研究生公共基础课

矩 阵 论

前 言

一、课程介绍

- 研究内容：
  - ⋆ 矩阵与线性空间和线性变换
    - ∗ 以矩阵为工具研究问题
    - ∗ 在其中发展矩阵理论

前 言

一、课程介绍

- 研究内容：
  - ⋆ 矩阵与线性空间和线性变换
    - ∗ 以矩阵为工具研究问题
    - ∗ 在其中发展矩阵理论
  - ⋆ 矩阵在各种意义下的化简与分解
  - ⋆ 矩阵的分析理论
  - ⋆ 各类矩阵的性质研究

- 矩阵被认为是最有用的数学工具, 既适用于应用问题, 又适合现代理论数学的抽象结构.

- 矩阵被认为是最有用的数学工具, 既适用于应用问题, 又适合现代理论数学的抽象结构.

二、教学安排学时配置讲授第1章至第6章(48学时)

第1章：10学时;　　第2章：8学时;

第3章：8学时;　　第4章：6学时;

第5章：8学时;　　第6章：6学时.

三、教学指导意见

- 背景要求: 线性代数.
- 矩阵与计算工具: MATLAB，MAPLE, $\cdots$.
- 矩阵与现代应用：应用选讲.

- 矩阵被认为是最有用的数学工具, 既适用于应用问题, 又适合现代理论数学的抽象结构.

二、教学安排学时配置讲授第1章至第6章(48学时)

第1章：10学时;	第2章：8学时;
第3章：8学时;	第4章：6学时;
第5章：8学时;	第6章：6学时.

三、教学指导意见

- 背景要求: 线性代数.
- 矩阵与计算工具: MATLAB，MAPLE, · · · .
- 矩阵与现代应用：应用选讲.

- 教学参考书：

① 余鄂西，矩阵论，高等教育出版社，1995.

② 方保熔等，矩阵论，清华大学出版社，2004.

③ Fuzhen Zhang, Matrix Theory， Springer， 1999.

④ Denis Serre, Matrices Theory and Applications, Springer, 2002.

⑤ 矩阵论历年试题及其解答.

- 教学参考书：

  ① 余鄂西，矩阵论，高等教育出版社，1995.

  ② 方保熔等，矩阵论，清华大学出版社，2004.

  ③ Fuzhen Zhang, Matrix Theory， Springer， 1999.

  ④ Denis Serre, Matrices Theory and Applications, Springer, 2002.

  ⑤ 矩阵论历年试题及其解答.

- 不交作业，但应该重视练习环节.

第一章 线性空间 线性变换

- 内容：
  - ⋆ 线性空间的一般概念（重点：空间结构和其中的数量关系）
  - ⋆ 线性变换（重点：其中的矩阵处理方法）
- 特点：
  - ⋆ 研究代数结构——具有线性运算的集合.
  - ⋆ 看重的不是研究对象本身，而是对象之间的结构关系.
  - ⋆ 研究的关注点：对象之间数量关系的矩阵处理.
  - ⋆ 学习特点：具有抽象性和一般性.

§1.1 线性空间

如果数集F中任意两个数作某一运算后的结果仍在F中, 我们就称数集F对这个运算是封闭的. 特别地, 对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算封闭的数集F称为数域.

1. 线性空间的概念

定义 1.1 设V是一个以$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$为元素的非空集合, F是一个数域. 在基中定义两种运算, 一种叫加法: $\forall\ \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta \in V$; 另一种叫数量乘法: $\forall\ k \in F, \alpha \in V, k\alpha \in V$, 并且满足下列八条运算法则:

① 加法交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

② 加法结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③ V中存在零元素: $\exists\ \alpha_0\in V, \forall\ \alpha\in V, \alpha+\alpha_0=\alpha$, 记$\alpha_0=0$或$\overrightarrow{0}$;

④ 负元素存在: $\alpha\in V, \exists\ \beta\in V$, 使$\alpha+\beta=0$, 记$\beta=-\alpha$;

① 加法交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

② 加法结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③ V中存在零元素: $\exists\ \alpha_0\in V, \forall\ \alpha\in V, \alpha+\alpha_0=\alpha$,
记$\alpha_0=0$或$\vec{0}$;

④ 负元素存在: $\alpha\in V, \exists\ \beta\in V$, 使$\alpha+\beta=0$, 记$\beta=-\alpha$;

⑤ 数乘结合律: $(kl)\alpha=k(l\alpha)$;

⑥ 存在$1\in F$, 使$1\alpha=\alpha$;

① 加法交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

② 加法结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③ V中存在零元素: $\exists\ \alpha_0\in V, \forall\ \alpha\in V, \alpha+\alpha_0=\alpha$, 记$\alpha_0=0$或$\overrightarrow{0}$;

④ 负元素存在: $\alpha\in V, \exists\ \beta\in V$, 使$\alpha+\beta=0$, 记$\beta=-\alpha$;

⑤ 数乘结合律: $(kl)\alpha=k(l\alpha)$;

⑥ 存在$1\in F$, 使$1\alpha=\alpha$;

⑦ 分配律: $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

⑧ 分配律: $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

① 加法交换律: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

② 加法结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③ V中存在零元素: $\exists\ \alpha_0\in V, \forall\ \alpha\in V, \alpha+\alpha_0=\alpha$, 记$\alpha_0=0$或$\overrightarrow{0}$;

④ 负元素存在: $\alpha\in V, \exists\ \beta\in V$, 使$\alpha+\beta=0$, 记$\beta=-\alpha$;

⑤ 数乘结合律: $(kl)\alpha=k(l\alpha)$;

⑥ 存在$1\in F$, 使$1\alpha=\alpha$;

⑦ 分配律: $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

⑧ 分配律: $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

则称V为数域F上的**线性空间**. V中元素称为**向量**. F为**实(复)数域**时, 称V是**实(复)数线性空间**.

则称V为数域F上的线性空间. V中元素称为向量. F为实(复)数域时, 称V是实(复)数线性空间.

例 1.1 对给定的数域F, 集合$F^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_i \in F\}$, 对通常的向量的加法和数乘运算, F^n为数域F上的线性空间. 当F为实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$时, $\mathbb{R}^n$和$\mathbb{C}^n$是它的两种具体形式.

则称V为数域F上的线性空间. V中元素称为向量. F为实(复)数域时, 称V是实(复)数线性空间.

例 1.1 对给定的数域F, 集合$F^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_i \in F\}$, 对通常的向量的加法和数乘运算, F^n为数域F上的线性空间. 当F为实数域$\mathbb{R}$和复数域$\mathbb{C}$时, $\mathbb{R}^n$和$\mathbb{C}^n$是它的两种具体形式.

例 1.2 $V = F^{m\times n} = \{A = (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in F\}$, 它在矩阵的加法和数乘运算下构成数域$F$上的线性空间, 称为矩阵空间, 其中$\mathbb{R}^{m\times n}$为由一切$m \times n$实矩阵构成的实矩阵空间.

例 1.3 实数域$\mathbb{R}$上次数不超过$n-1$次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

在通常的多项式加法与多项式数乘多项式运算下构成线性空间, 称为多项式空间$P_n[x]$.

例 1.3 实数域$\mathbb{R}$上次数不超过$n-1$次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

在通常的多项式加法与多项式数乘多项式运算下构成线性空间, 称为多项式空间$P_n[x]$.

例 1.4 $V = C[a, b] = \{f(x) \mid f(x)$是区间$[a, b]$上实连续函数$\}$, 对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

例 1.3 实数域$\mathbb{R}$上次数不超过$n-1$次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构成的集合

$$P_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

在通常的多项式加法与多项式数乘多项式运算下构成线性空间, 称为多项式空间$P_n[x]$.

例 1.4 $V = C[a,\, b] = \{f(x) \mid f(x)$是区间$[a,\, b]$上实连续函数$\}$, 对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

例 1.5 $V = L^p(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid f(x)$是$\mathbb{R}$上$p$次方可积函数$\}$, 对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

例 1.5 $V=L^p(\mathbb{R})=\{f(x)\mid f(x)$是$\mathbb{R}$上$p$次方可积函数$\}$, 对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

例 1.6 取集合为正数集合$\mathbb{R}^+$, F为实数域$\mathbb{R}$, 加法$\oplus$和数乘$\circ$定义如下:

$$\oplus:\quad \forall\, a,\, b\in\mathbb{R}^+,\quad a\oplus b=ab;$$

$$\circ:\forall\, k\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^+,\, k\circ a=a^k.$$

例 1.5 $V=L^p(\mathbb{R})=\{f(x)\mid f(x)$是$\mathbb{R}$上$p$次方可积函数$\}$，对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

例 1.6 取集合为正数集合$\mathbb{R}^+$, F为实数域$\mathbb{R}$, 加法$\oplus$和数乘$\circ$定义如下:

$$\oplus: \quad \forall\, a,\, b\in\mathbb{R}^+, \quad a\oplus b=ab;$$

$$\circ: \forall\, k\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^+, k\circ a=a^k.$$

在此运算下, $\mathbb{R}^+$是$\mathbb{R}$上的一个线性空间.

例 1.5 $V=L^p(\mathbb{R})=\{f(x)\mid f(x)$是$\mathbb{R}$上$p$次方可积函数$\}$, 对于函数的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

例 1.6 取集合为正数集合$\mathbb{R}^+$, F为实数域$\mathbb{R}$, 加法$\oplus$和数乘$\circ$定义如下:

$$\oplus:\quad \forall\, a,\, b\in\mathbb{R}^+,\quad a\oplus b=ab;$$

$$\circ:\forall\, k\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^+,\, k\circ a=a^k.$$

在此运算下, $\mathbb{R}^+$是$\mathbb{R}$上的一个线性空间. 加法零元素是$\mathbb{R}^+$中的数1, $\mathbb{R}^+$中的元素a的负元素是a^{-1}.

定理 1.1 线性空间V有如下性质:

定理 1.1 线性空间V有如下性质:

① V中的零元素惟一;

② V中任一元素的负元素惟一;

定理 1.1 线性空间V有如下性质:

① V中的零元素惟一;

② V中任一元素的负元素惟一;

③ 设0为数零, $\vec{0}$为V中零向量, 则

(a) $0 \cdot \alpha = \vec{0}$,

(b) $k \cdot \vec{0} = \vec{0}, k \in F$,

(c) 若$k \cdot \alpha = \vec{0}$, 则一定有$k = 0$或$\alpha = \vec{0}$,

(d) $(-1)\alpha = -\alpha$;

④ V中的元对加法满足消去律, 即, $\forall\, \alpha,\ \beta,\ \gamma \in V$, 由$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$可以得到$\alpha = \beta$.

定理 1.1 线性空间V有如下性质:

① V中的零元素惟一;

② V中任一元素的负元素惟一;

③ 设0为数零, $\vec{0}$为V中零向量, 则

(a) $0\cdot\alpha=\vec{0}$,

(b) $k\cdot\vec{0}=\vec{0}, k\in F$,

(c) 若$k\cdot\alpha=\vec{0}$, 则一定有$k=0$或$\alpha=\vec{0}$,

(d) $(-1)\alpha=-\alpha$;

④ V中的元对加法满足消去律, 即, $\forall\,\alpha,\ \beta,\ \gamma\in V$, 由$\alpha+\gamma=\beta+\gamma$可以得到$\alpha=\beta$.

2. 线性空间的基与维数

线性空间的基与维数等概念几乎重复了n维向量空间$\mathbb{R}^n$中的相关讨论. 因此, $\mathbb{R}^n$中线性组合, 线性表示, 线性相关, 线性无关等概念及与这些概念相关的性质与结果都可以平移到线性空间中, 在此不再赘述.

2. 线性空间的基与维数

线性空间的基与维数等概念几乎重复了n维向量空间$\mathbb{R}^n$中的相关讨论. 因此, $\mathbb{R}^n$中线性组合, 线性表示, 线性相关, 线性无关等概念及与这些概念相关的性质与结果都可以平移到线性空间中, 在此不再赘述.

定义 1.2 设V是线性空间, 若存在一组线性无关的向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使空间中任一向量可由它们线性表示, 则称向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为$V$的一组基. 基所含向量个数为$V$的维数, 记为$\dim V = n$或者$n = +\infty$.

例 1.7 向量组$\{\vec{e}_1=(1\,0\,0\,\cdots\,0)^T,\ \overrightarrow{e}_2=(0\,1\,0\,\cdots\,0)^T,\ \cdots,\ \overrightarrow{e}_n=(0\,0\,0\,\cdots\,0\,1)^T\}$是$F^n$的一组基, 所以$\dim F^n=n$.

例 1.7 向量组$\{\vec{e}_1=(1\,0\,0\,\cdots\,0)^T,\ \overrightarrow{e}_2=(0\,1\,0\,\cdots\,0)^T,\ \cdots,\ \overrightarrow{e}_n=(0\,0\,0\,\cdots\,0\,1)^T\}$是$F^n$的一组基, 所以$\dim F^n=n$.

例 1.8 $\{E_{ij},\, i=1,2,\cdots,m;\, j=1,2,\cdots,n\}$是矩阵空间$\mathbb{R}^{m\times n}$的一组基, $\dim\mathbb{R}^{m\times n}=mn$.

例 1.7 向量组$\{\vec{e}_1=(1\,0\,0\,\cdots\,0)^T,\ \vec{e}_2=(0\,1\,0\,\cdots\,0)^T,\ \cdots,\ \vec{e}_n=(0\,0\,0\,\cdots\,0\,1)^T\}$是$F^n$的一组基, 所以$\dim F^n=n$.

例 1.8 $\{E_{ij},\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}$是矩阵空间$\mathbb{R}^{m\times n}$的一组基, $\dim\mathbb{R}^{m\times n}=mn$.

例 1.9 向量组$\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1}\}$是线性空间$P_n[x]$的一组基, $\dim P_n[x]=n$.

例 1.7 向量组$\{\vec{e}_1=(1\,0\,0\,\cdots\,0)^T, \overrightarrow{e}_2=(0\,1\,0\,\cdots\,0)^T, \cdots, \overrightarrow{e}_n=(0\,0\,0\,\cdots\,0\,1)^T\}$是$F^n$的一组基, 所以$\dim F^n=n$.

例 1.8 $\{E_{ij}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n\}$是矩阵空间$\mathbb{R}^{m\times n}$的一组基, $\dim\mathbb{R}^{m\times n}=mn$.

例 1.9 向量组$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$是线性空间$P_n[x]$的一组基, $\dim P_n[x]=n$.

以上例子中, 空间维数$\dim V$都为有限数, 这样的空间称为有限维线性空间. 若$\dim V$不是有限数, 则称V为无限维线性空间.

例 1.7 向量组$\{\vec{e}_1 = (1\,0\,0\,\cdots\,0)^T,\ \vec{e}_2 = (0\,1\,0\,\cdots\,0)^T,\ \cdots,\ \vec{e}_n = (0\,0\,0\,\cdots\,0\,1)^T\}$是$F^n$的一组基, 所以$\dim F^n = n$.

例 1.8 $\{E_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n\}$是矩阵空间$\mathbb{R}^{m\times n}$的一组基, $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.

例 1.9 向量组$\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$是线性空间$P_n[x]$的一组基, $\dim P_n[x] = n$.

以上例子中, 空间维数$\dim V$都为有限数, 这样的空间称为有限维线性空间. 若$\dim V$不是有限数, 则称V为无限维线性空间.

例 1.10 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots\} \subseteq C[a, b]$, 因此 $\dim C[a, b] = \infty$.

例 1.10 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots\} \subseteq C[a, b]$, 因此 $\dim C[a, b] = \infty$.

这里我们只讨论有限维空间.

例 1.10 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots\} \subseteq C[a, b]$, 因此 $\dim C[a, b] = \infty$.

这里我们只讨论有限维空间.

约定记号$V_n(F)$表示V是数域F上的n维线性空间.

例 1.10 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, \cdots\} \subseteq C[a, b]$, 因此 $\dim C[a, b] = \infty$.

这里我们只讨论有限维空间.

约定记号$V_n(F)$表示V是数域F上的n维线性空间.

我们指出, 线性空间的基不是惟一的:

定理 1.2 n维线性空间中任意n个线性无关的向量构成的向量组都是空间的基.

3. 坐标

定义 1.3 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是线性空间$V_n(F)$的一组基, $\forall\, \beta \in V_n(F)$, 若

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1-1}$$

则称数$x_1, x_2, \cdots, x_n$是β在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下的坐标, (1−1)式中向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$为$\beta$的坐标向量, 也简称为坐标.

例 1.11 $P_4[x]$中向量$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$在基$\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$和$\{1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3\}$下的坐标分别为$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$和$\left(f(1),\ f'(1),\ \frac{1}{2}f''(1),\ \frac{1}{3!}f'''(1)\right)$.

例 1.11 $P_4[x]$中向量$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$在基$\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$和$\{1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3\}$下的坐标分别为$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$和$\left(f(1),\ f'(1),\ \frac{1}{2}f''(1),\ \frac{1}{3!}f'''(1)\right)$.

定理 1.3 设$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$是$n$维线性空间$V_n(F)$的一组基, $V_n(F)$中向量β_i在该基下坐标为$X_i\in F^n$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 则$V_n(F)$中向量组$\{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m\}$线性相关的充分必要条件是其坐标向量组$\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m\}$是$F^n$中的线性相关组.

例 1.11 $P_4[x]$中向量$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$在基$\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$和$\{1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3\}$下的坐标分别为$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$和$\left(f(1),\ f'(1),\ \frac{1}{2}f''(1),\ \frac{1}{3!}f'''(1)\right)$.

定理 1.3 设$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$是$n$维线性空间$V_n(F)$的一组基, $V_n(F)$中向量β_i在该基下坐标为$X_i\in F^n$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 则$V_n(F)$中向量组$\{\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m\}$线性相关的充分必要条件是其坐标向量组$\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m\}$是$F^n$中的线性相关组.

证明 在固定基$A=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$的情况下, 作映射$\sigma:\ V_n(F)\longrightarrow F^n$, 对应法则是

$$V_n(F)\text{中向量}\beta \longmapsto X \ (\beta\text{在基}A\text{下的坐标}),$$

$$V_n(F)\text{中向量}\beta \longmapsto X\ (\beta\text{在基}A\text{下的坐标}),$$

则σ线性空间$V_n(F)$到F^n的一一对应, 并且

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha).$$

$$V_n(F)\text{中向量}\beta \longmapsto X\ (\beta\text{在基}A\text{下的坐标}),$$

则σ线性空间$V_n(F)$到F^n的一一对应, 并且

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha).$$

设$V_n(F)$中向量β_i的坐标为X_i, $i=1,\ 2,$ $\cdots,\ m$, 则β_i的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\beta_i$的坐标是$\sum\limits_{i=1}^{m}k_iX_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\beta_i=\vec{0}\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{m}k_iX_i=\vec{0}(=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T),$$

$$V_n(F)\text{中向量}\beta \longmapsto X\ (\beta\text{在基}A\text{下的坐标}),$$

则σ线性空间$V_n(F)$到F^n的一一对应, 并且

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha).$$

设$V_n(F)$中向量β_i的坐标为X_i, $i=1,\ 2,$

$\cdots,\ m$, 则β_i的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\beta_i$的坐标是$\sum\limits_{i=1}^{m}k_iX_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\beta_i=\vec{0}\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{m}k_iX_i=\vec{0}(=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T),$$

定理由此得证. ■

例 1.12 讨论$P_4[x]$中向量$f_1 = 1 + 2x + 4x^3$, $f_2 = x + x^2 + 4x^3$, $f_3 = 1 + x - 3x^2$, $f_4 = -2x^2 + x^3$的线性相关性.

例 1.12 讨论$P_4[x]$中向量$f_1 = 1 + 2x + 4x^3$, $f_2 = x + x^2 + 4x^3$, $f_3 = 1 + x - 3x^2$, $f_4 = -2x^2 + x^3$的线性相关性.

解 向量f_1, f_2, f_3, f_4在基$\{1, x, x^2, x^3\}$下的坐标分别为$(1\ 2\ 0\ 4)^T$, $(0\ 1\ 1\ 4)^T$, $(1\ 1\ -3\ 0)^T$, $(0\ 0\ -2\ 1)^T$, 写成矩阵形式有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 1.12 讨论$P_4[x]$中向量$f_1=1+2x+4x^3$, $f_2=x+x^2+4x^3$, $f_3=1+x-3x^2$, $f_4=-2x^2+x^3$的线性相关性.

解 向量f_1, f_2, f_3, f_4在基$\{1, x, x^2, x^3\}$下的坐标分别为$(1\ 2\ 0\ 4)^T, (0\ 1\ 1\ 4)^T, (1\ 1\ -3\ 0)^T, (0\ 0\ -2\ 1)^T$, 写成矩阵形式有

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&1&0\\0&1&-3&-2\\4&4&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rank}(A)=4$, 因此$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$线性无关. ■

4. 基变换与坐标变换

4. 基变换与坐标变换

定义 1.4 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$是$n$维线性空间$V_n(F)$的两组基, 若有矩阵$\boldsymbol{C} \in F^{n\times n}$, 使

$$(\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)C,$$

则称矩阵C是从基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$到基$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$的过渡矩阵(基变换矩阵).

4. 基变换与坐标变换

定义 1.4 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$是$n$维线性空间$V_n(F)$的两组基, 若有矩阵$\boldsymbol{C} \in F^{n\times n}$, 使

$$(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \alpha_n)C,$$

则称矩阵C是从基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$到基$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$的过渡矩阵(基变换矩阵).

定理 1.4 设线性空间$V_n(F)$的一组基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$到另一组基$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$的过渡矩阵为$C$, $V_n(F)$中向量α在两组基下坐标分别为X, Y, 则有$X = CY$.

例 1.13 求$P_4[x]$中基$\{1, x, x^2, x^3\}$到基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$(见例1.12)的过渡矩阵,并求向量$f = 1 + x + x^2 + x^3$在基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$下的坐标.

例 1.13 求$P_4[x]$中基$\{1, x, x^2, x^3\}$到基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$(见例1.12)的过渡矩阵,并求向量$f = 1 + x + x^2 + x^3$在基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$下的坐标.

解 显然有f_i在基$\{1, x, x^2, x^3\}$下的坐标C_i, 所以从基$\{1, x, x^2, x^3\}$到基$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$的过渡矩阵是

$$C = (C_1\ C_2\ C_3\ C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

又

$$f = 1 + x + x^2 + x^3 = (1\ x\ x^2\ x^3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= (f_1\ f_2\ f_3\ f_4)C^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

又

$$f = 1 + x + x^2 + x^3 = (1\ x\ x^2\ x^3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= (f_1\ f_2\ f_3\ f_4)C^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以

$$Y = C^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

■

5. 子空间

5. 子空间

定义 1.5 设$V_n(F)$为线性空间, W是V的非空子集. 若W的元素关于V中加法与数乘运算也构成线性空间, 则称W是V的一个子空间.

5. 子空间

定义 1.5 设$V_n(F)$为线性空间, W是V的非空子集. 若W的元素关于V中加法与数乘运算也构成线性空间, 则称W是V的一个子空间.

定理 1.5 设W是线性空间$V_n(F)$的非空子集, 则W是$V_n(F)$的子空间的充分必要条件是

① 若$\alpha, \beta \in W$, 则$\alpha + \beta \in W$;

② 若$\alpha \in W, k \in F$, 则$k\alpha \in W$.

证明 必要性是显然的, 我们只证充分性.

证明　必要性是显然的, 我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

证明　必要性是显然的, 我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

因为$k\alpha \in W$, 取$k = 0$, 则$0\alpha = \mathbf{0} \in W$. 又取$k = -1$, 则$-\alpha = (-1)\alpha \in W$, 即$W$中存在零元素和一个元素的负元素. 又因为$W \subseteq V$, 对$V$中加法与数乘, 定义1.1中其余6条法则对$W$中元素进行运算时必须满足, 故由定义1.1, W是线性空间, 从而是$V_n(F)$的子空间. ■

证明 必要性是显然的, 我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

因为$k\alpha \in W$, 取$k = 0$, 则$0\alpha = \mathbf{0} \in W$. 又取$k = -1$, 则$-\alpha = (-1)\alpha \in W$, 即$W$中存在零元素和一个元素的负元素. 又因为$W \subseteq V$, 对$V$中加法与数乘, 定义1.1中其余6条法则对$W$中元素进行运算时必须满足, 故由定义1.1, W是线性空间, 从而是$V_n(F)$的子空间. ■

例 1.14 在线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$中, 讨论集合

$$W_1 = \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A^T = A\},$$

$$W_2 = \{B \mid B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mid B \mid \neq 0\},$$

是否为$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

证明 必要性是显然的, 我们只证充分性.

设W满足①与②, 我们来验证定义1.1中八条运算法则.

因为$k\alpha \in W$, 取$k = 0$, 则$0\alpha = \mathbf{0} \in W$. 又取$k = -1$, 则$-\alpha = (-1)\alpha \in W$, 即$W$中存在零元素和一个元素的负元素. 又因为$W \subseteq V$, 对$V$中加法与数乘, 定义1.1中其余6条法则对$W$中元素进行运算时必须满足, 故由定义1.1, W是线性空间, 从而是$V_n(F)$的子空间. ■

例 1.14 在线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$中, 讨论集合

$$W_1 = \{A \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A^T = A\},$$

$$W_2 = \{B \mid B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mid B \mid \neq 0\},$$

是否为$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

解 由于$\forall\ A_1, A_2 \in W_1$, 有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

解 由于$\forall\ A_1, A_2 \in W_1$, 有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

由定理1.5, W_1是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

解 由于$\forall\ A_1, A_2 \in W_1$, 有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

由定理1.5, W_1是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

因为$\mathbf{0} \notin W_2$, 所以W_2不是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间. ■

解 由于$\forall\, A_1, A_2 \in W_1$, 有

$$(A_1+A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

由定理1.5, W_1是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

因为$\mathbf{0} \notin W_2$, 所以W_2不是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间. ■

例 1.15 设V是线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$V$中一组向量, 则由它们的一切线性组合构成的集合:

$$L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = \left\{\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i,\ k_i \in F\right\}$$

是V的一个子空间, 称为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$生成的子空间.

解 由于$\forall\ A_1, A_2 \in W_1$, 有

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2 \in W,$$

$$(kA_1)^T = kA_1^T = A_1 \in W,$$

由定理1.5, W_1是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间.

因为$\mathbf{0} \notin W_2$, 所以W_2不是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间. ■

例 1.15 设V是线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$V$中一组向量, 则由它们的一切线性组合构成的集合:

$$L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = \left\{\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i,\ k_i \in F\right\}$$

是V的一个子空间, 称为由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$生成的子空间.

证明 $\forall\, \alpha,\, \beta \in L\{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_m\}$, 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i\alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m}(k_i + l_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m}(kk_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_m\},$$

证明 $\forall\, \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$, 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i\alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m} (k_i + l_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m} (kk_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

故$L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$为$V$的子空间. ■

证明 $\forall\, \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$, 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i\alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m}(k_i + l_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m}(kk_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

故$L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$为$V$的子空间. ■

注 1.1 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$为$V$中包含$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的子空间中最小的一个子空间.

证明 $\forall\, \alpha, \beta \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$, 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{m} l_i\alpha_i.$$

则

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^{m}(k_i + l_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$k\alpha = \sum_{i=1}^{m}(kk_i)\alpha_i \in L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

故$L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$为$V$的子空间. ■

注 1.1 $L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$为$V$中包含$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的子空间中最小的一个子空间.

若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是线性空间$V$的一组基, 则$V$可表示为$V = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.

例 1.16 对一个矩阵$A \in F^{m\times n}$, 有如下两个子空间:

$$N(A) = \{\boldsymbol{X} \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}\} \subseteq F^n,$$

$$R(A) = L\{A_1,\, A_2,\, \cdots,\, A_n\} \subseteq F^m, \tag{1-2}$$

例 1.16 对一个矩阵$A \in F^{m\times n}$, 有如下两个子空间:

$$N(A) = \{\boldsymbol{X} \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}\} \subseteq F^n,$$

$$R(A) = L\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq F^m, \qquad (1\text{-}2)$$

其中$A_i, i = 1, 2, \cdots, n$是矩阵A的n个列向量. 子空间$N(A)$称为矩阵A的零空间; $R(A)$称为矩阵A的列空间.

例 1.16 对一个矩阵$A \in F^{m\times n}$, 有如下两个子空间:

$$N(A) = \{\boldsymbol{X} \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}\} \subseteq F^n,$$

$$R(A) = L\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subseteq F^m, \qquad (1\text{-}2)$$

其中$A_i, i = 1, 2, \cdots, n$是矩阵A的n个列向量. 子空间$N(A)$称为矩阵A的零空间; $R(A)$称为矩阵A的列空间.

定理 1.6 设W_1, W_2是线性空间V的子空间, 则有

① W_1与W_2的交集$W_1 \cap W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in W_1$且$\alpha \in W_2\}$是$V$的子空间, 称为$W_1$与$W_2$的交空间.

② W_1与W_2的和

$$W_1 + W_2 = \{\alpha \mid \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2\} \quad (1\text{-}3)$$

是V的子空间, 称为W_1与W_2的和空间.

证明 ① 对于α, $\beta \in W_1 \cap W_2$, 那么α, $\beta \in W_i$, $i = 1, 2$; 因为W_i为子空间, 故$\alpha + \beta \in W_i$, $k\alpha \in W_i$, 因此$\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$, $k\alpha \in W_1 \cap W_2$, 所以$W_1 \cap W_2$是V的子空间.

证明 ① 对于$\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$, 那么$\alpha, \beta \in W_i$, $i = 1, 2$; 因为W_i为子空间, 故$\alpha + \beta \in W_i$, $k\alpha \in W_i$, 因此$\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$, $k\alpha \in W_1 \cap W_2$, 所以$W_1 \cap W_2$是V的子空间.

② 由定义$W_1 + W_2 \subseteq V$, 并且非空. $\forall\, \alpha, \beta \in W_1 + W_2$, 则$\exists$ $\alpha_i, \beta_i \in W_i$, $i = 1, 2$, 使$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$. 由

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2),$$

$$k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2,$$

证明 ① 对于$\alpha,\ \beta\ \in\ W_1\cap W_2$, 那么$\alpha,\ \beta\ \in\ W_i$, $i=1,\ 2$; 因为W_i为子空间, 故$\alpha+\beta\in W_i$, $k\alpha\in W_i$, 因此$\alpha+\beta\in W_1\cap W_2$, $k\alpha\in W_1\cap W_2$, 所以$W_1\cap W_2$是V的子空间.

② 由定义$W_1+W_2\subseteq V$, 并且非空. $\forall\,\alpha,\beta\in W_1+W_2$, 则$\exists$ $\alpha_i,\beta_i\in W_i$, $i=1,\ 2$, 使$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$. 由

$$\alpha+\beta=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2),$$

$$k\alpha=k\alpha_1+k\alpha_2,$$

因为W_i为子空间, 故$\alpha_1+\beta_1\in W_1$, $\alpha_2+\beta_2\in W_2$, $k\alpha_1\in W_1$, $k\alpha_2\in W_2$, 所以$\alpha+\beta$, $k\alpha\in W_1+W_2$, 即W_1+W_2为V的子空间. ■

注 1.2 W_1与W_2的并集$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$, 但不一定是线性子空间.

注 1.2 W_1与W_2的并集$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$, 但不一定是线性子空间.

例 1.17 设$\mathbb{R}^3$的子空间$W_1 = L\{\boldsymbol{e}_1\}, W_2 = L\{\boldsymbol{e}_2\}$, 其中$\boldsymbol{e}_1 = (1\ 0\ 0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0\ 1\ 0)^T$, 则$W_1 + W_2 = L\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

注 1.2 W_1与W_2的并集$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$, 但不一定是线性子空间.

例 1.17 设$\mathbb{R}^3$的子空间$W_1 = L\{\boldsymbol{e}_1\}, W_2 = L\{\boldsymbol{e}_2\}$, 其中$\boldsymbol{e}_1 = (1\ 0\ 0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0\ 1\ 0)^T$, 则$W_1 + W_2 = L\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

注 1.3 ① 一般来说, 若$W_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$, $W_2 = L\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$, 则有

$$W_1 + W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}.$$

② 对V的子空间$W_1, W_2, W_1\cap W_2, W_1+W_2$, 有如下包含关系:

$$W_1\cap W_2 \subseteq \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \subseteq W_1+W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$

② 对V的子空间$W_1, W_2, W_1\cap W_2, W_1+W_2$, 有如下包含关系:

$$W_1\cap W_2 \subseteq \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \subseteq W_1+W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$

自然有$\dim(W_1\cap W_2) \le \dim W_i \le \dim(W_1+W_2) \le \dim V$.

② 对V的子空间$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$, 有如下包含关系:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V. \qquad (1\text{-}4)$$

自然有$\dim(W_1 \cap W_2) \le \dim W_i \le \dim(W_1 + W_2) \le \dim V$.

定理 1.7 设W_1和W_2是线性空间V的子空间, 则有如下维数公式:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2). \qquad (1\text{-}5)$$

② 对V的子空间$W_1, W_2, W_1\cap W_2, W_1+W_2$, 有如下包含关系:

$$W_1\cap W_2 \subseteq \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \end{matrix} \subseteq W_1+W_2 \subseteq V. \tag{1-4}$$

自然有$\dim(W_1\cap W_2)\ \leq\ \dim W_i\ \leq\ \dim(W_1+W_2)\ \leq\ \dim V$.

定理 1.7 设W_1和W_2是线性空间V的子空间, 则有如下维数公式:

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2). \tag{1-5}$$

证明 设$\dim(W_1\cap W_2)=r, \dim W_1=s_1, \dim W_2=s_2$,

设$W_1\cap W_2$的基为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$, 由(1 − 4)式, 它们可分别扩充为:

$$W_1\text{的基}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1}\},$$
$$W_2\text{的基}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\},$$

设$W_1 \cap W_2$的基为$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$, 由(1 − 4)式, 它们可分别扩充为:

$$W_1\text{的基}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$$

$$W_2\text{的基}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$$

故

$$W_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$$

$$W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$$

$$W_1 + W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}.$$

设$W_1\cap W_2$的基为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$, 由(1 − 4)式, 它们可分别扩充为:

$$W_1\text{的基}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1}\},$$
$$W_2\text{的基}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\},$$

故

$$W_1=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1}\},$$
$$W_2=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\},$$

$$W_1+W_2=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1},\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\}.$$

下面证明$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_{s_1},\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_{s_2}\}$为线性无关组.

设$W_1 \cap W_2$的基为$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$, 由$(1-4)$式, 它们可分别扩充为:

$$W_1\text{的基}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$$
$$W_2\text{的基}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$$

故

$$W_1 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\},$$
$$W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\},$$

$$W_1 + W_2 = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}.$$

下面证明$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$为线性无关组.

任取k_i, q_i, p_i, 使

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i = \mathbf{0}. \qquad (1\text{-}6)$$

将上式改写为 $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i,$

将上式改写为 $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i$,

等式左边是W_1中的向量组$\{\beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$的线性组合, 故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_1,$$

而等式右边是W_2中的向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$的线性组合, 故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_2,$$

所以有 $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_1 \cap W_2$. 借助$W_1 \cap W_2$的基, $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i$可以表示为

将上式改写为$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i$,
等式左边是W_1中的向量组$\{\beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$的线性组合, 故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_1,$$

而等式右边是W_2中的向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$的线性组合, 故

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_2,$$

所以有$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i \in W_1 \cap W_2$. 借助$W_1 \cap W_2$的基, $-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i$可以表示为

$$-\sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i,$$

即$\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \mathbf{0}.$

即$\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \mathbf{0}.$

由$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$的线性无关性, $q_i = 0, i = r+1, \cdots, s_1$. 代入(1 − 6)得到

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i = \mathbf{0},$$

即$\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \mathbf{0}$.

由$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$的线性无关性, $q_i = 0, i = r+1, \cdots, s_1$. 代入$(1-6)$得到

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i = \mathbf{0},$$

注意其中$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$为$W_2$的基, 于是$k_i = 0\,(i = 1, 2, \cdots, r)$, $p_i = 0\,(i = r+1, \cdots, s_2)$, 所以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$线性无关, 这样

即$\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_1} q_i\beta_i = \mathbf{0}$.

由$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}\}$的线性无关性, $q_i = 0, i = r+1, \cdots, s_1$. 代入(1 − 6)得到

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{i=r+1}^{s_2} p_i\gamma_i = \mathbf{0},$$

注意其中$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$为$W_2$的基, 于是$k_i = 0\,(i = 1, 2, \cdots, r)$, $p_i = 0\,(i = r+1, \cdots, s_2)$, 所以 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_{s_1}, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{s_2}\}$线性无关, 这样

$$\dim(W_1 + W_2) = r + (s_1 - r) + (s_2 - r) = s_1 + s_2 - r,$$

这就是(1 − 5). ■

定义 1.6 设W_1和W_2是线性空间V的子空间, $W = W_1 + W_2$, 如果$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, 则称$W$是$W_1$与$W_2$的直和子空间. 记为$W = W_1 \oplus W_2$.

定义 1.6 设W_1和W_2是线性空间V的子空间, $W = W_1 + W_2$, 如果$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, 则称$W$是$W_1$与$W_2$的直和子空间. 记为$W = W_1 \oplus W_2$.

对直和子空间, 有如下等价条件.

定理 1.8 设W_1与W_2是V的子空间, $W = W_1 + W_2$, 则以下命题等价:

① $W = W_1 \oplus W_2$;

② $\forall\ \boldsymbol{X} \in W$, $\boldsymbol{X}$有惟一的表示式: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$, 其中$\boldsymbol{X}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{X}_2 \in W_2$;

③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要$\mathbf{0}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_1\in W_1$, $\boldsymbol{X}_2\in W_2$, 就有$\boldsymbol{X}_1=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}_2=\mathbf{0}$;

④ 维数公式: $\dim W=\dim W_1+\dim W_2$.

③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要$\mathbf{0} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{X}_2 \in W_2$, 就有$\boldsymbol{X}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}_2 = \mathbf{0}$;

④ 维数公式: $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$.

证明 （略）

③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要$\mathbf{0} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{X}_2 \in W_2$, 就有$\boldsymbol{X}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}_2 = \mathbf{0}$;

④ 维数公式: $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$.

证明 （略）

例 1.18 设I_r表示r阶单位矩阵, 对n阶方阵$A = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix}$. 它们的列空间为$R(A)$, $R(B)$, 证明:

$$\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B).$$

③ W中零向量的表达式是惟一的, 即只要$\mathbf{0}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_1\in W_1$, $\boldsymbol{X}_2\in W_2$, 就有$\boldsymbol{X}_1=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}_2=\mathbf{0}$;

④ 维数公式: $\dim W=\dim W_1+\dim W_2$.

证明 （略）

例 1.18 设I_r表示r阶单位矩阵, 对n阶方阵$A=\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-r}\end{pmatrix}$. 它们的列空间为$R(A)$, $R(B)$, 证明:

$$\mathbb{R}^n=R(A)\oplus R(B).$$

证明 $\forall\, \boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T + (0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T,$$

证明 $\forall\, \boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T + (0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T,$$

由于$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T \in R(A)$, $(0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T \in R(B)$, 所以$\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B)$, 又显然$\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B)$, 从而$\mathbb{R}^n = R(A) + R(B)$.

证明 $\forall\, \boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T + (0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T,$$

由于$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T \in R(A)$, $(0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T \in R(B)$, 所以$\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B)$, 又显然$\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B)$, 从而$\mathbb{R}^n = R(A) + R(B)$.

又$\dim R(A) + \dim R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$, 由定理1.8, $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$. ■

证明 $\forall\, \boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T + (0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T,$$

由于$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T \in R(A)$, $(0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T \in R(B)$, 所以$\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B)$, 又显然$\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B)$, 从而$\mathbb{R}^n = R(A) + R(B)$.

又$\dim R(A) + \dim R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$, 由定理1.8, $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$. ■

注 1.4 对n维空间V的任何子空间W, 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$为$W$的基, $r < n$,把它们扩充为V的基

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r,\ \beta_{r+1},\ \cdots,\ \beta_n\},$$

证明 $\forall \boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T + (0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T,$$

由于$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T \in R(A)$, $(0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T \in R(B)$, 所以$\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B)$, 又显然$\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B)$, 从而$\mathbb{R}^n = R(A) + R(B)$.

又$\dim R(A) + \dim R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$, 由定理1.8, $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$. ■

注 1.4 对n维空间V的任何子空间W, 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$为$W$的基, $r < n$,把它们扩充为V的基

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r,\ \beta_{r+1},\ \cdots,\ \beta_n\},$$

设$U = L\{\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n\}$, 则成立

$$V = W \oplus U.$$

证明 $\forall\, \boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\boldsymbol{x} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T + (0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T,$$

由于$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r\ 0\ \cdots\ 0)^T \in R(A)$, $(0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{r+1}\ \cdots\ a_n)^T \in R(B)$, 所以$\mathbb{R}^n \subseteq R(A) + R(B)$, 又显然$\mathbb{R}^n \supseteq R(A) + R(B)$, 从而$\mathbb{R}^n = R(A) + R(B)$.

又$\dim R(A) + \dim R(B) = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{R}^n$, 由定理1.8, $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$. ■

注 1.4 对n维空间V的任何子空间W, 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$为$W$的基, $r < n$,把它们扩充为V的基

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r,\ \beta_{r+1},\ \cdots,\ \beta_n\},$$

设$U = L\{\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n\}$, 则成立

$$V = W \oplus U.$$

我们称U是W的直和补子空间.

注 1.5 上述定义的子空间的交、和、直和等概念可推广到有限个子空间的情形.

§1.2 内积空间

§1.2 内积空间

这一节, 我们将把$\mathbb{R}^n$中的内积推广到抽象的线性空间V中.

§1.2 内积空间

这一节, 我们将把$\mathbb{R}^n$中的内积推广到抽象的线性空间V中.

定义 1.7 对数域F上的n维线性空间V, 定义一个从V中向量到数域F的二元运算$(\alpha,\beta): V\times V\longrightarrow F$, 如果这个运算满足

① 对称性: $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$, 其中$\overline{(\beta,\alpha)}$表示$(\beta,\alpha)$的复共轭;

② 线性性: $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$, $(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$;

③ 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 且$(\alpha, \alpha) = 0$的充要条件是$\alpha = \mathbf{0}$,

则称(α, β)是V的一个内积, 并称其中定义了内积的线性空间$[V; (\alpha, \beta)]$为内积空间.

③ 正定性: $(\alpha,\ \alpha) \geq 0$, 且$(\alpha,\ \alpha) = 0$的充要条件是$\alpha = \mathbf{0}$,

则称$(\alpha,\ \beta)$是V的一个内积, 并称其中定义了内积的线性空间$[V;\ (\alpha,\ \beta)]$为内积空间.

注 1.6 如果V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间, 则$(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}$为实内积, 对称性相应为$(\alpha,\ \beta) = (\beta,\ \alpha)$, $[V;\ (\alpha,\ \beta)]$为欧氏空间.

同理V是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间时, $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{C}$为复内积, 称$[V;\ (\alpha,\ \beta)]$为酉空间.

③ 正定性: $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 且$(\alpha, \alpha) = 0$的充要条件是$\alpha = \mathbf{0}$,

则称(α, β)是V的一个内积, 并称其中定义了内积的线性空间$[V; (\alpha, \beta)]$为内积空间.

注 1.6 如果V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间, 则$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$为实内积, 对称性相应为$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$, $[V; (\alpha, \beta)]$为欧氏空间.

同理V是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间时, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$为复内积, 称$[V; (\alpha, \beta)]$为酉空间.

介绍几个关于复矩阵的记号.

矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, A的共轭是在A中对每一个元素取其共轭复数后得到的矩阵. 用$\bar{A}$记A的共轭矩阵. A的共轭转置矩阵记为A^H, $A^H=(\bar{A})^T$.

矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, A的共轭是在A中对每一个元素取其共轭复数后得到的矩阵. 用$\bar{A}$记A的共轭矩阵. A的共轭转置矩阵记为A^H, $A^H=(\bar{A})^T$.

例 1.19 常见的酉空间:

① $[\mathbb{C}^n;\ (\alpha,\ \beta)=\beta^H\alpha]$.

矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, A的共轭是在A中对每一个元素取其共轭复数后得到的矩阵. 用$\bar{A}$记A的共轭矩阵. A的共轭转置矩阵记为A^H, $A^H=(\bar{A})^T$.

例 1.19 常见的酉空间:

① $[\mathbb{C}^n;\ (\alpha,\ \beta)=\beta^H\alpha]$.

② $[\mathbb{C}^{n\times n};\ (A,\ B)=\mathrm{tr}(B^HA)]$.

矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, A的共轭是在A中对每一个元素取其共轭复数后得到的矩阵. 用$\bar{A}$记A的共轭矩阵. A的共轭转置矩阵记为A^H, $A^H=(\bar{A})^T$.

例 1.19 常见的酉空间:

① $[\mathbb{C}^n;\ (\alpha,\ \beta)=\beta^H\alpha]$.

② $[\mathbb{C}^{n\times n};\ (A,\ B)=\mathrm{tr}(B^HA)]$.

定义 1.8 设$[V;\ (\alpha,\ \beta)]$为内积空间, 称

$$\|\ \alpha\ \|=\sqrt{(\alpha,\ \alpha)} \tag{1-7}$$

为向量α的长度, 若$\|\ \alpha\ \|=1$, 则称α为单位向量.

定理 1.9 (Cauchy不等式) 设$[V;\ (\alpha,\ \beta)]$是内积空间, 则对空间中任意向量$\alpha,\ \beta \in V$, 都有

$$|\ (\alpha,\ \beta)\ |^2 \leq (\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta),$$

其中等式成立的充要条件是α与β线性相关.

定理 1.9 (Cauchy不等式) 设$[V;(\alpha,\beta)]$是内积空间, 则对空间中任意向量$\alpha,\beta\in V$, 都有

$$|(\alpha,\beta)|^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta),$$

其中等式成立的充要条件是α与β线性相关.

注 1.7 利用Cauchy不等式易证三角不等式

$$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$$

.

定义 1.9 在内积空间中, 若向量α, β满足

$$(\alpha,\ \beta) = 0,$$

则称向量α与β是正交的.

定义 1.9 在内积空间中, 若向量α, β满足

$$(\alpha,\ \beta) = 0,$$

则称向量α与β是正交的.

我们可以仿照$\mathbb{R}^n$中标准正交基的概念, 在抽象的内积空间中定义标准正交基, 并且也有**Gram–Schmidt正交化方法**.

定义 1.9 在内积空间中, 若向量α, β满足

$$(\alpha,\ \beta) = 0,$$

则称向量α与β是正交的.

我们可以仿照$\mathbb{R}^n$中标准正交基的概念, 在抽象的内积空间中定义标准正交基, 并且也有**Gram–Schmidt**正交化方法.

下面, 我们讨论内积空间的分解.

定义 1.9 在内积空间中，若向量α, β满足

$$(\alpha,\ \beta) = 0,$$

则称向量α与β是正交的.

我们可以仿照$\mathbb{R}^n$中标准正交基的概念，在抽象的内积空间中定义标准正交基，并且也有**Gram–Schmidt**正交化方法.

下面，我们讨论内积空间的分解.

定理 1.10 设U为内积空间$[V;\ (\alpha,\ \beta)]$的一个子空间，定义V的一个子集

$$U^{\perp} = \{\alpha \mid \alpha \in V,\ \forall\, \beta \in U,\ (\alpha,\ \beta) = 0\}, \qquad (1\text{-}8)$$

证明 (1) $U^{\perp}$是V的子空间，称为U的正交补子空间;

(2) $V = U \oplus U^{\perp}$.

证明 (1) 显然$\mathbf{0} \in U^{\perp}$, 所以$U^{\perp} \neq \emptyset$.

又$\forall\, \alpha_1,\, \alpha_2 \in U^{\perp}$, 对$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$和$\forall\, \beta \in U$,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha,\, \beta) = k_1(\alpha_1,\, \beta) + k_2(\alpha_2,\, \beta) = 0,$$

证明 (1) 显然$\mathbf{0} \in U^{\perp}$, 所以$U^{\perp} \neq \emptyset$.

又$\forall\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in U^{\perp}$, 对$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$和$\forall\ \beta \in U$,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha,\ \beta) = k_1(\alpha_1,\ \beta) + k_2(\alpha_2,\ \beta) = 0,$$

因此$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$. 故$U^{\perp}$是$V$的子空间.

证明 (1) 显然$\mathbf{0} \in U^{\perp}$, 所以$U^{\perp} \neq \emptyset$.

又$\forall\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in U^{\perp}$, 对$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$和$\forall\ \beta \in U$,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha,\ \beta) = k_1(\alpha_1,\ \beta) + k_2(\alpha_2,\ \beta) = 0,$$

因此$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$. 故$U^{\perp}$是$V$的子空间.

(2) 设$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_r\}$是$U$的标准正交基, 把它扩充为$V$的标准正交基$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_r,\ \eta_{r+1},\ \cdots,\ \eta_n\}$, 则

$$V = L\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_r,\ \eta_{r+1},\ \cdots,\ \eta_n\},$$

$$U = L\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_r\},$$

$$U^{\perp} = L\{\eta_{r+1},\ \cdots,\ \eta_n\},$$

证明 (1) 显然$\mathbf{0} \in U^{\perp}$, 所以$U^{\perp} \neq \emptyset$.

又$\forall\, \alpha_1,\, \alpha_2 \in U^{\perp}$, 对$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$和$\forall\, \beta \in U$,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha,\, \beta) = k_1(\alpha_1,\, \beta) + k_2(\alpha_2,\, \beta) = 0,$$

因此$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$. 故$U^{\perp}$是$V$的子空间.

(2) 设$\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \cdots,\, \varepsilon_r\}$是$U$的标准正交基, 把它扩充为$V$的标准正交基$\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \cdots,\, \varepsilon_r,\, \eta_{r+1},\, \cdots,\, \eta_n\}$, 则

$$V = L\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \cdots,\, \varepsilon_r,\, \eta_{r+1},\, \cdots,\, \eta_n\},$$

$$U = L\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \cdots,\, \varepsilon_r\},$$

$$U^{\perp} = L\{\eta_{r+1},\, \cdots,\, \eta_n\},$$

所以, $V = U + U^{\perp}$.

证明 (1) 显然$\mathbf{0} \in U^{\perp}$, 所以$U^{\perp} \neq \varnothing$.
又$\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in U^{\perp}$, 对$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$和$\forall\, \beta \in U$,

$$(k_1\alpha + k_2\alpha,\, \beta) = k_1(\alpha_1,\, \beta) + k_2(\alpha_2,\, \beta) = 0,$$

因此$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \in U^{\perp}$. 故$U^{\perp}$是$V$的子空间.

(2) 设$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r\}$是$U$的标准正交基, 把它扩充为$V$的标准正交基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \cdots, \eta_n\}$, 则

$$V = L\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \cdots, \eta_n\},$$

$$U = L\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r\},$$

$$U^{\perp} = L\{\eta_{r+1}, \cdots, \eta_n\},$$

所以, $V = U + U^{\perp}$.
又$\forall\, \xi \in U$, 而且$\xi \in U^{\perp}$, 从而$(\xi, \xi) = 0$, 即$\xi = \mathbf{0}$, 这说明$V = U \oplus U^{\perp}$.

§1.3 线性变换

§1.3 线性变换

这一节建立线性变换的概念, 重点是借助矩阵来刻画线性变换的性质.

§1.3　线性变换

这一节建立线性变换的概念, 重点是借助矩阵来刻画线性变换的性质.

1.　线性变换

§1.3 线性变换

这一节建立线性变换的概念, 重点是借助矩阵来刻画线性变换的性质.

1. 线性变换

定义 1.10 设V是一个线性空间, 若有V上的对应关系T, 使$\forall\ \alpha \in V$, 都有确定的向量$\alpha' = T(\alpha) \in V$与之对应, 则称$T$为$V$上一个变换, α'为α在T下的像, α为α'的原像.

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha,\ \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta);$

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha).$

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha, \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$;

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

则称T是线性空间V上的一个线性变换.

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha, \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$;

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

则称T是线性空间V上的一个线性变换.

例 1.20 线性空间V上的相似变换T : $\forall\, \alpha \in V$, $T(\alpha) = \lambda\alpha$是线性变换, 其中$\lambda$为给定的数, $\lambda \in F$. 特别地,

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha,\, \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$;

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

则称T是线性空间V上的一个线性变换.

例 1.20 线性空间V上的相似变换T : $\forall\, \alpha \in V$, $T(\alpha) = \lambda\alpha$是线性变换, 其中$\lambda$为给定的数, $\lambda \in F$. 特别地, 当$\lambda = 0$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \mathbf{0}$, 称$T$为零变换;

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha, \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$;

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

则称T是线性空间V上的一个线性变换.

例 1.20 线性空间V上的相似变换$T: \forall\, \alpha \in V$, $T(\alpha) = \lambda\alpha$是线性变换, 其中$\lambda$为给定的数, $\lambda \in F$. 特别地, 当$\lambda = 0$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \mathbf{0}$, 称$T$为零变换; 当$\lambda = 1$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \alpha$, 称$T$为恒等变换.

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha, \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$;

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

则称T是线性空间V上的一个线性变换.

例 1.20 线性空间V上的相似变换T: $\forall\, \alpha \in V$, $T(\alpha) = \lambda\alpha$是线性变换, 其中$\lambda$为给定的数, $\lambda \in F$. 特别地, 当$\lambda = 0$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \mathbf{0}$, 称$T$为零变换; 当$\lambda = 1$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \alpha$, 称$T$为恒等变换.

又若T对线性空间中的线性运算, 满足

① $\forall\, \alpha, \beta \in V, T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$;

② $\forall\, k \in F, \forall\, \alpha \in V, T(k\alpha) = kT(\alpha)$.

则称T是线性空间V上的一个线性变换.

例 1.20 线性空间V上的相似变换$T: \forall\, \alpha \in V$, $T(\alpha) = \lambda\alpha$是线性变换, 其中$\lambda$为给定的数, $\lambda \in F$. 特别地, 当$\lambda = 0$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \mathbf{0}$, 称$T$为零变换; 当$\lambda = 1$时, $\forall\, \alpha \in V, T(\alpha) = \alpha$, 称$T$为恒等变换.

例 1.21 微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是线性空间$P_n[x]$上的线性变换.

例 1.21 微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是线性空间$P_n[x]$上的线性变换.

注 1.8 积分变换J_x : $J_x(p(x)) = \displaystyle\int_a^x p(t)\mathrm{d}t$ 不是$P_n[x]$上的线性变换.

例 1.21 微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是线性空间$P_n[x]$上的线性变换.

注 1.8 积分变换J_x : $J_x(p(x)) = \displaystyle\int_a^x p(t)\mathrm{d}t$ 不是$P_n[x]$上的线性变换.

例 1.22 线性空间F^n中, 定义如下的线性变换T_A:

$$\forall\ \boldsymbol{X} \in F^n,\ \ T_A(\boldsymbol{X}) = A\boldsymbol{X},$$

其中$A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$是一个给定的方阵.

V 上的线性变换 T 具有如下简单性质:

① $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

② $T(-\alpha) = -T(\alpha)$;

③ $T\left(\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{r} k_i T(\alpha_i)$;

V上的线性变换T具有如下简单性质:

① $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

② $T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

③ $T\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{r}k_iT(\alpha_i)$;

④ 若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$是线性相关的向量组, 则 $\{T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_s)\}$也是线性相关的向量组.

定理 1.11 设T是线性空间V上的线性变换, 则有:

① $R(T)=\{\beta \mid \exists\, \alpha\in V, 使\beta=T(\alpha)\}$是$V$的子空间, 称为$T$的像空间.

② $N(T)=\{\alpha \mid T(\alpha)=\mathbf{0}\}$是$V$的子空间, 称为$T$的零空间.

定理 1.11 设T是线性空间V上的线性变换, 则有:

① $R(T)=\{\beta \mid \exists\, \alpha \in V, 使\beta = T(\alpha)\}$是$V$的子空间, 称为$T$的像空间.

② $N(T)=\{\alpha \mid T(\alpha)=\mathbf{0}\}$是$V$的子空间, 称为$T$的零空间.

我们称子空间$R(T)$的维数$\dim R(T)$为线性变换T的秩, $\dim N(T)$为T的零度.

定理 1.11 设T是线性空间V上的线性变换, 则有:

① $R(T)=\{\beta \mid \exists\, \alpha\in V,\ 使\beta=T(\alpha)\}$是$V$的子空间, 称为$T$的像空间.

② $N(T)=\{\alpha \mid T(\alpha)=\mathbf{0}\}$是$V$的子空间, 称为$T$的零空间.

我们称子空间$R(T)$的维数$\dim R(T)$为线性变换T的秩, $\dim N(T)$为T的零度.

例 1.23 例1.22中线性变换T_A的像空间$R(T_A)=R(A)$, 零空间$N(T_A)=N(A)$.

我们来定义线性变换的运算:

定义 1.11 设T_1与T_2都是线性空间V上的线性变换, 定义如下运算:

① 变换的乘积T_1T_2: $\forall\,\alpha \in F, (T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$;

我们来定义线性变换的运算:

定义 1.11 设T_1与T_2都是线性空间V上的线性变换,定义如下运算:

① 变换的乘积T_1T_2: $\forall\, \alpha \in F$, $(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$;

② 变换的加法$T_1 + T_2$: $\forall\, \alpha \in F$, $(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$;

我们来定义线性变换的运算:

定义 1.11 设T_1与T_2都是线性空间V上的线性变换, 定义如下运算:

① 变换的乘积T_1T_2: $\forall\, \alpha \in F$, $(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$;

② 变换的加法$T_1 + T_2$: $\forall\, \alpha \in F$, $(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$;

③ 数乘变换kT: $\forall\, \alpha \in F$, $(kT)(\alpha) = kT(\alpha)$;

我们来定义线性变换的运算:

定义 1.11 设T_1与T_2都是线性空间V上的线性变换,定义如下运算:

① 变换的乘积T_1T_2: $\forall\, \alpha \in F$, $(T_1T_2)(\alpha) = T_1(T_2(\alpha))$;

② 变换的加法$T_1 + T_2$: $\forall\, \alpha \in F$, $(T_1 + T_2)(\alpha) = T_1(\alpha) + T_2(\alpha)$;

③ 数乘变换kT: $\forall\, \alpha \in F$, $(kT)(\alpha) = kT(\alpha)$;

④ 可逆变换: 对变换T_1, 如果存在变换T_2, 使$T_1T_2 = T_2T_1 = I$, 则称T_1为可逆变换, T_2是T_1的逆变换, 记为$T_2 = T_1^{-1}$.

2. 线性变换的矩阵

2. 线性变换的矩阵

定义 1.12 设T是线性空间V上的线性变换, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为$V$的基, 若存在$n$阶方阵$A \in F^{n\times n}$, 使

$$T(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)A, \tag{1-9}$$

则称A为T在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下的矩阵.

2. 线性变换的矩阵

定义 1.12 设T是线性空间V上的线性变换, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为$V$的基, 若存在$n$阶方阵$A \in F^{n\times n}$, 使

$$T(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)A, \tag{1-9}$$

则称A为T在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下的矩阵.

注 1.9 ① 在选定的基下, 线性变换T与n阶方阵之间有一个一一对应关系.

② 在给定的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下, 确定向量$\alpha$的像$T(\alpha)$只需确定它的坐标$\boldsymbol{Y}$.

2. 线性变换的矩阵

定义 1.12 设T是线性空间V上的线性变换, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为$V$的基, 若存在$n$阶方阵$A \in F^{n\times n}$, 使

$$T(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)A, \qquad (1\text{-}9)$$

则称A为T在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下的矩阵.

注 1.9 ① 在选定的基下, 线性变换T与n阶方阵之间有一个一一对应关系.

② 在给定的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下, 确定向量$\alpha$的像$T(\alpha)$只需确定它的坐标$\boldsymbol{Y}$.

对于$\alpha \in V$, 设α与$T(\alpha)$在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下坐标分别为$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X}, \ \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{Y}.$$

对于$\alpha \in V$, 设α与$T(\alpha)$在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下坐标分别为$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n)\boldsymbol{X}, \;\; T(\alpha) = (\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n)\boldsymbol{Y}.$$

由

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= T[(\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n)\boldsymbol{X}] \\ &= T(\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n)\boldsymbol{X} \\ &= (\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n)A\boldsymbol{X}, \end{aligned}$$

对于$\alpha \in V$, 设α与$T(\alpha)$在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下坐标分别为$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X}, \ \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{Y}.$$

由

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= T[(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X}] \\ &= T(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X} \\ &= (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)A\boldsymbol{X}, \end{aligned}$$

得$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$.

对于$\alpha \in V$, 设α与$T(\alpha)$在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下坐标分别为$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$, 即

$$\alpha = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X}, \ \ T(\alpha) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{Y}.$$

由

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= T[(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X}] \\ &= T(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\boldsymbol{X} \\ &= (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)A\boldsymbol{X}, \end{aligned}$$

得$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$.

定理 1.12 设T_1, T_2是线性空间V上的两个线性变换, 对基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 它们的矩阵分别是$A_1$和$A_2$, 则在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下,

① $T_1 + T_2$的矩阵为$A_1 + A_2$;

① $T_1 + T_2$的矩阵为$A_1 + A_2$;

② T_1T_2的矩阵为A_1A_2;

① $T_1 + T_2$的矩阵为$A_1 + A_2$;

② T_1T_2的矩阵为A_1A_2;

③ kT_1的矩阵为kA_1;

① T_1+T_2的矩阵为A_1+A_2;

② T_1T_2的矩阵为A_1A_2;

③ kT_1的矩阵为kA_1;

④ T_1为可逆变换的充分必要条件是A_1为可逆矩阵, 且T_1^{-1}的矩阵为A_1^{-1}.

① T_1+T_2的矩阵为A_1+A_2;

② T_1T_2的矩阵为A_1A_2;

③ kT_1的矩阵为kA_1;

④ T_1为可逆变换的充分必要条件是A_1为可逆矩阵, 且T_1^{-1}的矩阵为A_1^{-1}.

证明 由已知条件, 有

$$T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1,$$
$$T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2.$$

① T_1+T_2的矩阵为A_1+A_2;

② T_1T_2的矩阵为A_1A_2;

③ kT_1的矩阵为kA_1;

④ T_1为可逆变换的充分必要条件是A_1为可逆矩阵, 且T_1^{-1}的矩阵为A_1^{-1}.

证明　由已知条件, 有

$$T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1,$$
$$T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2.$$

由此,

1

$$
\begin{aligned}
&(T_1+T_2)(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\\
=&\,T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)+T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\\
=&\,(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1+(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2\\
=&\,(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)(A_1+A_2).
\end{aligned}
$$

①

$$
\begin{aligned}
&(T_1+T_2)(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\\
=&\,T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)+T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\\
=&\,(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1+(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2\\
=&\,(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)(A_1+A_2).
\end{aligned}
$$

②

$$
T_1T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2,
$$

$$
=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1A_2.
$$

①

$$\begin{aligned}&(T_1+T_2)(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\\=&T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)+T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\\=&(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1+(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2\\=&(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)(A_1+A_2).\end{aligned}$$

②

$$T_1T_2(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=T_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_2,$$

$$=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A_1A_2.$$

③

$$(kT_1)(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)=kT_1(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n),$$

$$= (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)(kA_1).$$

$$= (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)(kA_1).$$

④ T_1为可逆变换当且仅当$\exists\ T_2$, 使$T_1T_2 = I$, 又恒等变换I在任何基下的矩阵为单位矩阵$\boldsymbol{I}$, 由②有等式$A_1A_2 = \boldsymbol{I}$, 故T_1可逆当且仅当A_1可逆, T_1^{-1}的矩阵是A_1^{-1}. ■

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$和$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$是$V$的两组基,它们之间的关系为

$$(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)C,$$

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$和$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$是$V$的两组基, 它们之间的关系为

$$(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)C,$$

定理 1.13 设线性空间V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$到基$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$的过渡矩阵为$C$, 又$V$上的线性变换$T$在上述两组基下的矩阵分别为$A$和$B$, 由有

$$B = C^{-1}AC. \tag{1-10}$$

下面讨论不同基下线性变换的矩阵之间的关系.

设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$和$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$是$V$的两组基, 它们之间的关系为

$$(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)C,$$

定理 1.13 设线性空间V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$到基$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$的过渡矩阵为$C$, 又$V$上的线性变换$T$在上述两组基下的矩阵分别为$A$和$B$, 由有

$$B = C^{-1}AC. \tag{1-10}$$

证明 由

$$T(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)A,$$

$$T(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n)B,$$

$$T(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n)B,$$

故

$$\begin{aligned} T(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) &= T[(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)C] \\ &= (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)AC \\ &= (\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n)C^{-1}AC, \end{aligned}$$

$$T(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n) = (\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)B,$$

故

$$T(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n) = T[(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)C]$$
$$= (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)AC$$
$$= (\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)C^{-1}AC,$$

所以$B = C^{-1}AC$. ■

例 1.24 设单位向量$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, 定义$\mathbb{R}^3$上正交投影变换$P$为

$$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u},$$

求P在基$\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$下的矩阵A.

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 56 of 69
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$T(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n) = (\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)B,$$

故

$$\begin{aligned}T(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n) &= T[(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)C]\\ &= (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)AC\\ &= (\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)C^{-1}AC,\end{aligned}$$

所以$B = C^{-1}AC$. ■

例 1.24 设单位向量$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, 定义$\mathbb{R}^3$上正交投影变换$P$为

$$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u},$$

求P在基$\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$下的矩阵A.

3. 不变子空间

3. 不变子空间

定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果$\forall\ \alpha \in W$, 有$T(\alpha) \in W$, 即值域$T(W) \subseteq W$, 则称W是T的不变子空间.

3. 不变子空间

定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果$\forall\ \alpha \in W$, 有$T(\alpha) \in W$, 即值域$T(W) \subseteq W$, 则称W是T的不变子空间.

例 1.25 ① 整个空间V和零子空间$\{\mathbf{0}\}$, 对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;

3. 不变子空间

定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果$\forall\ \alpha \in W$, 有$T(\alpha) \in W$, 即值域$T(W) \subseteq W$, 则称W是T的不变子空间.

例 1.25 ① 整个空间V和零子空间$\{\mathbf{0}\}$, 对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;

② T的像空间$R(T)$与零空间$N(T)$都是T的不变子空间;

3. 不变子空间

定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果$\forall\ \alpha \in W$, 有$T(\alpha) \in W$, 即值域$T(W) \subseteq W$, 则称W是T的不变子空间.

例 1.25 ① 整个空间V和零子空间$\{\mathbf{0}\}$, 对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;

② T的像空间$R(T)$与零空间$N(T)$都是T的不变子空间;

③ 若线性变换T_1与T_2是可交换的, 则T_2的像空间$R(T_2)$与零空间$N(T_2)$都是T_1的不变子空间;

3. 不变子空间

定义 1.13 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, 如果$\forall\ \alpha \in W$, 有$T(\alpha) \in W$, 即值域$T(W) \subseteq W$, 则称W是T的不变子空间.

例 1.25 ① 整个空间V和零子空间$\{\mathbf{0}\}$, 对于每一个线性变换T来说都是不变子空间;

② T的像空间$R(T)$与零空间$N(T)$都是T的不变子空间;

③ 若线性变换T_1与T_2是可交换的, 则T_2的像空间$R(T_2)$与零空间$N(T_2)$都是T_1的不变子空间;

④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;

④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;

⑤ 对$\mathbb{R}^3$上正交投影$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$是单位向量, $\mathbb{R}^3$的子空间$W = L\{\boldsymbol{u}\}$和$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$都是$P$的不变子空间.

④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;

⑤ 对$\mathbb{R}^3$上正交投影$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$是单位向量, $\mathbb{R}^3$的子空间$W = L\{\boldsymbol{u}\}$和$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$都是$P$的不变子空间.

由于子空间W中向量在线性变换T下的像仍在W中, 这就有可能不必在整个空间V中来考虑T, 而只要在不变子空间W中考虑T, 即把T看成是W的一个线性变换, 记为$T\mid_W$, 在不引起歧意的情况下, 仍然可以记为T.

④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;

⑤ 对$\mathbb{R}^3$上正交投影$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$是单位向量, $\mathbb{R}^3$的子空间$W = L\{\boldsymbol{u}\}$和$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$都是$P$的不变子空间.

由于子空间W中向量在线性变换T下的像仍在W中, 这就有可能不必在整个空间V中来考虑T, 而只要在不变子空间W中考虑T, 即把T看成是W的一个线性变换, 记为$T\mid_W$, 在不引起歧意的情况下, 仍然可以记为T.

下面讨论不变子空间与矩阵化简之间的关系.

④ 任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间;

⑤ 对$\mathbb{R}^3$上正交投影$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$是单位向量, $\mathbb{R}^3$的子空间$W = L\{\boldsymbol{u}\}$和$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$都是$P$的不变子空间.

由于子空间W中向量在线性变换T下的像仍在W中, 这就有可能不必在整个空间V中来考虑T, 而只要在不变子空间W中考虑T, 即把T看成是W的一个线性变换, 记为$T\mid_W$, 在不引起歧意的情况下, 仍然可以记为T.

下面讨论不变子空间与矩阵化简之间的关系.

设T是n维线性空间V的线性变换, W是T的不变子空间. 在W中取一组基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 并把它扩充成$V$的一组

基

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r,\ \beta_{r+1},\ \beta_{r+2},\ \beta_n. \tag{1-11}$$

基

$$\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_r,\, \beta_{r+1},\, \beta_{r+2},\, \beta_n. \qquad (1\text{-}11)$$

则

$$
\begin{aligned}
&T(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_r\ \beta_{r+1}\ \beta_{r+2}\ \beta_n) \\
=&(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_r\ \beta_{r+1}\ \beta_{r+2}\ \beta_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

基

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \beta_n. \qquad (1\text{-}11)$$

则

$$T(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_r\ \beta_{r+1}\ \beta_{r+2}\ \beta_n)$$
$$= (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_r\ \beta_{r+1}\ \beta_{r+2}\ \beta_n)\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$$

其中的准上三角矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} \cdots a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 \ \cdots \ 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ \cdots \ 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad (1\text{-}12)$$

左上角的r阶矩阵A_1就是$T\mid_W$在W的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$下的矩阵.

左上角的r阶矩阵A_1就是$T\mid_W$在W的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$下的矩阵.

这是因为W是T的不变子空间, 所以像$T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_r)$仍在$W$中. 它们可以通过$W$的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示

$$
\begin{aligned}
&T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{r1}\alpha_r,\\
&T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{r2}\alpha_r,\\
&\cdots\ \ \cdots\\
&T(\alpha_r) = a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 + \cdots + a_{rr}\alpha_r.
\end{aligned}
$$

左上角的r阶矩阵A_1就是$T|_W$在W的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$下的矩阵.

这是因为W是T的不变子空间, 所以像$T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_r)$仍在$W$中. 它们可以通过$W$的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示

$$T(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{r1}\alpha_r,$$
$$T(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{r2}\alpha_r,$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$T(\alpha_r) = a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 + \cdots + a_{rr}\alpha_r.$$

从而T在基$(1-11)$下的矩阵具有形状$(1-12)$, $T|_W$在W的基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$下的矩阵是$A_1$.

左上角的r阶矩阵A_1就是$T\mid_W$在W的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的矩阵.

这是因为W是T的不变子空间,所以像$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_r)$仍在$W$中. 它们可以通过$W$的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示

$$T(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{r1}\alpha_r,$$
$$T(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{r2}\alpha_r,$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$T(\alpha_r)=a_{1r}\alpha_1+a_{2r}\alpha_2+\cdots+a_{rr}\alpha_r.$$

从而T在基(1 − 11)下的矩阵具有形状(1 − 12), $T\mid_W$在W的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的矩阵是$A_1$.

反之,如果T在基(1 − 11)下的矩阵是(1 − 12),不难证明,由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$生成的子空间$W=L\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是$T$的

不变子空间.

不变子空间.

设V分解成若干个不变子空间的直和$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$.

不变子空间.

设V分解成若干个不变子空间的直和$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$.

在每一个不变子空间W_i中取基

$$\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{in_i},\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s, \tag{1-13}$$

不变子空间.

设V分解成若干个不变子空间的直和$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$.

在每一个不变子空间W_i中取基

$$\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{in_i},\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s, \tag{1-13}$$

并把它们合并起来成为V的一组基. 则在这组基下, T的矩阵为准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \tag{1-14}$$

不变子空间.

设V分解成若干个不变子空间的直和$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$.
在每一个不变子空间W_i中取基

$$\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \cdots,\ \alpha_{in_i},\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s, \tag{1-13}$$

并把它们合并起来成为V的一组基. 则在这组基下, T的矩阵为准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \tag{1-14}$$

其中A_i, $i = 1, 2, \cdots, s$,就是$T\mid_{W_i}$在基$(1-13)$下的矩阵.

反之, 如果线性变换T在基(1 − 13)下的矩阵是准对角矩阵(1 − 14), 由(1 − 13)生成的子空间W_i是T的不变子空间.

反之, 如果线性变换T在基(1 − 13)下的矩阵是准对角矩阵(1 − 14), 由(1 − 13)生成的子空间W_i是T的不变子空间.

由此可知, 矩阵分解为准对角形与线性空间分解为不变子空间的直和是相当的.

4. 正交变换与酉变换

4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间$[V;\,(\alpha,\,\beta)]$上的线性变换，如果T不改变向量的内积，即$\forall\,\alpha,\,\beta\in[V;\,(\alpha,\,\beta)]$，都有

$$(T(\alpha),\,T(\beta))=(\alpha,\,\beta),$$

4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间$[V;(\alpha,\beta)]$上的线性变换, 如果T不改变向量的内积, 即$\forall\, \alpha,\beta\in[V;(\alpha,\beta)]$, 都有

$$(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称T为内积空间上的正交变换.

4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间$[V;(\alpha,\beta)]$上的线性变换, 如果T不改变向量的内积, 即$\forall\,\alpha,\beta\in[V;(\alpha,\beta)]$, 都有

$$(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换;

4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间$[V;(\alpha,\beta)]$上的线性变换, 如果T不改变向量的内积, 即$\forall\ \alpha,\beta\in[V;(\alpha,\beta)]$, 都有

$$(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换; 若空间为酉空间, 则称T为酉变换. 正交(酉)变换在标准正交基下的矩阵称为正交(酉)矩阵.

4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间$[V;(\alpha,\beta)]$上的线性变换, 如果T不改变向量的内积, 即$\forall\,\alpha,\beta\in[V;(\alpha,\beta)]$, 都有

$$(T(\alpha),T(\beta))=(\alpha,\beta),$$

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换; 若空间为酉空间, 则称T为酉变换. 正交(酉)变换在标准正交基下的矩阵称为正交(酉)矩阵.

正交(酉)变换的定义有几种等价的形式, 我们把它们归纳为如下的定理.

4. 正交变换与酉变换

定义 1.14 设T为内积空间$[V;\,(\alpha,\,\beta)]$上的线性变换, 如果T不改变向量的内积, 即$\forall\,\alpha,\,\beta\in[V;\,(\alpha,\,\beta)]$, 都有

$$(T(\alpha),\,T(\beta))=(\alpha,\,\beta),$$

则称T为内积空间上的正交变换. 当空间为欧氏空间时称T为正交变换; 若空间为酉空间, 则称T为酉变换. 正交(酉)变换在标准正交基下的矩阵称为正交(酉)矩阵.

正交(酉)变换的定义有几种等价的形式, 我们把它们归纳为如下的定理.

定理 1.14 设T是内积空间上的线性变换, 则下列命题等价:

① T是正交(酉)变换;

② T保持向量的长度不变;

③ T把空间V的标准正交基变换为标准正交基;

④ 正交变换关于任一标准正交基的矩阵C满足$C^TC = CC^T = I$; 酉变换关于任一标准正交基的矩阵U满足$U^HU = UU^H = I$.

定理 1.14 设T是内积空间上的线性变换, 则下列命题等价:

① T是正交(酉)变换;

② T保持向量的长度不变;

③ T把空间V的标准正交基变换为标准正交基;

④ 正交变换关于任一标准正交基的矩阵C满足$C^TC = CC^T = I$; 酉变换关于任一标准正交基的矩阵U满足$U^HU = UU^H = I$.

证明 ① $\Longrightarrow$ ② 由①, $\forall\ \alpha, \beta \in V$, $(T(\alpha), T(\beta)) =$

$(\alpha,\ \beta)$, 则有

$$(T(\alpha),\ T(\alpha)) = (\alpha,\ \alpha),$$

$(\alpha,\ \beta)$, 则有

$$(T(\alpha),\ T(\alpha)) = (\alpha,\ \alpha),$$

即$\forall\ \alpha \in V$, $\|\alpha\| = \|T(\alpha)\|$, 故②得证.

(α, β), 则有

$$(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

即$\forall\, \alpha \in V$, $\|\alpha\| = \|T(\alpha)\|$, 故②得证.

② $\Longrightarrow$ ③ 由②, $\forall\, \alpha, \beta \in V$有, $\|T(\alpha+\beta)\| = \|\alpha+\beta\|$, 即

$$(T(\alpha+\beta), T(\alpha+\beta)) - (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = 0,$$

(α, β), 则有

$$(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha),$$

即$\forall\, \alpha \in V$, $\|\alpha\| = \|T(\alpha)\|$, 故②得证.

② $\Longrightarrow$ ③ 由②, $\forall\, \alpha, \beta \in V$有, $\|T(\alpha+\beta)\| = \|\alpha+\beta\|$, 即

$$(T(\alpha+\beta), T(\alpha+\beta)) - (\alpha+\beta, \alpha+\beta) = 0,$$

由线性变换定义, 内积定义, 再利用$(T(\alpha), T(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$, $(T(\beta), T(\beta)) = (\beta, \beta)$, 得

$$\begin{aligned} &(T(\alpha+\beta), T(\alpha+\beta)) - (\alpha+\beta, \alpha+\beta) \\ =\ &(T(\alpha), T(\alpha)) + (T(\beta), T(\beta)) - (\alpha, \alpha) - (\beta, \beta) \\ &(T(\alpha), T(\beta)) + (T(\beta), T(\alpha)) - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) \\ =\ &(T(\alpha), T(\beta)) + \overline{(T(\alpha), T(\beta))} - (\alpha, \beta) - \overline{(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)],$$

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由$\|T(i\alpha+\beta)\| = \|i\alpha+\beta\|$, 同理可得$\mathrm{Re}[i(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha, \beta)]$, 也就是

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由$\|T(i\alpha+\beta)\| = \|i\alpha+\beta\|$, 同理可得$\mathrm{Re}[i(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha,\, \beta)]$, 也就是

$$\mathrm{Im}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Im}[(\alpha,\, \beta)]. \tag{1-16}$$

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)]. \qquad \textbf{(1-15)}$$

又由$\|T(i\alpha+\beta)\| = \|i\alpha+\beta\|$, 同理可得$\mathrm{Re}[i(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha,\, \beta)]$, 也就是

$$\mathrm{Im}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Im}[(\alpha,\, \beta)]. \qquad \textbf{(1-16)}$$

综合$(1-15)$式及$(1-16)$式得到, $\forall\, \alpha,\, \beta \in V$, $(T(\alpha),\, T(\beta)) = (\alpha,\, \beta)$.

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由$\|T(i\alpha+\beta)\| = \|i\alpha+\beta\|$, 同理可得$\mathrm{Re}[i(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha,\, \beta)]$, 也就是

$$\mathrm{Im}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Im}[(\alpha,\, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合$(1-15)$式及$(1-16)$式得到, $\forall\, \alpha,\, \beta \in V$, $(T(\alpha),\, T(\beta)) = (\alpha,\, \beta)$.

再取V的标准正交基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\, \boldsymbol{\varepsilon}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$, 在$T$下的像为$\{T(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\, T(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\, \cdots,\, T(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\}$, 由于

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\, T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = (\boldsymbol{\varepsilon}_i,\, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha,\, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由$\|T(i\alpha+\beta)\| = \|i\alpha+\beta\|$, 同理可得$\mathrm{Re}[i(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha,\, \beta)]$, 也就是

$$\mathrm{Im}[(T(\alpha),\, T(\beta))] = \mathrm{Im}[(\alpha,\, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合$(1-15)$式及$(1-16)$式得到, $\forall\, \alpha,\, \beta \in V$, $(T(\alpha),\, T(\beta)) = (\alpha,\, \beta)$.

再取V的标准正交基$\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \cdots,\, \varepsilon_n\}$, 在$T$下的像为$\{T(\varepsilon_1),\, T(\varepsilon_2),\, \cdots,\, T(\varepsilon_n)\}$, 由于

$$(T(\varepsilon_i),\, T(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i,\, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以$\{T(\varepsilon_1),\, T(\varepsilon_2),\, \cdots,\, T(\varepsilon_n)\}$也是$V$的标准正交基.

$$= \mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] - \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)],$$

故

$$\mathrm{Re}[(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-15}$$

又由$\|T(i\alpha+\beta)\| = \|i\alpha+\beta\|$, 同理可得$\mathrm{Re}[i(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Re}[i(\alpha, \beta)]$, 也就是

$$\mathrm{Im}[(T(\alpha), T(\beta))] = \mathrm{Im}[(\alpha, \beta)]. \tag{1-16}$$

综合(1 − 15)式及(1 − 16)式得到, $\forall\, \alpha, \beta \in V$, $(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

再取V的标准正交基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$, 在$T$下的像为$\{T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \cdots, T(\varepsilon_n)\}$, 由于

$$(T(\varepsilon_i), T(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以$\{T(\varepsilon_1), T(\varepsilon_2), \cdots, T(\varepsilon_n)\}$也是$V$的标准正交基.

③ $\Longrightarrow$ ④ 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为欧氏空间$V(\mathbb{R})$的标准正交基, 把正交变换的矩阵$C$按列分块为$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_n)$, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$的坐标是$\boldsymbol{C}_i$, 从而

③ $\Longrightarrow$ ④ 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为欧氏空间$V(\mathbb{R})$的标准正交基, 把正交变换的矩阵$C$按列分块为$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_n)$, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$的坐标是$\boldsymbol{C}_i$, 从而

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = \boldsymbol{C}_i^T\boldsymbol{C}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

③ $\Longrightarrow$ ④ 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为欧氏空间$V(\mathbb{R})$的标准正交基, 把正交变换的矩阵$C$按列分块为$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_n)$, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$的坐标是$\boldsymbol{C}_i$, 从而

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = \boldsymbol{C}_i^T \boldsymbol{C}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以$C^T C = I$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 67 of 69

Go Back

Full Screen

Close

Quit

③ $\Longrightarrow$ ④ 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为欧氏空间$V(\mathbb{R})$的标准正交基, 把正交变换的矩阵$C$按列分块为$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_n)$, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$的坐标是$\boldsymbol{C}_i$, 从而

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = \boldsymbol{C}_i^T \boldsymbol{C}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以$C^T C = I$

当V为酉空间时, 注意到内积的共轭对称, 即可证$U^H U = I$.

Home Page
Title Page
Page 67 of 69
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

③ $\Longrightarrow$ ④ 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为欧氏空间$V(\mathbb{R})$的标准正交基, 把正交变换的矩阵$C$按列分块为$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_n)$, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$的坐标是$\boldsymbol{C}_i$, 从而

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = \boldsymbol{C}_i^T\boldsymbol{C}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以$C^TC = I$

当V为酉空间时, 注意到内积的共轭对称, 即可证$U^HU = I$.

④ $\Longrightarrow$ ① 取欧氏空间的标准正交基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$, 由④, 有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C,\ \ C^TC = I.$$

③ $\Longrightarrow$ ④ 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$为欧氏空间$V(\mathbb{R})$的标准正交基, 把正交变换的矩阵$C$按列分块为$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots, \boldsymbol{C}_n)$, 则$T(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$的坐标是$\boldsymbol{C}_i$, 从而

$$(T(\boldsymbol{\varepsilon}_i), T(\boldsymbol{\varepsilon}_j)) = \boldsymbol{C}_i^T\boldsymbol{C}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

所以$C^TC = I$

当V为酉空间时, 注意到内积的共轭对称, 即可证$U^HU = I$.

④ $\Longrightarrow$ ① 取欧氏空间的标准正交基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$, 由④, 有

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C,\ \ C^TC = I.$$

$\forall\, \alpha, \beta \in V$, 设$\alpha = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}$, $\beta = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}$, 就

有

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{Y},$$

有

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\,\boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\,\boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\,\boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\,\boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha),\,T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} = (\alpha,\,\beta),$$

有

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha),\, T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} = (\alpha,\, \beta),$$

即T为正交变换.

有

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} = (\alpha, \beta),$$

即T为正交变换.

同理可证酉变换的情形. ■

有

$$T(\alpha) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\, \boldsymbol{\varepsilon}_2\, \cdots\, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\, \boldsymbol{\varepsilon}_2\, \cdots\, \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{X},$$

$$T(\beta) = T[(\boldsymbol{\varepsilon}_1\, \boldsymbol{\varepsilon}_2\, \cdots\, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}] = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\, \boldsymbol{\varepsilon}_2\, \cdots\, \boldsymbol{\varepsilon}_n)C\boldsymbol{Y},$$

所以

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (C\boldsymbol{X})^T C\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} = (\alpha, \beta),$$

即T为正交变换.

同理可证酉变换的情形. ■

例 1.26 设$\boldsymbol{u}_1$为$\mathbb{R}^n$的单位向量, 线性变换

$$S:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \ \forall\, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n,$$

$$S(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} - 2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1,$$

称S为$\mathbb{R}^n$上的镜像变换, 可以证明S为正交变换.

5. 线性空间V_n到线性空间V_m的线性变换

5. 线性空间V_n到线性空间V_m的线性变换

在实际应用中, 许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换. 这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上, 并建立相应的概念及矩阵处理.

5. 线性空间V_n到线性空间V_m的线性变换

在实际应用中, 许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换. 这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上, 并建立相应的概念及矩阵处理.

定义 1.15 设V_n和V_m是同一数域F上的两个线性空间, 如果变换$T: V_n \longrightarrow V_m$满足条件: $\forall\, \alpha, \beta \in V_n$, 数$k \in F$, 有

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta),$$
$$T(k\alpha) = kT(\alpha),$$

5. 线性空间V_n到线性空间V_m的线性变换

在实际应用中, 许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换. 这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上, 并建立相应的概念及矩阵处理.

定义 1.15 设V_n和V_m是同一数域F上的两个线性空间, 如果变换$T: V_n \longrightarrow V_m$满足条件: $\forall\, \alpha, \beta \in V_n$, 数$k \in F$, 有

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta),$$

$$T(k\alpha) = kT(\alpha),$$

则称T是从V_n到V_m的一个线性变换.

5. 线性空间V_n到线性空间V_m的线性变换

在实际应用中, 许多问题会涉及两个不同维数的线性空间之间的线性变换. 这一部分将把线性变换推广到同一数域上的任意两个空间上, 并建立相应的概念及矩阵处理.

定义 1.15 设V_n和V_m是同一数域F上的两个线性空间, 如果变换$T: V_n \longrightarrow V_m$满足条件: $\forall\, \alpha, \beta \in V_n$, 数$k \in F$, 有

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta),$$
$$T(k\alpha) = kT(\alpha),$$

则称T是从V_n到V_m的一个线性变换.