



华中科技大学

基于活动轮廓模型的图像分割

许向阳

xuxy@hust.edu.cn





活动轮廓模型的起源

- ◆ 1987 年 Kass、Witkin 和 Terzopoulos 提出活动轮廓模型
- ◆ Kass M , Witkin A , Terzopoulos D. Snakes: active contour models. In: Brady I M , Rosenfield A eds. Proceedings of the 1st International Conference on Computer Vision. London: IEEE Computer Society Press, 1987. 259- 268



活动轮廓模型的基本思想

在图像感兴趣的区域(目标)上给出初始轮廓曲线, 即初始值(为一条或多条封闭曲线), 最小化一个能量函数, 使轮廓曲线在图像中运动(变形), 最终逼近该区域(目标)的边界。

驱使轮廓运动的机理在于最小化能量函数时, 使得满足一致性的区域扩张到最大(或收缩到最小), 即一致性区域的边界。





活动轮廓模型的分类

活动轮廓模型：

基于边界的活动轮廓模型

基于区域的活动轮廓模型

混合活动轮廓模型





活动轮廓模型的分类

活动轮廓模型按轮廓曲线的表达形式分类：

- ◆ 参数活动轮廓模型(又称 Snake模型)
- ◆ 几何活动轮廓模型 (水平集)



参数活动轮廓模型的基本原理

- ◆ 直接以轮廓曲线的参数化形式表达轮廓曲线的运动(变形)
- ◆ 表达形式紧凑, 有利于参数活动轮廓模型的快速实时实现
- ◆ 难于处理轮廓曲线拓扑结构的变化, 比如曲线的合并或分裂等。

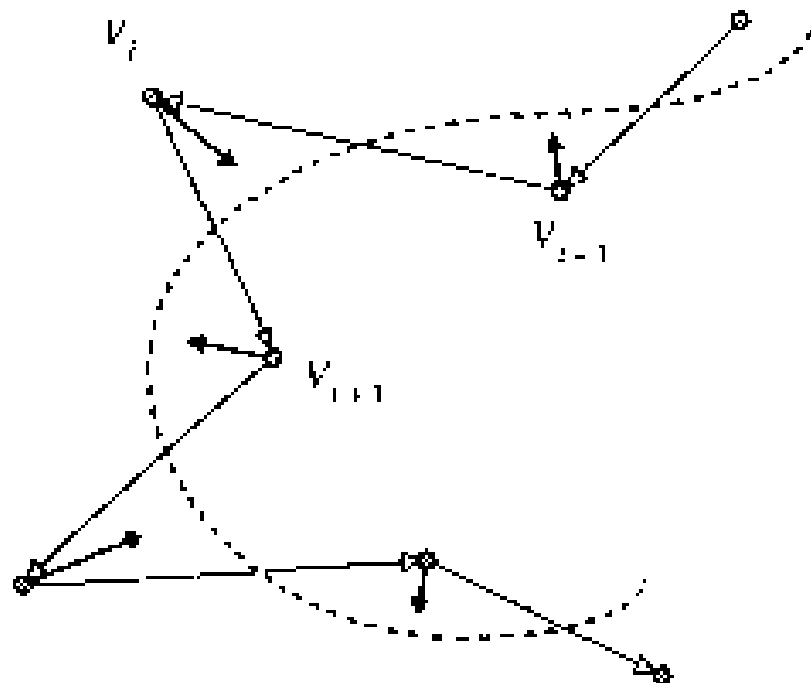


参数活动轮廓模型的基本原理

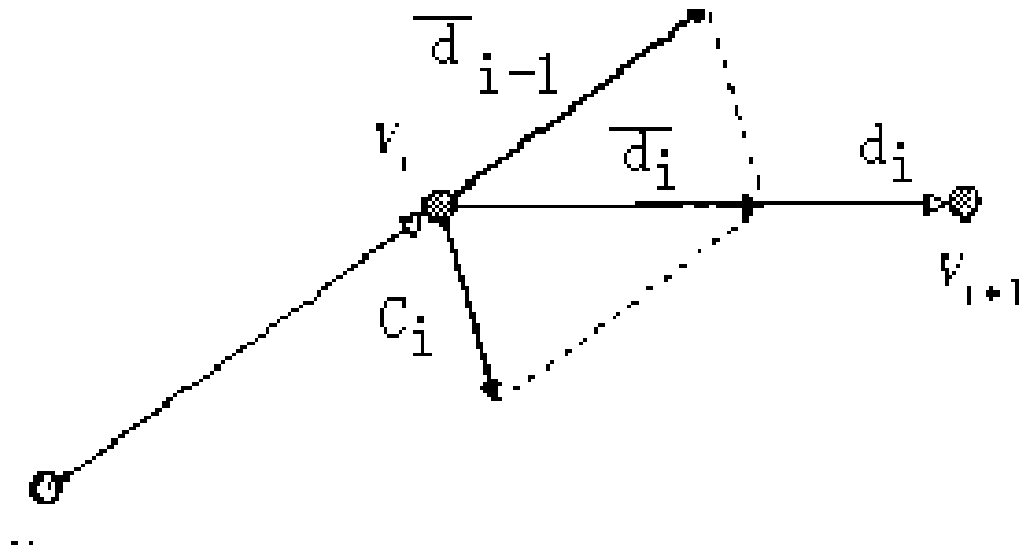
- ◆ 将轮廓曲线视为一条具有弹性的橡皮曲线
- ◆ 轮廓曲线的能量由内部和外部能量组成
- ◆ 内部能量描述轮廓曲线的平滑性，它使得轮廓曲线伸缩、弯曲；
- ◆ 外部能量是基于图像数据定义的，并在图像中目标的边界达到最小值。
- ◆ 最小化内部能量和外部能量，使轮廓曲线沿能量降低方向运动。



参数活动轮廓模型的基本原理



参数活动轮廓模型的基本原理



C_i : 顶点 V_i 处的曲率, 为两个单位方向向量的差



参数活动轮廓模型的基本原理

➤ 轮廓曲线 **C** : $\mathbf{X}(s) = (x(s), y(s))$

s为归一化的弧长，取值为 $0 \leq s \leq 1$ 。

➤ 轮廓曲线 **C** 的能量 **E(C)** : $E(C) = E_{int} + E_{ext}$

➤ 最小化能量时产生内力和外力

力平衡方程: $\mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{ext} = 0$

➤ 内力 **F_{int}** 控制轮廓曲线的伸展和弯曲，

试图收缩轮廓曲线，保持轮廓曲线不过度弯曲；

➤ 外力 **F_{ext}** 引导轮廓曲线朝着目标的边界运动。



参数活动轮廓模型的基本原理

总内能=拉伸内能+弯曲内能

$$E_{\text{int}}(X(s)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\alpha(s) \left| \frac{\partial X(s)}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 X(s)}{\partial^2 s} \right|^2 \right] ds$$

$\alpha(s)$ 为弹力系数， $\beta(s)$ 为强度系数。

$\alpha(s)$ 越大，使得轮廓曲线收缩越快。

$\beta(s)$ 越大，使得轮廓曲线变得僵硬而不易弯曲

参数活动轮廓模型的基本原理

轮廓曲线的外部能量

$$E_{\text{ext}}(X(s)) = \int_0^1 e(X(s)) \, ds$$

$$e(X(s)) = -|\nabla I(x, y)|^2$$

$$e(X(s)) = -|\nabla [G_\sigma(x, y) * I(x, y)]|^2$$

∇ 是梯度算子 $[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}]$

$G_\sigma(x, y)$ 是标准差为 σ 的二维高斯函数



参数活动轮廓模型的基本原理

欧拉——拉格朗日方程

只含有一阶导数的多个自变量的变分问题

$$V[z(x, y)] = \iint_D F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy$$

$$p = p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \quad q = q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} (F_p) - \frac{\partial}{\partial y} (F_q) = 0$$

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} (F_{z_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{z_y}) = 0$$





华中科技大学

$$I\left[z(x,y),\frac{dz}{dx}\right]=\iint_a^b F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

$$V[z(x,y)]=\iint_a^b F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

参数活动轮廓模型的基本原理

欧拉——拉格朗日方程

含有多阶导数的单个自变量的变分问题

$$J(y(x)) = \int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx$$

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0$$



参数活动轮廓模型的基本原理

欧拉——拉格朗日方程

$$\frac{\partial}{\partial s}(\alpha(s) \frac{\partial X(s)}{\partial s}) - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\beta(s) \frac{\partial^2 X}{\partial s^2}) - \nabla \varepsilon(X(s)) = 0$$

内力与外力

$$F_{\text{int}} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(s) \frac{\partial X(s)}{\partial s}) - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\beta(s) \frac{\partial^2 X}{\partial s^2})$$

$$F_{\text{ext}} = -\nabla \varepsilon(X(s)) = -\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right]$$

参数活动轮廓模型的基本原理

动态形式:

$$\gamma(s) \frac{\partial X(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha(s) \frac{\partial X(s, t)}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\beta(s) \frac{\partial^2 X(s, t)}{\partial s^2} \right) - \nabla \varepsilon(X(s, t))$$

参数活动轮廓模型的有限差分求解

$$\frac{\partial X(s, t)}{\partial s} \Leftrightarrow \frac{X_{i+h} - X_i}{h}$$

$$\frac{\partial^2 X(s, t)}{\partial^2 s} \Leftrightarrow \frac{X_{i+h} - 2X_i + X_{i-1}}{h^2}$$

$$\frac{\partial X(s, t)}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{X_i^n - X_i^{n-1}}{\Delta t}$$

X_i 为节点 i 的采样值,

X_i^n 为节点 i 在第 n 次迭代时的采样值

h 是图像 **x** 和 **y** 两个方向上的等间隔采样距离, **Δt** 为时间采样间隔

参数活动轮廓模型的有限差分求解

$$\begin{aligned} \gamma \frac{X_i^n - X_i^{n-1}}{\Delta t} = & \frac{1}{h^2} [\alpha_{i+1} (X_{i+1}^n - X_i^n) - \alpha_i (X_i^n - X_{i-1}^n)] \\ & - \frac{1}{h^4} [\beta_{i-1} (X_{i-2}^n - 2X_{i-1}^n + X_i^n) \\ & - 2\beta_i (X_{i-1}^n - 2X_i^n + X_{i+1}^n) \\ & + \beta_{i+1} (X_i^n - 2X_{i+1}^n + X_{i+2}^n)] + F_{ext}(X_i^{n-1}) \end{aligned}$$

参数活动轮廓模型的有限差分求解

令：

$$h^4 a = -\beta;$$

$$a = -\frac{\beta}{h^4}$$

$$h^4 b = 4\beta + h^2 \alpha;$$

$$h^4 d = -6\beta - 2h^2 \alpha;$$

$$A = \begin{bmatrix} d & b & a & & & a & b \\ b & d & b & a & & & a \\ a & b & d & b & a & & \\ & a & b & d & b & a & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & a & b & d & b & a \\ a & & & & & a & b & d & b \\ b & a & & & & & a & b & d \end{bmatrix}$$

参数活动轮廓模型的有限差分求解

$$\frac{X^n - X^{n-1}}{\tau} = AX^n + F_{ext}(X^{n-1})$$

$$F_{ext} = [F_x, F_y] = -\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]$$

$$X^n = (I - \tau A)^{-1} [X^{n-1} + \tau F_{ext}(X^{n-1})]$$



参数活动轮廓模型的有限差分求解

迭代终止条件:

- 指定的迭代次数
- 轮廓曲线能量的相对误差小于给定的值

$$\left| \frac{E^n(C) - E^{n-1}(C)}{E^{n-1}(C)} \right| < \Delta$$

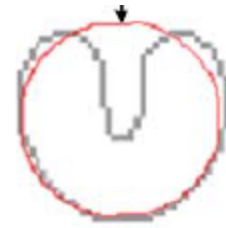
参数活动轮廓模型分割的结果展示



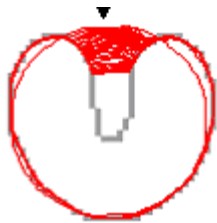
原始图像



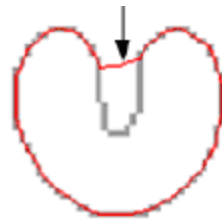
高斯外力场



初始轮廓曲线



迭代中间过程



最后结果

$$\alpha=0.05$$

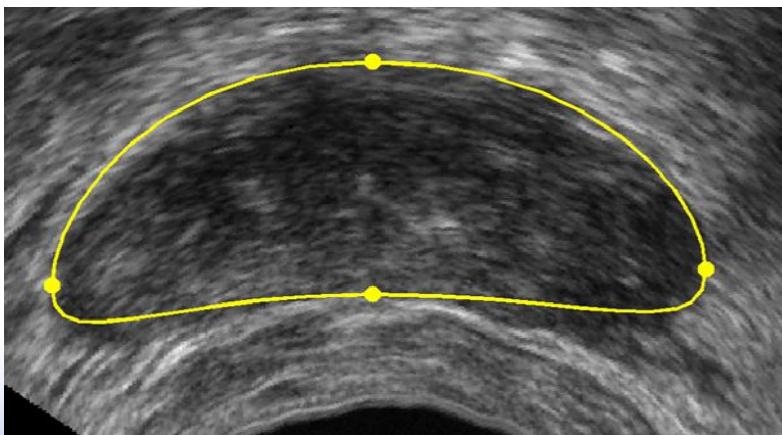
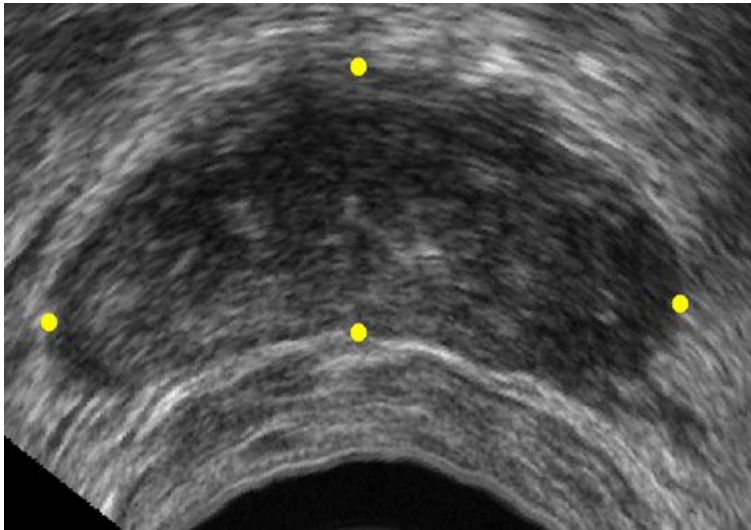
$$\beta=0$$

$$\sigma=1$$

$$\tau=1$$

在高斯外力参数活动轮廓模型中，外力作用范围有限

参数活动轮廓模型分割的结果展示





参数活动轮廓模型的研究方向

- 能量函数的计算方法
有限元方法、神经网络和动态规划
- 外部能量函数，改进 **Snake** 模型
气球力模型
梯度矢量流模型(**Gradient Vector Flow , GVF**)
- 轮廓曲线模型
基于 **B-样条**的 **Snake** 模型
- 其他问题如迭代终止等

对 **Snake** 模型的研究关键是对外力的研究，构造新的外部能量函数**Eext**，扩大 **Snake** 模型的捕获区以解决对初始轮廓曲线位置敏感问题，实现图像目标的自动分割。



$$E = \int \int \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 |\Psi - \nabla f|^2 dx dy$$



华中科技大学

梯度矢量流 (Gradient Vector Flow)

Gradient Vector Flow: A New External Force for Snakes

Chenyang Xu and Jerry L. Prince

IEEE Proc. Conf. on Comp. Vis. Patt. Recog. (CVPR'97)

寻找新的梯度矢量场 $\Psi(u(x, y), v(x, y))$

使得如下函数最小:

$$E = \int \int \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 |\Psi - \nabla f|^2 dx dy$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$u_0(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad v_0(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$



梯度矢量流 (Gradient Vector Flow)

多个自变量的变分问题:

$$J = \iint_{\Omega} f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

其**Euler**方程为:

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0$$

将梯度矢量场的能量方程拆开为**2**项:

$$\varepsilon = \iint \mu (u_x^2 + u_y^2) + |\nabla f|^2 (u - f_x)^2 dx dy + \iint \mu (v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 (v - f_y)^2 dx dy$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \mu (u_x^2 + u_y^2) + |\nabla f|^2 (u - f_x)^2$$

梯度矢量流 (Gradient Vector Flow)



华中科技大学



梯度矢量流 (Gradient Vector Flow)

$$\mu \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0$$

$$\mu \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0$$

treating u, v as functions of time and solving:

$$u(t+1) = u(t) + \mu \nabla^2 u(t) - (u(t) - f_x)(f_x^2 + f_y^2)$$

$$v(t+1) = v(t) + \mu \nabla^2 v(t) - (v(t) - f_y)(f_x^2 + f_y^2)$$

气球力Snake模型

- ◆ 在高斯力参数活动轮廓模型基础上，增加一项垂直于活动轮廓曲线且为外法线方向的大小恒定的外力(气球力)。
- ◆ 使活动轮廓曲线在同质区域内，从初始位置一直向外扩张

$$\gamma \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha \frac{\partial X}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s^2} \left(\beta \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right) + k_1 N(s) - k_2 \frac{\nabla \varepsilon}{\|\nabla \varepsilon\|}$$

气球力Snake模型

$-\frac{\nabla \varepsilon}{\|\nabla \varepsilon\|}$ 为高斯外力的方向

轮廓曲线单位外法向矢量

$$N(s) = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial s}, -\frac{\partial x}{\partial s}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2}}$$

梯度矢量流 Snake 模型 (GVF Snake)

- ◆ Helmholtz 定理指出通常一个静态矢量场可以分解为两个分量：无旋转分量和无散失分量。
- ◆ 由于高斯外力参数活动轮廓模型中，得到的势能(高斯)外力场是势能函数的梯度，它可以变为一个无旋转场。
- ◆ 静态外力由图像势能函数的梯度建立矢量扩散方程，解矢量扩散方程得到的矢量场称之为梯度矢量流场(Gradient Vector Flow, GVF)
- ◆ 该方法将图像中目标边界的梯度映射到较远的范围。

最小方差 Snake 模型

- ◆ 气球力 Snake 模型、梯度矢量流模型等，都能在一定程度上降低对初始轮廓曲线位置的敏感性，扩大 Snake 模型的收敛范围。
- ◆ 上述图像分割模型只考虑图像中目标边界信息，图像分割与轮廓曲线初始位置有关。
- ◆ 将气球力 Snake 模型中的恒定气球力修改为包含区域信息的变力，以目标和背景两区域具有最小方差为准则，引导轮廓曲线运动到正确的目标边界位置，对初始轮廓曲线位置不敏感，能完成边界模糊图像的自动分割任务。



最小方差 Snake 模型

◆ 设图像 $I(x, y)$ 只有目标区域 Ω_1 和背景区域 Ω_2 , C 为两个区域边界。基于区域内最小方差准则:

$$E(C, c_1, c_2) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_1} (I(x, y) - c_1)^2 dx dy + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_2} (I(x, y) - c_2)^2 dx dy$$

c1 为目标区域 **Ω_1** 的平均灰度值

c2 为背景区域 **Ω_2** 的平均灰度值





最小方差 Snake 模型

$$F_{\text{改进}} = k_1 (c_2 - c_1) \left(\frac{c_1 + c_2}{2} - I(x, y) \right) N$$

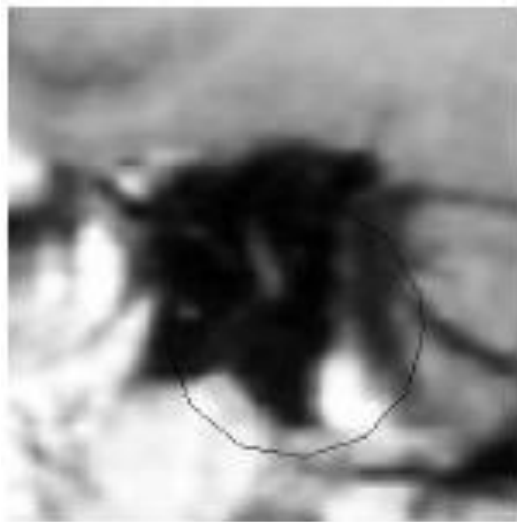
N 为包围区域 Ω_1 边界的外法线方向



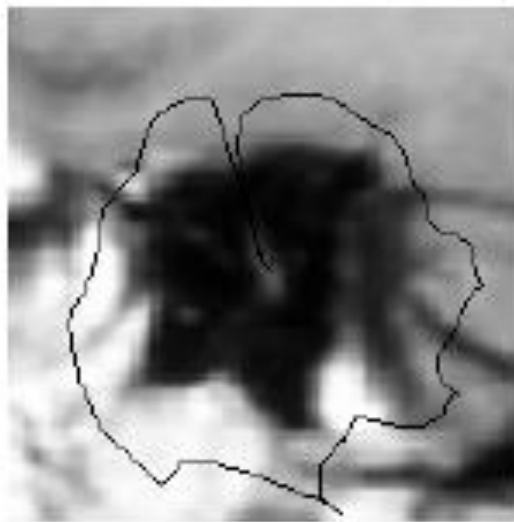
最小方差 Snake 模型



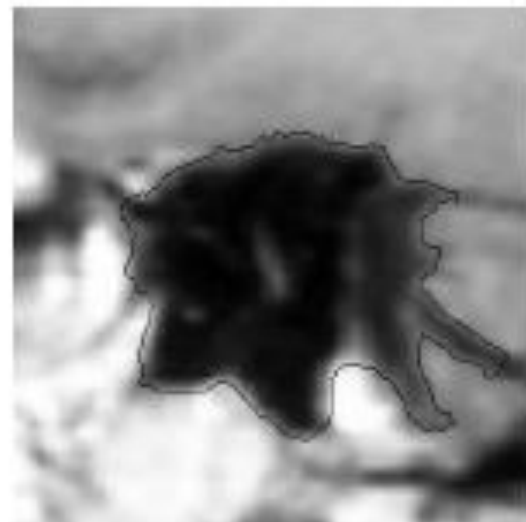
华中科技大学



(a) 初始轮廓线位置



(b) GVF 模型下分割



(c) 最小方差 Snake 模型分割

