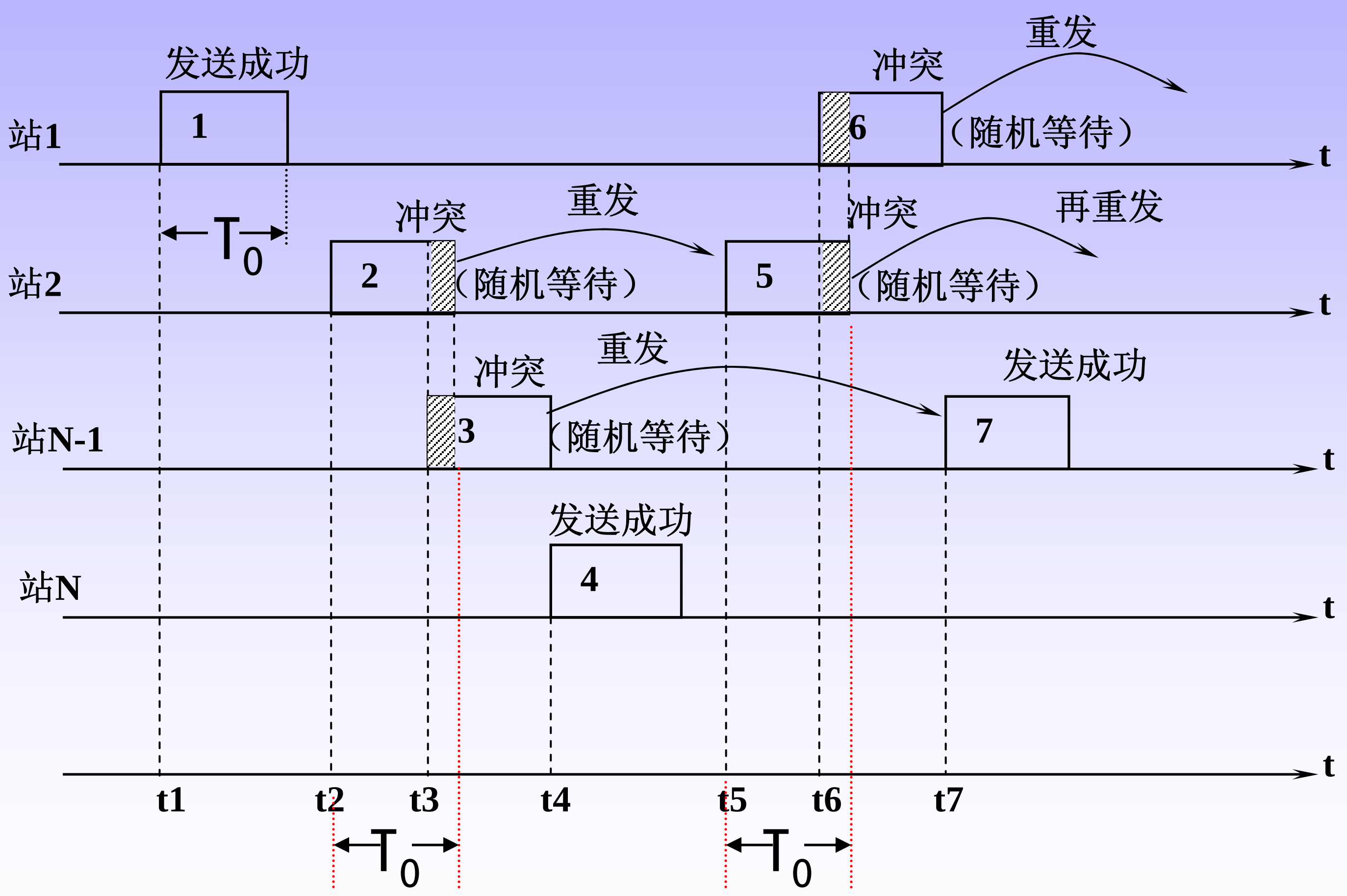
7.2 以太网的性能分析

7.2.1 求纯ALOHA系统在稳定条件下，S与G的关系

- G：网络负载（offered load）
  - T_0内总共发送的平均帧数
- S：网络吞吐率（Throughput）
  - T_0内成功发送的平均帧数
- 信道利用率
  - 信道利用率 P＝ρ=S/G
- 帧到达随机过程
  - 假设为泊松过程
  - 到达时间间隔随机变量的概率密度函数是负指数分布：$a(t)=\lambda e^{-\lambda t}$，其中λ是帧的平均到达率，有$\lambda=G/T_0$

纯ALOHA的帧达到分布图



纯ALOHA的特征

- 一个帧成功发送的条件是：该帧与它**前后两帧**的达到时间间隔**均大于T_0**
- 对纯ALOHA，发送一帧的冲突区为**2个T_0宽**
- 显然$G \geq S$，$0 \leq P \leq 1$, $P=1$是极限情况即一帧接一帧地发，可用 $P \to 1$的程度来衡量信道的利用率
- 不发生冲突时才有$G=S$,
- 冲突频繁时，G可远大于S

分析过程

- S＝G•P［发送成功］

$$P_{发送成功} = P_{连续两间隔>T_0} = \{P_{到达间隔>T_0}\}^2$$

$$P_{到达间隔>T_0} = \int_{T_0}^{\infty} a(t)dt = \int_{T_0}^{\infty} \frac{G}{T_0} e^{-\frac{G}{T_0}t} dt = e^{-G}$$

$$P_{发送成功} = e^{-2G}$$

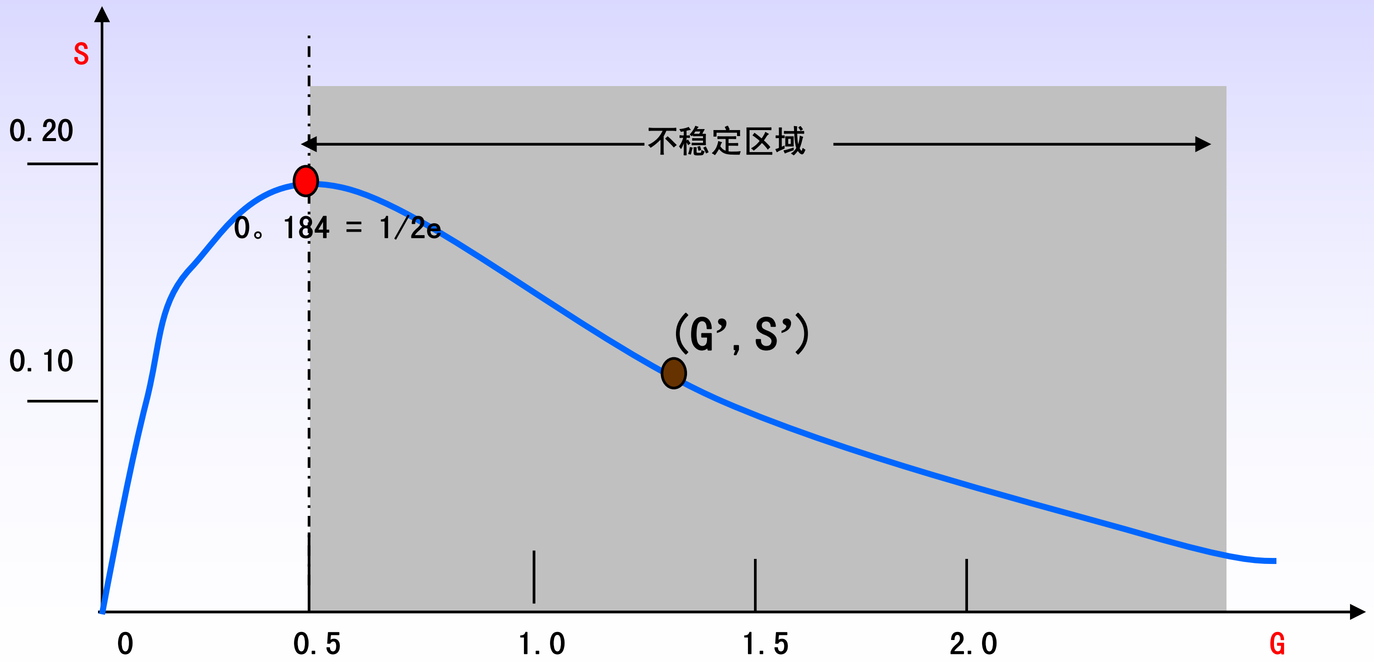
- **S＝G e^{-2G}——Abramson1970年首次推出,且MaxS (G=0.5)=0.5 e^{-1}=0.184，纯ALOHA的负载不能超过0.5**
- 或G•P［发送成功］＝G • **P[在2T_0时间内有0个到达]**

$$= G\frac{(2G)^0}{0!}e^{-2G} = Ge^{-2G}$$

- 因（$\lambda t=2T_0G/T_0$ =2G）

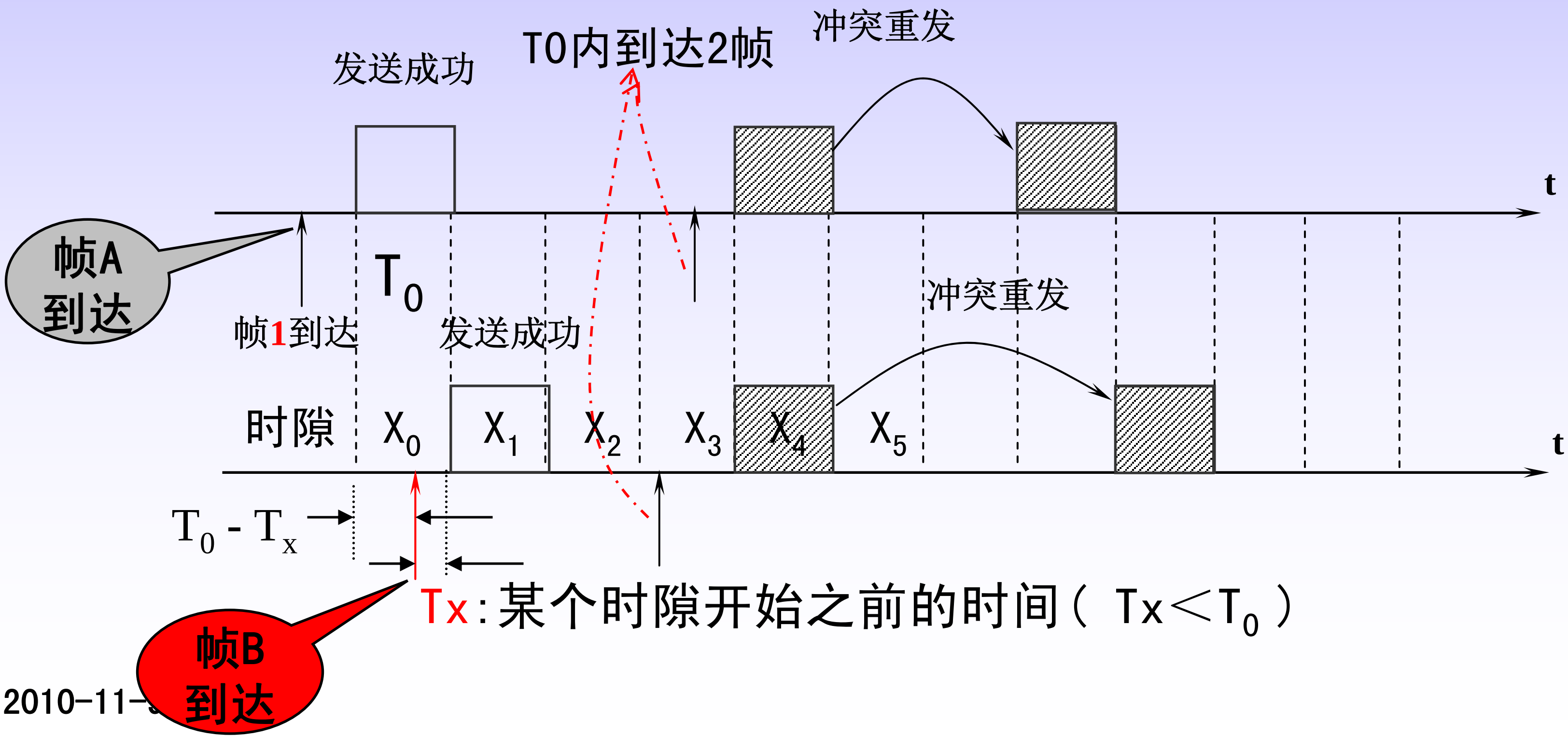
结论解读

- 信道的最大利用率是18.4%;这不令人满意
- G大于0.5后曲线呈**负斜率**，因而处于不稳定工作区，如点(G’,S’)
- 负载G增大，吞吐率S减少表明成功发送的帧减少而发生冲突的帧增加，从而引起更多的重传，因而网络负载G进一步增大，恶性循环，最终使吞吐率下降到0为止



7.2.2 时隙ALOHA的性能分析

- 1972年Robert：时隙ALOHA系统，把纯ALOHA系统吞吐率提高1倍
  - 分**时间片T_0**（正好发完一帧）且只能在**每个时刻开始时才能发送**1个帧
  - 每个帧到达后，在**缓存**中**等待小于T_0**的时间
  - 当一个时隙内有2个或以上帧到达时，则**在下一个时隙发生碰撞**；
  - 碰撞处理策略**同纯ALOHA**
- 求时隙ALOHA的S与G的关系？



建模过程

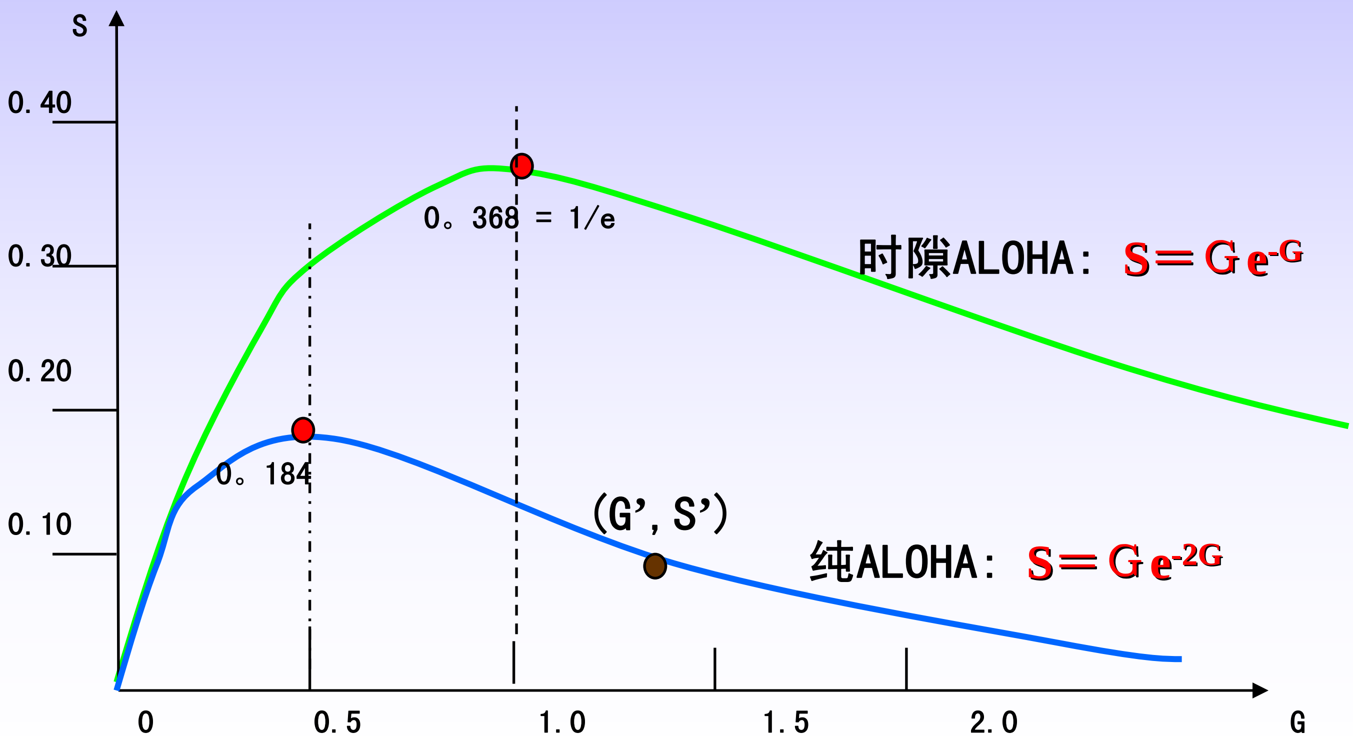
- 帧发送成功的条件是：
  - 没有两个或以上的帧在同一时隙内T_0到达（要么1或0帧到达）
  - 即该帧与前一帧的到达时间间隔应大于$T_0- T_x$
  - 且该帧与后一帧的到达时间间隔应大于T_x
  - 或者在T_0时间内有0个帧到达

$$P_{发送成功}=P_{到达间隔>T_0-T_x}\times P_{到达间隔>T_x}=\int_{T_0-T_x}^{\infty}a(t)dt\int_{T_x}^{\infty}a(t)dt$$

- P[发送成功]= e^{-G} （代进 $\lambda=G/T_0$）
- $S=Ge^{-G}$（时隙ALOHA）
- MaxS(G=1)= e^{-1} =0.368，即G ＞ 1为不稳定区
- 或G•P ［发送成功］=G• P[在T_0时间内有0个到达]
- 因（$\lambda t=T_0G/T_0$ =G） $=G\frac{(G)^0}{0!}e^{-G}=Ge^{-G}$

◆ 某些结论

- ♣ 信道利用率36.8%；或36.8%的时槽无发送
- ♣ 对时隙ALOHA ，发送一帧的冲突区仅为1个T_0宽



- 一大批ALOHA用户每秒产生50次请求，包括初始请求和重传请求。单位分槽是40ms；试问？
  - 首次尝试成功的概率是多少？
  - K次冲突后成功的概率是多少？
  - 所需要的发送尝试次数的期望值是多少？
- 解答：在任1帧时（1帧的时间长度）内生成k帧的概率服从泊松分布，$Pr[k] = G^k e-G / k!$
  - 对纯ALOHA，产生0帧的概率是$Pr[0] = G^0 e-G / 0! ＝ e-G$；
  - 发送1帧的冲突危险区为2个帧时，在2帧内无其它帧发送的概率是$e-G \times e-G ＝ e-2G$
  - 对分槽ALOHA，其冲突危险区比纯ALOHA减半，故任一帧内无其它帧发送的概率是e-G

- 若时槽长度为40ms，即每秒25个时槽，产生50次请求，所以平均每个时槽内产生2个请求，G=2。因此首次尝试的成功概率是$e^{-2}=1/e^{2}$
- K次冲突的概率
  - $(1-e^{-G})^{k}e^{-G}=(1-e^{-2})^{k}e^{-2}$ $=0.135\times0.865^{k}$
- 尝试k次才能发送成功的概率（即k-1次冲突，k次才成功）为
  - $P_k=e^{-G}(1-e^{-G})^{k-1}$
  - 那么每帧传送次数的数学期望为$E=\sum kP_k\ (k=1\ldots\infty)=e^{2}=7.4$

有限站的吞吐率

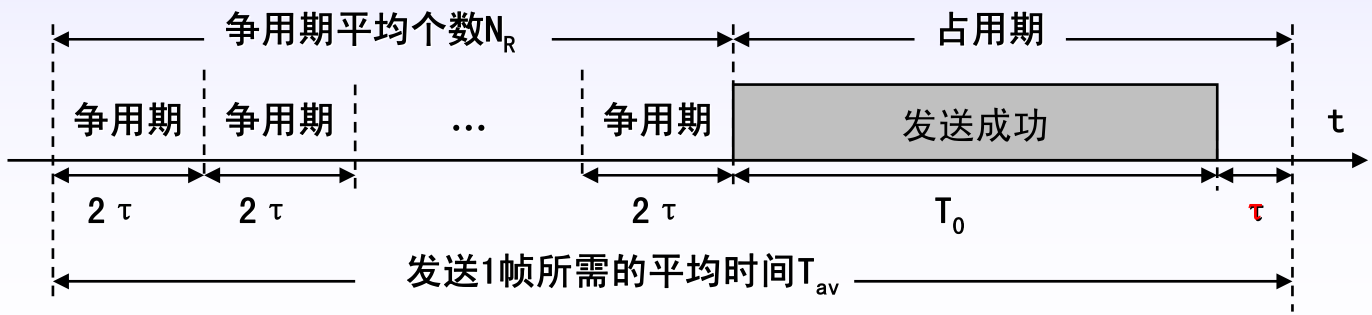
- 有限站N：
  - 不存在n→∞，每个站发送1帧概率不趋于0，**泊松假设难成立！**
- 以时隙ALOHA为例研究有限站数网络的吞吐率
  - 假设共有N个站，各站独立随机发送，一个 时隙正好发送一帧；
  - 设S_i是站i在任意时隙成功发送一个帧的概率，如是1－ S_i就是站i在任一时隙没有发送成功（失败或没发）的概率
  - 设G_i是站i在任意时隙发送一个帧的概率，而1－ G_i是站i在任一时隙不发送帧的概率
- 计算网络的性能，
  - 对任何i ，有$S_i \leqslant G_i$ 因各站独立，所以
  - $S_j = G_j \prod (1-G_i)\ (j \neq i)$ ，假设各站的统计特性相同$S_i = S/N$， $G_i = G/N$；S和G分别表示整个系统的吞吐率和网络负载，则简化为
  - $S = G(1-G/N)^{N-1}$ 利用极限 $\lim(n\to\infty)(1+x/n)n = e^x$ 可得 $S=G\ e^{-G}$ ；
  - 当$G=\sum G_j = 1$时，S达到极大值，为$S_{max} = (1-1/N)^{N-1}$
- 结论：
  - N=1， $S_{max} = 1$;随着N≥20， S_{max} 迅速下降到1/e =0.368

两类用户的吞吐率

- 假定第一类用户（如FTP）有N_1个，每个用户的吞吐率是S_1；第二类用户（如WWW）有N_2个，每个用户的吞吐率是S_2；根据公式则有
  - ♣ $S_1=G_1(1-G_1)^{N1-1}(1-G_2)^{N2}$
  - ♣ $S_2=G_2(1-G_2)^{N2-1}(1-G_1)^{N1}$
  - ♣ 而且，必须满足 $N_1G_1 + N_2G_2 = 1$
  - ♣ 4个参数，3个等式，故可得某参数的吞吐率方程式
- 例如：$N_1=N_2=1$，$S_1=G_1^2$;$S_2=G_2^2$

7.2.3 以太网的信道利用率

- 假定：
  - 总线上共有N个站，每站发帧概率是p；
  - 争用期长度为2τ，即端端传播时延的2倍，检测到碰撞后不发干扰信号
  - 帧长为L(bit)，数据发送率C(bit/s)，故帧发送时间T_0(s)=L/C.
- 分析：
  - 1个帧从开始发送，经碰撞后再次重发，到发送成功且信道转为空闲（即再经过τ 时间使信道上无信号传播）为止，需要如下的平均等待时间T_{av}：



- 令A为某站发送成功概率 $A = P[\text{某站发送成功}] = p(1-p)^{N-1}$
- 某站发送失败概率1-A，争用期为j个的概率是： $P[\text{发}j\text{次失败但下一次成功}] = A(1-A)^j$
- 争用期的平均个数等于重发的次数N_R： $N_R = \sum_{j=0}^{\infty} j(1-A)^j A = (1-A)/A$
- 信道利用率（归一化吞吐率）S：

$$S = \frac{T_0}{T_{av}} = \frac{T_0}{2\tau N_R + T_0 + \tau} = \frac{1}{1 + a(2A^{-1} - 1)}$$

$a = \frac{\tau}{T_0}$； 当 $p = \frac{1}{N}$ 时 A 取极大值 A_{max}

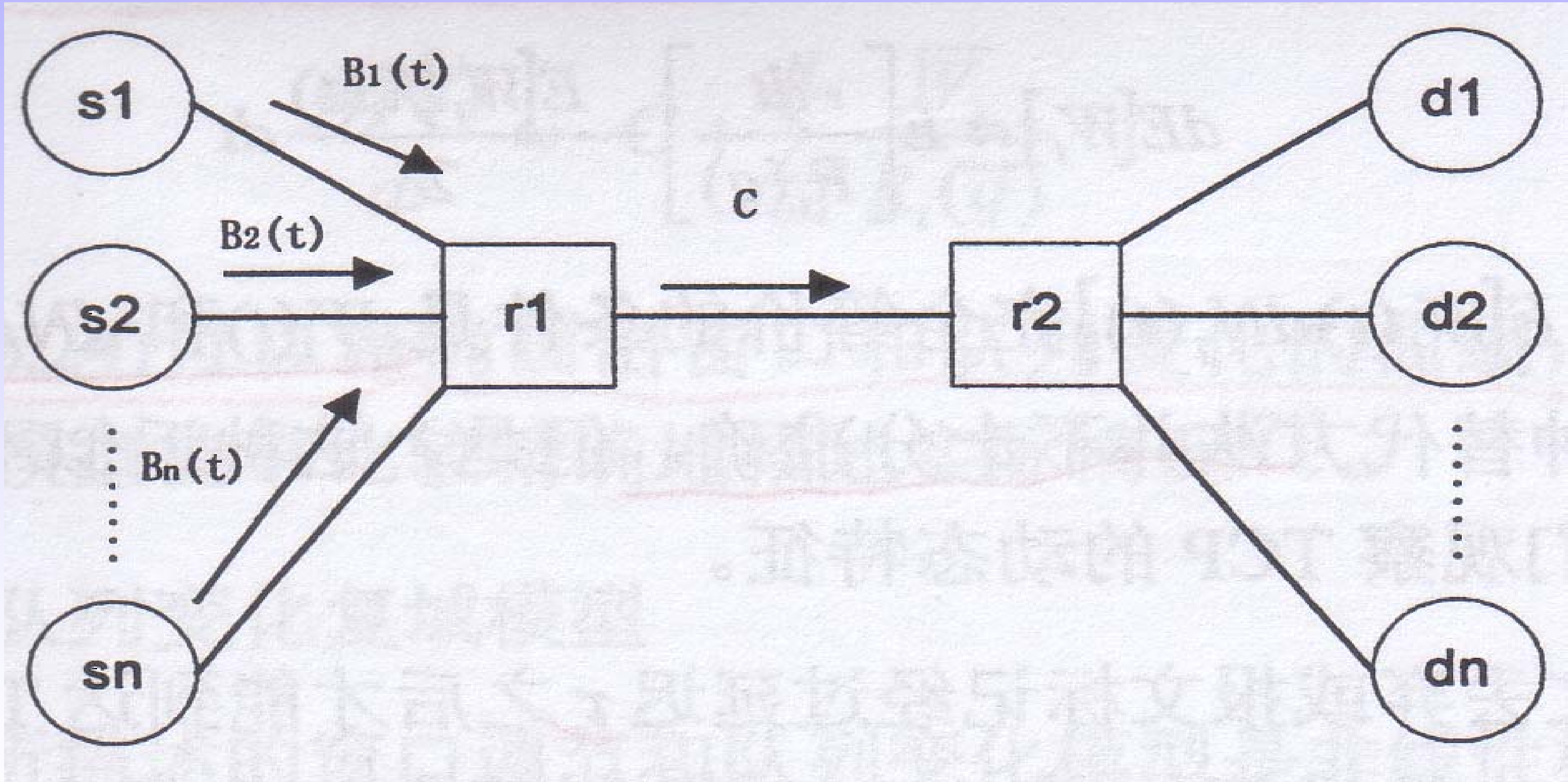
$$A_{max} = [1 - \frac{1}{N}]^{N-1}$$

$$\underset{N\to\infty}{S_{max}} = \frac{1}{1+4.44a}$$

$$\underset{N\to\infty}{A_{max}} = \frac{1}{e} = 0.368$$

7.2.4 拥塞控制的网络建模分析

参考文献：Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP flows with an Application to RED



N个TCP流共享一条瓶颈链路

相关参数定义

$W_i(t)$：发送窗口；

$R_i(t)$：往返时间；

$B_i(t)$：吞吐量；

$N_i(t)$：丢失的报文数目；

$\lambda_i(t)$：报文丢失的速率；

◆ 假设

- ♣ 接收端的通告窗口足够大，不会限制发送窗口增长
- ♣ a_i是固定链路的传输延迟，q(t)/C是排队延迟
- ♣ 流i的报文丢失服从Poisson 分布{Ni(t)};速率为λi(t)

$$R_i(t) = a_i + q(t)/C，\quad t \geq 0，\quad i = 1,2,\ldots,N$$

TCP的AIMD拥塞避免机制描述

I）TCP窗口调节模型

$$dW_i(t) = \frac{dt}{R_i(q(t))} - \frac{W_i(t)}{2} dN_i(t)$$

- 用上述方程描述$W_i(t)$的行为
  - 第一项是AIMD的加式增加部分。如果没有报文丢失，每往返一次（**1/R 是每秒往返多少次**），TCP拥塞窗口**加1**
  - 第二项是描述乘式减少部分，当检测到报文丢失时，拥塞窗口**减少**为原来的**一半**。
- 如果将网络业务视为**流体流**，则TCP流的吞吐量为

$$B_i(t) = W_i(t)/R_i(t)$$

◆对方程两边取数学期望：

$$E[dW_i(t)] = E\left[\frac{dt}{R_i(q(t))}\right] - \frac{E[W_i(t)dN_i(t)]}{2}$$

$E[W_i(t)]E[dN_i(t)]$来近似$E[W_i(t)dN_i(t)]$

◆可近似为：

$$dE[W_i] \approx E\left[\frac{dt}{R_i(q)}\right] - \frac{E[W_i]\lambda_i(t)}{2}dt$$

$E[W_i(t)]E[dN_i(t)]$和$E[W_i(t)dN_i(t)]$

完全等价的条件是：$W_i(t)$和 $dN_i(t)$相互独立

实际并非如此，但不影响观察TCP的动态特征

◆ 路由器中的报文丢弃或报文标记经过延误τ之后才能到达TCP流的发送端

◆ 对于报文丢弃率与吞吐量成**正比**的AQM机制而言，若在t-τ时刻流的吞吐量为B(t-τ),则在t时刻检测到的报文丢失率为：

$$\lambda(t)=p(\bar{x}(t-\tau))B(t-\tau)$$

$\bar{x}(t-\tau)$ 是（t-τ）时刻的平均队列长度，代入上式得

$$dE[W_i]\approx\frac{dt}{R_i(\bar{q})}-\frac{\bar{W}_i}{2}p(\bar{x}(t-\tau))\frac{\bar{W}_i(t-\tau)}{R_i(\bar{q}(t-\tau))}dt$$

$$=\frac{dt}{R_i(\bar{q})}-\frac{\bar{W}_i\bar{W}_i(t-\tau)}{2R_i(\bar{q}(t-\tau))}p(\bar{x}(t-\tau))dt$$

- 其中，未表明时间的变量默认为t时刻的变量
- 上式可等价为

$$\frac{d\bar{W}_i}{dt}=\frac{1}{R_i(\bar{q})}-\frac{\bar{W}_i\bar{W}_i(t-\tau)}{2R_i(\bar{q}(t-\tau))}p(\bar{x}(t-\tau))$$

11）队列变化模型

- 瞬时队列长度**q随时间的变化**由聚合报文的到达率和链路带宽之间的差值决定，即有左上式：
- 式中第一项描述当队列长度**大于0时**，由于路由器转发报文，队列长度**减少**的规律
- 第二项描述由于N个TCP连接发送报文到路由器，队列长度**增加的规律**
- 方程两边取数学期望

$$\frac{dq(t)}{dt} = -1_{q(t)}C + \sum_{i=1}^{N} \frac{W_i}{R_i(q)}$$

$$-1_{q(t)} = \begin{cases} -1 & q(t) > 0 \\ 0 & q(t) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{q}(t)}{dt} = E\left[-1_{q(t)}\right]C + \sum_{i=1}^{N} E\left[\frac{W_i}{R_i(q)}\right]$$

$$\approx E\left[-1_{q(t)}\right]C + \sum_{i=1}^{N} \frac{\overline{W}_i}{R_i(\bar{q})}$$

- 对于瓶颈链路，队列长度大于零的概率＝1，故可简化为：

$$\frac{d\overline{q}(t)}{dt} \approx -C + \sum_{i=1}^{N} \frac{\overline{W}_i}{R_i(\overline{q})}$$

- 根据上述2个方程，可以精确画出窗口和队列变化的曲线。
- 仿真表明模型能比较精确的描述实际情况。
- 两个变化模型都是非线性模型，

III）复域模型

- 两个变化模型都是非线性的，可合理简化为左边式子
  - 共享同一瓶颈链路的N个TCP流具有相同往返时间，任何时刻吞吐量相同
  - TCP流的**往返时间**R(t)近似等于源端检测到报文丢失的延迟 τ
  - W, q分别表示窗口和队列的均值

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \dfrac{1}{R(t)} - \dfrac{W(t)W(t-R(t))}{2R(t-R(t))} p(t-R(t)) \\ \dot{q}(t) = \dfrac{W(t)}{R(t)} N(t) - C \end{cases}$$

Thank you!