研究生公共基础课

矩　阵　论

第二章 Jordan标准形介绍

§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.1 设T为线性空间V上的线性变换, 若存在$\xi \in V$和数$\lambda \in F, \xi \neq \mathbf{0}$, 使$T(\xi) = \lambda\xi$, 则称数$\lambda$为$T$的特征值, 向量$\xi$为线性变换$T$的对应于特征值$\lambda$的特征向量.

§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.1 设T为线性空间V上的线性变换, 若存在$\xi \in V$和数$\lambda \in F$, $\xi \neq \mathbf{0}$, 使$T(\xi) = \lambda\xi$, 则称数λ为T的特征值, 向量ξ为线性变换T的对应于特征值λ的特征向量.

定理 2.1 设V上线性变换T在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下矩阵为$A$, 则$A$的特征值$\lambda$就是变换$T$的特征值; 若$\boldsymbol{X}$是$A$的特征向量, 则$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}$就是$T$的特征向量.

§2.1 线性变换的对角矩阵表示

首先考虑线性变换矩阵为对角矩阵所需要的条件.

1. 线性变换的特征值与特征向量

定义 2.1 设T为线性空间V上的线性变换, 若存在$\xi \in V$和数$\lambda \in F$, $\xi \neq \mathbf{0}$, 使$T(\xi) = \lambda\xi$, 则称数λ为T的特征值, 向量ξ为线性变换T的对应于特征值λ的特征向量.

定理 2.1 设V上线性变换T在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$下矩阵为$A$, 则$A$的特征值$\lambda$就是变换$T$的特征值; 若$\boldsymbol{X}$是$A$的特征向量, 则$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\boldsymbol{X}$就是$T$的特征向量.

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即$B = P^{-1}AP$或$PB = AP$.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此B与A的特征值是一样的, 特征向量不一样. 也就是说, T的特征值是由T决定的, 和基的选择无关.

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即$B = P^{-1}AP$或$PB = AP$.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此B与A的特征值是一样的, 特征向量不一样. 也就是说, T的特征值是由T决定的, 和基的选择无关.

应用定理2.1, 我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即$B = P^{-1}AP$或$PB = AP$.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此B与A的特征值是一样的, 特征向量不一样. 也就是说, T的特征值是由T决定的, 和基的选择无关.

应用定理2.1, 我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

① 选择V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的矩阵$A$;

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 4 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即$B = P^{-1}AP$或$PB = AP$.

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X),$$

因此B与A的特征值是一样的, 特征向量不一样. 也就是说, T的特征值是由T决定的, 和基的选择无关.

应用定理2.1, 我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

① 选择V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的矩阵$A$;

② 求矩阵A的特征值, 先求A的特征多项式$f(\lambda) = |\lambda I - A|$, $f(\lambda) = 0$的根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$即为$A$的全部特征值;

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即$B = P^{-1}AP$或$PB = AP$.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此B与A的特征值是一样的, 特征向量不一样. 也就是说, T的特征值是由T决定的, 和基的选择无关.

应用定理2.1, 我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

① 选择V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的矩阵$A$;

② 求矩阵A的特征值, 先求A的特征多项式$f(\lambda) =| \lambda I - A |$, $f(\lambda) = 0$的根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$即为$A$的全部特征值; 一般我们也称$A$的特征多项式$f(\lambda) =| \lambda I - A |$为线性变换$T$的特征多项式;

注 2.1 矩阵A是和基相关的, 若T在另一组基下矩阵为B, 从§1.3知B相似于A, 即$B = P^{-1}AP$或$PB = AP$.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow B(P^{-1}\boldsymbol{X}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{X}),$$

因此B与A的特征值是一样的, 特征向量不一样. 也就是说, T的特征值是由T决定的, 和基的选择无关.

应用定理2.1, 我们可以从T的一个矩阵A求得T的特征值与特征向量. 计算步骤可归纳如下:

① 选择V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 求线性变换关于该基的矩阵$A$;

② 求矩阵A的特征值, 先求A的特征多项式$f(\lambda) = | \lambda I - A |$, $f(\lambda) = 0$的根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$即为$A$的全部特征值; 一般我们也称$A$的特征多项式$f(\lambda) = | \lambda I - A |$为线性变换$T$的特征多项式;

③ 求矩阵A关于λ_i的特征向量$\boldsymbol{X}_i$, 即$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$的非零解, 它们给出$T$的特征值$\lambda_i$对应的特征向量关于基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的坐标.

③ 求矩阵A关于λ_i的特征向量$\boldsymbol{X}_i$, 即$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的非零解, 它们给出$T$的特征值$\lambda_i$对应的特征向量关于基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的坐标.

下面, 我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

③ 求矩阵A关于λ_i的特征向量$\boldsymbol{X}_i$, 即$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$的非零解, 它们给出$T$的特征值$\lambda_i$对应的特征向量关于基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的坐标.

下面, 我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

定义 2.2 设λ为线性变换T的特征值, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$是$T$对应于$\lambda$的特征向量的极大线性无关组, 则称子空间$V_\lambda = L\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t\}$为$T$关于$\lambda$的特征子空间.

③ 求矩阵A关于λ_i的特征向量$\boldsymbol{X}_i$, 即$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的非零解, 它们给出$T$的特征值$\lambda_i$对应的特征向量关于基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的坐标.

下面, 我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

定义 2.2 设λ为线性变换T的特征值, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$是$T$对应于$\lambda$的特征向量的极大线性无关组, 则称子空间$V_\lambda = L\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t\}$为$T$关于$\lambda$的特征子空间.

应该注意到, $V_\lambda - \{\boldsymbol{0}\}$才是线性变换$T$的全部特征向量; 并且$V_\lambda = N(T - \lambda\mathcal{I})$.

③ 求矩阵A关于λ_i的特征向量$\boldsymbol{X}_i$, 即$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的非零解, 它们给出$T$的特征值$\lambda_i$对应的特征向量关于基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$的坐标.

下面, 我们从线性空间的角度讨论线性变换T的特征向量的性质.

定义 2.2 设λ为线性变换T的特征值, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t$是$T$对应于$\lambda$的特征向量的极大线性无关组, 则称子空间$V_\lambda = L\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t\}$为$T$关于$\lambda$的特征子空间.

应该注意到, $V_\lambda - \{\boldsymbol{0}\}$才是线性变换$T$的全部特征向量; 并且$V_\lambda = N(T - \lambda\mathcal{I})$.

如果线性变换T有s个互异的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 它们就会对应$s$个特征子空间: $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_s}$. 特征子空间有如下性质:

如果线性变换T有s个互异的特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 它们就会对应$s$个特征子空间: $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_s}$. 特征子空间有如下性质:

定理 2.2 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是线性空间$V_n(F)$上线性变换$T$的互异的特征值. V_{λ_i}是λ_i的特征子空间, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则有

① V_{λ_i}是T的不变子空间;

② $\lambda_i \neq \lambda_j$时, $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}$;

③ 若λ_i是T的k_i重特征值, 则$\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$.

证明 ① 由V_{λ_i}的定义, $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i}, T(\alpha) = \lambda_i\alpha \in V_{\lambda_i}$,
所以V_{λ_i}是T的不变子空间.

证明 ① 由V_{λ_i}的定义, $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i}, T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 所以$V_{\lambda_i}$是$T$的不变子空间.

② $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, 则有$\alpha \in V_{\lambda_i}$且$\alpha \in V_{\lambda_j}$, 因此有, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha$而且$T(\alpha) = \lambda_j \alpha$. 两式相减得$(\lambda_i - \lambda_j)\alpha = \mathbf{0}$, 又$\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以$\alpha = \mathbf{0}$, 即

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}, \;\; \lambda_i \neq \lambda_j.$$

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 7 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

证明 ① 由V_{λ_i}的定义, $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i}, T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 所以$V_{\lambda_i}$是$T$的不变子空间.

② $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, 则有$\alpha \in V_{\lambda_i}$且$\alpha \in V_{\lambda_j}$, 因此有, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha$而且$T(\alpha) = \lambda_j \alpha$. 两式相减得$(\lambda_i - \lambda_j)\alpha = \mathbf{0}$, 又$\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以$\alpha = \mathbf{0}$, 即

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}, \;\; \lambda_i \neq \lambda_j.$$

③ 设T的矩阵为A, 则T的特征多项式表为

$$f(\lambda) = |\, \lambda I - A \,| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

$\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, 即$\lambda_i$为$T$的$k_i$重特征值. 我们用反证法来证明③.

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 7 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明 ① 由V_{λ_i}的定义, $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i}, T(\alpha) = \lambda_i \alpha \in V_{\lambda_i}$, 所以$V_{\lambda_i}$是$T$的不变子空间.

② $\forall\, \alpha \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, 则有$\alpha \in V_{\lambda_i}$且$\alpha \in V_{\lambda_j}$, 因此有, $T(\alpha) = \lambda_i \alpha$而且$T(\alpha) = \lambda_j \alpha$. 两式相减得$(\lambda_i - \lambda_j)\alpha = \mathbf{0}$, 又$\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以$\alpha = \mathbf{0}$, 即

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}, \ \ \lambda_i \neq \lambda_j.$$

③ 设T的矩阵为A, 则T的特征多项式表为

$$f(\lambda) = | \lambda I - A | = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

$\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, 即$\lambda_i$为$T$的$k_i$重特征值. 我们用反证法来证明③.

设$\dim V_{\lambda_i} = t_i > k_i$, 则可取$V_{\lambda_i}$的基$\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{it_i}\}$,

并把它扩充为V的基$\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-t_i}\}$，故$V = V_{\lambda_i} \oplus U$，其中$U = L\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-t_i}\}$. 由①，$V_{\lambda_i}$为$T$的不变子空间，且$T(\xi_{ij}) = \lambda_i \xi_{ij}$，可得$T$在基$\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-t_i}\}$下的矩阵

并把它扩充为V的基$\{\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{it_i},\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t_i}\}$，故$V=V_{\lambda_i}\oplus U$，其中$U=L\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t_i}\}$. 由①，$V_{\lambda_i}$为$T$的不变子空间，且$T(\xi_{ij})=\lambda_i\xi_{ij}$，可得$T$在基$\{\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{it_i},\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t_i}\}$下的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_i I_{t_i} & C\\ \mathbf{0} & D\end{pmatrix}, \tag{2-1}$$

其中I_{t_i}为t_i阶单位矩阵.

并把它扩充为V的基$\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-t_i}\}$, 故$V = V_{\lambda_i} \oplus U$, 其中$U = L\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-t_i}\}$. 由①, V_{λ_i}为T的不变子空间, 且$T(\xi_{ij}) = \lambda_i\xi_{ij}$, 可得$T$在基$\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{it_i}, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-t_i}\}$下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{t_i} & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \tag{2-1}$$

其中I_{t_i}为t_i阶单位矩阵.

由于B和A相似, B应与A有相同的特征多项式, 故λ_i是B的k_i重根. 但是, 从$(2-1)$式知, $| \lambda I - B | = (\lambda - \lambda_i)^{t_i} q(\lambda)$, 其中$q(\lambda)$是矩阵$D$的特征多项式, 这说明$\lambda_i$至少是$B$的$t_i$重根, 故$t_i > k_i$, 矛盾! 所以$\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$. ■

并把它扩充为V的基$\{\xi_{i1},\ \xi_{i2},\ \cdots,\ \xi_{it_i},\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-t_i}\}$,
故$V = V_{\lambda_i} \oplus U$, 其中$U = L\{\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-t_i}\}$. 由①,
V_{λ_i}为T的不变子空间, 且$T(\xi_{ij}) = \lambda_i \xi_{ij}$, 可得$T$在基
$\{\xi_{i1},\ \xi_{i2},\ \cdots,\ \xi_{it_i},\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-t_i}\}$下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{t_i} & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \qquad (2\text{-}1)$$

其中I_{t_i}为t_i阶单位矩阵.

由于B和A相似, B应与A有相同的特征多项式, 故λ_i是B的k_i重根. 但是, 从(2−1)式知, $|\lambda I - B| = (\lambda - \lambda_i)^{t_i} q(\lambda)$, 其中$q(\lambda)$是矩阵$D$的特征多项式, 这说明$\lambda_i$至少是$B$的$t_i$重根, 故$t_i > k_i$, 矛盾! 所以$\dim V_{\lambda_i} \le k_i$. ■

注 2.2 ① 此定理说明

$$V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+\cdots+V_{\lambda_s}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}\subseteq V,$$

并且 $\sum_{i=1}^{s}\dim V_{\lambda_i}\leq \dim V=n.$

注 2.2 ① 此定理说明

$$V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+\cdots+V_{\lambda_s}=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}\subseteq V,$$

并且 $\sum_{i=1}^{s}\dim V_{\lambda_i}\leq \dim V=n.$

如果 $\sum_{i=1}^{s}\dim V_{\lambda_i}=n$, 则有

$$V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}=V.$$

注 2.2 ① 此定理说明

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V,$$

并且$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} \leq \dim V = n.$

如果$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n$, 则有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V.$$

② $\dim V_{\lambda_i}$称为特征值λ_i的几何重数, 而k_i称为λ_i的代数重数.

例 2.1 求$P_4[x]$上微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值与特征向量.

例 2.1 求$P_4[x]$上微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值与特征向量.

解 取$P_4[x]$中基$\{1, x, x^2, x^3\}$, 则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$在该基下矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

例 2.1 求$P_4[x]$上微分变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值与特征向量.

解 取$P_4[x]$中基$\{1, x, x^2, x^3\}$, 则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$在该基下矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$|\lambda I - A| = \lambda^4$, 所以线性变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

例 2.1 求$P_4[x]$上微分变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值与特征向量.

解 取$P_4[x]$中基$\{1, x, x^2, x^3\}$, 则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$在该基下矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$|\lambda I - A| = \lambda^4$, 所以线性变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

又从$(0 \cdot I - A)\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$求得$A$关于$\lambda = 0$的特征向量$\boldsymbol{X} = k(1\ 0\ 0\ 0)$, $k \neq 0$, 所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征向量为$\xi = k \in P_4[x]$, $k \neq 0$. ■

例 2.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 证明$AB$与$BA$有相同的非零特征值.

例 2.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 证明$AB$与$BA$有相同的非零特征值.

证明 若$m = n$, 且A为非奇异矩阵, 由于

$$A^{-1}(AB)A = BA,$$

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 11 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

例 2.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 证明$AB$与$BA$有相同的非零特征值.

证明 若$m = n$, 且A为非奇异矩阵, 由于

$$A^{-1}(AB)A = BA,$$

因此, AB与BA有相同的特征值.

例 2.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 证明$AB$与$BA$有相同的非零特征值.

证明 若$m = n$, 且A为非奇异矩阵, 由于

$$A^{-1}(AB)A = BA,$$

因此, AB与BA有相同的特征值.

对一般的情形, $AB \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $BA \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 取非奇异矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix},$$

例 2.2 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 证明$AB$与$BA$有相同的非零特征值.

证明 若$m = n$, 且A为非奇异矩阵, 由于

$$A^{-1}(AB)A = BA,$$

因此, AB与BA有相同的特征值.

对一般的情形, $AB \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $BA \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 取非奇异矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix},$$

由于

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right| = \left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix} \right|,$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right| = \left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix} \right|,$$

从而$\lambda^n \mid \lambda I - AB \mid = \lambda^m \mid \lambda I - BA \mid$.

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right| = \left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix} \right|,$$

从而$\lambda^n \mid \lambda I - AB \mid = \lambda^m \mid \lambda I - BA \mid$.

对$\lambda \neq 0$, 有$\mid \lambda I - AB \mid = 0 \Leftrightarrow \mid \lambda I - BA \mid = 0$,

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix},$$

所以

$$\left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right| = \left| \lambda I_{(m+n)} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & AB \end{pmatrix} \right|,$$

从而$\lambda^n \mid \lambda I - AB \mid = \lambda^m \mid \lambda I - BA \mid$.

对$\lambda \neq 0$, 有$\mid \lambda I - AB \mid = 0 \Leftrightarrow \mid \lambda I - BA \mid = 0$,

即AB与BA有一样的非零特征值, 且代数重数也相同. ■

2. 线性变换矩阵的对角化

2. 线性变换矩阵的对角化

本段主要从变换T和空间分解的角度给出线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件.

2. 线性变换矩阵的对角化

本段主要从变换T和空间分解的角度给出线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件.

定理 2.3 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是T有n个线性无关的特征向量.

2. 线性变换矩阵的对角化

本段主要从变换T和空间分解的角度给出线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件.

定理 2.3 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是T有n个线性无关的特征向量.

证明 必要性: 设存在基$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$, 使$T$的矩阵为对角矩阵, 则有

$$T(\xi_1\ \xi_2\ \cdots\ \xi_n) = (\xi_1\ \xi_2\ \cdots\ \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

§2.1. 线性变换的对角矩阵表示

它等价于$T(\xi_i) = \lambda_i\xi_i, i = 1, 2, \cdots, n,$

它等价于$T(\xi_i)=\lambda_i\xi_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$,
所以λ_i为T的特征值, $\{\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n\}$为$T$的$n$个线性无关的特征向量.

它等价于$T(\xi_i)=\lambda_i\xi_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$,
所以λ_i为T的特征值, $\{\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n\}$为$T$的$n$个线性无关的特征向量.

充分性: 若T有n个线性无关的特征向量$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n$, 则可取$\{\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n\}$为线性空间$V$的基, T在该基下的矩阵即为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中λ_i为ξ_i所对应的特征值. ■

它等价于$T(\xi_i) = \lambda_i \xi_i, i = 1, 2, \cdots, n$,
所以λ_i为T的特征值, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$为$T$的$n$个线性无关的特征向量.

充分性: 若T有n个线性无关的特征向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 则可取$\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$为线性空间$V$的基, T在该基下的矩阵即为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中λ_i为ξ_i所对应的特征值. ■

前面已讨论过, 特征子空间V_{λ_i}是T的不变子空间, 特别地, 线性变换T在不变子空间V_{λ_i}上矩阵为对角矩阵$\lambda_i I_{t_i}$. 从

空间分解的角度, 我们有下列定理:

空间分解的角度, 我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

空间分解的角度, 我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

推论 2.1 若线性变换T有n个互异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则必有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V,$$

空间分解的角度, 我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

推论 2.1 若线性变换T有n个互异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则必有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V,$$

从而T有对角线上元素互异的对角矩阵表示.

空间分解的角度, 我们有下列定理:

定理 2.4 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V. \tag{2-2}$$

推论 2.1 若线性变换T有n个互异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则必有

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} = V,$$

从而T有对角线上元素互异的对角矩阵表示.

推论 2.2 线性变换T有对角矩阵表示的充分必要条件是V可分解成T的一维不变子空间的直和.

§2.1. 线性变换的对角矩阵表示

例 2.3 证明$P_4[x]$上的微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$没有对角矩阵表示.

例 2.3 证明$P_4[x]$上的微分变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$没有对角矩阵表示.

证明 从例2.1知, $\lambda = 0$是微分变换$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的四重特征值, 而$\dim V_{\lambda=0} = 1 < 4$, 所以$T$没有对角矩阵表示. ■

例 2.3 证明$P_4[x]$上的微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$没有对角矩阵表示.

证明 从例2.1知, $\lambda = 0$是微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的四重特征值, 而$\dim V_{\lambda=0} = 1 < 4$, 所以$T$没有对角矩阵表示. ■

当线性变换T有对角矩阵表示时, 我们也常简称为线性变换T可对角化.

例 2.3 证明$P_4[x]$上的微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$没有对角矩阵表示.

证明 从例2.1知, $\lambda = 0$是微分变换$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的四重特征值, 而$\dim V_{\lambda=0} = 1 < 4$, 所以$T$没有对角矩阵表示. ■

当线性变换T有对角矩阵表示时, 我们也常简称为线性变换T可对角化.

例 2.4 n阶方阵A, 若满足条件$A^2 = A$, 则称A为幂等矩阵; 若满足$A^2 = I$, 则称A为乘方矩阵. 证明

① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

其中r为矩阵A的秩.

② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_s & \\ & -I_t \end{pmatrix}$,

其中$s+t=n$.

① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

其中r为矩阵A的秩.

② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_s & \\ & -I_t \end{pmatrix}$,

其中$s+t=n$.

证明　充分性是显然的, 下证必要性.

① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

其中r为矩阵A的秩.

② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_s & \\ & -I_t \end{pmatrix}$,

其中$s+t=n$.

证明　充分性是显然的, 下证必要性.

① 设λ是幂等矩阵的特征值, 则从$A^2=A$可导出λ满足条件$\lambda^2=\lambda$, 因此$\lambda=1$或0.

① A为幂等矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

其中r为矩阵A的秩.

② A为乘方矩阵的充要条件是A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_s & \\ & -I_t \end{pmatrix}$,

其中$s+t=n$.

证明 充分性是显然的, 下证必要性.

① 设λ是幂等矩阵的特征值, 则从$A^2=A$可导出λ满足条件$\lambda^2=\lambda$, 因此$\lambda=1$或0. 又$\dim V_{\lambda=1}=n-\operatorname{rank}(I-A)$,
$\dim V_{\lambda=0}=n-\operatorname{rank}(0\cdot I-A)=n-\operatorname{rank}(A)$.

从$A^2=A\Rightarrow A(I-A)=\mathbf{0}\Rightarrow \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)\leq n$,

从$A^2 = A \Rightarrow A(I - A) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I - A) \leq n$,

又$A + (I - A) = I \Rightarrow \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I - A) \geq \mathrm{rank}(I) = n$.

从$A^2 = A \Rightarrow A(I - A) = \mathbf{0} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) \le n$,

又$A + (I - A) = I \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) \ge \operatorname{rank}(I) = n$.

从上面两个不等式导出结论$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$.

从$A^2 = A \Rightarrow A(I-A) = \mathbf{0} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I-A) \leq n$,

又$A+(I-A) = I \Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A) \geq \operatorname{rank}(I) = n$.

从上面两个不等式导出结论$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A) = n$. 从而

$$\dim V_{\lambda=1} + \dim V_{\lambda=0} = 2n - [\operatorname{rank}(I-A) + \operatorname{rank}(A)] = n,$$

从$A^2 = A \Rightarrow A(I-A) = \mathbf{0} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I-A) \leq n$,

又$A + (I-A) = I \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I-A) \geq \operatorname{rank}(I) = n$.

从上面两个不等式导出结论$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I-A) = n$. 从而

$\dim V_{\lambda=1} + \dim V_{\lambda=0} = 2n - [\operatorname{rank}(I-A) + \operatorname{rank}(A)] = n$,

即A有n个线性无关的特征向量. 所以A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i = 1$或0.

从$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$得, 当$\operatorname{rank}(A) = r$时,

A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

从$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$得，当$\operatorname{rank}(A) = r$时，

A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

② 从$A^2 = I$得出A的特征值是$\lambda = 1$或-1.

从$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$得, 当$\mathrm{rank}(A) = r$时,

A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

② 从$A^2 = I$得出A的特征值是$\lambda = 1$或-1.

又$A^2 = I$时, A为可逆矩阵, $\mathrm{rank}(A) = n$.

从$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$得, 当$\mathrm{rank}(A) = r$时,

A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

② 从$A^2 = I$得出A的特征值是$\lambda = 1$或-1.

又$A^2 = I$时, A为可逆矩阵, $\mathrm{rank}(A) = n$.

由于

$$A^2 = I \Rightarrow (I - A)(-I - A) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(I - A) + \mathrm{rank}(-I - A) \le n,$$

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 19 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

从$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$得, 当$\mathrm{rank}(A) = r$时,

A相似于对角矩阵$\begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

② 从$A^2 = I$得出A的特征值是$\lambda = 1$或-1.

又$A^2 = I$时, A为可逆矩阵, $\mathrm{rank}(A) = n$.

由于

$$A^2 = I \Rightarrow (I - A)(-I - A) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(I - A) + \mathrm{rank}(-I - A) \leq n,$$

$$(I - A) + (-I - A) = -2A$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(I-A)+\operatorname{rank}(-I-A)\geq n,$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(-I-A)\geq n,$$

故$\mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(-I-A)=n$. 因此

$$\mathrm{dim}V_{\lambda=1}+\mathrm{dim}V_{\lambda=-1}=2n-[\mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(-I-A)]=n,$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(-I-A)\geq n,$$

故$\mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(-I-A)=n$. 因此

$\dim V_{\lambda=1}+\dim V_{\lambda=-1}=2n-[\mathrm{rank}(I-A)+\mathrm{rank}(-I-A)]=n,$

从而A可相似于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} I_s & \\ & -I_t \end{pmatrix},$$

其中$s+t=\dim V_{\lambda=1}+\dim V_{\lambda=-1}=n$. ■

§2.2 Jordan矩阵介绍

§2.2 Jordan矩阵介绍

1. Jordan矩阵

§2.2 Jordan矩阵介绍

1. Jordan矩阵

定义 2.3 形如

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix} \tag{2-3}$$

的r阶方阵称为一个r阶Jordan块，其中λ是复数.

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 21 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§2.2 Jordan矩阵介绍

1. Jordan矩阵

定义 2.3 形如

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{2-3}$$

的r阶方阵称为一个r阶Jordan块，其中λ是复数. 由若干个Jordan块$J_i(\lambda_i)$构成的准对角矩阵

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}, \qquad (2\text{-}4)$$

称为Jordan矩阵.

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}, \qquad (2\text{-}4)$$

称为Jordan矩阵.

例如

$$J=\left(\begin{array}{cc|c|cc} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right)=\begin{pmatrix} J_1(5) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_3(i) \end{pmatrix}$$

就是一个5阶Jordan矩阵, 它的三个Jordan块分别是

就是一个5阶Jordan矩阵, 它的三个Jordan块分别是

$$J_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{pmatrix};\ J_2(2) = (2);\ J_3(i) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ & i \end{pmatrix}.$$

就是一个5阶Jordan矩阵, 它的三个Jordan块分别是

$$J_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{pmatrix};\ J_2(2) = (2);\ J_3(i) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ & i \end{pmatrix}.$$

Jordan矩阵是准对角形矩阵, 呈上三角形, 对角线上是它的全部特征值. Jordan块的特点是主对角线上元素相等, 紧邻上方元素$a_{ii+1} = 1$, 其余元素为0. Jordan块都是一阶的Jordan矩阵就是对角矩阵.

就是一个5阶Jordan矩阵, 它的三个Jordan块分别是

$$J_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{pmatrix};\ J_2(2) = (2);\ J_3(i) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ & i \end{pmatrix}.$$

Jordan矩阵是准对角形矩阵, 呈上三角形, 对角线上是它的全部特征值. Jordan块的特点是主对角线上元素相等, 紧邻上方元素$a_{ii+1} = 1$, 其余元素为0. Jordan块都是一阶的Jordan矩阵就是对角矩阵.

定理 2.5 设T是复数域上n维线性空间V的一个线性变换, 在V中必定存在一组基, 使T在这组基下的矩阵是Jordan矩阵, 并且这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外, 是被T惟一决定的, 它称为T的Jordan标准形.

上述结果用矩阵的话说就是:

定理 2.6 每个n阶复数矩阵A都与一个Jordan矩阵相似, 这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外, 是被矩阵A惟一决定的, 它称为A的Jordan标准形.

上述结果用矩阵的话说就是:

定理 2.6 每个n阶复数矩阵A都与一个Jordan矩阵相似, 这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外, 是被矩阵A惟一决定的, 它称为A的Jordan标准形.

2. 用λ-矩阵构造Jordan标准形

上述结果用矩阵的话说就是:

定理 2.6 每个n阶复数矩阵A都与一个Jordan矩阵相似, 这个Jordan矩阵除去其中Jordan块的排列次序外, 是被矩阵A惟一决定的, 它称为A的Jordan标准形.

2. 用λ-矩阵构造Jordan标准形

若一个矩阵的元是λ的多项式, 就称为λ-矩阵.

定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;

定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;

② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;

定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;

② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;

③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍, $\varphi(\lambda)$是一个多项式.

定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;

② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;

③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍, $\varphi(\lambda)$是一个多项式.

定义 2.5 如果λ-矩阵$A(\lambda)$可以经过一系列初等变换化为$B(\lambda)$, 则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价.

定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;

② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;

③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍, $\varphi(\lambda)$是一个多项式.

定义 2.5 如果λ-矩阵$A(\lambda)$可以经过一系列初等变换化为$B(\lambda)$, 则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价.

我们不加证明地给出以下定理:

定义 2.4 下面的三种变换称为λ-矩阵的初等变换:

① 矩阵的两行(列)互换位置;

② 矩阵的某一行(列)乘以非零的常数c;

③ 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍, $\varphi(\lambda)$是一个多项式.

定义 2.5 如果λ-矩阵$A(\lambda)$可以经过一系列初等变换化为$B(\lambda)$, 则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价.

我们不加证明地给出以下定理:

定理 2.7 任意一个非零的$s \times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$都惟一地等价于标准形:

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中$r \geq 1$, $d_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \cdots, r$是首项系数为1的多项式, 且$d_i(\lambda)$整除$d_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, 2, \cdots, r-1$.

定义 2.6 标准形的主对角线上非零元$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$称为$\lambda$-矩阵的不变因子.

定义 2.6 标准形的主对角线上非零元$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$称为$\lambda$-矩阵的不变因子.

矩阵A的特征矩阵$\lambda I - A$的不变因子以后就简称为A的不变因子.

定义 2.7 把矩阵A(或线性变换T)的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为矩阵A(或线性变换T)的初等因子.

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{9个}, (\lambda-1)^2,$

$(\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是$\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{9\text{个}}, (\lambda-1)^2,$ $(\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$

按定义, 它的初等因子有7个, 即$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2,$ $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2$. 其中$(\lambda-1)^2$出现三次, $\lambda+1$出现两次.

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是$\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{9个}, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$.

按定义, 它的初等因子有7个, 即$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1, \lambda+1, (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2$. 其中$(\lambda-1)^2$出现三次, $\lambda+1$出现两次.

定理 2.8 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{9个}, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$.

按定义, 它的初等因子有7个, 即$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1, \lambda+1, (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2$. 其中$(\lambda-1)^2$出现三次, $\lambda+1$出现两次.

定理 2.8 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

下面的定理给出了一个求初等因子的方法, 它不必事先知道不变因子.

例 2.5 设12阶矩阵的不变因子是$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{9个}, (\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$.

按定义, 它的初等因子有7个, 即$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$, $\lambda+1, \lambda+1, (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2$. 其中$(\lambda-1)^2$出现三次, $\lambda+1$出现两次.

定理 2.8 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

下面的定理给出了一个求初等因子的方法, 它不必事先知道不变因子.

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角形, 然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角形, 然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块$(J_i(\lambda_i))_{k_i\times k_i}$的初等因子是$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$.

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角形, 然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块$(J_i(\lambda_i))_{k_i\times k_i}$的初等因子是$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵$J(\lambda)$的全部初等因子是:

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{k_s}.$$

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角形, 然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块$(J_i(\lambda_i))_{k_i\times k_i}$的初等因子是$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵$J(\lambda)$的全部初等因子是:

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{k_s}.$$

根据代数学基本定理, 这也是矩阵A的初等因子.

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 29 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角形, 然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块$(J_i(\lambda_i))_{k_i\times k_i}$的初等因子是$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵$J(\lambda)$的全部初等因子是:

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{k_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{k_s}.$$

根据代数学基本定理, 这也是矩阵A的初等因子. 所以, A相似于Jordan矩阵$J(\lambda)$.

定理 2.9 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda I - A$为对角形, 然后将主对角线上的元分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A的全部初等因子.

不难计算Jordan块$(J_i(\lambda_i))_{k_i \times k_i}$的初等因子是$(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

而Jordan矩阵$J(\lambda)$的全部初等因子是:

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{k_2},\ \cdots,\ (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

根据代数学基本定理, 这也是矩阵A的初等因子. 所以, A相似于Jordan矩阵$J(\lambda)$.

例 2.6 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的Jordan标准形.

例 2.6 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的Jordan标准形.

解 首先求$\lambda I - A$的初等因子:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

因此, A的初等因子是$\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, 所以A的Jordan标准形是

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.
$$

因此, A的初等因子是$\lambda-1, (\lambda-1)^2$, 所以A的Jordan标准形是

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare
$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

因此, A的初等因子是$\lambda-1$, $(\lambda-1)^2$, 所以A的Jordan标准形是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

例 2.7 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J及P, 使$P^{-1}AP=J$.

例 2.7 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J及P, 使$P^{-1}AP=J$.

解 用初等变换把$\lambda I-A$化成对角形矩阵.

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 32 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

$$\xrightarrow[r(3)\times(-\lambda)+r(4)]{r(2)\times(\lambda-3)+r(1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -(\lambda+3) & -1 & \lambda-2 & -(\lambda-1)^2 \\ 5\lambda-1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r③\times(-\lambda)+r④]{r②\times(\lambda-3)+r①}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -(\lambda+3) & -1 & \lambda-2 & -(\lambda-1)^2 \\ 5\lambda-1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[l①\times(-1)+l③,\ l①\times(5)+l④]{l①\times(-(\lambda+1))+l②}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda+3) & 0 & \lambda-2 & -(\lambda-1)^2 \\ 5\lambda-1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r③\times(-\lambda)+r④]{r②\times(\lambda-3)+r①}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -(\lambda+3) & -1 & \lambda-2 & -(\lambda-1)^2 \\ 5\lambda-1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[l①\times(-1)+l③,\ l①\times(5)+l④]{l①\times(-(\lambda+1))+l②}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda+3) & 0 & \lambda-2 & -(\lambda-1)^2 \\ 5\lambda-1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l④\times(2-\lambda)+l③}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -5(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\ 5\lambda-1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

线性变换的对...
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 33 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit
•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

$$\xrightarrow[r③\times(1-5\lambda)+r①]{r④\times(-5)+r①}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

线性变换的对...
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 34 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

$$\xrightarrow[r③\times(1-5\lambda)+r①]{r④\times(-5)+r①}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r③\times(1-5\lambda)+r①]{r④\times(-5)+r①}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} (\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

A的初等因子为$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$, 相应的Jordan块为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故A的Jordan标准形为

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right).$$

故A的Jordan标准形为

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right).$$

求P使$P^{-1}AP = J$.

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 35 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

故A的Jordan标准形为

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right).$$

求P使$P^{-1}AP = J.$

由$P^{-1}AP = J$, 得$AP = PJ$, 令$P = (\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \boldsymbol{X}_3\ \ \boldsymbol{X}_4)$, 由

$$A(\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \boldsymbol{X}_3\ \ \boldsymbol{X}_4) = (\boldsymbol{X}_1\ \ \boldsymbol{X}_2\ \ \boldsymbol{X}_3\ \ \boldsymbol{X}_4)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right),$$

得

得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1,$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2,$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{X}_3,$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_4,$$

得

$$AX_1 = X_1,$$
$$AX_2 = X_1 + X_2,$$
$$AX_3 = X_3,$$
$$AX_4 = X_3 + X_4,$$

从而有

$$(I - A)X_1 = \mathbf{0}, \tag{2-5}$$
$$(A - I)X_2 = X_1, \tag{2-6}$$
$$(I - A)X_3 = \mathbf{0}, \tag{2-7}$$
$$(A - I)X_4 = X_3. \tag{2-8}$$

得

$$AX_1 = X_1,$$
$$AX_2 = X_1 + X_2,$$
$$AX_3 = X_3,$$
$$AX_4 = X_3 + X_4,$$

从而有

$$(I-A)X_1 = \mathbf{0}, \tag{2-5}$$
$$(A-I)X_2 = X_1, \tag{2-6}$$
$$(I-A)X_3 = \mathbf{0}, \tag{2-7}$$
$$(A-I)X_4 = X_3. \tag{2-8}$$

解方程组$(I-A)X = \mathbf{0}$, 求得A的属于$\lambda = 1$的两个特征向量$X_1 = (1\ \ -2\ \ -4\ \ 0)^T$, $X_3 = (0\ \ 0\ \ 1\ \ -1)^T$.

线性变换的对...
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 36 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

把$\boldsymbol{X}_1$代入方程组(2−6), 求得一个解$\boldsymbol{X}_2=(0\ \ 1\ \ -6\ \ 1)^T$.

把$\boldsymbol{X}_1$代入方程组(2 – 6), 求得一个解$\boldsymbol{X}_2 = (0\ \ 1\ \ -6\ \ 1)^T$.

把$\boldsymbol{X}_3$代入方程组(2 – 8), 求得一个解$\boldsymbol{X}_4 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$.

把$\boldsymbol{X}_1$代入方程组(2 − 6), 求得一个解$\boldsymbol{X}_2 = (0\ \ 1\ \ -6\ \ 1)^T$.

把$\boldsymbol{X}_3$代入方程组(2 − 8), 求得一个解$\boldsymbol{X}_4 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T$.

于是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

3. 用分析确定法构造Jordan标准形

3. 用分析确定法构造Jordan标准形

我们介绍另一种构造Jordan标准形J_A及相应变换矩阵P的方法, 这就是以存在定理为前提的分析确定法.

设A的特征多项式为

$$| \lambda I - A | = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

其中λ_i是A的k_i重特征值. $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$互异, 所以

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}, \tag{2-9}$$

$J_i(\lambda_i)$是主对角线元素为λ_i的k_i阶Jordan矩阵. 它是同一特征值λ_i对应的Jordan块放在一起得到的Jordan矩阵.

$J_i(\lambda_i)$是主对角线元素为λ_i的k_i阶Jordan矩阵. 它是同一特征值λ_i对应的Jordan块放在一起得到的Jordan矩阵.

把相似变换的可逆矩阵P依(2 − 9)式所示J_A的结构, 相应取k_1列, k_2列, $\cdots$, k_s列分块为$P = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_s)$, $p_i \in \mathbb{C}^{n\times k_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $AP = PJ_A$可表示为

$$(Ap_1 \quad Ap_2 \quad \cdots \quad Ap_s) = (p_1J_1(\lambda_1) \quad p_2J_2(\lambda_2) \quad \cdots \quad p_sJ_s(\lambda_s))$$

$J_i(\lambda_i)$是主对角线元素为λ_i的k_i阶Jordan矩阵. 它是同一特征值λ_i对应的Jordan块放在一起得到的Jordan矩阵.

把相似变换的可逆矩阵P依(2 − 9)式所示J_A的结构, 相应取k_1列, k_2列, $\cdots$, k_s列分块为$P = (p_1 \ \ p_2 \ \ \cdots \ \ p_s)$, $p_i \in \mathbb{C}^{n\times k_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $AP = PJ_A$可表示为

$$(Ap_1 \ \ Ap_2 \ \ \cdots \ \ Ap_s) = (p_1J_1(\lambda_1) \ \ p_2J_2(\lambda_2) \ \ \cdots \ \ p_sJ_s(\lambda_s))$$

从而有

$$Ap_i = p_iJ_i(\lambda_i), i = 1, 2, \cdots, s. \tag{2-10}$$

我们不妨取$Ap_1 = p_1 J_1(\lambda_1)$为代表来分析. 设

$$J_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} J_{11}(\lambda_1) & & & \\ & J_{12}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{1t}(\lambda_1) \end{pmatrix},$$

其中J_{1i}为n_i阶Jordan块, $\sum\limits_{i=1}^{t} n_i = k_i$. 故

$$J_{1i}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i} \tag{2-11}$$

再把p_1依n_1列, n_2列, $\cdots$, n_t列分块, $p_1 = (p_1^{(1)}\ p_2^{(1)}\ \cdots\ p_t^{(1)})$, 从(2 − 10)式有

$$Ap_j^{(1)} = p_j^{(1)} J_{1j}(\lambda_1), j = 1,\ 2,\ \cdots,\ t. \qquad (2\text{-}12)$$

再把p_1依n_1列, n_2列, $\cdots$, n_t列分块, $p_1 = (p_1^{(1)} \ \ p_2^{(1)} \ \ \cdots \ \ p_t^{(1)})$, 从(2 − 10)式有

$$Ap_j^{(1)} = p_j^{(1)} J_{1j}(\lambda_1), j = 1,\ 2,\ \cdots,\ t. \qquad \text{(2-12)}$$

设$p_j^{(1)} = (\alpha_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_{n_j})$, 用(2 − 11)式, (2 − 12)式化为

$$A(\alpha_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_{n_j}) = (\alpha_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_{n_j}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_j \times n_j}$$

再把p_1依n_1列, n_2列, $\cdots$, n_t列分块, $p_1 = (p_1^{(1)} \ p_2^{(1)} \ \cdots \ p_t^{(1)})$, 从(2 − 10)式有

$$Ap_j^{(1)} = p_j^{(1)} J_{1j}(\lambda_1), j = 1, 2, \cdots, t. \qquad (2\text{-}12)$$

设$p_j^{(1)} = (\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j})$, 用(2 − 11)式, (2 − 12)式化为

$$A(\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}) = (\alpha_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_j}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{n_j \times n_j}$$

上述矩阵等价于如下的方程组

$$\begin{cases} (A-\lambda_1 I)\alpha_1 = 0, \\ (A-\lambda_1 I)\beta_2 = \alpha_1, \\ (A-\lambda_1 I)\beta_3 = \beta_2, \\ \vdots \\ (A-\lambda_1 I)\beta_{n_j} = \beta_{n_j-1}. \end{cases} \tag{2-13}$$

上述矩阵等价于如下的方程组

$$\begin{cases} (A-\lambda_1 I)\alpha_1 = 0, \\ (A-\lambda_1 I)\beta_2 = \alpha_1, \\ (A-\lambda_1 I)\beta_3 = \beta_2, \\ \vdots \\ (A-\lambda_1 I)\beta_{n_j} = \beta_{n_j-1}. \end{cases} \tag{2-13}$$

从(2 − 13)式求得一组向量$\{\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_j}\}$, 我们称之为**Jordan链**. 链中的第一个向量α_1是特征向量, $\beta_2, \cdots, \beta_{n_j}$称为广义特征向量. 链的长度$n_j$就是$J_{1j}(\lambda_1)$的阶数. (2 − 13)式给出一个递归过程, 该过程到线性方程组$(A-\lambda_1 I)\beta_{n_j+1} = \beta_{n_j}$无解时终止.

上述矩阵等价于如下的方程组

$$\begin{cases}(A-\lambda_1 I)\alpha_1 = 0,\\ (A-\lambda_1 I)\beta_2 = \alpha_1,\\ (A-\lambda_1 I)\beta_3 = \beta_2,\\ \vdots\\ (A-\lambda_1 I)\beta_{n_j} = \beta_{n_j-1}.\end{cases} \tag{2-13}$$

从(2 − 13)式求得一组向量$\{\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n_j}\}$, 我们称之为Jordan链. 链中的第一个向量$\alpha_1$是特征向量, $\beta_2, \cdots, \beta_{n_j}$称为广义特征向量. 链的长度$n_j$就是$J_{1j}(\lambda_1)$的阶数. (2 − 13)式给出一个递归过程, 该过程到线性方程组$(A-\lambda_1 I)\beta_{n_j+1} = \beta_{n_j}$无解时终止.

我们把上述计算步骤归纳如下:

① 求A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$互异, 则$\lambda_i$为$A$的$k_i$重特征值, 其代数重数$k_i$决定Jordan矩阵$J_i(\lambda_i)$的阶数为$k_i$.

① 求A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$互异, 则$\lambda_i$为$A$的$k_i$重特征值, 其代数重数$k_i$决定Jordan矩阵$J_i(\lambda_i)$的阶数为$k_i$.

② 对于每一个λ_i, 由$(A-\lambda_i I)X = 0$, 求出A的线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t_i}$. 几何重数$t_i$决定$J_i(\lambda_i)$中有$t_i$个Jordan块.

① 求A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$互异, 则$\lambda_i$为$A$的$k_i$重特征值, 其代数重数$k_i$决定Jordan矩阵$J_i(\lambda_i)$的阶数为$k_i$.

② 对于每一个λ_i, 由$(A-\lambda_i I)X = 0$, 求出A的线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t_i}$. 几何重数$t_i$决定$J_i(\lambda_i)$中有$t_i$个Jordan块.

③ 若$k_i = t_i$, 则λ_i对应的Jordan矩阵为k_i阶对角矩阵.
若$t_i < k_i$, 则选择适当的特征向量α_i, 由(2 − 13)式确定Jordan链的长度n_i, 从而得到J_A的结构.

① 求A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$互异, 则$\lambda_i$为$A$的$k_i$重特征值, 其代数重数$k_i$决定Jordan矩阵$J_i(\lambda_i)$的阶数为$k_i$.

② 对于每一个λ_i, 由$(A - \lambda_i I)X = 0$, 求出A的线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t_i}$. 几何重数$t_i$决定$J_i(\lambda_i)$中有$t_i$个Jordan块.

③ 若$k_i = t_i$, 则λ_i对应的Jordan矩阵为k_i阶对角矩阵.
若$t_i < k_i$, 则选择适当的特征向量α_i, 由$(2-13)$式确定Jordan链的长度n_i, 从而得到J_A的结构.

④ 所有Jordan链构成的矩阵P就是Jordan标准形的变换矩阵.

§2.3 最小多项式

一个方阵$A_{n\times n}$的Jordan标准形J在和矩阵A相似的一切矩阵构成的相似类中, 是形式最简单的. A和J又都具有相似不变性, 因此, 在讨论关于A的一些问题时, 常利用J的简单形式, 先就J进行讨论, 得到A的相应结论, 这就是Jordan化方法. 这一节用Jordan化方法先讨论A的矩阵多项式的计算问题, 由此证明Cayley定理, 再给出矩阵A的最小多项式及其性质.

1. 矩阵多项式

1. 矩阵多项式

定义 2.8 设$A \in F^{n\times n}, a_i \in F, g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$是一个多项式, 则称矩阵$g(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I$为$A$的矩阵多项式.

1. 矩阵多项式

定义 2.8 设$A \in F^{n\times n}, a_i \in F, g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$是一个多项式, 则称矩阵$g(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I$为$A$的矩阵多项式.

定理 2.10 设$A \in F^{n\times n}$, $g(A)$是A的矩阵多项式, 则有如下结果:

① 若λ_0是A的特征值, 则$g(\lambda_0)$是$g(A)$的特征值.

② 如果A相似于B, 即$P^{-1}AP=B$, 则$g(A)$相似于$g(B)$, 且$P^{-1}g(A)P=g(B)$.

③ 如果A为准对角矩阵, 则$g(A)$也是准对角矩阵. 而且,

若$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$, A_i为方子块, 则$g(A) =$

$$\begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix}.$$

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 46 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

③ 如果A为准对角矩阵, 则$g(A)$也是准对角矩阵. 而且,

若$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$, A_i为方子块, 则$g(A) =$

$$\begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix}.$$

下面, 我们讨论$g(A)$的计算问题, 即已知方阵A和多项式$g(\lambda)$, 如何计算方阵$g(A)$的问题. 设$g(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

③ 如果A为准对角矩阵，则$g(A)$也是准对角矩阵. 而且，

若$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$, A_i为方子块，则$g(A)=$

$$\begin{pmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_k) \end{pmatrix}.$$

下面，我们讨论$g(A)$的计算问题，即已知方阵A和多项式$g(\lambda)$，如何计算方阵$g(A)$的问题. 设$g(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$.

为计算$g(A)$, 用Jordan化方法. 设

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中$J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_s(\lambda_s)$为$J$的全部Jordan块.

为计算$g(A)$, 用Jordan化方法. 设

$$A = PJP^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中$J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_s(\lambda_s)$为$J$的全部Jordan块.

由定理2.10知

$$\begin{aligned} g(A) &= Pg(A)P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix}P^{-1}, \end{aligned}$$

因此计算$g(A)$的问题转化为对Jordan块$J_i(\lambda_i)$计算$g(J_i(\lambda_i))$的问题.

因此计算$g(A)$的问题转化为对Jordan块$J_i(\lambda_i)$计算$g(J_i(\lambda_i))$的问题.

取一个r阶Jordan块为代表作分析.

因此计算$g(A)$的问题转化为对Jordan块$J_i(\lambda_i)$计算$g(J_i(\lambda_i))$的问题.

取一个r阶Jordan块为代表作分析.

设

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r}=\lambda I+U_r,$$

因此计算$g(A)$的问题转化为对Jordan块$J_i(\lambda_i)$计算$g(J_i(\lambda_i))$的问题.

取一个r阶Jordan块为代表作分析.

设

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}_{r\times r}=\lambda I+U_r,$$

首先有

$$J^k(\lambda)=(\lambda I+U_r)^k=\lambda^k I+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}U+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}U^2+\cdots+U^k, \tag{2-14}$$

利用

$$U_r^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & k < r, \\ \mathbf{0}, & k \geq r, \end{cases} \tag{2-15}$$

利用

$$
U_r^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & k < r, \\ \mathbf{0}, & k \geq r, \end{cases} \tag{2-15}
$$

其中$\mathrm{C}_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

利用

$$U_r^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & k < r, \\ \mathbf{0}, & k \geq r, \end{cases} \tag{2-15}$$

其中$\mathrm{C}_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

(2 − 14)式表示成矩阵形式是

$$
J^k(\lambda)=\begin{cases}
\begin{pmatrix}
\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & 1 & 0\\
 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \ddots & 0\\
 & & \ddots & \ddots & 1\\
 & & & \ddots & C_k^1\lambda^{k-1}\\
 & & & & \lambda^k
\end{pmatrix}, & k<r,\\[2ex]
\begin{pmatrix}
\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1}\\
 & \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \vdots\\
 & & \ddots & \\
 & & & C_k^1\lambda^{k-1}\\
 & & & \lambda^k
\end{pmatrix}, & k\geq r,
\end{cases}
$$

代入$g(J(\lambda))$, 并合并U的相同幂次项得

代入$g(J(\lambda))$, 并合并U的相同幂次项得

在$m \geq r$时, $$g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=i}^{m} a_k \mathrm{C}_k^i \lambda^{k-i}\right) U^i.$$

代入$g(J(\lambda))$, 并合并U的相同幂次项得

在$m \geq r$时, $g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=i}^{m} a_k \mathrm{C}_k^i \lambda^{k-i}\right) U^i.$

又

$$\sum_{k=i}^{m} a_k \mathrm{C}_k^i \lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{m} \frac{a_k k!}{(k-i)!i!}\lambda^{k-i} = \frac{1}{i!}\sum_{k=i}^{m} a_k \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^k)$$
$$= \frac{1}{i!} g^{(i)}(\lambda),$$

线性变换的对...
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 51 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

代入$g(J(\lambda))$, 并合并U的相同幂次项得

在$m \geq r$时, $g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1}\left(\sum_{k=i}^{m} a_k \mathrm{C}_k^i \lambda^{k-i}\right) U^i.$

又

$$\sum_{k=i}^{m} a_k \mathrm{C}_k^i \lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{m} \frac{a_k k!}{(k-i)!i!}\lambda^{k-i} = \frac{1}{i!}\sum_{k=i}^{m} a_k \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}\lambda^i}(\lambda^k)$$
$$= \frac{1}{i!} g^{(i)}(\lambda),$$

故

$$g(J(\lambda)) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{g^{(i)}(\lambda)}{i!} U^i$$

$$= \begin{pmatrix} g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{g^{(r-1)}}{(r-1)!} \\ & g(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda) \\ & & & g(\lambda) \end{pmatrix};$$

当$m<r$时,

$$g(J(\lambda))=\begin{pmatrix} g(\lambda) & g'(\lambda) & \cdots & \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} & 0 & \cdots & 0 \\ & g(\lambda) & & & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & & & \frac{g^{(m)}(\lambda)}{m!} \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & g'(\lambda) \\ & & & & & & g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

2. 方阵的化零多项式

2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A, 若存在多项式$g(\lambda)$, 使矩阵$g(A) = \mathbf{0}$, 则称$g(\lambda)$为矩阵A的化零多项式.

2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A, 若存在多项式$g(\lambda)$, 使矩阵$g(A) = \mathbf{0}$, 则称$g(\lambda)$为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设$A \in F^{n\times n}$, 则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A, 若存在多项式$g(\lambda)$, 使矩阵$g(A)=\mathbf{0}$, 则称$g(\lambda)$为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设$A\in F^{n\times n}$, 则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

证明 用Jordan化方法证明.

2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A, 若存在多项式$g(\lambda)$, 使矩阵$g(A)=\mathbf{0}$, 则称$g(\lambda)$为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设$A\in F^{n\times n}$, 则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

证明 用Jordan化方法证明.

设$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中$\sum\limits_{i=1}^{s}r_i=n$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$互不相同.

2. 方阵的化零多项式

对n阶方阵A, 若存在多项式$g(\lambda)$, 使矩阵$g(A)=\mathbf{0}$, 则称$g(\lambda)$为矩阵A的化零多项式.

定理 2.11 (Cayley-Hamilton) 设$A\in F^{n\times n}$, 则方阵A的特征多项式就是A的化零多项式.

证明 用Jordan化方法证明.

设$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中$\sum\limits_{i=1}^{s} r_i=n$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$互不相同.

$$设A = P\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}P^{-1},$$

$$设A = P\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix}P^{-1},$$

$J_i(\lambda_i)$是对角线元素为λ_i的t_i阶Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$不必互异, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$f(A) = P\begin{pmatrix} f(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & f(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_m(\lambda_m)) \end{pmatrix}P^{-1},$$

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f'(\lambda_i) \end{pmatrix}_{t_i \times t_i}$$

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f'(\lambda_i) \end{pmatrix}_{t_i\times t_i}$$

我们看$f(J_i(\lambda_i))$的第1行元素, 由于$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{r_i}g(\lambda)$中含有因子$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \le r_i$, 所以$t_i - 1 < r_i$, 从而$f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $\cdots$, $f^{(t_i-1)}(\lambda)$中均含有$(\lambda - \lambda_i)$, 因此

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 55 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f'(\lambda_i) \end{pmatrix}_{t_i \times t_i}$$

我们看$f(J_i(\lambda_i))$的第1行元素, 由于$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i} g(\lambda)$中含有因子$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \le r_i$, 所以$t_i - 1 < r_i$, 从而$f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $\cdots$, $f^{(t_i-1)}(\lambda)$中均含有$(\lambda - \lambda_i)$, 因此

$$f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \cdots = f^{(t_i-1)}(\lambda_i) = 0,$$

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f'(\lambda_i) \end{pmatrix}_{t_i \times t_i}$$

我们看$f(J_i(\lambda_i))$的第1行元素, 由于$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i} g(\lambda)$中含有因子$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $t_i \le r_i$, 所以$t_i - 1 < r_i$, 从而$f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $\cdots$, $f^{(t_i-1)}(\lambda)$中均含有$(\lambda - \lambda_i)$, 因此

$$f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \cdots = f^{(t_i-1)}(\lambda_i) = 0,$$

即$f(J_i(\lambda_i))$的第一行元素全为零, 由$f(J_i(\lambda_i))$的结构有

$$f(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t_i-1)!}f^{(t_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f'(\lambda_i) \end{pmatrix}_{t_i\times t_i}$$

我们看$f(J_i(\lambda_i))$的第1行元素, 由于$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{r_i}g(\lambda)$中含有因子$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, $t_i \le r_i$, 所以$t_i - 1 < r_i$, 从而$f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $\cdots$, $f^{(t_i-1)}(\lambda)$中均含有$(\lambda-\lambda_i)$, 因此

$$f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = \cdots = f^{(t_i-1)}(\lambda_i) = 0,$$

即$f(J_i(\lambda_i))$的第一行元素全为零, 由$f(J_i(\lambda_i))$的结构有

$$f(J_i(\lambda_i)) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

所以$f(A) = \mathbf{0}$. ■

3. 最小多项式

3. 最小多项式

对$A \in F^{n\times n}$, Cayley定理指出它有化零多项式, 事实上, A有很多化零多项式.

3. 最小多项式

对$A \in F^{n\times n}$, Cayley定理指出它有化零多项式, 事实上, A有很多化零多项式.

若A是V上线性变换T的矩阵, 对A的化零多项式$f(\lambda)$, 相应地用多项式得到线性变换$f(T)$就是零变换. 所以线性变换T的化零多项式也是存在的, 而且

$$\text{线性变换 } f(T) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \text{矩阵 } f(A) = \mathbf{0}.$$

3. 最小多项式

对$A \in F^{n\times n}$, Cayley定理指出它有化零多项式, 事实上, A有很多化零多项式.

若A是V上线性变换T的矩阵, 对A的化零多项式$f(\lambda)$, 相应地用多项式得到线性变换$f(T)$就是零变换. 所以线性变换T的化零多项式也是存在的, 而且

$$\text{线性变换 } f(T)=\mathbf{0} \Longleftrightarrow \text{矩阵 } f(A)=\mathbf{0}.$$

定义 2.9 设T是线性空间V上的线性变换, $m_T(\lambda)$是一个关于文字λ的多项式, 如果$m_T(\lambda)$满足

① $m_T(\lambda)$的最高次项系数为1,

② $m_T(\lambda)$是T的一个化零多项式, 即$m_T(T) = \mathbf{0}$,

③ $m_T(\lambda)$是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称$m_T(\lambda)$是T的最小多项式.

② $m_T(\lambda)$是T的一个化零多项式, 即$m_T(T)=\mathbf{0}$,

③ $m_T(\lambda)$是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称$m_T(\lambda)$是T的最小多项式.

定理 2.12 T的特征多项式$f(\lambda)$与最小多项式$m_T(\lambda)$有相同的根(重数不计). 即若 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 则$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$, $1\le t_i\le r_i, i=1,2,\cdots,s$.

② $m_T(\lambda)$是T的一个化零多项式, 即$m_T(T)=\mathbf{0}$,

③ $m_T(\lambda)$是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称$m_T(\lambda)$是T的最小多项式.

定理 2.12 T的特征多项式$f(\lambda)$与最小多项式$m_T(\lambda)$有相同的根(重数不计). 即若 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 则$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$, $1\le t_i\le r_i, i=1, 2, \cdots, s$.

证明 由$m_T(\lambda)\mid f(\lambda)$, $t_i\le r_i$是显然的, 所以只需要证明$t_i\ge 1$即可.

② $m_T(\lambda)$是T的一个化零多项式, 即$m_T(T)=\mathbf{0}$,

③ $m_T(\lambda)$是T的化零多项式中次数最低的多项式,

则称$m_T(\lambda)$是T的最小多项式.

定理 2.12 T的特征多项式$f(\lambda)$与最小多项式$m_T(\lambda)$有相同的根(重数不计). 即若 $f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 则$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$, $1\le t_i\le r_i, i=1,2,\cdots,s$.

证明 由$m_T(\lambda)\mid f(\lambda)$, $t_i\le r_i$是显然的, 所以只需要证明$t_i\ge 1$即可.

用反证法. 反设$t_i = 0$, 即λ_i不是最小多项式$m_T(\lambda)$的根, 取T的Jordan矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

其中$J_i(\lambda_i)$为Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$. 由于$m_T(\lambda_i) \neq 0$, 故

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} m_T(\lambda_i) & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

用反证法. 反设$t_i=0$, 即λ_i不是最小多项式$m_T(\lambda)$的根, 取T的Jordan矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

其中$J_i(\lambda_i)$为Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$. 由于$m_T(\lambda_i)\neq 0$, 故

$$m_T(J_i(\lambda_i))=\begin{pmatrix} m_T(\lambda_i) & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{pmatrix}\neq \mathbf{0}$$

所以, $m_T(J)\neq 0$. 与$m_T(\lambda)$是最小多项式矛盾. 所以$r_i\geq 1$.

■

用反证法. 反设$t_i = 0$, 即λ_i不是最小多项式$m_T(\lambda)$的根, 取T的Jordan矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

其中$J_i(\lambda_i)$为Jordan块, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$. 由于$m_T(\lambda_i) \neq 0$, 故

$$m_T(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} m_T(\lambda_i) & & & \\ & m_T(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_T(\lambda_i) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

所以, $m_T(J) \neq 0$. 与$m_T(\lambda)$是最小多项式矛盾. 所以$r_i \geq 1$.

■

定理 2.13 设变换T的特征多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

又T的Jordan标准形中关于特征值λ_i的Jordan块的最高阶数为$\bar{n}_i$, 则T的最小多项式

$$m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\bar{n}_1}(\lambda - \lambda_2)^{\bar{n}_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\bar{n}_s}.$$

定理 2.13 设变换T的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

又T的Jordan标准形中关于特征值λ_i的Jordan块的最高阶数为$\bar{n}_i$, 则T的最小多项式

$$m_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\bar{n}_1}(\lambda-\lambda_2)^{\bar{n}_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\bar{n}_s}.$$

证明 取$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\bar{n}_1}(\lambda-\lambda_2)^{\bar{n}_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\bar{n}_s}$, 设$T$的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$关于λ_i的Jordan块为n_{ij}阶.

其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$关于λ_i的Jordan块为n_{ij}阶.

$$\bar{n}_i=\max\{n_{i1},\ n_{i2},\ \cdots,\ n_{it_i}\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$$

其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$关于λ_i的Jordan块为n_{ij}阶.

$$\bar{n}_i=\max\{n_{i1},\ n_{i2},\ \cdots,\ n_{it_i}\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$$

不妨设$J_{i1}(\lambda_i)$是$\bar{n}_i$阶Jordan块, 则

其中

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix} J_{i1}(\lambda_i) & & & \\ & J_{i2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$关于λ_i的Jordan块为n_{ij}阶.

$$\bar{n}_i=\max\{n_{i1},\, n_{i2},\, \cdots,\, n_{it_i}\},\ i=1,\,2,\,\cdots,\,s.$$

不妨设$J_{i1}(\lambda_i)$是$\bar{n}_i$阶Jordan块, 则

$$g(J)=\begin{pmatrix} g(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & g(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_s(\lambda_s)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

由于$g(\lambda)$中含有因子$(\lambda-\lambda_i)^{\bar{n}_i}$, 所以

线性变换的对...
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 61 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

由于$g(\lambda)$中含有因子$(\lambda-\lambda_i)^{\bar{n}_i}$, 所以

$$g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \cdots = g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) = 0.$$

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

由于$g(\lambda)$中含有因子$(\lambda-\lambda_i)^{\bar{n}_i}$, 所以

$$g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \cdots = g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) = 0.$$

由此$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, 因而$g(J_{ij}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, $j = 2, 3, \cdots, t_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$. 这说明$g(J) = \mathbf{0}$, 即$g(\lambda)$是T的化零多项式.

$$g(J_i(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(J_{i1}(\lambda_i)) & & & \\ & g(J_{i2}(\lambda_i)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(J_{it_i}(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!}g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

由于$g(\lambda)$中含有因子$(\lambda-\lambda_i)^{\bar{n}_i}$, 所以

$$g(\lambda_i) = g'(\lambda_i) = \cdots = g^{(\bar{n}_i-1)}(\lambda_i) = 0.$$

由此$g(J_{i1}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, 因而$g(J_{ij}(\lambda_i)) = \mathbf{0}$, $j = 2, 3, \cdots, t_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$. 这说明$g(J) = \mathbf{0}$, 即$g(\lambda)$是T的化零多项式.

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中$1 \le k_i \le \bar{n}_i$, 若$h(\lambda)$的次数低于$g(\lambda)$, 则一定存在i, 使$k_i < \bar{n}_i$, 对这样的$h(\lambda)$, 由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \geq k_i),$$

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中$1 \leq k_i \leq \bar{n}_i$, 若$h(\lambda)$的次数低于$g(\lambda)$, 则一定存在$i$, 使$k_i < \bar{n}_i$, 对这样的$h(\lambda)$, 由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \geq k_i),$$

从而$h(\lambda)$不是化零多项式. 因此, $m_T(\lambda) = g(\lambda)$. ■

设又有多项式

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

其中$1 \le k_i \le \bar{n}_i$, 若$h(\lambda)$的次数低于$g(\lambda)$, 则一定存在i, 使$k_i < \bar{n}_i$, 对这样的$h(\lambda)$, 由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0, \quad (\bar{n}_i - 1 \ge k_i),$$

从而$h(\lambda)$不是化零多项式. 因此, $m_T(\lambda) = g(\lambda)$. ■

定理 2.14 线性变换T可对角化的充分必要条件是T的最小多项式$m_T(\lambda)$是一次因子的乘积.

设又有多项式

$$h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

其中$1 \le k_i \le \bar{n}_i$, 若$h(\lambda)$的次数低于$g(\lambda)$, 则一定存在i, 使$k_i<\bar{n}_i$, 对这样的$h(\lambda)$, 由于

$$h^{(k_i)}(\lambda_i)\neq 0, \quad (\bar{n}_i-1\geq k_i),$$

从而$h(\lambda)$不是化零多项式. 因此, $m_T(\lambda)=g(\lambda)$. ■

定理 2.14 线性变换T可对角化的充分必要条件是T的最小多项式$m_T(\lambda)$是一次因子的乘积.

例 2.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

例 2.8 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

解 求A的特征多项式和最小多项式.

例 2.8 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

解 求A的特征多项式和最小多项式.

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-1)^2=(\lambda-1)^4,$$

线性变换的对 . . .
内积空间
线性变换
Home Page
Title Page
Page 63 of 64
Go Back
Full Screen
Close
Quit

例 2.8 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵A的Jordan标准形J.

解 求A的特征多项式和最小多项式.

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-1)^2=(\lambda-1)^4,$$

因为$A-I\neq\mathbf{0}$, 而$(A-I)^2=\mathbf{0}$, 故A的最小多项式为

$$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$$

又因为$\mathrm{rank}(I-A)=2$, 所以$\dim V_{\lambda=1}=4-2=2$, 故

$$J=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right).$$