华中科技大学

傅里叶变换

许向阳

xuxy@hust.edu.cn

参考资料

邓贤照，快速傅立叶变换浅谈，水利电力出版社，1964

徐长发，实用小波方法，华中科技大学出版社，2004

姚天任，数字信号处理，华中科技大学出版社，1999

内容提要

- 傅立叶级数
- 傅立叶级数的计算
- 傅立叶级数的直观理解
- 傅立叶变换
- 离散傅立叶变换
- 离散傅立叶变换的计算
- 快速离散傅立叶变换

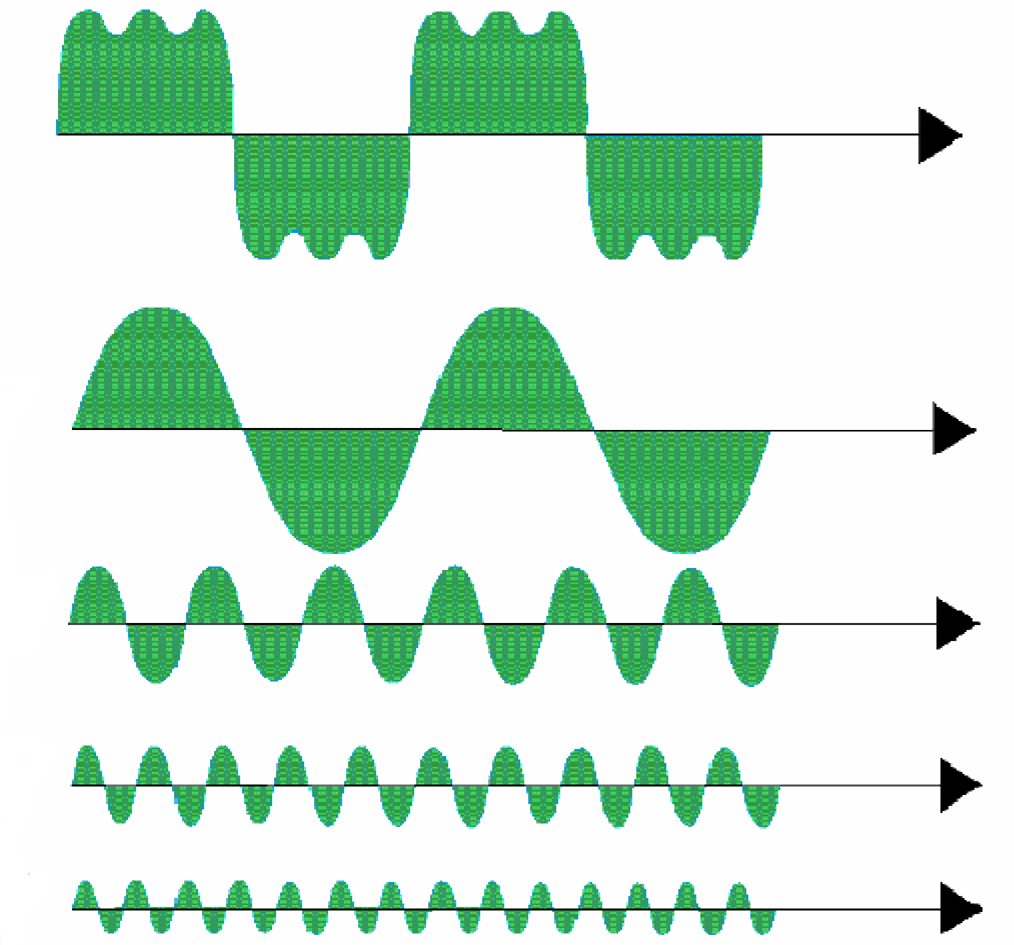
傅里叶（Fourier）

傅里叶（Fourier），法国数学家

1807年提出：

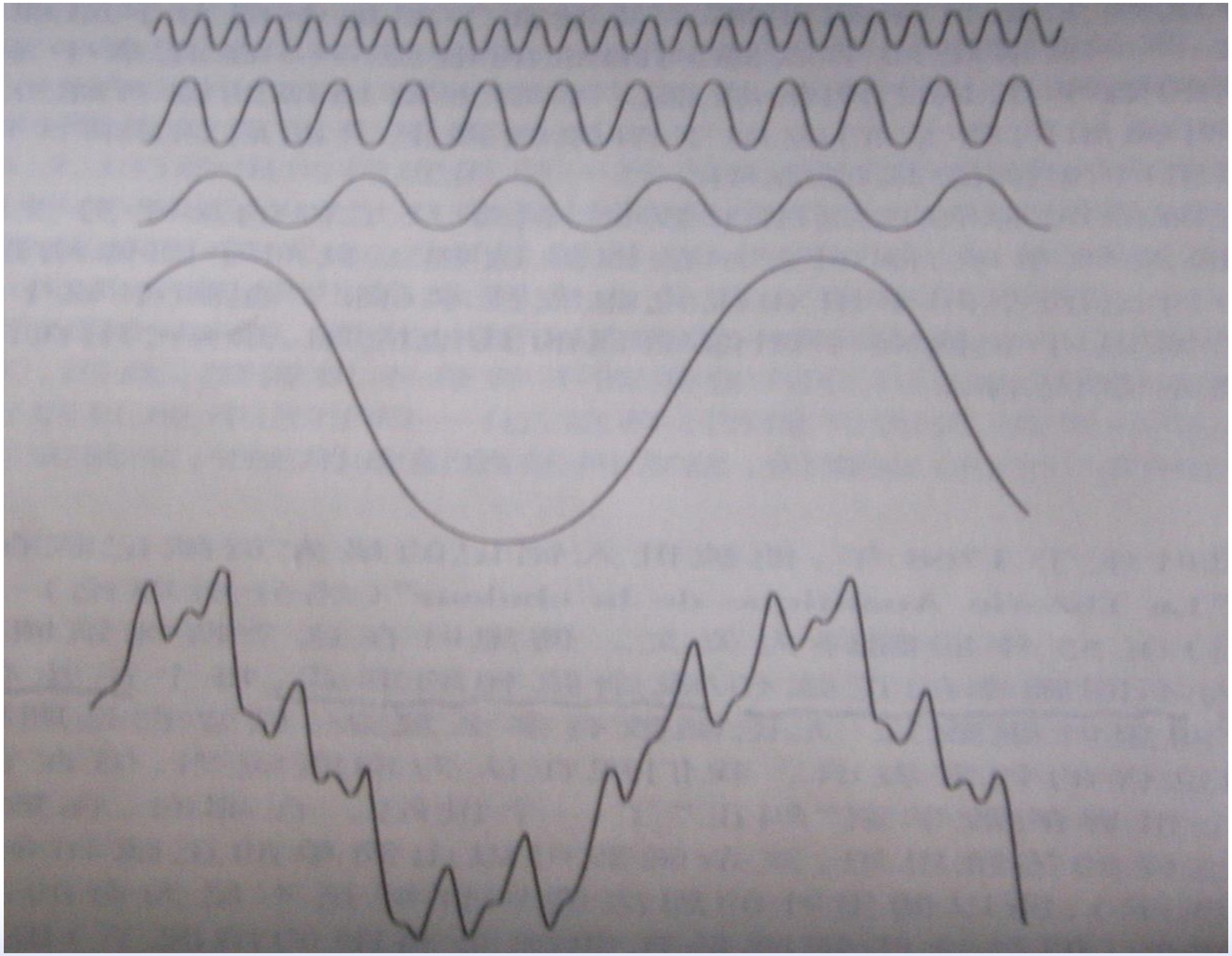
任何**周期函数**都可以表示为**谐波**关系的正弦（余弦）加权和的形式。

周期信号的分解



周期信号的分解

周期信号的叠加



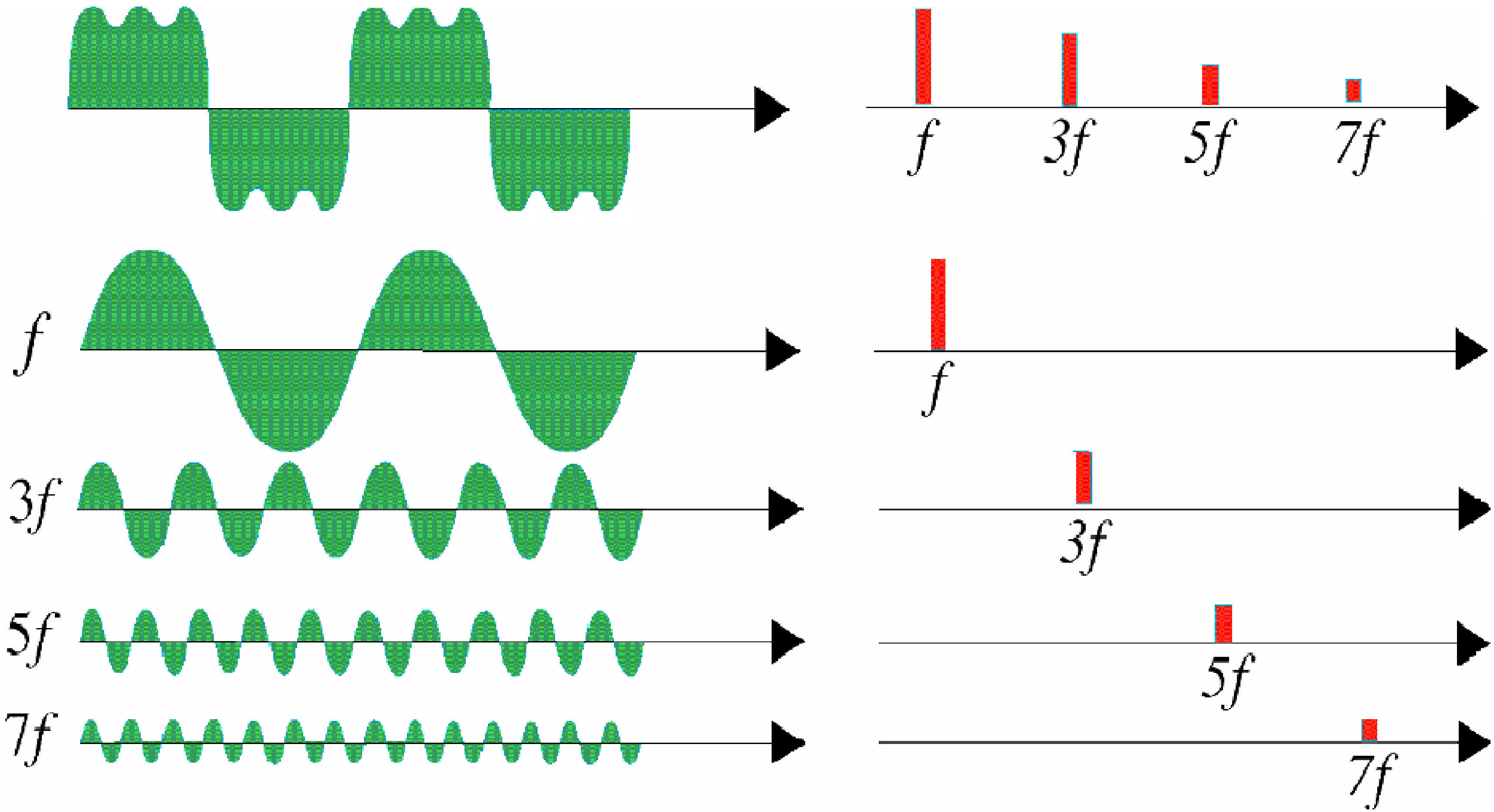
周期信号的频域分析方法

考察信号

$$f(t) = \sin \omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \frac{1}{7}\sin 7\omega_1 t$$

式中:$\omega_1=2\pi f_1$。ω_1基波频率，简称基频，ω_1的倍数称为谐波。

对于周期信号而言，其频谱由离散的频率成分，即基波与谐波构成。



时间域或空间域　　　　频率域

A_n

傅立叶级数的计算

华中科技大学

设 f(t) 是以2π为周期的函数

令:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(nt+\theta_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{A}_{\mathrm{n}}\sin\theta_n\cos nt+A_n\cos\theta_n\sin nt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}_{\mathrm{n}}\cos nt+b_n\sin nt$$

振幅 $A_n\sin(nt+\theta_n)$ **初相位**

A_n **第n次谐波** θ_n

Q：已知 a_n, b_n, 如何求 A_n θ_n **?**

傅立叶级数的计算

令：$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$

$$= a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t + \ldots$$

求：$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \cdots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \cdots,$$

三角公式及三角函数积分回顾

$$\cos(mx+nx)=\cos mx\cos nx-\sin mx\sin nx$$

$$\cos(mx-nx)=\cos mx\cos nx+\sin mx\sin nx$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(mx+nx)+\cos(mx-nx)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}\quad(\mathrm{m}\neq\mathrm{n})$$

$$=0$$

傅立叶级数的计算

令：$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$

$$= a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t + \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} \qquad T = 2\pi$$

Q：a_0 有何物理含义？

傅立叶级数的计算

华中科技大学

令： $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$

$= a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t + \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos(t)\cos(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)dt$$

Q： a_1 ,b_1 有何物理含义？

傅立叶级数的计算

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Delta\omega t + b_n \sin n\Delta\omega t), \\ a_n = \dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Delta\omega t \mathrm{d}t, \quad n = 0,1,\cdots, \\ b_n = \dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Delta\omega t \mathrm{d}t, \quad n = 1,2,\cdots, \\ \Delta\omega = 2\pi/T. \end{cases}$$

Fourier级数的三角形式

T 为周期， **T=2π**为一个特例

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad \Delta\omega = 2\pi f$$

傅立叶级数的计算

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\Delta\omega t}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\Delta wt}dt$$

Fourier级数的复指数形式

傅立叶级数的计算

用复数来表是一个数对

$$(a_n, b_n) = a_n + ib_n$$

欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \qquad \sin\theta = \frac{i}{2}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})$$

傅立叶级数的计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Delta\omega t+b_n\sin n\Delta wt)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{2}(e^{in\Delta wt}+e^{-in\Delta wt})+\frac{ib_n}{2}(e^{-in\Delta wt}-e^{in\Delta wt}))$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{2}-\frac{ib_n}{2})e^{in\Delta wt}+(\frac{a_n}{2}+\frac{ib_n}{2})e^{-in\Delta wt}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{2}-\frac{ib_n}{2})e^{in\Delta wt}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{2}+\frac{ib_n}{2})e^{-in\Delta wt}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{2}-\frac{ib_n}{2})e^{in\Delta wt}+\sum_{n=-1}^{-\infty}(\frac{a_{-n}}{2}+\frac{ib_{-n}}{2})e^{in\Delta wt}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\Delta wt}-c_0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[\cos n\Delta wt - i\sin n\Delta wt)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\Delta wt}dt$$

傅立叶级数的理解

- 时域中的f(t)仅是信号的宏观表现
- 傅立叶级数却表现了频域中的细节
- 傅立叶级数是一个无穷项的级数，取有限项可近似地表现原来的f(t),项数越多，逼近程度越好。
- 时域中的叠加、平移、放缩、卷积、相关、微分、积分等运算可转化到频率进行。

傅立叶级数的理解

函数的内积 $< f(t),\ e^{-i n \Delta w t} >$

向量的内积 $<\alpha,\ \ \beta>$

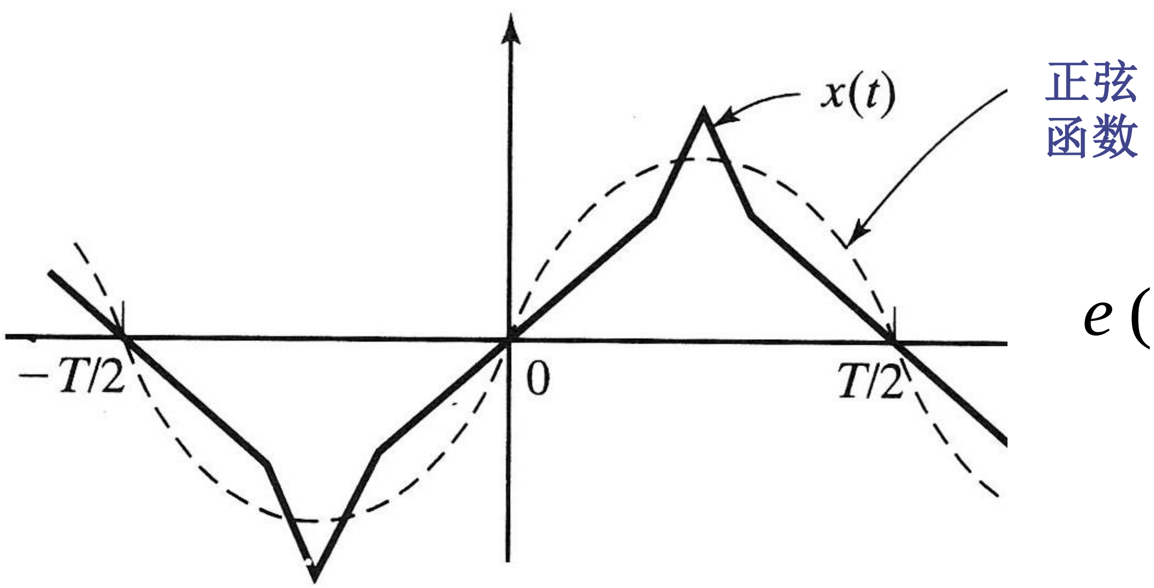
函数相关

投影 基向量

$$\left\{ 1, e^{-i\Delta\omega t}, e^{-i2\Delta\omega t},\ e^{-i3\Delta\omega t}, \ldots \right\}$$

傅立叶级数的理解

用正弦函数来近似周期函数
(Approximating Periodic Functions)



$$e(t) = x(t) - B_1 \sin \omega_0 t$$

傅立叶级数的理解

$$e(t) = x(t) - B_1 \sin \omega_0 t$$

最小化均方误差 (mean-square error)。

$$J[e(t)] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^2(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [x(t) - B_1 \sin \omega_0 t]^2\,dt$$

$$\frac{\partial J[e(t)]}{\partial B_1} = 0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} 2[x(t) - B_1 \sin \omega_0 t](-\sin \omega_0 t)\,dt$$

$$B_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) \sin \omega_0 t\,dt$$

傅立叶级数的理解

$$B_1 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin\omega_0 t\,dt$$

$$B_0 = \int_0^{T_0} x(t)\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sin\omega_0 t\right] dt$$

$$\mathrm{f} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sin\omega_0 t\right]\int_0^{T_0} x(t)\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sin\omega_0 t\right] dt$$

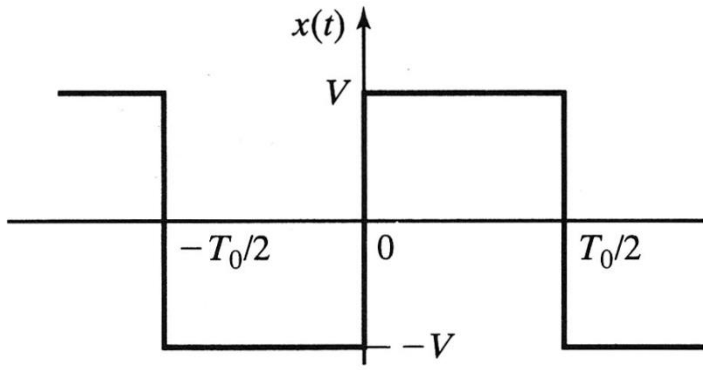
$$\mathrm{f} = [\sin\omega_0 t]\left[\frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{T_0} x(t)\sin\omega_0 t\;dt\right]$$

讨论：

连续周期函数可以展开为傅立叶级数，一般的**周期函数**可以展开为傅立叶级数吗?

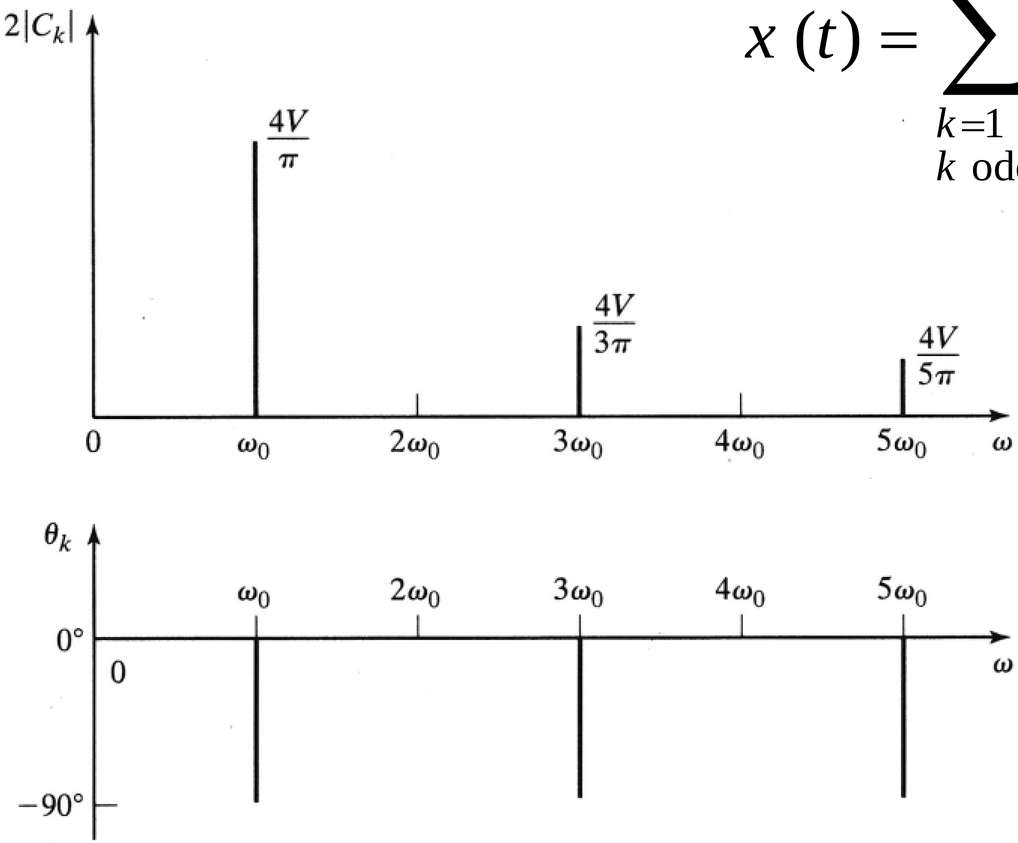
周期函数在什么条件下可以展开呢?

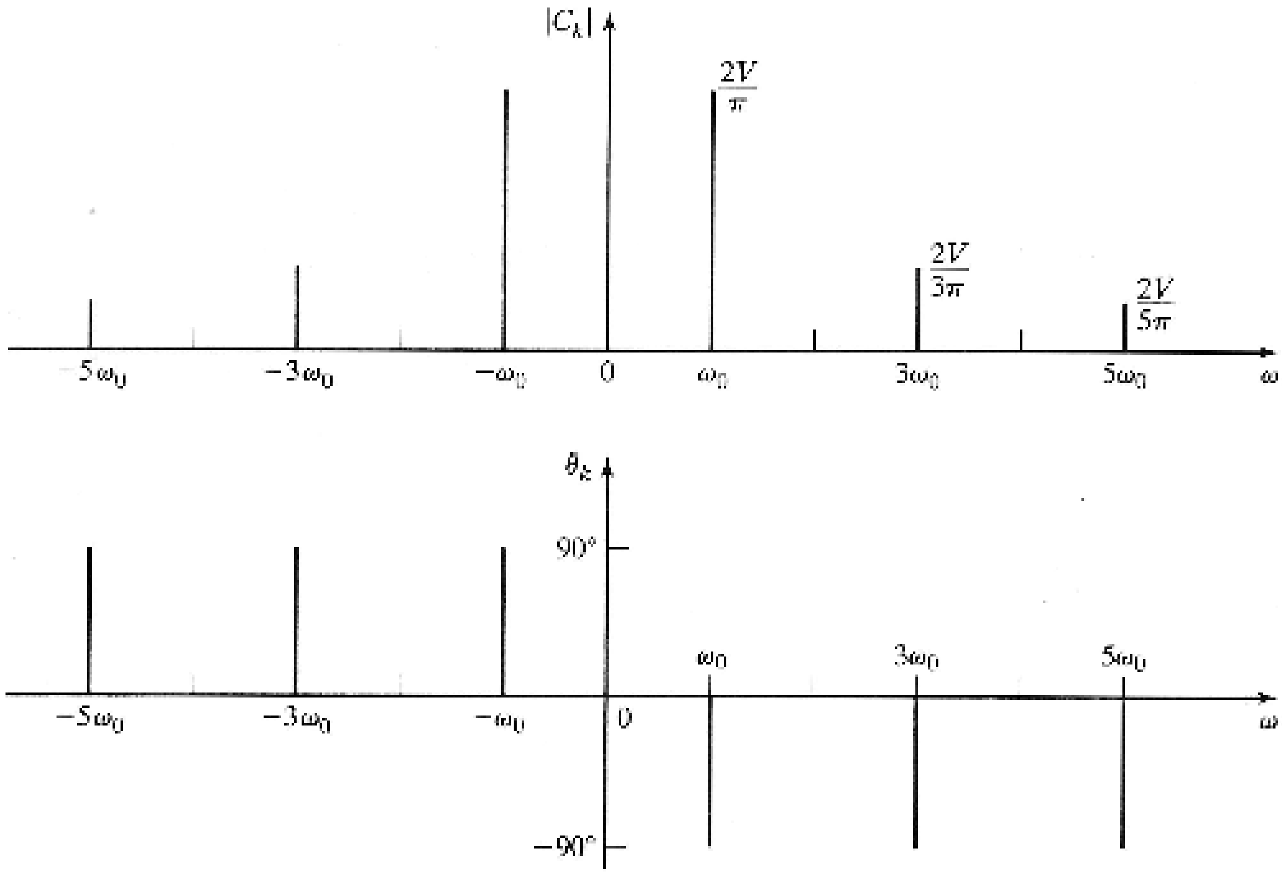
狄利克莱条件



$$x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^{\infty} \frac{4V}{k\pi} \sin k\omega_0 t$$

$$x(t)=\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{4\,\mathrm{V}}{\mathrm{k}\pi}\cos(k\omega_0 t-90^\circ)$$





|C_k|
2V/π
2V/3π
2V/5π
−5ω0
−3ω0
−ω0
0
ω0
3ω0
5ω0
ω
θ_k
90°
−90°

傅立叶变换

华中科技大学

将非周期函数看成是周期为T(T->∞)时的转换结果

$$f(t)=\lim_{T->+\infty} f_T(t)$$

$$=\lim_{T->+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\,e^{-in\Delta w\tau}d\tau]\,e^{in\Delta wt}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta w->0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[\ (\int_{-\frac{\pi}{\Delta w}}^{\frac{\pi}{\Delta w}} f_T(\tau)\,e^{-in\Delta w\tau}d\tau)\ \ e^{in\Delta wt}\ ]\,\Delta w$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau]e^{iwt}dw$$

傅立叶变换

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

由 $w=2\pi u$ W是角频率，u是频率

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du$$

傅立叶变换

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

离散傅立叶变换

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

U是基频的整数倍，角频率为2*pi*f*u

由 $2\pi ux = 2\pi * 1 * ux$ 知，基频为1，故周期为1。

将x的取值区间视为1，等间距的采样M个点。

$$F(u)=\sum_{i=0}^{M-1} f(x_i)e^{-j2\pi ux_i}\frac{1}{M}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f(k)e^{-j2\pi uk/M}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}$$

U=0，1，…，M-1

离散傅立叶变换

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

在x的取值区间为1时，基频为1

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{i2\pi ux/M}$$

X=0,1,2,…,M-1
x/M = [0,1]区间的采样

$2\pi\frac{1}{M}ux$

离散傅立叶变换

华中科技大学

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{j2\pi ux}du$$

将x的取值区间视为[0，M]，即周期为T=M，采样间距为1。

则，基频为 1/M，角频率为 $2\pi\frac{1}{M}ux$

$$F(u)=\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-j2\pi ux/M}$$

$$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{j2\pi ux/M}$$

离散化形式的另外一种形式

$2\pi\frac{1}{M}ux$

离散傅立叶变换

$$F(u)=\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}$$

$$f(x)=\frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M}$$

设抽样点之间的步长为Δx,共有M个抽样点，频率步长为Δu。则两者间的关系如下：

$$\Delta u=\frac{1}{M\Delta x}$$

二维离散傅立叶变换

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

空间域和频率域抽样点之间的关系

$$\Delta u=\frac{1}{M\Delta x}\qquad \Delta v=\frac{1}{N\Delta y}$$

二维离散傅立叶变换

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$f(x,y) = F(0,0)e^{j2\pi(0x/M+0y/N)}$$

$$+\ F(1,0)e^{j2\pi(1x/M+0y/N)}$$

$$+\ F(5,3)e^{j2\pi(5x/M+3y/N)}$$

$$+\ \ldots\ldots$$

离散傅立叶变换的实现

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi ux/N}$$

U=0,1,…,N-1

令 $W=e^{-j2\pi/N}$ 则 $F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W^{ux}$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \dots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0*0} & W^{1*0} & \dots & W^{(N-1)*0} \\ W^{0*1} & W^{1*1} & \dots & W^{(N-1)*1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{0*(N-1)} & W^{1*(N-1)} & \dots & W^{(N-1)*(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \dots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

离散傅立叶变换的实现

$$W = e^{-j2\pi / N}$$

旋转因子 W 具有的性质：

- **以N为周期**
- **对称性**

$$W^{\frac{N}{2}} = W^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = -1$$

$$W^{ux+\frac{N}{2}} = W^{ux} \times W^{\frac{N}{2}} = -W^{ux}$$

离散傅立叶变换的实现

华中科技大学

当N=4时，W阵为：

$$\begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{pmatrix}$$

1965年，Cooley和Tukey提出了

快速傅立叶变换算法

Fast Fourier Transform

充分利用旋转因子的周期性和对称性来实现FFT。