研究生公共基础课

矩 阵 论

第三章 矩阵的分解

为了理论分析, 计算方法和应用的需要, 我们常常要寻求一个矩阵在不同意义下的分解形式: 把矩阵分解为几个矩阵的乘积或者是若干矩阵的和. 这种分解往往能反映出原矩阵的某些数值特征, 又能提供分析问题所需的简化形式. 这一章将介绍矩阵的几种基本分解形式.

§3.1 常见的矩阵标准形与分解

我们已经讨论过矩阵的几种标准形, 实际上已给出了相关分解形式.

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 3 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§3.1 常见的矩阵标准形与分解

我们已经讨论过矩阵的几种标准形, 实际上已给出了相关分解形式. 如等价标准形:

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q.$$

§3.1 常见的矩阵标准形与分解

我们已经讨论过矩阵的几种标准形, 实际上已给出了相关分解形式. 如等价标准形:

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q.$$

相似标准形:

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1} \text{ 或 } A = PJ_AP^{-1}.$$

常见的矩阵标...

Jordan矩阵介绍

最小多项式

Home Page

Title Page

Page 3 of 77

Go Back

Full Screen

Close

Quit

●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

§3.1 常见的矩阵标准形与分解

我们已经讨论过矩阵的几种标准形, 实际上已给出了相关分解形式. 如等价标准形:

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q.$$

相似标准形:

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{或} \quad A = PJ_AP^{-1}.$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A为对称矩阵, 则存在可逆矩阵P, 使

$$P^TAP = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \text{ 或 } P^TAP = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 4 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

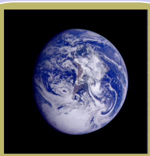
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A为对称矩阵, 则存在可逆矩阵P, 使

$$P^TAP = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \text{ 或 } P^TAP = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

特别地, 对A, 存在正交矩阵C, 使

$$C^TAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1. 矩阵的三角分解



1. 矩阵的三角分解

定义 3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

① 若$L, U \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是下三角矩阵和上三角矩阵, $A = LU$, 则称A可作LU分解.

1. 矩阵的三角分解

定义 3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

① 若$L, U \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是下三角矩阵和上三角矩阵, $A = LU$, 则称A可作LU分解.

② 若$L, V \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是对角线元素为1的下三角矩阵和上三角矩阵, D为对角矩阵. 则称A可作LDV分解.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 5 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

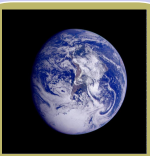
1. 矩阵的三角分解

定义 3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

① 若$L, U \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是下三角矩阵和上三角矩阵, $A = LU$, 则称A可作LU分解.

② 若$L, V \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是对角线元素为1的下三角矩阵和上三角矩阵, D为对角矩阵. 则称A可作LDV分解.

用Gauss消元法, 一个方阵总可以用初等变换化为上三角形矩阵.



1. 矩阵的三角分解

定义 3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

① 若$L, U \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是下三角矩阵和上三角矩阵, $A = LU$, 则称A可作LU分解.

② 若$L, V \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是对角线元素为1的下三角矩阵和上三角矩阵, D为对角矩阵. 则称A可作LDV分解.

用Gauss消元法, 一个方阵总可以用初等变换化为上三角形矩阵. 若只用第i行乘数k加到第j行$(i < j)$型初等变换能把A化为上三角矩阵U, 则有下三角可逆矩阵P, 使$PA = U$, 从而有LU分解: $A = P^{-1}U$.

1. 矩阵的三角分解

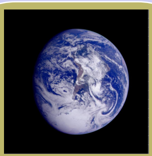
定义 3.1 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

① 若$L, U \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是下三角矩阵和上三角矩阵, $A = LU$, 则称A可作LU分解.

② 若$L, V \in \mathbb{F}^{n\times n}$分别是对角线元素为1的下三角矩阵和上三角矩阵, D为对角矩阵. 则称A可作LDV分解.

用Gauss消元法, 一个方阵总可以用初等变换化为上三角形矩阵. 若只用第i行乘数k加到第j行$(i < j)$型初等变换能把A化为上三角矩阵U, 则有下三角可逆矩阵P, 使$PA = U$, 从而有LU分解: $A = P^{-1}U$.

例 3.1 设$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求$A$的$LU$分解和$LDV$分解.



例 3.1 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求$A$的$LU$分解和$LDV$分解.

解 对下面的矩阵作如下行初等变换:

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 6 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

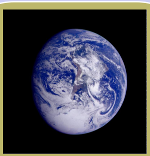
例 3.1 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$，求$A$的$LU$分解和$LDV$分解.

解 对下面的矩阵作如下行初等变换:

$$(A \mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right),$$



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 7 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

因此$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

因此$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

令$L = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

因此$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

令$L = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = LU.$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

因此$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

令$L = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = LU.$$

再利用初等变换, 有

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}=LDV,$$

再利用初等变换, 有

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}=LDV,$$

下面讨论方阵的LU和LDV分解的存在性和惟一性. 先讨论LDV分解的条件.

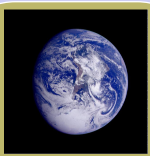
再利用初等变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDV,$$

下面讨论方阵的LU和LDV分解的存在性和惟一性. 先讨论LDV分解的条件.

定理 3.1 设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则$A$有惟一的$LDV$分解$A = LDV$的充分必要条件是$A$的顺序主子式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,\ k = 1, 2, \cdots, n-1,\ \Delta_0 = 1,$$



并且

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \ d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

并且

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \ d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 充分性: 对A的阶数n进行归纳证明.

并且

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \ d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 充分性: 对A的阶数n进行归纳证明.

$$n = 1, \qquad A = (a_{11}) = (1)(a_{11})(1) = L_1 D_1 V_1,$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 9 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

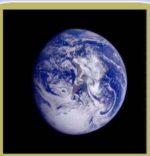
并且

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},\ d_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}},\ k=1,\,2,\,\cdots,\,n.$$

证明 充分性: 对A的阶数n进行归纳证明.

$$n=1,\qquad A=(a_{11})=(1)(a_{11})(1)=L_1D_1V_1,$$

所以定理对$n=1$成立,



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 9 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

并且

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \; d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \; k = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 充分性: 对A的阶数n进行归纳证明.

$$n = 1, \qquad A = (a_{11}) = (1)(a_{11})(1) = L_1 D_1 V_1,$$

所以定理对$n = 1$成立, 设定理对$n - 1$成立, 即

$$A = (a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)} = L_{n-1} D_{n-1} V_{n-1},$$

并且

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \; d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \; k = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 充分性: 对A的阶数n进行归纳证明.

$$n = 1, \qquad A = (a_{11}) = (1)(a_{11})(1) = L_1 D_1 V_1,$$

所以定理对$n = 1$成立, 设定理对$n - 1$成立, 即

$$A = (a_{ij})_{(n-1)\times(n-1)} = L_{n-1} D_{n-1} V_{n-1},$$

则对n, 将A分块为

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix}$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 9 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

其中

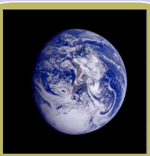
$$\boldsymbol{\tau}_n = (a_{1n},\ a_{2n},\ \cdots,\ a_{(n-1)n})^T,$$
$$\boldsymbol{u}_n = (a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots,\ a_{n(n-1)})^T.$$

其中

$$\boldsymbol{\tau}_n = (a_{1n},\ a_{2n},\ \cdots,\ a_{(n-1)n})^T,$$
$$\boldsymbol{u}_n = (a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots,\ a_{n(n-1)})^T.$$

设

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$



其中

$$\boldsymbol{\tau}_n = (a_{1n},\ a_{2n},\ \cdots,\ a_{(n-1)n})^T,$$
$$\boldsymbol{u}_n = (a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots,\ a_{n(n-1)})^T.$$

设

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

比较两边, 则有

$$A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} V_{n-1}, \tag{3-1}$$
$$\boldsymbol{\tau}_n = L_{n-1} D_{n-1} \boldsymbol{\nu}_n, \tag{3-2}$$
$$\boldsymbol{u}_n^T = \boldsymbol{l}_n^T D_{n-1} V_{n-1}, \tag{3-3}$$
$$a_{nn} = \boldsymbol{l}_n^T D_{n-1} \boldsymbol{\nu}_n + d_n. \tag{3-4}$$

其中

$$\boldsymbol{\tau}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{(n-1)n})^T,$$
$$\boldsymbol{u}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n(n-1)})^T.$$

设

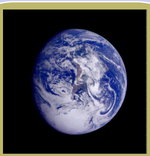
$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

比较两边, 则有

$$A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} V_{n-1}, \tag{3-1}$$
$$\boldsymbol{\tau}_n = L_{n-1} D_{n-1} \boldsymbol{\nu}_n, \tag{3-2}$$
$$\boldsymbol{u}_n^T = \boldsymbol{l}_n^T D_{n-1} V_{n-1}, \tag{3-3}$$
$$a_{nn} = \boldsymbol{l}_n^T D_{n-1} \boldsymbol{\nu}_n + d_n. \tag{3-4}$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 10 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

由归纳假设, (3 − 1)式成立. 由$\Delta_k \neq 0$, 故$L_{n-1}D_{n-1}$非奇异, $D_{n-1}V_{n-1}$非奇异, 从而由(3 − 2)式和(3 − 3)式可惟一确定$\boldsymbol{\nu}_n$和$\boldsymbol{l}_n^T$. 又从(3 − 4)式可惟一求得d_n, 所以$A = LDV$分解是存在惟一的.



由归纳假设, (3 − 1)式成立. 由$\Delta_k \neq 0$, 故$L_{n-1}D_{n-1}$非奇异, $D_{n-1}V_{n-1}$非奇异, 从而由(3 − 2)式和(3 − 3)式可惟一确定$\boldsymbol{\nu}_n$和$\boldsymbol{l}_n^T$. 又从(3 − 4)式可惟一求得d_n, 所以$A = LDV$分解是存在惟一的.

又由归纳过程, A的k阶顺序主子式

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 11 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

由归纳假设, (3 − 1)式成立. 由$\Delta_k \neq 0$, 故$L_{n-1}D_{n-1}$非奇异, $D_{n-1}V_{n-1}$非奇异, 从而由(3 − 2)式和(3 − 3)式可惟一确定$\boldsymbol{\nu}_n$和$\boldsymbol{l}_n^T$. 又从(3 − 4)式可惟一求得d_n, 所以$A = LDV$分解是存在惟一的.

又由归纳过程, A的k阶顺序主子式

$$\Delta_1 = | A_1 | = | L_1 D_1 V_1 | = | D_1 |,$$

$$\Delta_2 = | A_2 | = | L_2 D_2 V_2 | = | D_2 | = d_2 | D_1 |,$$

$$\cdots$$

$$\Delta_k = | A_k | = | L_k D_k V_k | = | D_k | = d_k | D_{k-1} |,$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 11 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

由归纳假设, (3 − 1)式成立. 由$\Delta_k \neq 0$, 故$L_{n-1}D_{n-1}$非奇异, $D_{n-1}V_{n-1}$非奇异, 从而由(3 − 2)式和(3 − 3)式可惟一确定$\boldsymbol{\nu}_n$和$\boldsymbol{l}_n^T$. 又从(3 − 4)式可惟一求得d_n, 所以$A = LDV$分解是存在惟一的.

又由归纳过程, A的k阶顺序主子式

$$\Delta_1 = |A_1| = |L_1D_1V_1| = |D_1|,$$

$$\Delta_2 = |A_2| = |L_2D_2V_2| = |D_2| = d_2 |D_1|,$$

$$\cdots$$

$$\Delta_k = |A_k| = |L_kD_kV_k| = |D_k| = d_k |D_{k-1}|,$$

所以$d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k = 1, 2, \cdots, n.$

由归纳假设, (3 − 1)式成立. 由$\Delta_k \neq 0$, 故$L_{n-1}D_{n-1}$非奇异, $D_{n-1}V_{n-1}$非奇异, 从而由(3 − 2)式和(3 − 3)式可惟一确定$\boldsymbol{\nu}_n$和$\boldsymbol{l}_n^T$. 又从(3 − 4)式可惟一求得d_n, 所以$A = LDV$分解是存在惟一的.

又由归纳过程, A的k阶顺序主子式

$$\Delta_1 = | A_1 | = | L_1D_1V_1 | = | D_1 |,$$

$$\Delta_2 = | A_2 | = | L_2D_2V_2 | = | D_2 | = d_2 \mid D_1 \mid,$$

$$\cdots$$

$$\Delta_k = | A_k | = | L_kD_kV_k | = | D_k | = d_k \mid D_{k-1} \mid,$$

所以$d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, k = 1, 2, \cdots, n.$

必要性: 设A有惟一的LDV分解: $A = LDV$,

把它们写成矩阵分块形

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

把它们写成矩阵分块形

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

则比较两边便有(3 − 1)式 ∼ (3 − 4)式成立.

把它们写成矩阵分块形

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

则比较两边便有(3 − 1)式∼(3 − 4)式成立.

如$\Delta_{n-1} = | A_{n-1} | = 0$, 则由(3 − 1)式有

$$| D_{n-1} | = | A_{n-1} | = 0,$$

常见的矩阵标...

Jordan矩阵介绍

最小多项式

Home Page

Title Page

Page 12 of 77

Go Back

Full Screen

Close

Quit

First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

把它们写成矩阵分块形

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

则比较两边便有(3 − 1)式 ∼ (3 − 4)式成立.

如$\Delta_{n-1} = |A_{n-1}| = 0$, 则由(3 − 1)式有

$$|D_{n-1}| = |A_{n-1}| = 0,$$

于是$|L_{n-1}D_{n-1}| = |D_{n-1}| = 0$, 即$L_{n-1}D_{n-1}$为奇异矩阵, 则(3 − 2)式的解$\boldsymbol{\nu}$不惟一, 与$A$的$LDV$分解的惟一性相矛盾, 因此$\Delta_{n-1} \neq 0$. ■

把它们写成矩阵分块形

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

则比较两边便有(3 − 1)式∼(3 − 4)式成立.

如$\Delta_{n-1} = |A_{n-1}| = 0$, 则由(3 − 1)式有

$$|D_{n-1}| = |A_{n-1}| = 0,$$

于是$|L_{n-1}D_{n-1}| = |D_{n-1}| = 0$, 即$L_{n-1}D_{n-1}$为奇异矩阵, 则(3 − 2)式的解$\boldsymbol{\nu}$不惟一, 与$A$的$LDV$分解的惟一性相矛盾, 因此$\Delta_{n-1} \neq 0$. ■

注 3.1 定理3.1的证明已给出了计算A的LDV分解的递归过程:

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 12 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

把它们写成矩阵分块形

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{\tau}_n \\ \boldsymbol{u}_n^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_n^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{n-1} & \\ & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} & \boldsymbol{\nu}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

则比较两边便有$(3-1)$式$\sim(3-4)$式成立.

如$\Delta_{n-1} = |A_{n-1}| = 0$, 则由$(3-1)$式有

$$|D_{n-1}| = |A_{n-1}| = 0,$$

于是$|L_{n-1}D_{n-1}| = |D_{n-1}| = 0$, 即$L_{n-1}D_{n-1}$为奇异矩阵, 则$(3-2)$式的解$\boldsymbol{\nu}$不惟一, 与$A$的$LDV$分解的惟一性相矛盾, 因此$\Delta_{n-1} \neq 0$. ■

注 3.1 定理3.1的证明已给出了计算A的LDV分解的递归过程:

取A的一阶主子式, 作LDV分解

$$A_1 = (1)(a_{11})(1),\ L_1 = (1),\ D_1 = (a_{11}),\ V_1 = (1),$$

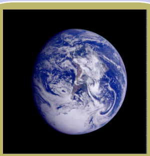
常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 12 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

用(3 − 1)式～(3 − 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$.

用(3 – 1)式 ~ (3 – 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$. 从而

$$L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \boldsymbol{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = L_2 D_2 V_2.$$



用(3 − 1)式 ∼ (3 − 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$. 从而

$$L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \boldsymbol{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = L_2 D_2 V_2.$$

然后重复上述计算过程, 得$A_k = L_k D_k V_k, k = 1, 2, \cdots, n$. $k = n$时, 即完成A的LDV分解.

用(3 − 1)式 ∼ (3 − 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$. 从而

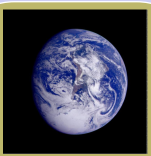
$$L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_1 & 1 \end{pmatrix}, \ D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \boldsymbol{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = L_2 D_2 V_2.$$

然后重复上述计算过程, 得$A_k = L_k D_k V_k, k = 1, 2, \cdots, n$. $k = n$时, 即完成A的LDV分解.

当A为非奇异矩阵时, 从$A = LDV$分解出发

$$A = LDV = (LD)V = L(DV),$$



用(3 − 1)式∼(3 − 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$. 从而

$$L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \boldsymbol{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = L_2 D_2 V_2.$$

然后重复上述计算过程, 得$A_k = L_k D_k V_k, k = 1, 2, \cdots, n$. $k = n$时, 即完成A的LDV分解.

当A为非奇异矩阵时, 从$A = LDV$分解出发

$$A = LDV = (LD)V = L(DV),$$

由于LD仍是下三角矩阵, DV仍是上三角矩阵, 就可以得到A的两种LU分解. 前者称为Crout分解, 后者称为Doolittle分解.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 13 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

用(3 − 1)式～(3 − 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$. 从而

$$L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_1 & 1 \end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \boldsymbol{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = L_2 D_2 V_2.$$

然后重复上述计算过程, 得$A_k = L_k D_k V_k, k = 1, 2, \cdots, n$. $k = n$时, 即完成A的LDV分解.

当A为非奇异矩阵时, 从$A = LDV$分解出发

$$A = LDV = (LD)V = L(DV),$$

由于LD仍是下三角矩阵, DV仍是上三角矩阵, 就可以得到A的两种LU分解. 前者称为Crout分解, 后者称为Doolittle分解. 对一般的n阶方阵A, 它的LU分解有如下定理.

用(3 − 1)式 ∼ (3 − 4)式确定$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{l}_1$. 从而

$$L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} V_1 & \boldsymbol{\nu}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

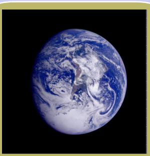
$$A_2 = L_2 D_2 V_2.$$

然后重复上述计算过程, 得$A_k = L_k D_k V_k, k = 1, 2, \cdots, n$. $k = n$时, 即完成A的LDV分解.

当A为非奇异矩阵时, 从$A = LDV$分解出发

$$A = LDV = (LD)V = L(DV),$$

由于LD仍是下三角矩阵, DV仍是上三角矩阵, 就可以得到A的两种LU分解. 前者称为Crout分解, 后者称为Doolittle分解. 对一般的n阶方阵A, 它的LU分解有如下定理.



定理 3.2 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=k(k\le n)$, 如果$A$的顺序主子式$\Delta_j\neq 0$, $j=1,2,\cdots,k$, 则A有LU分解.

定理 3.2 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=k(k\le n)$, 如果$A$的顺序主子式$\Delta_j\ne 0, j=1,2,\cdots,k$, 则$A$有$LU$分解.

证明 设A_{11}为A的k阶主子矩阵, 将A分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

定理 3.2 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=k(k\le n)$, 如果$A$的顺序主子式$\Delta_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k$, 则$A$有$LU$分解.

证明 设A_{11}为A的k阶主子矩阵, 将A分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

则A_{11}为可逆矩阵. 由定理3.1, 有LU分解$A_{11}=L_{11}U_{11}$, 其中L_{11}和U_{11}均为可逆矩阵.

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 14 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

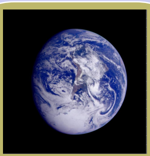
定理 3.2　设$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=k(k\le n)$, 如果$A$的顺序主子式$\Delta_j\neq 0$, $j=1,2,\cdots,k$, 则A有LU分解.

证明　设A_{11}为A的k阶主子矩阵, 将A分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

则A_{11}为可逆矩阵. 由定理3.1, 有LU分解$A_{11}=L_{11}U_{11}$, 其中L_{11}和U_{11}均为可逆矩阵.

又因为$\mathrm{rank}(A)=k$, A的前k行线性无关, 后$(n-k)$行是前k行的线性组合, 即存在矩阵$B\in\mathbb{F}^{(n-k)\times k}$, 使$A_{21}=BA_{11}$, $A_{22}=BA_{12}$.



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 14 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定理 3.2 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\operatorname{rank}(A)=k(k\le n)$, 如果$A$的顺序主子式$\Delta_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k$, 则$A$有$LU$分解.

证明 设A_{11}为A的k阶主子矩阵, 将A分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

则A_{11}为可逆矩阵. 由定理3.1, 有LU分解$A_{11}=L_{11}U_{11}$, 其中L_{11}和U_{11}均为可逆矩阵.

又因为$\operatorname{rank}(A)=k$, A的前k行线性无关, 后$(n-k)$行是前k行的线性组合, 即存在矩阵$B\in\mathbb{F}^{(n-k)\times k}$, 使$A_{21}=BA_{11}$, $A_{22}=BA_{12}$.

取$L_{21}=A_{21}U_{11}^{-1}, U_{12}=L_{11}^{-1}A_{12}$,

定理 3.2 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = k(k \le n)$, 如果$A$的顺序主子式$\Delta_j \ne 0, j = 1, 2, \cdots, k$, 则$A$有$LU$分解.

证明 设A_{11}为A的k阶主子矩阵, 将A分块为:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

则A_{11}为可逆矩阵. 由定理3.1, 有LU分解$A_{11} = L_{11}U_{11}$, 其中L_{11}和U_{11}均为可逆矩阵.

又因为$\operatorname{rank}(A) = k$, A的前k行线性无关, 后$(n-k)$行是前k行的线性组合, 即存在矩阵$B \in \mathbb{F}^{(n-k)\times k}$, 使$A_{21} = BA_{11}$, $A_{22} = BA_{12}$.

取$L_{21} = A_{21}U_{11}^{-1}, U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$,

令L_{22}与U_{22}分别是下三角和上三角阵, 满足条件$L_{22}U_{22} = \mathbf{0}$,

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 14 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

则可以得到下三角矩阵L和上三角矩阵U如下:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

则可以得到下三角矩阵L和上三角矩阵U如下:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

注意

$$L_{11}U_{12} = L_{11}(L_{11}^{-1}) = A_{12},$$
$$L_{21}U_{11} = A_{21}U_{21}U_{11}^{-1}U_{11} = A_{21},$$
$$L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} = A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12} + \mathbf{0}$$
$$= BA_{11}A_{11}^{-1}A_{12} = BA_{12} = A_{22},$$

则可以得到下三角矩阵L和上三角矩阵U如下:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

注意

$$\begin{aligned} L_{11}U_{12} &= L_{11}(L_{11}^{-1}) = A_{12}, \\ L_{21}U_{11} &= A_{21}U_{21}U_{11}^{-1}U_{11} = A_{21}, \\ L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} &= A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12} + \mathbf{0} \\ &= BA_{11}A_{11}^{-1}A_{12} = BA_{12} = A_{22}, \end{aligned}$$

从而

$$LU = \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 15 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

则可以得到下三角矩阵L和上三角矩阵U如下:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ \mathbf{0} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

注意

$$\begin{aligned} &L_{11}U_{12} = L_{11}(L_{11}^{-1}) = A_{12}, \\ &L_{21}U_{11} = A_{21}U_{21}U_{11}^{-1}U_{11} = A_{21}, \\ &L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} = A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12} + \mathbf{0} \\ &= BA_{11}A_{11}^{-1}A_{12} = BA_{12} = A_{22}, \end{aligned}$$

从而

$$LU = \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

即$A = LU$, A有LU分解. ■

注 3.2 值得指出的是, 不是所有的矩阵都有LU分解. 例如$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A是可逆矩阵. 如果A有LU分解, 则应有

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}.$$

注 3.2 值得指出的是, 不是所有的矩阵都有LU分解. 例如$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A是可逆矩阵. 如果A有LU分解, 则应有

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}.$$

这将导出$l_{11}u_{11}=0$, 即$l_{11}=0$或$u_{11}=0$. 这说明L与U中至少有一个是奇异矩阵, 与$A=LU$非奇异矛盾, 故A没有LU分解.

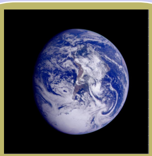
注 3.2 值得指出的是, 不是所有的矩阵都有LU分解. 例如$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A是可逆矩阵. 如果A有LU分解, 则应有

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}.$$

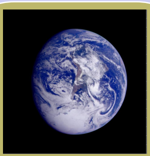
这将导出$l_{11}u_{11} = 0$, 即$l_{11} = 0$或$u_{11} = 0$. 这说明L与U中至少有一个是奇异矩阵, 与$A = LU$非奇异矛盾, 故A没有LU分解.

注 3.3 定理3.2中$\Delta_j \neq 0$是A有LU分解的充分条件, 并不必要. 例如:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

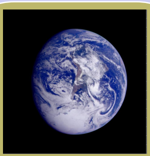


所以A有LU分解, 但$\Delta_1 = 0$.



所以A有LU分解, 但$\Delta_1 = 0$.

推论 3.1 可逆矩阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 有$LU$分解的充分必要条件是$A$的顺序主子式$\Delta_k \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$.



常见的矩阵标...

Jordan矩阵介绍

最小多项式

Home Page

Title Page

Page 17 of 77

Go Back

Full Screen

Close

Quit

所以A有LU分解, 但$\Delta_1 = 0$.

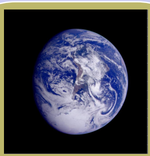
推论 3.1 可逆矩阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 有$LU$分解的充分必要条件是$A$的顺序主子式$\Delta_k \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$.

例 3.2 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 9 & -7 \\ -3 & 4 & -3 & 19 \\ 4 & -2 & 6 & -21 \end{pmatrix}$, 求$A$的$LDV$分解.

所以A有LU分解, 但$\Delta_1 = 0$.

推论 3.1 可逆矩阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 有$LU$分解的充分必要条件是$A$的顺序主子式$\Delta_k \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n-1$.

例 3.2 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 9 & -7 \\ -3 & 4 & -3 & 19 \\ 4 & -2 & 6 & -21 \end{pmatrix}$, 求$A$的$LDV$分解.



常见的矩阵标...

Jordan矩阵介绍

最小多项式

Home Page

Title Page

Page 17 of 77

Go Back

Full Screen

Close

Quit

解 $A_1 = (1)(1)(1) = L_1 D_1 V_1$, $\boldsymbol{u}_2 = (2)^T$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (2)^T$,
由(3 − 2)式 ∼ (3 − 4)式, 得

解 $A_1 = (1)(1)(1) = L_1 D_1 V_1$, $\boldsymbol{u}_2 = (2)^T$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (2)^T$, 由(3 − 2)式 ∼ (3 − 4)式, 得

$$(2)^T = (1)(1)\boldsymbol{\nu}_2 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_2 = (2)^T,$$

$$(2) = \boldsymbol{l}_2^T(1)(1) \Rightarrow \boldsymbol{l}_2^T = (2),$$

$$-1 = (2)(1)(2)^T + d_2 \Rightarrow d_2 = -5,$$

解 $A_1 = (1)(1)(1) = L_1D_1V_1$, $\boldsymbol{u}_2 = (2)^T$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (2)^T$, 由(3 − 2)式～(3 − 4)式, 得

$$(2)^T = (1)(1)\boldsymbol{\nu}_2 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_2 = (2)^T,$$

$$(2) = \boldsymbol{l}_2^T(1)(1) \Rightarrow \boldsymbol{l}_2^T = (2),$$

$$-1 = (2)(1)(2)^T + d_2 \Rightarrow d_2 = -5,$$

所以

$$A_2 = L_2D_2V_2,$$

其中

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -5 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

解 $A_1 = (1)(1)(1) = L_1 D_1 V_1$, $\boldsymbol{u}_2 = (2)^T$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (2)^T$,
由(3 − 2)式 ~ (3 − 4)式, 得

$$(2)^T = (1)(1)\boldsymbol{\nu}_2 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_2 = (2)^T,$$

$$(2) = \boldsymbol{l}_2^T(1)(1) \Rightarrow \boldsymbol{l}_2^T = (2),$$

$$-1 = (2)(1)(2)^T + d_2 \Rightarrow d_2 = -5,$$

所以

$$A_2 = L_2 D_2 V_2,$$

其中

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -5 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{u}_3 = (-3 \quad 4)^T$, $\boldsymbol{\tau}_3 = (3 \quad 9)^T$,

由(3 − 2)式 ∼ (3 − 4)式, 得

由(3 − 2)式～(3 − 4)式, 得

$$(3 \;\; 9)^T = L_2 D_2 \boldsymbol{\nu}_3 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_3 = (3 \quad -\frac{3}{5})^T,$$

$$(-3 \;\; 4) = \boldsymbol{l}_3^T D_2 V_2 \Rightarrow \boldsymbol{l}_3^T = (-3 \quad -2),$$

$$-3 = (-3 \quad -2) D_2 (3 \quad -\frac{3}{5})^T + d_3 \Rightarrow d_3 = 12,$$

由(3 − 2)式 ∼ (3 − 4)式, 得

$$(3\ \ 9)^T = L_2D_2\boldsymbol{\nu}_3 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_3 = (3\quad -\frac{3}{5})^T,$$

$$(-3\ \ 4) = \boldsymbol{l}_3^TD_2V_2 \Rightarrow \boldsymbol{l}_3^T = (-3\quad -2),$$

$$-3 = (-3\quad -2)D_2(3\quad -\frac{3}{5})^T + d_3 \Rightarrow d_3 = 12,$$

所以

$$A_2 = L_2D_2V_2,$$

其中

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -5 & \\ & & 12 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

由(3 – 2)式～(3 – 4)式, 得

$$(3\ \ 9)^T = L_2D_2\boldsymbol{\nu}_3 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_3 = (3\ \ -\frac{3}{5})^T,$$

$$(-3\ \ 4) = \boldsymbol{l}_3^T D_2V_2 \Rightarrow \boldsymbol{l}_3^T = (-3\ \ -2),$$

$$-3 = (-3\ \ -2)D_2(3\ \ -\frac{3}{5})^T + d_3 \Rightarrow d_3 = 12,$$

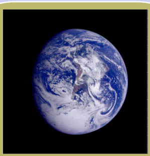
所以

$$A_2 = L_2D_2V_2,$$

其中

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -5 & \\ & & 12 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当$A_4 = A$, 则$\boldsymbol{u}_4 = (4\ \ -2\ \ 6)^T$, $\boldsymbol{\tau}_3 = (-1\ \ -7\ \ 19)^T$, 由(3 – 2)式～(3 – 4)式, 得



由(3 − 2)式∼(3 − 4)式, 得

$$(3\ \ 9)^T = L_2D_2\boldsymbol{\nu}_3 \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_3 = (3\ \ -\frac{3}{5})^T,$$

$$(-3\ \ 4) = \boldsymbol{l}_3^T D_2V_2 \Rightarrow \boldsymbol{l}_3^T = (-3\ \ -2),$$

$$-3 = (-3\ \ -2)D_2(3\ \ -\frac{3}{5})^T + d_3 \Rightarrow d_3 = 12,$$

所以

$$A_2 = L_2D_2V_2,$$

其中

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -5 & \\ & & 12 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当$A_4 = A$, 则$\boldsymbol{u}_4 = (4\ \ -2\ \ 6)^T$, $\boldsymbol{\tau}_3 = (-1\ \ -7\ \ 19)^T$, 由(3 − 2)式∼(3 − 4)式, 得

$$\boldsymbol{l}_4 = (4\ \ 2\ \ -1\ \ 1)^T, d_4 = 1, \boldsymbol{\nu}_4 = (-1\ \ 1\ \ \frac{1}{2}\ \ 1)^T,$$

所以

$$L_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-3&-2&1&0\\4&2&-1&1\end{pmatrix},\ D_4=\begin{pmatrix}1&&&\\&-5&&\\&&12&\\&&&-1\end{pmatrix},$$

$$V_4=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&-\frac{3}{5}&1\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A=L_4D_4V_4. \qquad \blacksquare$$

2. 矩阵的满秩分解

2. 矩阵的满秩分解

定义 3.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 若存在秩为r的矩阵$B \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{F}^{r\times n}$, 使

$$A = BC, \tag{3-5}$$

则称(3 − 5)为矩阵A的满秩分解.

2. 矩阵的满秩分解

定义 3.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 若存在秩为r的矩阵$B \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{F}^{r\times n}$, 使

$$A = BC, \tag{3-5}$$

则称$(3-5)$为矩阵A的满秩分解.

定理 3.3 对任何非零矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 都存在满秩分解.

2. 矩阵的满秩分解

定义 3.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 若存在秩为r的矩阵$B \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{F}^{r\times n}$, 使

$$A = BC, \tag{3-5}$$

则称$(3-5)$为矩阵A的满秩分解.

定理 3.3 对任何非零矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 都存在满秩分解.

证明 设rank$(A)=r$, 由等价标准形知存在可逆矩阵$P\in\mathbb{F}^{m\times m}, Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

即

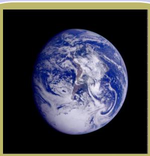
$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

证明 设$\mathrm{rank}(A) = r$, 由等价标准形知存在可逆矩阵$P \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

即
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

把矩阵P^{-1}, Q^{-1} 分块为 $P^{-1} = (B \mid B_1), Q^{-1} = \begin{pmatrix} C \\ \hline C_1 \end{pmatrix}$.



证明 设$\mathrm{rank}(A)=r$, 由等价标准形知存在可逆矩阵$P\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $Q\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

即
$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

把矩阵P^{-1}, Q^{-1}分块为 $P^{-1}=(B\mid B_1)$, $Q^{-1}=\begin{pmatrix} C \\ \hline C_1 \end{pmatrix}$.

B为P^{-1}的前r列组成的矩阵, C为Q^{-1}的前r行组成的矩阵, 则$B\in\mathbb{F}^{m\times r}$, $C\in\mathbb{F}^{r\times n}$, 且$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$,

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}Q^{-1}=(B\mid B_1)\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ \hline C_1 \end{pmatrix}=BC.$$

■

证明 设rank$(A) = r$, 由等价标准形知存在可逆矩阵$P \in \mathbb{F}^{m\times m}, Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

即
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

把矩阵P^{-1}, Q^{-1} 分块为 $P^{-1} = (B \mid B_1), Q^{-1} = \begin{pmatrix} C \\ \hline C_1 \end{pmatrix}$.

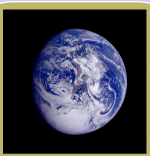
B为P^{-1}的前r列组成的矩阵, C为Q^{-1}的前r行组成的矩阵, 则$B \in \mathbb{F}^{m\times r}, C \in \mathbb{F}^{r\times n}$, 且rank$(B) = $ rank$(C) = r$,

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q^{-1} = (B \mid B_1)\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ \hline C_1 \end{pmatrix} = BC.$$

■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 22 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

注 3.4 矩阵A的满秩分解一般不是惟一的. 求A的满秩分解有多种方法, 下面介绍常用的几种方法.



注 3.4 矩阵A的满秩分解一般不是惟一的. 求A的满秩分解有多种方法, 下面介绍常用的几种方法.

方法1 它来源于定理3.3的证明过程, B, C分别为P^{-1}, Q^{-1}的前r列和前r行组成的矩阵.

从线性代数知求P和Q的方法如下:

$$\begin{pmatrix} A & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \hline Q & & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 23 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

注 3.4 矩阵A的满秩分解一般不是惟一的. 求A的满秩分解有多种方法, 下面介绍常用的几种方法.

方法1 它来源于定理3.3的证明过程, B, C分别为P^{-1}, Q^{-1}的前r列和前r行组成的矩阵.

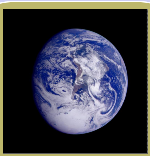
从线性代数知求P和Q的方法如下:

$$\begin{pmatrix} A & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \hline Q & & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

再求P^{-1}, Q^{-1}即可得到B, C. 但该方法计算量太大, 一般不使用.

方法2 若只对A做行初等变换, 可得阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中$\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(A) = r$, 因此有可逆矩阵$P$, 使

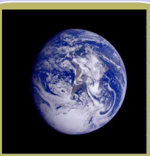
$$PA = \begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix},$$



方法2 若只对A做行初等变换, 可得阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中$\mathrm{rank}(C) = \mathrm{rank}(A) = r$, 因此有可逆矩阵$P$, 使

$$PA = \begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

从而
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} = (B \mid B_1)\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} = BC.$$



方法2 若只对A做行初等变换, 可得阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中$\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(A)=r$, 因此有可逆矩阵$P$, 使

$$PA=\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

从而 $$A=P^{-1}\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix}=(B\mid B_1)\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix}=BC.$$

方法是 $$(A\mid I_m)\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left(\begin{array}{c|c} C & \\ \hline \mathbf{0} & \end{array}\ P\right),$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 24 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

方法2 若只对A做行初等变换, 可得阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中$\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(A) = r$, 因此有可逆矩阵$P$, 使

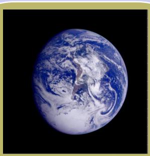
$$PA = \begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

从而 $$A = P^{-1}\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} = (B \mid B_1)\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} = BC.$$

方法是 $$(A \mid I_m) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{c|c} C & \\ \hline \mathbf{0} & P \end{array}\right),$$

B为P^{-1}的前r列, C是A化为阶梯形中的非零行.

方法3 首先考虑这样的情形: $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 设$\operatorname{rank}(A) = r$, 而且$A$的前$r$列线性无关, 则它们是$A$的列向量的极大无关组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$, 设$A_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$, 则$\operatorname{rank}(A) = r$, $A_1 \in \mathbb{F}^{m\times r}$.



方法2 若只对A做行初等变换, 可得阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, 其中$\mathrm{rank}(C) = \mathrm{rank}(A) = r$, 因此有可逆矩阵$P$, 使

$$PA = \begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

从而
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} = (B \mid B_1)\begin{pmatrix} C \\ \hline \mathbf{0} \end{pmatrix} = BC.$$

方法是
$$(A \mid I_m) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{c|c} C & \\ \hline \mathbf{0} & \end{array} P\right),$$

B为P^{-1}的前r列, C是A化为阶梯形中的非零行.

方法3 首先考虑这样的情形: $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 设$\mathrm{rank}(A) = r$, 而且$A$的前$r$列线性无关, 则它们是$A$的列向量的极大无关组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$, 设$A_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$, 则$\mathrm{rank}(A) = r$, $A_1 \in \mathbb{F}^{m\times r}$.

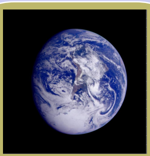
又A的后$n-r$列$\{\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n\}$可表为列向量极

大线性无关组的线性组合, 设$A_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$A_2 = A_1 S,$$

其中 $$S_{r\times(n-r)} = (\boldsymbol{X}_{r+1}, \boldsymbol{X}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{X}_n),$$

$\boldsymbol{X}_j$满足$\alpha_j = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}_j, j = r+1, r+2, \cdots, n,$



大线性无关组的线性组合, 设$A_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$A_2 = A_1 S,$$

其中 $$S_{r\times(n-r)} = (\boldsymbol{X}_{r+1}, \boldsymbol{X}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{X}_n),$$

$\boldsymbol{X}_j$满足$\alpha_j = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}_j, j = r+1, r+2, \cdots, n,$

因此 $$A = (A_1 \mid A_2) = (A_1 \mid A_1 S),$$

大线性无关组的线性组合, 设$A_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$A_2 = A_1 S,$$

其中 $$S_{r\times(n-r)} = (\boldsymbol{X}_{r+1}, \boldsymbol{X}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{X}_n),$$

$\boldsymbol{X}_j$满足$\alpha_j = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}_j, j = r+1, r+2, \cdots, n,$

因此 $$A = (A_1 \mid A_2) = (A_1 \mid A_1 S),$$

即

$$A = A_1(I_r \mid S), \tag{3-6}$$

大线性无关组的线性组合, 设$A_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$A_2 = A_1 S,$$

其中 $$S_{r\times(n-r)} = (\boldsymbol{X}_{r+1}, \boldsymbol{X}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{X}_n),$$

$\boldsymbol{X}_j$满足$\alpha_j = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}_j, j = r+1, r+2, \cdots, n$,

因此 $$A = (A_1 \mid A_2) = (A_1 \mid A_1 S),$$

即

$$A = A_1(I_r \mid S), \tag{3-6}$$

则$B = A_1, C = (I_r \mid S)$即为满秩分解.

大线性无关组的线性组合, 设$A_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$A_2 = A_1 S,$$

其中 $S_{r\times(n-r)} = (\boldsymbol{X}_{r+1}, \boldsymbol{X}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$,

$\boldsymbol{X}_j$满足$\alpha_j = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}_j$, $j = r+1, r+2, \cdots, n$,

因此 $A = (A_1 \mid A_2) = (A_1 \mid A_1 S)$,

即

$$A = A_1(I_r \mid S), \tag{3-6}$$

则$B = A_1$, $C = (I_r \mid S)$即为满秩分解.

方法3的关键是要知道A的列向量组的极大线性无关组, 用它们构成矩阵B. 还需要知道其余列向量关于极大无关组的线性组合. 具体计算过程如下:

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 25 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

大线性无关组的线性组合, 设$A_2 = (\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n)$, 则

$$A_2 = A_1 S,$$

其中 $S_{r\times(n-r)} = (\boldsymbol{X}_{r+1}, \boldsymbol{X}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$,

$\boldsymbol{X}_j$满足$\alpha_j = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}_j, j = r+1, r+2, \cdots, n$,

因此 $A = (A_1 \mid A_2) = (A_1 \mid A_1 S)$,

即

$$A = A_1(I_r \mid S), \tag{3-6}$$

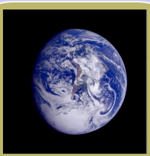
则$B = A_1, C = (I_r \mid S)$即为满秩分解.

方法3的关键是要知道A的列向量组的极大线性无关组, 用它们构成矩阵B. 还需要知道其余列向量关于极大无关组的线性组合. 具体计算过程如下:

① 用行初等变换把A化为简化阶梯形, 即每一行第一个非零元素为1且该元素所在的列中其它元素为0的一种阶梯形.

② 依简化阶梯形中向量$\boldsymbol{e}_i$所在的列的位置第j_i列, 相应取出A的第j_i列α_{j_i}, 得到A的列向量极大无关组$\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}\}$, 则$B = (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r})$.

③ A的简化阶梯形中非零行构成矩阵C, 得到A的满秩分解: $A = BC$.



① 用行初等变换把A化为简化阶梯形, 即每一行第一个非零元素为1且该元素所在的列中其它元素为0的一种阶梯形.

② 依简化阶梯形中向量$\boldsymbol{e}_i$所在的列的位置第j_i列, 相应取出A的第j_i列α_{j_i}, 得到A的列向量极大无关组$\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}\}$, 则$B = (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r})$.

③ A的简化阶梯形中非零行构成矩阵C, 得到A的满秩分解: $A = BC$.

例 3.3 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A$的满秩分解.

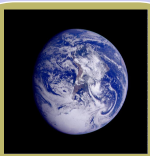
① 用行初等变换把A化为简化阶梯形, 即每一行第一个非零元素为1且该元素所在的列中其它元素为0的一种阶梯形.

② 依简化阶梯形中向量$\boldsymbol{e}_i$所在的列的位置第j_i列, 相应取出A的第j_i列α_{j_i}, 得到A的列向量极大无关组$\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}\}$, 则$B = (\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r})$.

③ A的简化阶梯形中非零行构成矩阵C, 得到A的满秩分解: $A = BC$.

例 3.3 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A$的满秩分解.

解 先用方法2.



解　先用方法2.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right),$$

解 先用方法2.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right),$$

故$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

解 先用方法2.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right),$$

故$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

所以

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 27 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

再用方法3.

再用方法3.

用行初等变换化A为简化阶梯形:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

再用方法3.

用行初等变换化A为简化阶梯形:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\mathrm{rank}(A)=2$, A的前两列线性无关, 因此

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\ A=BC.$$

再用方法3.

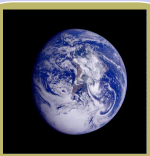
用行初等变换化A为简化阶梯形:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\mathrm{rank}(A)=2$, A的前两列线性无关, 因此

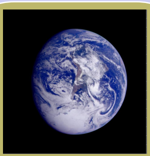
$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\ A=BC.$$

例 3.4 设$A=\begin{pmatrix}0&1&0&-1&5&6\\0&2&0&0&0&-14\\2&-1&2&-4&0&1\\-2&1&-2&2&10&25\end{pmatrix}$, 求$A$的



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 28 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

满秩分解.



满秩分解.

解 行初等变换化A为简化阶梯形:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

选取A的第1, 2, 4列, 把它们取作矩阵B,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

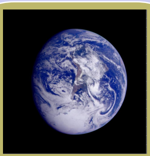
选取A的第1, 2, 4列, 把它们取作矩阵B,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

C为简化阶梯形中非零行,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix}, \quad A = BC.$$

3. 可对角化矩阵的谱分解



3. 可对角化矩阵的谱分解

对于方阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵A的n个特征值. A互异的特征值集合$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 称为矩阵A的谱. 矩阵的谱分解是讨论矩阵可相似于对角形时, 依A的谱或特征值把矩阵A分解为矩阵和形式的一种分解. 从分解中我们可得到矩阵可相似于对角矩阵的又一个充分必要条件.

3. 可对角化矩阵的谱分解

对于方阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵A的n个特征值. A互异的特征值集合$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 称为矩阵A的谱. 矩阵的谱分解是讨论矩阵可相似于对角形时, 依A的谱或特征值把矩阵A分解为矩阵和形式的一种分解. 从分解中我们可得到矩阵可相似于对角矩阵的又一个充分必要条件.

设A的谱为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其中$\lambda_i$为$A$的$r_i$重特征值 $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 因此

$$\sum_{i=1}^{s} r_i = n.$$

3. 可对角化矩阵的谱分解

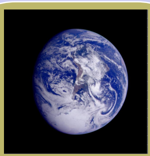
对于方阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵A的n个特征值. A互异的特征值集合$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 称为矩阵A的谱. 矩阵的谱分解是讨论矩阵可相似于对角形时, 依A的谱或特征值把矩阵A分解为矩阵和形式的一种分解. 从分解中我们可得到矩阵可相似于对角矩阵的又一个充分必要条件.

设A的谱为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其中$\lambda_i$为$A$的$r_i$重特征值$(i = 1, 2, \cdots, s)$, 因此

$$\sum_{i=1}^{s} r_i = n.$$

当A相似于对角形矩阵时, 则存在可逆矩阵P, 使

$$A = P\Lambda P^{-1}, \tag{3-7}$$



其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_s & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix} \tag{3-8}$$

首先分解对角矩阵

$$
\Lambda = \lambda_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots
$$

$$
+\lambda_s \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{r_s} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},
$$

常见的矩阵标...

Jordan矩阵介绍

最小多项式

Home Page

Title Page

Page 33 of 77

Go Back

Full Screen

Close

Quit

首先分解对角矩阵

$$\Lambda=\lambda_1\begin{pmatrix} I_{r_1} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}+\cdots$$

$$+\lambda_s\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{r_s} \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$令Q_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, s,$$

令$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则Q_i满足以下性质:

① $\sum_{i=1}^{s} Q_i = I_n$;

② $Q_i^2 = Q_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$;

③ $Q_i \cdot Q_j = \mathbf{0}$, $i \neq j$.

令$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则Q_i满足以下性质:

① $\sum_{i=1}^{s} Q_i = I_n$;

② $Q_i^2 = Q_i, i = 1, 2, \cdots, s$;

③ $Q_i \cdot Q_j = \mathbf{0}, i \neq j$.

代入(3 – 7)式, 则有

$$A = P\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Q_i\right)P^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(PQ_iP^{-1}).$$

代入(3 – 7)式, 则有

$$A = P\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Q_i\right)P^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(PQ_iP^{-1}).$$

令$P_i = PQ_iP^{-1}$, 则

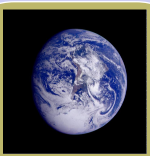
$$A = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i P_i, \tag{3-9}$$

并且P_i具有以下性质:

① $\sum_{i=1}^{s} P_i = I_n$;

② $P_i^2 = P_i, i = 1, 2, \cdots, s$;

③ $P_i \cdot P_j = \mathbf{0}, i \neq j$.



代入(3 – 7)式, 则有

$$A = P\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i Q_i\right)P^{-1} = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(PQ_iP^{-1}).$$

令$P_i = PQ_iP^{-1}$, 则

$$A = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i P_i, \tag{3-9}$$

并且P_i具有以下性质:

① $\sum_{i=1}^{s} P_i = I_n$;

② $P_i^2 = P_i, i = 1, 2, \cdots, s$;

③ $P_i \cdot P_j = \mathbf{0}, i \neq j$.

$(3-9)$式就是一个可对角化矩阵A的谱分解, 即可对角化矩阵可分解为s个方阵的加权和. 在后面将会看到P_i是投影矩阵, 这里我们只讨论P_i的性质.

$(3-9)$式就是一个可对角化矩阵A的谱分解, 即可对角化矩阵可分解为s个方阵的加权和. 在后面将会看到P_i是投影矩阵, 这里我们只讨论P_i的性质.

定理 3.4 幂等矩阵$P \in \mathbb{F}^{n\times n}$具有如下性质:

① P^H和$(I-P)$仍为幂等矩阵.

② P的特征值为1或0, 而且相似于对角矩阵.

③ $\mathbb{F}^n = N(P) \oplus R(P)$.

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 36 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

(3 − 9)式就是一个可对角化矩阵A的谱分解, 即可对角化矩阵可分解为s个方阵的加权和. 在后面将会看到P_i是投影矩阵, 这里我们只讨论P_i的性质.

定理 3.4 幂等矩阵$P \in \mathbb{F}^{n\times n}$具有如下性质:

① P^H和$(I-P)$仍为幂等矩阵.

② P的特征值为1或0, 而且相似于对角矩阵.

③ $\mathbb{F}^n = N(P) \oplus R(P)$.

证明 ① 由$(P^H)^2 = (P^2)^H = P^H$知, P^H是幂等矩阵.

又从$(I-P)^2=I-2P+P^2=I-P$得, $(I-P)$也是幂等矩阵.

又从$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$得, $(I-P)$也是幂等矩阵.

② 设λ为P的特征值, 则存在向量$\boldsymbol{X} \neq 0$使$P\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}$, 两边左乘$P$, 得$P^2\boldsymbol{X} = \lambda^2\boldsymbol{X}$, 由$P^2 = P$, 可得等式$P^2 - P = \mathbf{0}$.

又从$(I-P)^2=I-2P+P^2=I-P$得, $(I-P)$也是幂等矩阵.

② 设λ为P的特征值, 则存在向量$\boldsymbol{X}\neq 0$使$P\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$, 两边左乘$P$, 得$P^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$, 由$P^2=P$, 可得等式$P^2-P=\mathbf{0}$.

取$g(\lambda)=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$, 则$g(\lambda)$为$P$的化零多项式, 从而$P$的最小多项式$m_P(\lambda)$能整除$g(\lambda)$, 故$m_P(\lambda)$为一次因子之积. 由定理2.10,$P$相似于对角形矩阵.

③ 首先证明P的列空间$R(P)=V_{\lambda=1}$.

又从$(I-P)^2 = I-2P+P^2 = I-P$得, $(I-P)$也是幂等矩阵.

② 设λ为P的特征值, 则存在向量$\boldsymbol{X} \neq 0$使$P\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}$, 两边左乘$P$, 得$P^2\boldsymbol{X} = \lambda^2\boldsymbol{X}$, 由$P^2 = P$, 可得等式$P^2 - P = \mathbf{0}$.

取$g(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$, 则$g(\lambda)$为$P$的化零多项式, 从而$P$的最小多项式$m_P(\lambda)$能整除$g(\lambda)$, 故$m_P(\lambda)$为一次因子之积. 由定理2.10,$P$相似于对角形矩阵.

③ 首先证明P的列空间$R(P) = V_{\lambda=1}$.

$\forall\, \boldsymbol{X} \in R(P)$, 则$\exists\, \boldsymbol{X}'$, 使$\boldsymbol{X} = P\boldsymbol{X}'$, 则$P\boldsymbol{X} = P(P\boldsymbol{X}') = P^2\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}$, 所以$\boldsymbol{X} \in V_{\lambda=1}$, 即$R(P) \subseteq V_{\lambda=1}$.

又从$(I-P)^2 = I-2P+P^2 = I-P$得, $(I-P)$也是幂等矩阵.

② 设λ为P的特征值, 则存在向量$\boldsymbol{X} \neq 0$使$P\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}$, 两边左乘$P$, 得$P^2\boldsymbol{X} = \lambda^2 \boldsymbol{X}$, 由$P^2 = P$, 可得等式$P^2 - P = \boldsymbol{0}$.

取$g(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$, 则$g(\lambda)$为$P$的化零多项式, 从而$P$的最小多项式$m_P(\lambda)$能整除$g(\lambda)$, 故$m_P(\lambda)$为一次因子之积. 由定理2.10,$P$相似于对角形矩阵.

③ 首先证明P的列空间$R(P) = V_{\lambda=1}$.
$\forall\, \boldsymbol{X} \in R(P)$, 则$\exists\, \boldsymbol{X}'$, 使$\boldsymbol{X} = P\boldsymbol{X}'$, 则$P\boldsymbol{X} = P(P\boldsymbol{X}') = P^2\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}$, 所以$\boldsymbol{X} \in V_{\lambda=1}$, 即$R(P) \subseteq V_{\lambda=1}$.
又$\forall\, \boldsymbol{X} \in V_{\lambda=1}$, $\boldsymbol{X} = P\boldsymbol{X}$, 说明$\boldsymbol{X} \in R(P)$, 即$R(P) \supseteq$

$V_{\lambda=1}$. 因此

$$R(P) = V_{\lambda=1}$$

$V_{\lambda=1}$. 因此

$$R(P) = V_{\lambda=1}$$

同理可证P的零空间$N(P) = V_{\lambda=0}$.

$V_{\lambda=1}$. 因此

$$R(P) = V_{\lambda=1}$$

同理可证P的零空间$N(P) = V_{\lambda=0}$.

由②有

$$\mathbb{F}^n = N(P) \oplus R(P).$$

■

定理 3.5 (可对角化矩阵的谱分解) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, 则$A$可对角化的充分必要条件是$A$有如下分解式

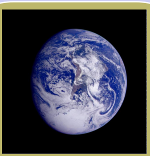
$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i,$$

其中方阵$P_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 满足如下条件:

① $P_i^2 = P_i, i = 1, 2, \cdots, s;$

② $P_i \cdot P_j = \mathbf{0}, i \neq j;$

③ $\sum_{i=1}^{s} P_i = I_n.$



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 39 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定理 3.5 (可对角化矩阵的谱分解) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, 则$A$可对角化的充分必要条件是$A$有如下分解式

$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i,$$

其中方阵$P_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 满足如下条件:

① $P_i^2 = P_i, i = 1, 2, \cdots, s;$

② $P_i \cdot P_j = \mathbf{0}, i \neq j;$

③ $\sum_{i=1}^{s} P_i = I_n.$

证明 这里只证充分性.

证明　这里只证充分性.

$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^n$, 则由③

$$\boldsymbol{X} = I_n \boldsymbol{X} = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i\right) \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s} (P_i \boldsymbol{X}), \tag{3-10}$$

常见的矩阵标...

Jordan矩阵介绍

最小多项式

Home Page

Title Page

Page 40 of 77

Go Back

Full Screen

Close

Quit

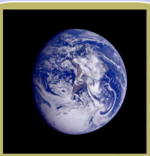
证明 这里只证充分性.

$\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^n$, 则由③

$$\boldsymbol{X} = I_n\boldsymbol{X} = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i\right)\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s}(P_i\boldsymbol{X}), \tag{3-10}$$

又对$P_j\boldsymbol{X}$, 由②和①,

$$\begin{aligned} A(P_j\boldsymbol{X}) &= \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i\right) P_j\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (P_i \cdot P_j)\boldsymbol{X} \\ &= \lambda_j P_j^2 \boldsymbol{X} = \lambda_j (P_j\boldsymbol{X}), \end{aligned}$$



证明 这里只证充分性.

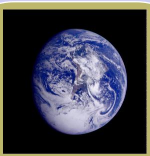
$\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^n$, 则由③

$$\boldsymbol{X} = I_n \boldsymbol{X} = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i\right) \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s} (P_i \boldsymbol{X}), \tag{3-10}$$

又对$P_j\boldsymbol{X}$, 由②和①,

$$\begin{aligned} A(P_j\boldsymbol{X}) &= \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i\right) P_j \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (P_i \cdot P_j) \boldsymbol{X} \\ &= \lambda_j P_j^2 \boldsymbol{X} = \lambda_j (P_j \boldsymbol{X}), \end{aligned}$$

从而$P_j\boldsymbol{X} \in V_{\lambda_j}$, 即当$P_j\boldsymbol{X} \neq 0$时, 它是$A$关于特征值$\lambda_j$的特征向量.



证明　这里只证充分性.

$\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^n$, 则由③

$$\boldsymbol{X} = I_n\boldsymbol{X} = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i\right)\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s}(P_i\boldsymbol{X}), \tag{3-10}$$

又对$P_j\boldsymbol{X}$, 由②和①,

$$A(P_j\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i P_i\right)P_j\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(P_i\cdot P_j)\boldsymbol{X}$$
$$= \lambda_j P_j^2\boldsymbol{X} = \lambda_j(P_j\boldsymbol{X}),$$

从而$P_j\boldsymbol{X} \in V_{\lambda_j}$, 即当$P_j\boldsymbol{X} \neq 0$时, 它是$A$关于特征值$\lambda_j$的特征向量.

结合(3 − 10)式, $\mathbb{C}^n$可分解为特征子空间的和, 故

$$\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^{s} V_{\lambda_i} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s},$$

证明　这里只证充分性.

$\forall\ \boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^n$, 则由③

$$\boldsymbol{X}=I_n\boldsymbol{X}=\left(\sum_{i=1}^{s}P_i\right)\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{s}(P_i\boldsymbol{X}), \tag{3-10}$$

又对$P_j\boldsymbol{X}$, 由②和①,

$$\begin{aligned}A(P_j\boldsymbol{X})&=\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_iP_i\right)P_j\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i(P_i\cdot P_j)\boldsymbol{X}\\&=\lambda_jP_j^2\boldsymbol{X}=\lambda_j(P_j\boldsymbol{X}),\end{aligned}$$

从而$P_j\boldsymbol{X}\in V_{\lambda_j}$, 即当$P_j\boldsymbol{X}\neq 0$时, 它是$A$关于特征值$\lambda_j$的特征向量.

结合(3 − 10)式, $\mathbb{C}^n$可分解为特征子空间的和, 故

$$\mathbb{C}^n=\sum_{i=1}^{s}V_{\lambda_i}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s},$$

根据定理2.4,A相似于对角形. ■

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 40 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明 这里只证充分性.

$\forall\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^n$, 则由③

$$\boldsymbol{X} = I_n\boldsymbol{X} = \left(\sum_{i=1}^{s} P_i\right)\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s}(P_i\boldsymbol{X}), \tag{3-10}$$

又对$P_j\boldsymbol{X}$, 由②和①,

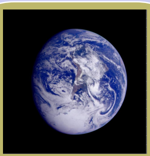
$$A(P_j\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i\right) P_j\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (P_i \cdot P_j)\boldsymbol{X}$$
$$= \lambda_j P_j^2 \boldsymbol{X} = \lambda_j (P_j\boldsymbol{X}),$$

从而$P_j\boldsymbol{X} \in V_{\lambda_j}$, 即当$P_j\boldsymbol{X} \neq 0$时, 它是$A$关于特征值$\lambda_j$的特征向量.

结合(3 − 10)式, $\mathbb{C}^n$可分解为特征子空间的和, 故

$$\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^{s} V_{\lambda_i} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s},$$

根据定理2.4,A相似于对角形. ■



当方阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A^H = A$时, A为Hermite矩阵. Hermite矩阵是可对角化矩阵, 故可用上述谱分解定理将其分解为矩阵的和.

当方阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A^H = A$时, A为Hermite矩阵. Hermite矩阵是可对角化矩阵, 故可用上述谱分解定理将其分解为矩阵的和.

定理 3.6 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$是半正定的Hermite矩阵. $\mathrm{rank}(A) = k$, 则A可被分解为下列矩阵的和

$$A = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\nu}_i \boldsymbol{\nu}_i^H,$$

其中$\boldsymbol{\nu}_i \in \mathbb{F}^n$, $\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_k\}$是空间$\mathbb{F}^n$中非零的正交向量组.

当方阵$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A^H = A$时, A为Hermite矩阵. Hermite矩阵是可对角化矩阵, 故可用上述谱分解定理将其分解为矩阵的和.

定理 3.6 设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$是半正定的Hermite矩阵. $\mathrm{rank}(A) = k$, 则A可被分解为下列矩阵的和

$$A = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\nu}_i \boldsymbol{\nu}_i^H,$$

其中$\boldsymbol{\nu}_i \in \mathbb{F}^n$, $\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_k\}$ 是空间$\mathbb{F}^n$中非零的正交向量组.

证明 由$\mathrm{rank}(A) = k$, 且A为Hermite矩阵, 得A的特征值$\lambda_i \geq 0$. 不妨设当$j = 1, 2, \cdots, k$时, $\lambda_j > 0$; 当$j = k+1, k+2, \cdots, n$时, $\lambda_j = 0$.

当方阵$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $A^H=A$时, A为Hermite矩阵. Hermite矩阵是可对角化矩阵, 故可用上述谱分解定理将其分解为矩阵的和.

定理 3.6 设$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$是半正定的Hermite矩阵. $\operatorname{rank}(A)=k$, 则A可被分解为下列矩阵的和

$$A=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\nu}_i\boldsymbol{\nu}_i^H,$$

其中$\boldsymbol{\nu}_i\in\mathbb{F}^n$, $\{\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\cdots,\boldsymbol{\nu}_k\}$是空间$\mathbb{F}^n$中非零的正交向量组.

证明 由$\operatorname{rank}(A)=k$, 且A为Hermite矩阵, 得A的特征值$\lambda_i\geq 0$. 不妨设当$j=1,2,\cdots,k$时, $\lambda_j>0$; 当$j=k+1,k+2,\cdots,n$时, $\lambda_j=0$.

且有酉矩阵U, 使$A = U\Lambda U^H$. 令$U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$, 则可将$A$写成

$$A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_k} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{\nu}_1^H + \boldsymbol{\nu}_2\boldsymbol{\nu}_2^H + \cdots + \boldsymbol{\nu}_k\boldsymbol{\nu}_k^H$$

且有酉矩阵U, 使$A = U\Lambda U^H$. 令$U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$, 则可将$A$写成

$$A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_k} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{\nu}_1^H + \boldsymbol{\nu}_2\boldsymbol{\nu}_2^H + \cdots + \boldsymbol{\nu}_k\boldsymbol{\nu}_k^H$$

其中$\boldsymbol{\nu}_i = \sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 所以$\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_k\}$为正交向量组. ■

且有酉矩阵U, 使$A = U\Lambda U^H$. 令$U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$, 则可将$A$写成

$$A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_k} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{\nu}_1^H + \boldsymbol{\nu}_2\boldsymbol{\nu}_2^H + \cdots + \boldsymbol{\nu}_k\boldsymbol{\nu}_k^H$$

其中$\boldsymbol{\nu}_i = \sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 所以$\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_k\}$为正交向量组. ■

§3.2 Schur分解与正规矩阵

如果一个矩阵相似于Jordan标准形, 那么便可以得到这个矩阵的特征值和特征向量的全部信息. 但是在实际应用时, 除了如Hermite矩阵等一些类型外, 缺乏普遍有效的变换矩阵.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 43 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§3.2 Schur分解与正规矩阵

如果一个矩阵相似于Jordan标准形, 那么便可以得到这个矩阵的特征值和特征向量的全部信息. 但是在实际应用时, 除了如Hermite矩阵等一些类型外, 缺乏普遍有效的变换矩阵.

Hermite矩阵总是可以通过酉相似变换将其化成对角形, 这也是Jordan标准形.

§3.2 Schur分解与正规矩阵

如果一个矩阵相似于Jordan标准形, 那么便可以得到这个矩阵的特征值和特征向量的全部信息. 但是在实际应用时, 除了如Hermite矩阵等一些类型外, 缺乏普遍有效的变换矩阵.

Hermite矩阵总是可以通过酉相似变换将其化成对角形, 这也是Jordan标准形.

在内积空间中, 酉相似比一般可逆矩阵下的相似有更多优点. 因此, 自然会问: 酉相似变换能把一般矩阵变到什么形状? 本节我们指出, 酉相似变换能将任何矩阵化为三角矩阵.

§3.2 Schur分解与正规矩阵

如果一个矩阵相似于Jordan标准形, 那么便可以得到这个矩阵的特征值和特征向量的全部信息. 但是在实际应用时, 除了如Hermite矩阵等一些类型外, 缺乏普遍有效的变换矩阵.

Hermite矩阵总是可以通过酉相似变换将其化成对角形, 这也是Jordan标准形.

在内积空间中, 酉相似比一般可逆矩阵下的相似有更多优点. 因此, 自然会问: 酉相似变换能把一般矩阵变到什么形状? 本节我们指出, 酉相似变换能将任何矩阵化为三角矩阵.

1. Schur分解

我们先讨论UR分解.

1. Schur分解

我们先讨论UR分解.

定理 3.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为可逆矩阵, 则存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$和主对角线上元素皆为正的上三角矩阵

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix},$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 44 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

1. Schur分解

我们先讨论UR分解.

定理 3.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为可逆矩阵, 则存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$和主对角线上元素皆为正的上三角矩阵

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix},$$

使

$$A = UR.$$

1. Schur分解

我们先讨论UR分解.

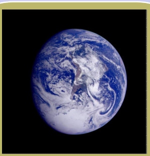
定理 3.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为可逆矩阵, 则存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$和主对角线上元素皆为正的上三角矩阵

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix},$$

使

$$A = UR.$$

证明 因为A可逆, 则A的列向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$\mathbb{C}^n$的一组基. 可对它施行Schmidt正交化过程, 得到$\mathbb{C}^n$中的



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 44 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

标准正交基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$. 两组基之间有如下关系式:

标准正交基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$. 两组基之间有如下关系式:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \varepsilon_1) & \cdots & (\alpha_n, \varepsilon_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \varepsilon_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

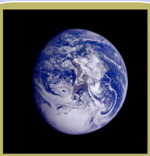
常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 45 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

标准正交基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$. 两组基之间有如下关系式:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

令$U = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$, 则$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$为酉矩阵. 令

$$R = \begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix},$$



标准正交基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$. 两组基之间有如下关系式:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

令$U = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$, 则$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$为酉矩阵. 令

$$R = \begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix},$$

则R为上三角矩阵, 且主对角线元素$r_{ii} = \|\beta_i\| > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, $(3-11)$就是$A = UR$. ■

标准正交基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$. 两组基之间有如下关系式:

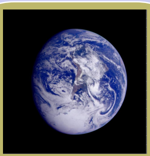
$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

令$U = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$, 则$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$为酉矩阵. 令

$$R = \begin{pmatrix} \|\beta_1\| & (\alpha_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1) & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ & \|\beta_2\| & \cdots & (\alpha_n, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \|\beta_n\| \end{pmatrix},$$

则R为上三角矩阵, 且主对角线元素$r_{ii} = \|\beta_i\| > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, $(3-11)$就是$A = UR$. ∎

例 3.5 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, 求$A$的$UR$分解.



例 3.5 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A$的$UR$分解.

解 A是一个可逆矩阵, A的列向量为

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

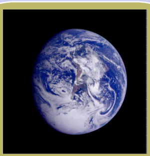
例 3.5 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, 求$A$的$UR$分解.

解 A是一个可逆矩阵, A的列向量为

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

用Schmidt正交化过程, 可从A的列向量得到$\mathbb{R}^3$中标准正交向量组

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$



因此$U=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 47 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

因此$U=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

U为酉矩阵, 由定理3.7, $R=U^HA$, 即

$$R=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

因此$U=(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

U为酉矩阵, 由定理3.7, $R=U^HA$, 即

$$R=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

定理3.7是对可逆方阵给出的UR分解, 这一结果可以推广到列满秩矩阵:

定理 3.8 设$A\in\mathbb{C}^{m\times k}$是一个列满秩矩阵, 则$A$可被分解为

$$A=QR,$$

其中$Q \in \mathbb{C}^{m\times k}$, Q的列向量是A的列空间的标准正交基, $R \in \mathbb{C}^{k\times k}$是一个可逆的上三角矩阵.

其中$Q \in \mathbb{C}^{m\times k}$, Q的列向量是A的列空间的标准正交基, $R \in \mathbb{C}^{k\times k}$是一个可逆的上三角矩阵.

证明 当A为列满秩时, 有$m \geq k$. 将A的列向量扩充为空间$\mathbb{C}^m$的基, 得到可逆矩阵$(A \mid A_1) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, 由定理3.7, 有$UR$分解

$$(A \mid A_1) = UR.$$

其中$Q \in \mathbb{C}^{m\times k}$, Q的列向量是A的列空间的标准正交基, $R \in \mathbb{C}^{k\times k}$是一个可逆的上三角矩阵.

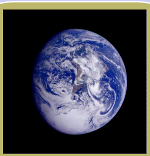
证明　当A为列满秩时, 有$m \geq k$. 将A的列向量扩充为空间$\mathbb{C}^m$的基, 得到可逆矩阵$(A \mid A_1) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, 由定理3.7, 有$UR$分解

$$(A \mid A_1) = UR.$$

将酉矩阵U分块为$U = (Q \mid Q_1)$, $Q \in \mathbb{C}^{m\times k}$, 而上三角矩阵$R$分块为$R = \left(\begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline \mathbf{0} & R_3 \end{array}\right)$, 其中$R_1 \in \mathbb{C}^{k\times k}$是上三角矩阵.

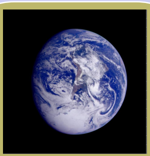
由于

$$(A \mid A_1) = (Q \mid Q_1)\left(\begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline \mathbf{0} & R_3 \end{array}\right) = (QR_1 \mid QR_2 + Q_1R_3),$$



有

有$A = QR_1$, 即为QR分解. $\blacksquare$



有$A = QR_1$, 即为QR分解. ■

定理 3.9 (Schur分解) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则存在酉矩阵$U$和上三角矩阵$T$, 使

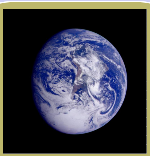
$$U^H A U = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

有$A = QR_1$, 即为QR分解. ■

定理 3.9 (Schur分解) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则存在酉矩阵$U$和上三角矩阵$T$, 使

$$U^H AU = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中λ_i为矩阵A的特征值, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.



有$A = QR_1$, 即为QR分解. ■

定理 3.9 (Schur分解) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则存在酉矩阵$U$和上三角矩阵$T$, 使

$$U^H AU = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中λ_i为矩阵A的特征值, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 因为$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 故可相似于Jordan标准形$A = PJP^{-1}$.

有$A=QR_1$, 即为QR分解. ■

定理 3.9 (Schur分解) 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则存在酉矩阵$U$和上三角矩阵$T$, 使

$$U^HAU=T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中λ_i为矩阵A的特征值, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

证明 因为$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 故可相似于Jordan标准形$A=PJP^{-1}$.

又$P\in\mathbb{C}^{n\times n}$为可逆矩阵, 则由定理3.7, P有UR分解$P=UR$,

则

$$A = PJP^{-1} = URJR^{-1}U^H.$$

则

$$A = PJP^{-1} = URJR^{-1}U^H.$$

令$T = RJR^{-1}$, 则T是一个上三角矩阵, 即有

$$U^H AU = T.$$

则

$$A = PJP^{-1} = URJR^{-1}U^H.$$

令$T = RJR^{-1}$, 则T是一个上三角矩阵, 即有

$$U^H AU = T.$$

由相似矩阵特征值相等, 上三角矩阵T的主对角线元素是A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. ■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 50 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

则

$$A = PJP^{-1} = URJR^{-1}U^H.$$

令$T = RJR^{-1}$, 则T是一个上三角矩阵, 即有

$$U^H AU = T.$$

由相似矩阵特征值相等, 上三角矩阵T的主对角线元素是A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. ■

Schur分解有重要的理论意义, 可以用于证明许多定理.

则

$$A = PJP^{-1} = URJR^{-1}U^H.$$

令$T = RJR^{-1}$, 则T是一个上三角矩阵, 即有

$$U^H AU = T.$$

由相似矩阵特征值相等, 上三角矩阵T的主对角线元素是A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. ■

Schur分解有重要的理论意义, 可以用于证明许多定理.

例 3.6 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明: $\forall\ \varepsilon > 0$, 存在矩阵$A(\varepsilon) = (a_{ij}(\varepsilon)) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A(\varepsilon)$有n个互异的特征值, 并且使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} - a_{ij}(\varepsilon) |^2 < \varepsilon.$$

则

$$A = PJP^{-1} = URJR^{-1}U^H.$$

令$T = RJR^{-1}$, 则T是一个上三角矩阵, 即有

$$U^HAU = T.$$

由相似矩阵特征值相等, 上三角矩阵T的主对角线元素是A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. ■

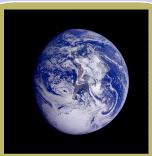
Schur分解有重要的理论意义, 可以用于证明许多定理.

例 3.6 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明: $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在矩阵$A(\varepsilon) = (a_{ij}(\varepsilon)) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A(\varepsilon)$有n个互异的特征值, 并且使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} |\, a_{ij} - a_{ij}(\varepsilon)\, |^2 < \varepsilon.$$

证明　对方阵A, 由Schur分解, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H A U = T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$



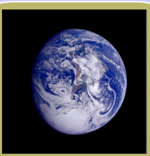
证明　对方阵A, 由Schur分解, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H A U = T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

取

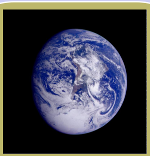
$$E = \begin{pmatrix} l_1 & & & \\ & l_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_n \end{pmatrix},$$

其中l_i满足: $\mid l_i \mid < \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$,
而且使$t_{11}+l_1, t_{22}+l_2, \cdots, t_{nn}+l_n$是$n$个互不相同的数,
故$T+E$有n个互异的特征值$t_{ii}+l_i, 1, 2, \cdots, n$.



令$A(\varepsilon) = A + U^H EU = U^H (T + E)U$, 则$A(\varepsilon)$有$n$个互异的特征值, 且有

$$A - A(\varepsilon) = -U^H EU,$$



令$A(\varepsilon) = A + U^H EU = U^H(T+E)U$, 则$A(\varepsilon)$有$n$个互异的特征值, 且有

$$A - A(\varepsilon) = -U^H EU,$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} - a_{ij}(\varepsilon) \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} \mid l_i \mid^2 < n\frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 52 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

令$A(\varepsilon) = A + U^H EU = U^H(T+E)U$, 则$A(\varepsilon)$有$n$个互异的特征值, 且有

$$A - A(\varepsilon) = -U^H EU,$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} - a_{ij}(\varepsilon) |^2 = \sum_{i=1}^{n} | l_i |^2 < n\frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

■

例 3.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$\forall\, \varepsilon > 0$, 存在非奇异矩阵$S(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得

$$S(\varepsilon)^{-1} AS(\varepsilon) = T(\varepsilon) = (t_{ij}(\varepsilon)),$$

是上三角矩阵, 且$| t_{ij} | < \varepsilon, 1 \le i < j \le n$.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 52 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

令$A(\varepsilon)=A+U^HEU=U^H(T+E)U$, 则$A(\varepsilon)$有$n$个互异的特征值, 且有

$$A-A(\varepsilon)=-U^HEU,$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}-a_{ij}(\varepsilon)|^2=\sum_{i=1}^{n}|l_i|^2<n\frac{\varepsilon}{n}<\varepsilon.$$

■

例 3.7 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则$\forall\,\varepsilon>0$, 存在非奇异矩阵$S(\varepsilon)\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得

$$S(\varepsilon)^{-1}AS(\varepsilon)=T(\varepsilon)=(t_{ij}(\varepsilon)),$$

是上三角矩阵, 且$|t_{ij}|<\varepsilon, 1\le i<j\le n$.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 52 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H A U = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

令$t = \max\limits_{i<j} \mid t_{ij} \mid$, 而且不妨设$\varepsilon < 1.$

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

令$t = \max\limits_{i<j} | t_{ij} |$, 而且不妨设$\varepsilon < 1$.

如果$t \leq 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_\varepsilon$, 则

$$S(\varepsilon)^{-1}AS(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}U^H AUD_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon,$$

令$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon$, 且

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

令$t = \max\limits_{i<j} | t_{ij} |$, 而且不妨设$\varepsilon < 1.$

如果$t \leq 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_\varepsilon$, 则

$$S(\varepsilon)^{-1}AS(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}U^H AUD_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon,$$

令$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon$, 且

$$| t_{ij} |=| t_{ij}\varepsilon^{-i+1}\varepsilon^{j-1} =| t_{ij} | \varepsilon^{j-i} \leq \varepsilon^{j-i} < \varepsilon, \ \forall\, i < j.$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 53 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

令$t = \max\limits_{i<j} \mid t_{ij} \mid$, 而且不妨设$\varepsilon < 1.$

如果$t \leq 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_\varepsilon$, 则

$$S(\varepsilon)^{-1}AS(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}U^H AUD_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon,$$

令$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon$, 且

$$\mid t_{ij} \mid = \mid t_{ij}\varepsilon^{-i+1}\varepsilon^{j-1} = \mid t_{ij} \mid \varepsilon^{j-i} \leq \varepsilon^{j-i} < \varepsilon, \ \forall\, i < j.$$

如果$t > 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_{1/t}D_\varepsilon$, 则类似地, 可得

$$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}D_{1/t}^{-1}TD_{1/t}D_\varepsilon,$$

且

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

令$t = \max\limits_{i<j} \mid t_{ij} \mid$, 而且不妨设$\varepsilon < 1.$

如果$t \leq 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_\varepsilon$, 则

$$S(\varepsilon)^{-1} AS(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1} U^H AUD_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1} TD_\varepsilon,$$

令$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1} TD_\varepsilon$, 且

$$\mid t_{ij} \mid = \mid t_{ij} \varepsilon^{-i+1} \varepsilon^{j-1} = \mid t_{ij} \mid \varepsilon^{j-i} \leq \varepsilon^{j-i} < \varepsilon, \ \forall\, i < j.$$

如果$t > 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_{1/t} D_\varepsilon$, 则类似地, 可得

$$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1} D_{1/t}^{-1} TD_{1/t} D_\varepsilon,$$

且

$$\mid t_{ij} \mid = \mid t_{ij} \mid \varepsilon^{j-i} \left(\frac{1}{t}\right)^{j-i} \leq \varepsilon, \ \forall\, i < j.$$

■

证明 根据定理3.9, 存在酉矩阵U, 使

$$U^H AU = T.$$

定义$D_\alpha = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}), \alpha \neq 0.$

令$t = \max\limits_{i<j} \mid t_{ij} \mid$, 而且不妨设$\varepsilon < 1.$

如果$t \leq 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_\varepsilon$, 则

$$S(\varepsilon)^{-1}AS(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}U^H AUD_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon,$$

令$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}TD_\varepsilon$, 且

$$\mid t_{ij} \mid = \mid t_{ij}\varepsilon^{-i+1}\varepsilon^{j-1} = \mid t_{ij} \mid \varepsilon^{j-i} \leq \varepsilon^{j-i} < \varepsilon, \ \forall\, i < j.$$

如果$t > 1$, 取$S(\varepsilon) = UD_{1/t}D_\varepsilon$, 则类似地, 可得

$$T(\varepsilon) = D_\varepsilon^{-1}D_{1/t}^{-1}TD_{1/t}D_\varepsilon,$$

且

$$\mid t_{ij} \mid = \mid t_{ij} \mid \varepsilon^{j-i}\left(\frac{1}{t}\right)^{j-i} \leq \varepsilon, \ \forall\, i < j.$$

■

注 3.5 例3.6和例3.7从两种意义上表明, 每个矩阵是近乎可对角化的(almost diagonalizable). 例3.6是说对于任何给定矩阵, 存在接近于它的可对角化矩阵. 而例3.7则是说任何给定矩阵必相似于非对角线元素任意小的上三角矩阵.

2. 正规矩阵

2. 正规矩阵

定义 3.3 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$满足$A^H A = AA^H$, 则称$A$是一个正规矩阵(normal matrix).

对实矩阵A, 正规条件为: $A^T A = AA^T$.

2. 正规矩阵

定义 3.3 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$满足$A^H A = AA^H$, 则称$A$是一个正规矩阵(normal matrix).

对实矩阵A, 正规条件为: $A^T A = AA^T$.

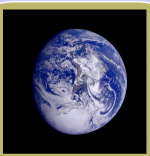
例 3.8 下列矩阵都是正规矩阵.

① 对角矩阵;

② 对称矩阵与反对称矩阵: $A^T = A$, $A^T = -A$;

③ Hermite矩阵与反Hermite矩阵: $A^H = A$, $A^H = -A$;

④ 正交矩阵与酉矩阵: $A^T A = AA^T = I$, $A^H A = AA^H = I$.



④ 正交矩阵与酉矩阵: $A^TA = AA^T = I$, $A^HA = AA^H = I$.

例 3.9 设A为正规矩阵, B酉相似于A, 证明B也是正规矩阵.

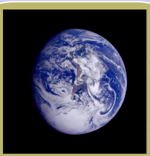
④ 正交矩阵与酉矩阵: $A^TA = AA^T = I$, $A^HA = AA^H = I$.

例 3.9 设A为正规矩阵, B酉相似于A, 证明B也是正规矩阵.

证明 设U为酉矩阵, 使$B = U^HAU$. 则

$$B^HB = (U^HAU)^H(U^HAU) = U^HA^HUU^HAU = U^HA^HAU,$$

$$BB^H = (U^HAU)(U^HAU)^H = U^HAUU^HA^HU = U^HAA^HU,$$



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 56 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

④ 正交矩阵与酉矩阵: $A^TA = AA^T = I$, $A^HA = AA^H = I$.

例 3.9 设A为正规矩阵, B酉相似于A, 证明B也是正规矩阵.

证明 设U为酉矩阵, 使$B = U^HAU$. 则

$B^HB = (U^HAU)^H(U^HAU) = U^HA^HUU^HAU = U^HA^HAU$,

$BB^H = (U^HAU)(U^HAU)^H = U^HAUU^HA^HU = U^HAA^HU$,

由A为正规矩阵, $A^HA = AA^H$, 得$B^HB = BB^H$, 即B为正规矩阵. ■

④ 正交矩阵与酉矩阵: $A^TA = AA^T = I$, $A^HA = AA^H = I$.

例 3.9 设A为正规矩阵, B酉相似于A, 证明B也是正规矩阵.

证明 设U为酉矩阵, 使$B = U^HAU$. 则

$$B^HB = (U^HAU)^H(U^HAU) = U^HA^HUU^HAU = U^HA^HAU,$$

$$BB^H = (U^HAU)(U^HAU)^H = U^HAUU^HA^HU = U^HAA^HU,$$

由A为正规矩阵, $A^HA = AA^H$, 得$B^HB = BB^H$, 即B为正规矩阵. ■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 56 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

定理 3.10 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵的充分必要条件是: A酉相似于对角矩阵, 即存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3-12}$$

定理 3.10 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵的充分必要条件是: A酉相似于对角矩阵, 即存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$U^H AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3-12}$$

证明 必要性: 若A满足$A^H A = AA^H$, 则有Schur分解, 即存在酉矩阵U, 使$A = UTU^H$, T是上三角矩阵. 从例3.9知, $T^H T = TT^H$.

设

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

设

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

比较TT^H与T^HT的第i行, 第i列元素:

$$\begin{cases}(TT^H)_{ii}=\sum\limits_{j=i+1}^{n}\mid t_{ij}\mid^2+\mid\lambda_i\mid^2,\\ (T^HT)_{ii}=\sum\limits_{j=1}^{i-1}\mid t_{ji}\mid^2+\mid\lambda_i\mid^2,\end{cases}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

设

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

比较TT^H与T^HT的第i行, 第i列元素:

$$\left\{\begin{aligned}(TT^H)_{ii}&=\sum_{j=i+1}^{n}|\,t_{ij}\,|^2+|\,\lambda_i\,|^2,\\ (T^HT)_{ii}&=\sum_{j=1}^{i-1}|\,t_{ji}\,|^2+|\,\lambda_i\,|^2,\end{aligned}\right.\qquad i=1,\,2,\,\cdots,\,n.$$

由$(TT^H)_{ii}=(T^HT)_{ii}$得出, $t_{ij}=0(i\neq j)$, 因此T是对角矩阵.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 58 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

设

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

比较TT^H与T^HT的第i行, 第i列元素:

$$\begin{cases}(TT^H)_{ii}=\sum\limits_{j=i+1}^{n}|\,t_{ij}\,|^2+|\,\lambda_i\,|^2,\\ \\ (T^HT)_{ii}=\sum\limits_{j=1}^{i-1}|\,t_{ji}\,|^2+|\,\lambda_i\,|^2,\end{cases}\quad i=1,\,2,\,\cdots,\,n.$$

由$(TT^H)_{ii}=(T^HT)_{ii}$得出, $t_{ij}=0(i\neq j)$, 因此T是对角矩阵.

充分性: 因为对角矩阵是正规矩阵, 又A酉相似于正规矩阵, 由例3.9, A是正规矩阵. ■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 58 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

设

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

比较TT^H与T^HT的第i行, 第i列元素:

$$\begin{cases} (TT^H)_{ii} = \sum_{j=i+1}^{n} \mid t_{ij} \mid^2 + \mid \lambda_i \mid^2, \\ (T^HT)_{ii} = \sum_{j=1}^{i-1} \mid t_{ji} \mid^2 + \mid \lambda_i \mid^2, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由$(TT^H)_{ii} = (T^HT)_{ii}$得出, $t_{ij} = 0 (i \neq j)$, 因此T是对角矩阵.

充分性: 因为对角矩阵是正规矩阵, 又A酉相似于正规矩阵, 由例3.9, A是正规矩阵. ■

推论 3.2 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵的充分必要是$A$有$n$个线性无关的特征向量构成空间$\mathbb{C}^n$的标准正交基.

推论 3.2 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵的充分必要是$A$有$n$个线性无关的特征向量构成空间$\mathbb{C}^n$的标准正交基.

例 3.10 证明Hermite矩阵的特征值是实数, 而且属于不同特征值的特征向量是正交.

推论 3.2 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正规矩阵的充分必要是$A$有$n$个线性无关的特征向量构成空间$\mathbb{C}^n$的标准正交基.

例 3.10 证明Hermite矩阵的特征值是实数, 而且属于不同特征值的特征向量是正交.

证明 设A为Hermite矩阵, 则由于A是正规矩阵, 所以存在酉矩阵U, 使

$$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 59 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

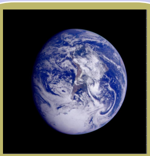
由$A^H = A$得,

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

由$A^H = A$得,

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即$\bar{\lambda}_i = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 因此$\lambda_i$为实数.



由$A^H = A$得,

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即$\bar{\lambda}_i = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 因此$\lambda_i$为实数.

又设A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, 由$A$正规,

$$\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots V_{\lambda_s},$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 60 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

由$A^H = A$得,

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即$\bar{\lambda}_i = \lambda_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 因此λ_i为实数.

又设A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, 由$A$正规,

$$\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots V_{\lambda_s},$$

设$\mathbb{C}^n$的标准正交基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$A$的$n$个线性无关的特征向量, 则$V_{\lambda_1} = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}\}$, $V_{\lambda_2} = L\{\alpha_{r_1+1}, \cdots, \alpha_{r_1+r_2}\}$, $\cdots$, $V_{\lambda_s} = L\{\alpha_{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+1}, \cdots, \alpha_n\}$,

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 60 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

由$A^H = A$得,

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即$\bar{\lambda}_i = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 因此$\lambda_i$为实数.

又设A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, 由$A$正规,

$$\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots V_{\lambda_s},$$

设$\mathbb{C}^n$的标准正交基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$A$的$n$个线性无关的特征向量, 则$V_{\lambda_1} = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}\}$, $V_{\lambda_2} = L\{\alpha_{r_1+1}, \cdots, \alpha_{r_1+r_2}\}, \cdots, V_{\lambda_s} = L\{\alpha_{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+1}, \cdots, \alpha_n\}$, 因此当$\lambda_i \neq \lambda_j$时, V_{λ_i}与V_{λ_j}为彼此正交的子空间, 这说明A关于不同特征值的特征向量是正交的. ■

由$A^H = A$得,

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即$\bar{\lambda}_i = \lambda_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 因此λ_i为实数.

又设A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, 由$A$正规,

$$\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots V_{\lambda_s},$$

设$\mathbb{C}^n$的标准正交基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是$A$的$n$个线性无关的特征向量, 则$V_{\lambda_1} = L\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}\}$, $V_{\lambda_2} = L\{\alpha_{r_1+1}, \cdots, \alpha_{r_1+r_2}\}, \cdots, V_{\lambda_s} = L\{\alpha_{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+1}, \cdots, \alpha_n\}$, 因此当$\lambda_i \neq \lambda_j$时, V_{λ_i}与V_{λ_j}为彼此正交的子空间, 这说明A关于不同特征值的特征向量是正交的. ■

例 3.11 酉矩阵的特征值的模长为1, 即分布在复平面的单位圆上.

例 3.11 酉矩阵的特征值的模长为1, 即分布在复平面的单位圆上.

证明 设A为酉矩阵, 则A正规, 即存在酉矩阵U, 使

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H,$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 61 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

例 3.11 酉矩阵的特征值的模长为1, 即分布在复平面的单位圆上.

证明 设A为酉矩阵, 则A正规, 即存在酉矩阵U, 使

$$A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H,$$

则$AA^H = I \Leftrightarrow U\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}U^H = I,$

例 3.11 酉矩阵的特征值的模长为1, 即分布在复平面的单位圆上.

证明 设A为酉矩阵, 则A正规, 即存在酉矩阵U, 使

$$A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H,$$

则$AA^H = I \Leftrightarrow U\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}U^H = I,$

即 $$|\lambda_i|^2 = 1, i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$ ■

例 3.11 酉矩阵的特征值的模长为1, 即分布在复平面的单位圆上.

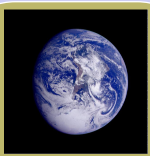
证明 设A为酉矩阵, 则A正规, 即存在酉矩阵U, 使

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H,$$

则$AA^H = I \Leftrightarrow U \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} U^H = I,$

即
$$|\lambda_i|^2 = 1, i = 1, 2, \cdots, n.$$
■

下面我们讨论正规矩阵的谱分解, 给出一个矩阵是正规矩阵的另一个充分必要条件.



下面我们讨论正规矩阵的谱分解, 给出一个矩阵是正规矩阵的另一个充分必要条件.

定理 3.11 (正规矩阵的谱分解) 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A的谱为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, $s \le n$, 则A是正规矩阵的充分必要条件是A有如下的谱分解

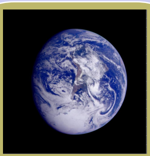
$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i,$$

其中方阵$P_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 满足如下条件:

① $P_i^2 = P_i, P_i^H = P_i, i = 1, 2, \cdots, s;$

② $P_i \cdot P_j = \mathbf{0}, i \neq j;$

③ $\sum_{i=1}^{s} P_i = I_n.$



证明 这里只证充分性.

证明　这里只证充分性.

由P_i满足的性质

$$AA^H=\left(\sum_{i=1}^{s}\lambda_iP_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s}\bar{\lambda}_jP_j^H\right)=\sum_{i=1}^{s}\mid\lambda_i\mid^2P_i,$$

$$A^HA=\left(\sum_{i=1}^{s}\bar{\lambda}_iP_i^H\right)\left(\sum_{j=1}^{s}\lambda_jP_j\right)=\sum_{i=1}^{s}\mid\lambda_i\mid^2P_i,$$

证明 这里只证充分性.

由P_i满足的性质

$$AA^H = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} \bar{\lambda}_j P_j^H\right) = \sum_{i=1}^{s} \mid \lambda_i \mid^2 P_i,$$

$$A^H A = \left(\sum_{i=1}^{s} \bar{\lambda}_i P_i^H\right)\left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j\right) = \sum_{i=1}^{s} \mid \lambda_i \mid^2 P_i,$$

所以A为正规矩阵. ■

证明 这里只证充分性.

由P_i满足的性质

$$AA^H = \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} \bar{\lambda}_j P_j^H\right) = \sum_{i=1}^{s} \mid \lambda_i \mid^2 P_i,$$

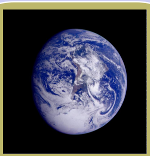
$$A^H A = \left(\sum_{i=1}^{s} \bar{\lambda}_i P_i^H\right)\left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j\right) = \sum_{i=1}^{s} \mid \lambda_i \mid^2 P_i,$$

所以A为正规矩阵. ■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 63 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§3.3 矩阵的奇异值分解

1. 矩阵的奇异值及其性质



§3.3 矩阵的奇异值分解

1. 矩阵的奇异值及其性质

一个矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$的奇异值是与矩阵$A^H A$和$AA^H$相关联的概念, 在建立奇异值概念之前, 我们先讨论矩阵$A^H A$和AA^H的有关性质.

§3.3 矩阵的奇异值分解

1. 矩阵的奇异值及其性质

一个矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$的奇异值是与矩阵$A^H A$和$AA^H$相关联的概念, 在建立奇异值概念之前, 我们先讨论矩阵$A^H A$和AA^H的有关性质.

当$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$时, $A^H A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $AA^H \in \mathbb{C}^{m\times m}$都是Hermite矩阵, 从而都是正规矩阵.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 64 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§3.3 矩阵的奇异值分解

1. 矩阵的奇异值及其性质

一个矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$的奇异值是与矩阵$A^H A$和$AA^H$相关联的概念, 在建立奇异值概念之前, 我们先讨论矩阵$A^H A$和AA^H的有关性质.

当$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$时, $A^H A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $AA^H \in \mathbb{C}^{m\times m}$都是Hermite矩阵, 从而都是正规矩阵.

定理 3.12 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则矩阵$A^H A \in \mathbb{C}^{n\times n}$和$AA^H \in \mathbb{C}^{m\times m}$具有如下性质:

① $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(AA^H)$.

② $A^H A$和AA^H的非零特征值相等.

③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当$\text{rank}(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当$\text{rank}(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

证明 我们只证明③.

③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

证明　我们只证明③.

取复二次型$f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}$, 则$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, $f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^H(A\boldsymbol{X})=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})\geq 0$.

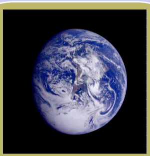
③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当$\text{rank}(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当$\text{rank}(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

证明 我们只证明③.

取复二次型$f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}$, 则$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, $f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^H(A\boldsymbol{X})=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})\geq 0$.

又$\text{rank}(A)=n$时, 线性方程组$A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$只有零解, 故$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, 有$A\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$, 从而

$$f=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})>0,$$



③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

证明　我们只证明③.

取复二次型$f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}$, 则$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, $f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^H(A\boldsymbol{X})=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})\geq 0$.

又$\mathrm{rank}(A)=n$时, 线性方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$只有零解, 故$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, 有$A\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$, 从而

$$f=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})>0,$$

即f正定, 也就是A^HA为正定矩阵.

③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当$\mathrm{rank}(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

证明 我们只证明③.

取复二次型$f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}$, 则$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, $f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^H(A\boldsymbol{X})=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})\geq 0.$

又$\mathrm{rank}(A)=n$时, 线性方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$只有零解, 故$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, 有$A\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$, 从而

$$f=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})>0,$$

即f正定, 也就是A^HA为正定矩阵.

同理可证AA^H的相应结果. ■

③ A^HA与AA^H都是半正定矩阵, 当rank$(A)=n$时, A^HA为正定矩阵, 当rank$(A)=m$时, AA^H为正定矩阵.

证明 我们只证明③.

取复二次型$f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}$, 则$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, $f=\boldsymbol{X}^HA^HA\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^H(A\boldsymbol{X})=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})\geq 0$.

又rank$(A)=n$时, 线性方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$只有零解, 故$\forall\ \boldsymbol{X}\neq 0$, 有$A\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$, 从而

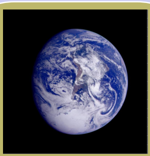
$$f=(A\boldsymbol{X},\ A\boldsymbol{X})>0,$$

即f正定, 也就是A^HA为正定矩阵.

同理可证AA^H的相应结果. ■

当A^HA和AA^H半正定时, 可推出A^HA和AA^H的特征值

$\lambda_i \geq 0$; 当它们正定时, $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 由此我们可定义矩阵$A$的奇异值.



$\lambda_i \geq 0$; 当它们正定时, $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 由此我们可定义矩阵$A$的奇异值.

定义 3.4 对于$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 矩阵$A^H A$的特征值为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0, \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$, 称正数$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(i = 1, 2, \cdots, r)$为矩阵$A$的奇异值, 简称$A$的奇值.

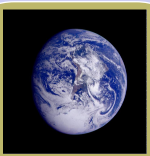
$\lambda_i \geq 0$; 当它们正定时, $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$, 由此我们可定义矩阵$A$的奇异值.

定义 3.4 对于$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 矩阵$A^H A$的特征值为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0,\ \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$, 称正数$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}(i = 1, 2, \cdots, r)$为矩阵$A$的奇异值, 简称$A$的奇值.

定理 3.13 矩阵A的奇异值具有如下性质:

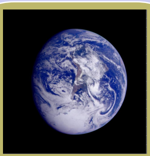
① $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为正规矩阵时, A的奇异值为A的特征值的模$|\lambda_i|$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

② $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$为正定的Hermite矩阵时, A的奇异值等于A的特征值.



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 66 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

③ 若存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵$B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使$UAV = B$, 则称$A$和$B$酉等价, 酉等价的矩阵有相同的奇异值.



③ 若存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵$B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使$UAV = B$, 则称$A$和$B$酉等价, 酉等价的矩阵有相同的奇异值.

证明 ① A为正规矩阵, 有酉矩阵$\in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

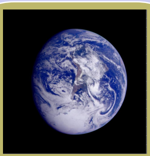
$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H,$$

③ 若存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵$B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使$UAV = B$, 则称$A$和$B$酉等价, 酉等价的矩阵有相同的奇异值.

证明 ① A为正规矩阵, 有酉矩阵$\in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H,$$

所以 $$A^H A = U \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} U^H,$$



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 67 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 68 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

即A^HA的特征值为$|\lambda_i|^2$, 从而A的奇异值

$$\sigma_i=\sqrt{|\lambda_i|^2}=|\lambda_i|,\ i=1,2,\cdots,n.$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 68 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

即$A^H A$的特征值为$|\lambda_i|^2$, 从而A的奇异值

$$\sigma_i = \sqrt{|\lambda_i|^2} = |\lambda_i|, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

② A为正定Hermite矩阵时, A的特征值为实数, 而且$\lambda > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 又$A$为正规矩阵. 由①, A的奇异值$\sigma_i = |\lambda_i| = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

即A^HA的特征值为$|\lambda_i|^2$, 从而A的奇异值

$$\sigma_i = \sqrt{|\lambda_i|^2} = |\lambda_i|,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

② A为正定Hermite矩阵时, A的特征值为实数, 而且$\lambda > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 又A为正规矩阵. 由①, A的奇异值$\sigma_i = |\lambda_i| = \lambda_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

③ 设$UAV = B$, 则

$$B^HB = V^HA^HU^HUAV = V^HA^HAV,$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 68 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

即A^HA的特征值为$|\lambda_i|^2$, 从而A的奇异值

$$\sigma_i=\sqrt{|\lambda_i|^2}=|\lambda_i|,\ i=1,2,\cdots,n.$$

② A为正定Hermite矩阵时, A的特征值为实数, 而且$\lambda>0, i=1,2,\cdots,n$. 又$A$为正规矩阵. 由①, A的奇异值$\sigma_i=|\lambda_i|=\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$.

③ 设$UAV=B$, 则

$$B^HB=V^HA^HU^HUAV=V^HA^HAV,$$

故A^HA和B^HB酉相似, 从而它们有相同的特征值, 所以A和B有相同的奇异值. ■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 68 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

即A^HA的特征值为$|\lambda_i|^2$, 从而A的奇异值

$$\sigma_i = \sqrt{|\lambda_i|^2} = |\lambda_i|, \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

② A为正定Hermite矩阵时, A的特征值为实数, 而且$\lambda > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 又$A$为正规矩阵. 由①, A的奇异值$\sigma_i = |\lambda_i| = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

③ 设$UAV = B$, 则

$$B^HB = V^HA^HU^HUAV = V^HA^HAV,$$

故A^HA和B^HB酉相似, 从而它们有相同的特征值, 所以A和B有相同的奇异值. ■

2. 矩阵的奇异值分解

2. 矩阵的奇异值分解

定理 3.14 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$是矩阵$A$的奇异值, 则存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 分块矩阵$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

其中
$$\Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 69 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

2. 矩阵的奇异值分解

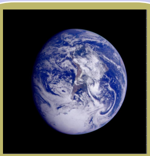
定理 3.14 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$是矩阵$A$的奇异值, 则存在酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 分块矩阵$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 使

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

其中
$$\Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

证明 已知$\mathrm{rank}(A^HA)=\mathrm{rank}(A)=r$，设$A^HA$的$n$个特征值按大小排列为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0,\ \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0.$$



证明 已知$\mathrm{rank}(A^HA)=\mathrm{rank}(A)=r$, 设$A^HA$的$n$个特征值按大小排列为

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0,\ \lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0.$$

对正规矩阵A^HA, 存在酉矩阵$V\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$V^HA^HAV=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{n\times n},$$

证明 已知$\operatorname{rank}(A^HA)=\operatorname{rank}(A)=r$, 设$A^HA$的$n$个特征值按大小排列为

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0,\ \lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0.$$

对正规矩阵A^HA, 存在酉矩阵$V\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$V^HA^HAV=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \lambda_r &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{n\times n},$$

将V按列分块为$V=(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\cdots,\boldsymbol{\nu}_n)$, 它的$n$个列是对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的标准正交的特征向量.

证明 已知$\mathrm{rank}(A^HA)=\mathrm{rank}(A)=r$, 设$A^HA$的$n$个特征值按大小排列为

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0,\ \lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0.$$

对正规矩阵A^HA, 存在酉矩阵$V\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$V^HA^HAV=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{n\times n},$$

将V按列分块为$V=(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\cdots,\boldsymbol{\nu}_n)$, 它的$n$个列是对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的标准正交的特征向量.

为了得到酉矩阵U, 首先考查$\mathbb{C}^m$中的向量组

$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\},$

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) &= (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\
&= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,
\end{aligned}
$$

$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) &= (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\ &= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,\end{aligned}$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) &= (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\ &= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,\end{aligned}$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

又 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\|^2 = \boldsymbol{\nu}_i^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i^H \boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i^2,$$

$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) &= (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\ &= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,\end{aligned}$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

又 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\|^2 = \boldsymbol{\nu}_i^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i^H \boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i^2,$$

所以 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\| = \sigma_i.$$

$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

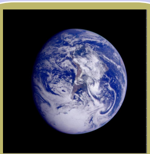
$$(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) = (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i$$
$$= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

又 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\|^2 = \boldsymbol{\nu}_i^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i^H \boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i^2,$$

所以 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\| = \sigma_i.$$

令 $$\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\boldsymbol{\nu}_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,$$



$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) &= (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\ &= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,\end{aligned}$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

又 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\|^2 = \boldsymbol{\nu}_i^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i^H \boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i^2,$$

所以 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\| = \sigma_i.$$

令 $$\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\boldsymbol{\nu}_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,$$

则得到$\mathbb{C}^m$中标准正交的向量组$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r\}$. 把它扩充为$\mathbb{C}^m$中的标准正交基$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m\}$, 令

$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) = (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) &= \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\
&= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,
\end{aligned}
$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

又 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\|^2 = \boldsymbol{\nu}_i^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i^H \boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i^2,$$

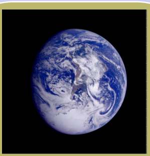
所以 $$\|A\boldsymbol{\nu}_i\| = \sigma_i.$$

令 $$\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\boldsymbol{\nu}_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,$$

则得到$\mathbb{C}^m$中标准正交的向量组$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r\}$. 把它扩充为$\mathbb{C}^m$中的标准正交基$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m\}$, 令

$$U = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{u}_r\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{u}_m),$$

就得到酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$.



$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$,

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{\nu}_i,\ A\boldsymbol{\nu}_j) &= (A\boldsymbol{\nu}_j)^H(A\boldsymbol{\nu}_i) = \boldsymbol{\nu}_j^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i \\
&= \boldsymbol{\nu}_j^H \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i = 0,\quad i \neq j,
\end{aligned}
$$

所以$\{A\boldsymbol{\nu}_1,\ A\boldsymbol{\nu}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{\nu}_r\}$是$\mathbb{C}^m$中的正交向量组.

又

$$\|A\boldsymbol{\nu}_i\|^2 = \boldsymbol{\nu}_i^H A^H A\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i^H \boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i^2,$$

所以

$$\|A\boldsymbol{\nu}_i\| = \sigma_i.$$

令

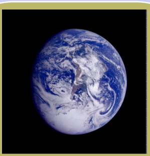
$$\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\boldsymbol{\nu}_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,$$

则得到$\mathbb{C}^m$中标准正交的向量组$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r\}$. 把它扩充为$\mathbb{C}^m$中的标准正交基$\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m\}$, 令

$$U = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{u}_r\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{u}_m),$$

就得到酉矩阵$U \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

已知$A\boldsymbol{\nu}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r,\ A\boldsymbol{\nu}_i = \mathbf{0},\ i = r+1,\ \cdots,\ n$,



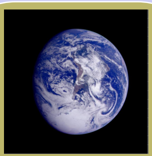
故

$$
\begin{aligned}
AV &= A(\boldsymbol{\nu}_1 \;\; \boldsymbol{\nu}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{\nu}_n) = (A\boldsymbol{\nu}_1 \;\; A\boldsymbol{\nu}_2 \;\; \cdots \;\; A\boldsymbol{\nu}_r \;\; \mathbf{0} \;\; \cdots \;\; \mathbf{0}) \\
&= (\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \;\; \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \;\; \cdots \;\; \sigma\boldsymbol{u}_r \;\; \mathbf{0} \;\; \cdots \;\; \mathbf{0}) \\
&= (\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{u}_r \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{u}_m)\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right) = U\Sigma,
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned} AV &= A(\boldsymbol{\nu}_1 \ \ \boldsymbol{\nu}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\nu}_n) = (A\boldsymbol{\nu}_1 \ \ A\boldsymbol{\nu}_2 \ \ \cdots \ \ A\boldsymbol{\nu}_r \ \ \mathbf{0} \ \ \cdots \ \ \mathbf{0}) \\ &= (\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \ \ \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \ \ \cdots \ \ \sigma\boldsymbol{u}_r \ \ \mathbf{0} \ \ \cdots \ \ \mathbf{0}) \\ &= (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{u}_r \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{u}_m) \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right) = U\Sigma, \end{aligned}$$

所以$AV = U\Sigma$, 即$A = U\Sigma V^H$. ■



故

$$
\begin{aligned}
AV &= A(\boldsymbol{\nu}_1 \;\; \boldsymbol{\nu}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{\nu}_n) = (A\boldsymbol{\nu}_1 \;\; A\boldsymbol{\nu}_2 \;\; \cdots \;\; A\boldsymbol{\nu}_r \;\; \mathbf{0} \;\; \cdots \;\; \mathbf{0}) \\
&= (\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \;\; \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \;\; \cdots \;\; \sigma\boldsymbol{u}_r \;\; \mathbf{0} \;\; \cdots \;\; \mathbf{0}) \\
&= (\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{u}_r \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{u}_m)\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right) = U\Sigma,
\end{aligned}
$$

所以$AV = U\Sigma$, 即$A = U\Sigma V^H$. ■

需要指出的是, 在A的奇异值分解中, 酉矩阵U和V不是惟一的.

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 72 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

故

$$AV = A(\boldsymbol{\nu}_1 \ \boldsymbol{\nu}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\nu}_n) = (A\boldsymbol{\nu}_1 \ A\boldsymbol{\nu}_2 \ \cdots \ A\boldsymbol{\nu}_r \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0})$$

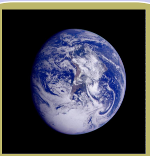
$$= (\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \ \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \ \cdots \ \sigma\boldsymbol{u}_r \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0})$$

$$= (\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_r \ \cdots \ \boldsymbol{u}_m)\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right) = U\Sigma,$$

所以$AV = U\Sigma$, 即$A = U\Sigma V^H$. ■

需要指出的是, 在A的奇异值分解中, 酉矩阵U和V不是惟一的.

矩阵V的列被称为A的右奇异向量. V的前r列是A^HA的r个非零特征值所对应的特征向量, 将它们取为矩阵V_1, 则$V = (V_1 \mid V_2)$. 矩阵U的列被称为A的左奇异向量, 将U从前r列



处分块为$U=(U_1 \mid \ U_2)$, 由分块运算, 有

处分块为$U=(U_1 \mid U_2)$, 由分块运算, 有

$$U^HAV=\begin{pmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{pmatrix} A(V_1\ V_2)=\begin{pmatrix} U_1^HAV_1 & U_1^HAV_2 \\ U_2^HAV_1 & U_2^HAV_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

处分块为$U=(U_1 \mid U_2)$, 由分块运算, 有

$$U^HAV=\begin{pmatrix}U_1^H\\U_2^H\end{pmatrix}A(V_1\ V_2)=\begin{pmatrix}U_1^HAV_1 & U_1^HAV_2\\U_2^HAV_1 & U_2^HAV_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

故

$$AV_2=\mathbf{0},\ AV_1=U_1\Delta.$$

处分块为$U=(U_1\mid\ U_2)$, 由分块运算, 有

$$U^HAV=\begin{pmatrix}U_1^H\\U_2^H\end{pmatrix}A(V_1\ V_2)=\begin{pmatrix}U_1^HAV_1 & U_1^HAV_2\\U_2^HAV_1 & U_2^HAV_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta & \mathbf{0}\\\mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

故
$$AV_2=\mathbf{0},\ AV_1=U_1\Delta.$$

定理 3.15 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, A的奇异值为$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$, 令$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_r$是相应于奇异值的左奇异向量, $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\cdots,\boldsymbol{\nu}_r$是相应于奇异值的右奇异向量, 则有矩阵$A$的奇异值展开式

$$A=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{\nu}_1^H+\sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{\nu}_2^H+\cdots+\sigma_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{\nu}_r^H \tag{3-13}$$

3. 矩阵A的奇异值分解与线性变换T_A

3. 矩阵A的奇异值分解与线性变换T_A

设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则由$\beta = T_A(\alpha) = A\alpha$可以定义线性变换

$$T_A: \ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m.$$

3. 矩阵A的奇异值分解与线性变换T_A

$$\text{设}A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \text{则由}\beta = T_A(\alpha) = A\alpha\text{可以定义线性变换}$$
$$T_A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m.$$

设矩阵A有奇异值分解$A = U\Sigma V^H$, 则将矩阵V的列向量$\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_n\}$取作$\mathbb{C}^n$的标准正交基, 将矩阵$U$的列向量$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$取作$\mathbb{C}^m$的标准正交基, 则在所取的基下, 线性变换$T_A$对应的变换矩阵就是$\Sigma$.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 74 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

3. 矩阵A的奇异值分解与线性变换T_A

设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则由$\beta = T_A(\alpha) = A\alpha$可以定义线性变换

$$T_A:\ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m.$$

设矩阵A有奇异值分解$A = U\Sigma V^H$, 则将矩阵V的列向量$\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_n\}$取作$\mathbb{C}^n$的标准正交基, 将矩阵$U$的列向量$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$取作$\mathbb{C}^m$的标准正交基, 则在所取的基下, 线性变换$T_A$对应的变换矩阵就是$\Sigma$.

定理 3.16 设$A = U\Sigma V^H$是$m \times n$阶矩阵A的奇异值分解, $\mathrm{rank}(A) = r$, 则$\mathbb{R}^n$中的单位球面在线性变换T_A下的像集合是:

① 若$r = n$, 则像集合是$\mathbb{R}^m$中的椭球面;

② 若$r < n$, 则像集合是$\mathbb{R}^m$中的椭球体.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 74 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

4. 方阵的极分解

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 75 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. 方阵的极分解

借助于矩阵的奇异值分解, 对方阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 可以导出另一种理论和应用中都很重要的矩阵分解–极分解(polar decomposition).

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 75 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. 方阵的极分解

借助于矩阵的奇异值分解, 对方阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 可以导出另一种理论和应用中都很重要的矩阵分解–极分解(polar decomposition).

定理 3.17 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 则A可以被分解为

$$A = PQ,$$

常见的矩阵标 . . .
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 75 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. 方阵的极分解

借助于矩阵的奇异值分解, 对方阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 可以导出另一种理论和应用中都很重要的矩阵分解–极分解(polar decomposition).

定理 3.17 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 则A可以被分解为

$$A = PQ,$$

其中P是秩为r的$n \times n$阶半正定矩阵, Q是$n \times n$阶的酉矩阵. 特别地, 若$r = n$, 则P为正定矩阵.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 75 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

4. 方阵的极分解

借助于矩阵的奇异值分解, 对方阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 可以导出另一种理论和应用中都很重要的矩阵分解–极分解(polar decomposition).

定理 3.17 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 则A可以被分解为

$$A = PQ,$$

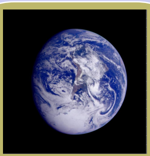
其中P是秩为r的$n \times n$阶半正定矩阵, Q是$n \times n$阶的酉矩阵. 特别地, 若$r = n$, 则P为正定矩阵.

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 75 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

证明 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 有$A$的奇异值分解

$$A=U\Sigma V^H=U\Sigma U^HUV^H=(U\Sigma U^H)(UV^H).$$

令$P=U\Sigma U^H$, 则P是$n\times n$阶Hermite矩阵. 又P酉相似于对角矩阵Σ, 因此P的秩为r, P以A的奇异值为其非负特征值, 从而P是半正定矩阵. 特别当$r=n$时, A为可逆矩阵, A的奇异值皆非零, 故P的n个特征值大于零, 即P为正定矩阵.



证明 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 有$A$的奇异值分解

$$A = U\Sigma V^H = U\Sigma U^H UV^H = (U\Sigma U^H)(UV^H).$$

令$P = U\Sigma U^H$, 则P是$n \times n$阶Hermite矩阵. 又P酉相似于对角矩阵Σ, 因此P的秩为r, P以A的奇异值为其非负特征值, 从而P是半正定矩阵. 特别当$r = n$时, A为可逆矩阵, A的奇异值皆非零, 故P的n个特征值大于零, 即P为正定矩阵.

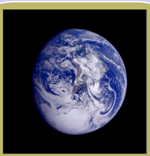
令$Q = UV^H$, Q为酉矩阵的乘积, 从而Q也是酉矩阵, 所以有分解$A = PQ$. ■

常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 76 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

注 3.6 $A = PQ$称为极分解, 是因为对非零复数$z = a + bi \in \mathbb{C}$, 可被表示为$z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, (r, θ)是Z的极坐标, 其中$r = |z| > 0$, $|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$.

注 3.6 $A=PQ$称为极分解, 是因为对非零复数$z=a+bi\in\mathbb{C}$, 可被表示为$z=re^{i\theta}$, (r,θ)是Z的极坐标, 其中$r=|z|>0$, $|e^{i\theta}|=1$.

因此z被分解为一个伸缩因子r和一个旋转因子$e^{i\theta}$的乘积.



常见的矩阵标...
Jordan矩阵介绍
最小多项式
Home Page
Title Page
Page 77 of 77
Go Back
Full Screen
Close
Quit

注 3.6 $A = PQ$称为极分解, 是因为对非零复数$z = a + bi \in \mathbb{C}$, 可被表示为$z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, (r, θ)是Z的极坐标, 其中$r = \mid z \mid > 0$, $\mid \mathrm{e}^{i\theta} \mid = 1$.

因此z被分解为一个伸缩因子r和一个旋转因子$\mathrm{e}^{i\theta}$的乘积.

在矩阵的极分解$A = PQ$中, P的正定性对应z的非负性, 酉矩阵Q, $\mid Q \mid = 1$对应于一个旋转, 因此得名极分解.

注 3.6 $A = PQ$称为极分解, 是因为对非零复数$z = a + bi \in \mathbb{C}$, 可被表示为$z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, (r, θ)是Z的极坐标, 其中$r = |z| > 0$, $|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$.
因此z被分解为一个伸缩因子r和一个旋转因子$\mathrm{e}^{i\theta}$的乘积.

在矩阵的极分解$A = PQ$中, P的正定性对应z的非负性, 酉矩阵Q, $|Q| = 1$对应于一个旋转, 因此得名极分解.