambda)$ 是T的一个化零多项式, 即 $m_T(T) = \mathbf{0}$,
- ③ $m_T(\lambda)$ 是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称 $m_T(\lambda)$ 是T的最小多项式.

定理 2.12 T的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m_T(\lambda)$ 有相同的根(重数不计). 即若 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$,则 $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1}(\lambda - \lambda_2)^{t_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{t_s}$, $1 \le t_i \le r_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

证明 由 $m_T(\lambda) \mid f(\lambda), t_i \leq r_i$ 是显然的, 所以只需要证明 $t_i \geq 1$ 即可.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 57 of 64

Go Back

Full Screen

Close

- ② $m_T(\lambda)$ 是T的一个化零多项式, 即 $m_T(T) = \mathbf{0}$,
- ③ $m_T(\lambda)$ 是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称 $m_T(\lambda)$ 是T的最小多项式.

定理 2.12 T的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m_T(\lambda)$ 有相同的根(重数不计). 即若 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$,则 $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1}(\lambda - \lambda_2)^{t_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{t_s}$, $1 \le t_i \le r_i$, $i = 1, 2, \dots, s$.

证明 由 $m_T(\lambda) \mid f(\lambda), t_i \leq r_i$ 是显然的, 所以只需要证明 $t_i > 1$ 即可. 研究生公共基础课 第57页,共64页 矩阵论



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 57 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen

用反证法. 反设 $t_i = 0$, 即 λ_i 不是最小多项式 $m_T(\lambda)$ 的根, 取T的Jordan矩阵

$$J = \left(\begin{array}{ccc} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{array} \right),$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 为Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$. 由于 $m_T(\lambda_i) \neq 0$, 故

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \left(egin{array}{ccc} m_T(\lambda_i) & & & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{array}
ight)
eq 0$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 58 of 64

Go Back

Full Screen

Close

用反证法. 反设 $t_i = 0$, 即 λ_i 不是最小多项式 $m_T(\lambda)$ 的根, 取T的Jordan矩阵

$$J = \left(\begin{array}{ccc} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{array} \right),$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 为Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$. 由于 $m_T(\lambda_i) \neq 0$, 故

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \left(egin{array}{ccc} m_T(\lambda_i) & & & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{array}
ight)
eq \mathbf{0}$$

所以, $m_T(J) \neq 0$. 与 $m_T(\lambda)$ 是最小多项式矛盾. 所以 $r_i \geq 1$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 58 of 64

Go Back

Full Screen

Close

用反证法. 反设 $t_i = 0$, 即 λ_i 不是最小多项式 $m_T(\lambda)$ 的根, 取T的Jordan矩阵

$$J = \left(\begin{array}{ccc} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{array} \right),$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 为Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$. 由于 $m_T(\lambda_i) \neq 0$, 故

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \left(egin{array}{ccc} m_T(\lambda_i) & & & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{array}
ight)
eq \mathbf{0}$$

所以, $m_T(J) \neq 0$. 与 $m_T(\lambda)$ 是最小多项式矛盾. 所以 $r_i \geq 1$.

研究生公共基础课

第58页,共64页

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 58 of 64

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Close Qu

定理 2.13 设变换T的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

又T的Jordan标准形中关于特征值 λ_i 的Jordan块的最高阶数为 \bar{n}_i ,则T的最小多项式

$$m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\bar{n}_1} (\lambda - \lambda_2)^{\bar{n}_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\bar{n}_s}.$$



定理 2.13 设变换T的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

又T的Jordan标准形中关于特征值 λ_i 的Jordan块的最高阶数 为 \bar{n}_i ,则T的最小多项式

$$m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\bar{n}_1} (\lambda - \lambda_2)^{\bar{n}_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\bar{n}_s}.$$

证明 Jordan标准形为

$$J = \left(\begin{array}{ccc} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{array} \right)$$

研究生公共基础课 第59页,共64页

矩阵论



线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page





Page 59 of 64

Go Back

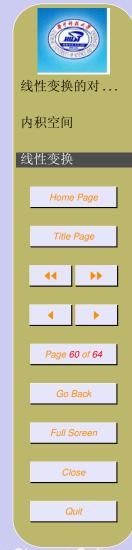
其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$



其中

具甲
$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$
 $J_{ij}(\lambda_i)$ 美于 λ_i 的Jordan块为 n_{ij} 阶.



其中

 $J_{ij}(\lambda_i)$ 关于 λ_i 的Jordan块为 n_{ij} 阶.

$$\bar{n}_i = \max\{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{it_i}\}, i = 1, 2, \cdots, s.$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 60 of 64

Go Back

Full Screen

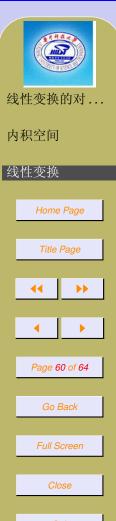
Close

其中

 $J_{ij}(\lambda_i)$ 关于 λ_i 的Jordan块为 n_{ij} 阶.

$$\bar{n}_i = \max\{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{it_i}\}, i = 1, 2, \cdots, s.$$

不妨设 $J_{i1}(\lambda_i)$ 是 \bar{n}_i 阶Jordan块,则



其中

$$J_i(\lambda_i) = \left(\begin{array}{ccc} J_{i1}(\lambda_i) & & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{array} \right)$$

$$J_{ij}(\lambda_i)$$
关于 λ_i 的Jordan块为 n_{ij} 阶.

$$\bar{n}_i = \max\{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{it_i}\}, i = 1, 2, \cdots, s.$$

不妨设 $J_{i1}(\lambda_i)$ 是 \bar{n}_i 阶Jordan块,则

研究生公共基础课 第60页,共64页 矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Go Back

Full Screen

Close



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







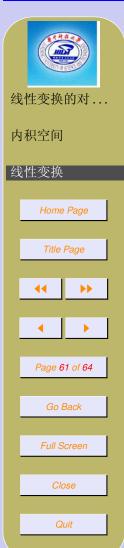
Page 61 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix}$$



$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i - 1)!} g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 61 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i - 1)!} g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

由于 $g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}$,所以



$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i - 1)!} g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

由于 $g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}$,所以 $g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \cdots = g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) = 0.$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 61 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i - 1)!} g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

由于 $g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}$,所以

$$g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \cdots = g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) = 0.$$

由此 $g(J_{i1}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, 因而 $g(J_{ij}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, $j = 2, 3, \dots, t_i$, $i = 1, 2, \dots, s$. 这说明 $g(J) = \mathbf{0}$, 即 $g(\lambda)$ 是T的化零多项式.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 61 of 64

Go Back

Full Screen

Close

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i - 1)!} g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

由于 $g(\lambda)$ 中含有因子 $(\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}$,所以

$$g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \cdots = g^{(\bar{n}_i - 1)}(\lambda_i) = 0.$$

曲此 $g(J_{i1}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, 因而 $g(J_{ij}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, $j = 2, 3, \dots, t_i$, i = $1, 2, \dots, s$. 这说明 $g(J) = \mathbf{0}$, 即 $g(\lambda)$ 是T的化零多项式.

研究生公共基础课 第61页,共64页

矩阵论



线性变换的对

内积空间

线性变换

Home Page





Page 61 of 64

Go Back

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中 $1 \le k_i \le \bar{n}_i$,若 $h(\lambda)$ 的次数低于 $g(\lambda)$,则一定存在i,使 $k_i < \bar{n}_i$,对这样的 $h(\lambda)$,由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \ge k_i),$$



线性变换的对 ...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Go Back

F. // C----

Class

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中 $1 \le k_i \le \bar{n}_i$,若 $h(\lambda)$ 的次数低于 $g(\lambda)$,则一定存在i,使 $k_i < \bar{n}_i$,对这样的 $h(\lambda)$,由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \ge k_i),$$

从而 $h(\lambda)$ 不是化零多项式. 因此, $m_T(\lambda) = g(\lambda)$.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 62 of 64

Go Back

Full Screen

Close

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中 $1 \le k_i \le \bar{n}_i$,若 $h(\lambda)$ 的次数低于 $g(\lambda)$,则一定存在i,使 $k_i < \bar{n}_i$,对这样的 $h(\lambda)$,由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \ge k_i),$$

从而 $h(\lambda)$ 不是化零多项式. 因此, $m_T(\lambda) = g(\lambda)$.

定理 2.14 线性变换T可对角化的充分必要条件是T的最小多项式 $m_T(\lambda)$ 是一次因子的乘积.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 62 of 64

Go Back

Full Screen

Close

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中 $1 \le k_i \le \bar{n}_i$,若 $h(\lambda)$ 的次数低于 $g(\lambda)$,则一定存在i,使 $k_i < \bar{n}_i$,对这样的 $h(\lambda)$,由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \ge k_i),$$

从而 $h(\lambda)$ 不是化零多项式. 因此, $m_T(\lambda) = g(\lambda)$.

定理 2.14 线性变换T可对角化的充分必要条件是T的最小多项式 $m_T(\lambda)$ 是一次因子的乘积.



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 62 of 64

Go Back

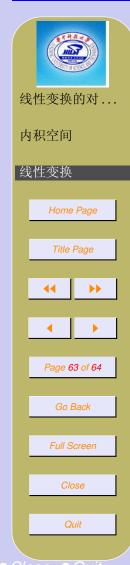
Full Screen

Close

例 2.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

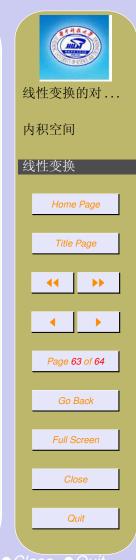


例 2.8 设

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

解 求A的特征多项式和最小多项式.



例 2.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

解 求A的特征多项式和最小多项式.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & | \lambda - 2 - 1 \\ 4 & \lambda + 1 & | 1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)^{2} (\lambda - 1)^{2} = (\lambda - 1)^{4},$$



线性变换的对...

内积空间

线性变换

Home Page

Title Page





Page 63 of 64

Go Back

Full Screen

Close

设 例 2.8

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

解 \vec{x} A的特征多项式和最小多项式.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & | \lambda - 2 - 1 \\ 4 & \lambda + 1 & | 1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)^{2} (\lambda - 1)^{2} = (\lambda - 1)^{4},$$

因为 $A - I \neq \mathbf{0}$, 而 $(A - I)^2 = \mathbf{0}$, 故A的最小多项式为

研究生公共基础课 $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ 第63页.共64页



内积空间

线性变换

Home Page





Page 63 of 64

Go Back

矩阵论



内积空间

线性变换

Home Page

Title Page







Page 64 of 64

Go Back

Full Screen

Close

又因为 $\operatorname{rank}(I-A)=2$,所以 $\dim V_{\lambda=1}=4-2=2$,故

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

