内积与叉乘

许 向 阳
xuxy@hust.edu.cn

内积的定义

向量 V1 = (a, b)

V2 = (c, d)

<V1, V2> = a*c + b*d

向量 V1 = (f11, f12, f13,……, f1n)

V2 = (f21, f22, f23,……, f2n)

<V1, V2> = f11*f21 + f12*f22+…+f1n*f2n

$$= \sum_{j=1}^{n} f_{1j} * f_{2j}$$

内积的定义

设有两个函数 f(x), g(x)

对 x 等间距抽样，得到 x1, x2,...., xn

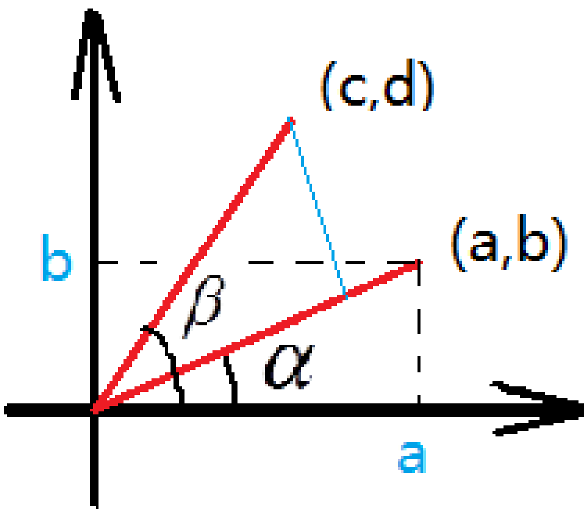
f(x) = (f(x1), f(x2), ..., f(xn))

g(x) = (g(x1), g(x2), ..., g(xn))

$$< f(x), g(x) >= \sum_{j=1}^{n} f(x_j) * g(x_j)$$

$$= \int f(x) g(x) dx$$

内积的物理意义



V1 = (a, b)
V2 = (c, d)

<V1, V2> = a*c + b*d

$$r1 = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r2 = |(c, d)| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

r1 * r2 * cos(V1与v2的夹角)

$$r1 * r2 * \cos(\beta - \alpha)$$

$$= r1r2\cos\alpha\cos\beta + r1r2\sin\alpha\sin\beta$$

$$= a * c + b * d$$

内积的物理意义

V1 = (a, b, c)　　　*V2 = (d, e, f)*

$$r1 = |(a, b, \ c)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$r2 = |(d, e, f)| = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$$

设v1 向 $\left(\frac{d}{|v2|}, \frac{e}{|v2|}, \frac{f}{|v2|}\right)$ 的投影长度为 L

$$L = r1\cos(\theta)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = L^2 + \left|(a, b, c) - L\left(\frac{d}{|v2|}, \frac{e}{|v2|}, \frac{f}{|v2|}\right)\right|^2$$

$$L|V2| = ad + be + cf = r1 * r2 * \cos(\theta)$$

内积的物理意义

一个向量 V 与 一个单位长度向量 B 的内积

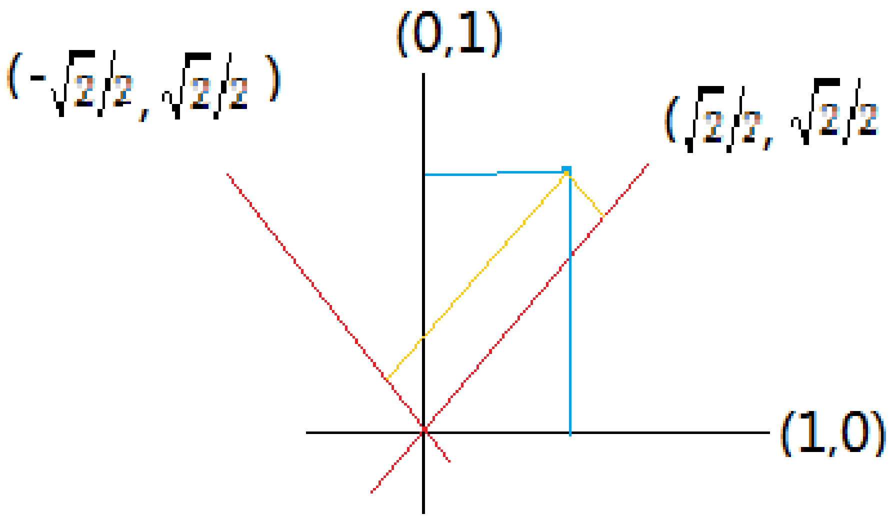
V 向 B 的投影长度

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=< \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=< \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

内积的物理意义

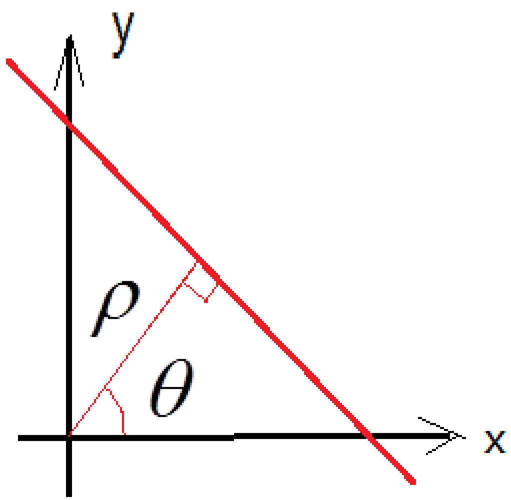


$$< \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-a+b)\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

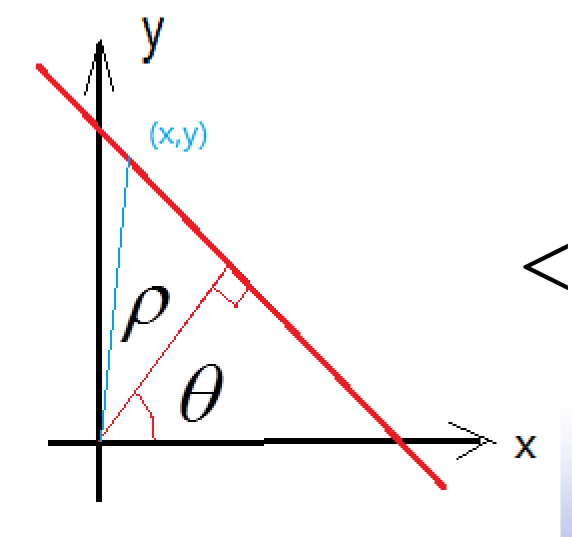
$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

内积的应用



求直线方程

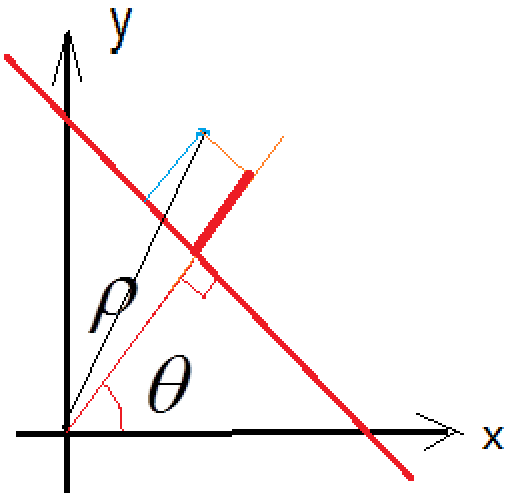
$$x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$$



线上的任意一点（x,y)向垂线的投影，投影长度都是 ρ

$$<(x, y), (\cos\theta, \sin\theta)> = \rho$$

内积的应用



求点到直线的距离

直线 ax + by + c =0

点 (u,v)

D = au + bv + c

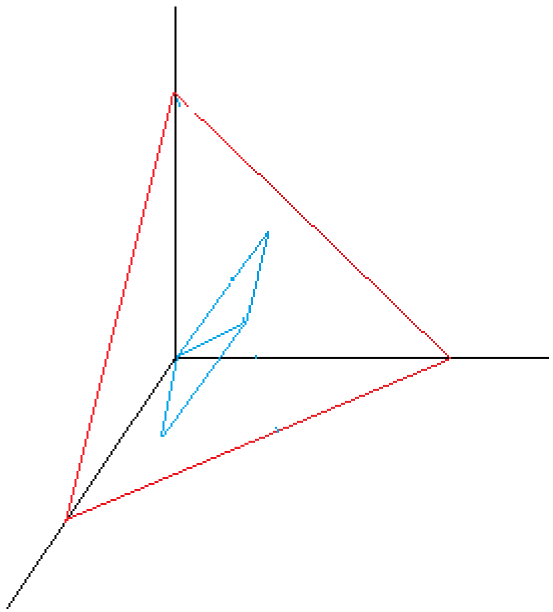
要求：$\sqrt{a^2+b^2}=1$

例：$x+y=1$

即：$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

(0,0) 到该直线的距离为 $-\sqrt{2}/2$

内积的应用



三维空间中的平面方程

单位法向量 （**a,b,c**）
平面上任意一点 **(x,y,z)**

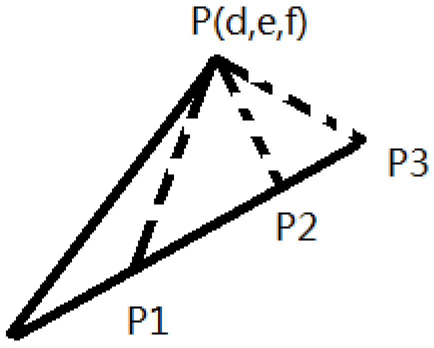
ax+by+cz=d

点到平面的距离

内积的应用

向量的近似逼近

在（a, b, c）方向上，找一个向量来代替（d, e, f），使其误差最小



$$E(L) = \left| L(a,b,c) - (d,e,f) \right|^2$$

$$= (La - d)^2 + (Lb - e)^2 + (Lc - f)^2$$

由 $\dfrac{\partial E(L)}{\partial L} = 0$，得到：$L(a^2 + b^2 + c^2) = ad + be + cf$

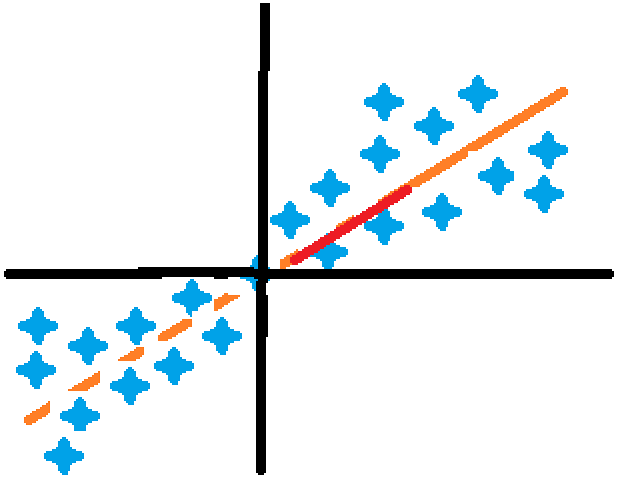
$$L = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} < \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right), (d, e, f) >$$

内积的应用

多个向量的主方向

找一个单位向量**V**；

向量**Vi**近似为**a$_i$V**

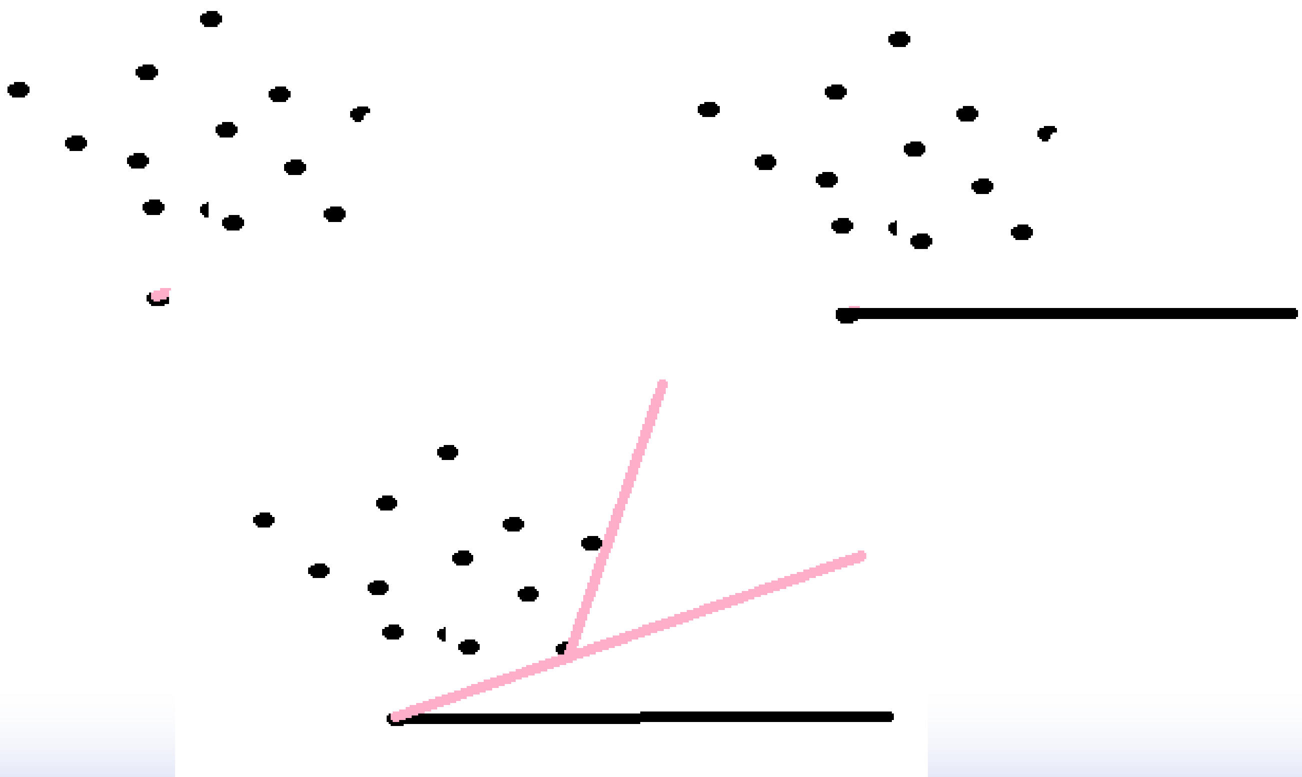


$$E(V) = \sum_i | V_i - \alpha_i V |^2$$

$$\alpha_i = < V_i, V >$$

内积的应用

求凸壳：包围点集的最小凸多边形



差乘/叉乘

(a,b, c) * (d ,e ,f) = $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

平面上的两个向量（a,b,0) * (d ,e, 0)
=0*i+0*j+ (ae-bd)k

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & k \\ a & b & 0 \\ d & e & 0 \end{vmatrix}$$

正/负 为 凸 ，凹，绝对值为 凸凹的程度

差乘/叉乘

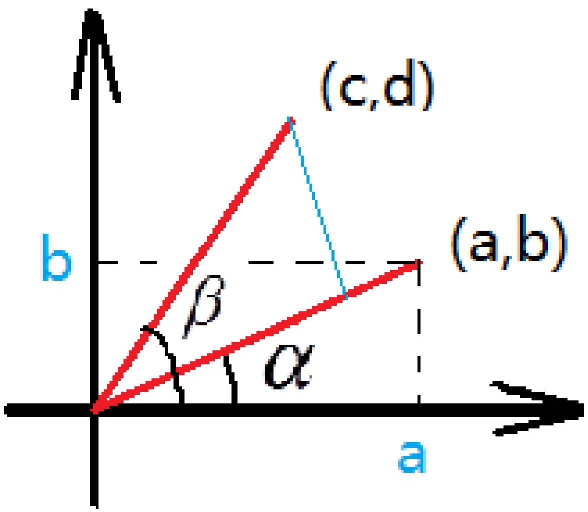
(a,b, c) * (d ,e ,f) = $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

平面上的两个向量 (a,b,0) * (d ,e, 0)
=0*i+0*j+ (ae-bd)k

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & k \\ a & b & 0 \\ d & e & 0 \end{vmatrix}$$

正/负 为 凸 ，凹，绝对值为 凸凹的程度

叉乘的物理意义



V1 = (a, b)
V2 = (c, d)

$$V1 \times V2 = ad - bc$$

$$r1 = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r2 = |(c, d)| = \sqrt{c^2 + d^2}$$

r1 * r2 * sin(V1转向v2的夹角)

$$r1 * r2 * \sin(\beta - \alpha)$$

$$= r1r2\sin\beta\cos\alpha - r1r2\sin\alpha\cos\beta$$

$$= a * d - b * c$$

叉乘与内积的差别

V1 = (a, b)
V2 = (c, d)

V1 = (a, b, 0)
V2 = (c, d, 0)

$$< V1, V2 > = ac + bd = r_1 r_2 \cos\theta$$

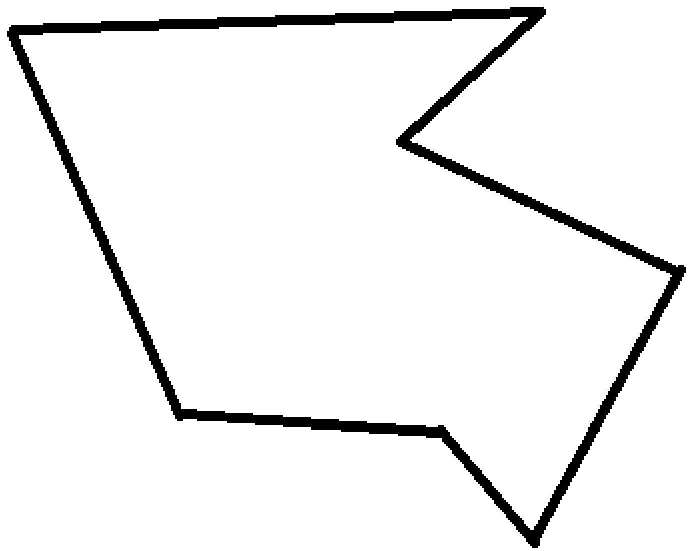
$$V1 \times V2 = (ad - bc)k + 0i + 0j$$

$$= k(r_1 r_2 \sin\theta)$$

$$< V1, V2 > = < V2, V1 >$$

$$V1 \times V2 \neq V2 \times V1$$

叉乘的应用



找出转弯点

找出凸点、凹点