数学基础

1、像指数一样：幂的相加的拆分

$$e^{j(\alpha+\beta)}=e^{j\alpha}e^{j\beta}$$

证明：

$$\begin{aligned}
&e^{j\alpha}e^{j\beta}=(\cos\alpha+j\sin\alpha)(\cos\beta+j\sin\beta)\\
&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+j(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\
&=\cos(\alpha+\beta)+j\sin(\alpha+\beta)\\
&=e^{j(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

理解：半径为 1 的转子处于（$\alpha+\beta$）的角度，等价于其旋转到α角度后，再继续旋转到β角度。

对于一个坐标为（x,y）的电=点，逆时针旋转α，可以写成如下矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

也可以表示成：

$$(x',y')=(x\cos\alpha-y\sin\alpha,x\sin\alpha+y\cos\alpha)$$

复数化：

$$\begin{aligned}
&x'+jy'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+j(x\sin\alpha+y\cos\alpha)\\
&=(\cos\alpha+j\sin\alpha)(x+jy)\\
&=e^{j\alpha}(x+jy)
\end{aligned}$$

另外：转到α角度，再旋转β角度，也可以写成：

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

即：

$$x'+jy'=e^{j\beta}e^{j\alpha}(x+jy)$$
$$=e^{j(\alpha+\beta)}(x+jy)$$

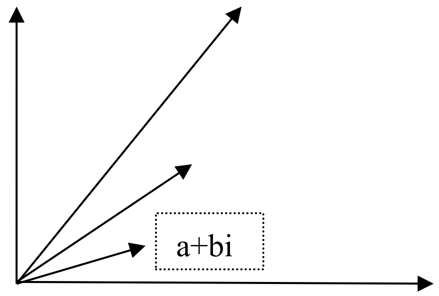
推论：

$$e^{j\alpha\beta}=e^{j\alpha}......e^{j\alpha}(共\beta个项相乘)=（\mathrm{e}^{j\alpha})^{\beta}=w^{\beta}$$

2 两个复数相乘的几何含义

（a+bi）(c+di)=ac-bd +(ad+bc)i

其结果向量（复数）是：模（或长度）为两个复数对应的向量的长度乘积，角度为两者的角度相加。相当于将一个向量逆时针旋转另一个向量的角度，且将长度延长另一个向量的倍数。



设：a+bi 对应的向量长度为 r1,角度为 α

c+di 对应的向量长度为 r2,角度为 β

$$r_1r_2\cos(\alpha+\beta)=r_1r_2\cos\alpha\cos\beta-r_1r_2\sin\alpha\sin\beta$$
$$=ac-bd$$

$$r_1r_2\sin(\alpha+\beta)=r_1r_2\sin\alpha\cos\beta+r_1r_2\cos\alpha\sin\beta$$
$$=ad+bc$$

由此：在傅里叶变换与卷积对应的关系中有：F=G.*H

对于 F 中的一个（点）值，其分解对应的 G、H 中的值具有不定性。

信号的分解与复原

程序：fft_ifft.m

理论：$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi ux/N}$

因此：$F(u)$的实部 是 f(x) 与 余弦函数$\cos(2\pi ux/N)$的点积

$F(u)$的虚部 是 f(x) 与 正弦函数$-\sin(2\pi ux/N)$的点积

反傅里叶变换时：

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi ux/N}$$

对于一个给定的 u，其对应的时域信号为：

$$\begin{aligned}
&F(u)[\cos(2\pi ux/N)+j\sin(2\pi ux/N)]\\
&=[a+jb]*[\cos(2\pi ux/N)+j\sin(2\pi ux/N)]\\
&=a\cos(2\pi ux/N)-b\sin(2\pi ux/N)\\
&+j[a\sin(2\pi ux/N)+b\cos(2\pi ux/N)]
\end{aligned}$$

注意：考虑$F(u)$ 与 $F(N-u)$的共扼性 ，它们的对应的信号的虚部正好抵消，实部相同。因此，可只计算实部的叠加。

$$\begin{aligned}
&a\cos(2\pi ux/N)-b\sin(2\pi ux/N)\\
&=\sqrt{a^2+b^2}[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(2\pi ux/N)-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(2\pi ux/N)]\\
&=|F(u)|[\cos(2\pi ux/N)*\cos\theta-\sin(2\pi ux/N)\sin\theta]\\
&=|F(u)|\cos(2\pi ux/N+\theta)
\end{aligned}$$

θ 为初始相位。

特别注意：$\theta\neq arctg\frac{b}{a}$

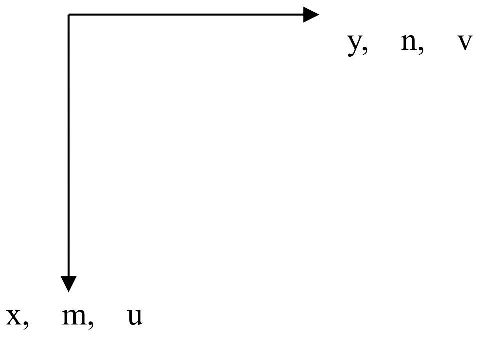
因为：$arctg$ 的结果是在 $-\pi/2\sim\pi/2$之间。而初相位是在 $0\sim 2\pi(or\ \ -\pi\sim\pi)$。因此，直接使用$\theta=arctg\frac{b}{a}$可能得不到正确结果。$arctg\frac{b}{a}=arctg\frac{-b}{-a}$，但两者相位应相差 π。

故在 a 小于 0 时，相位要加上π。

傅里叶变换的基本性质

1、函数平移前后的傅里叶变换的关系

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$$



证明：

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$

令 $g(x,y) = f(x-x_0, y-y_0)$

$$G(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} g(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x-x_0, y-y_0)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

令　$x-x_0=\alpha$　　　$y-y_0=\beta$

则上式变为：

$$\sum_{\alpha=-x_0}^{M-1-x_0}\sum_{\beta=-y_0}^{N-1-y_0} f(\alpha,\beta)e^{-j2\pi(u(\alpha+x_0)/M+v(\beta+y_0)/N)}$$

$$= \sum_{\alpha=-x_0}^{M-1-x_0}\sum_{\beta=-y_0}^{N-1-y_0} f(\alpha,\beta)e^{-j2\pi(u\alpha/M+v\beta/N)}e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$$

$$= e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}\sum_{\alpha=-x_0}^{M-1-x_0}\sum_{\beta=-y_0}^{N-1-y_0} f(\alpha,\beta)e^{-j2\pi(u\alpha/M+v\beta/N)}$$

$$= e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}F(u,v)$$

注： $f(x,y)$ 是周期函数，故从何处开始并不重要，关键是选一个周期即可。

实验程序：见 fft_funshift.m

```
I=imread('rice.png');
I=double(I);
```

```
F=fft2(I);
% 图像向右平移 10 个像素，是循环右移，相当于在 y 方向变化
J=circshift(I,[0 10]);
figure,imshow(J,[])
figure,imshow(I,[])
FS=fft2(J);
[v,u]=meshgrid(0:255,0:255);
Q=exp(-j*2*pi*v*10/256);
FF1=F.*Q;
D=FF1-FS;
t=max(abs(D(:)))
```

2、频率位移

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

证明：

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow$$

$$\sum\sum f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$=\sum\sum f(x,y)e^{-j2\pi((u-u_0)x/M+(v-v_0)y/N)}$$

$$\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

3、图像旋转前、后，傅里叶系数之间的关系

先看一种特殊情况，即旋转 180 度。

设 f(x,y) 为 M*N 的图像， x=0,…,M-1, y=0,…,N-1

旋转后的图像为 g(x,y)，有 g(x,y)=f(M-1-x,N-1-y)

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(M-1-x,N-1-y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

令 $p=M-1-x$， $q=N-1-y$

x=0,…M-1 => p=M-1 … 0; y=0,…,N-1 => q=N-1 …… 0

x=M-1-p y=N-1-q

$$G(u,v)$$

$$=\sum_{p=M-1}^{0}\sum_{q=N-1}^{0}f(p,q)e^{-j2\pi(u(M-1-p)/M+v(N-1-q)/N)}$$

$$=\sum_{p=M-1}^{0}\sum_{q=N-1}^{0}f(p,q)e^{j2\pi(up/M+vq/N)}e^{j2\pi(u/M+v/N)}$$

$$=conj(F(u,v))e^{j2\pi(u/M+v/N)}$$

实验验证：

```
I=imread('cameraman.tif');
I=im2double(I);
F=fft2(I);
R=imrotate(I,180);
RF=fft2(R);
[v,u]=meshgrid(0:255,0:255);
W=exp(j*2*pi*(u+v)/256);
Result=conj(F).*W;
% 比较 Result 与 RF 是否相同
```

4、傅里叶系数的共扼复数的反变换与原图像之间的关系

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

若：$g(x,y)=f(M-x,N-y)$

令：$p=M-x$， $q=N-y$

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(M-x,N-y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$=\sum_{p=M}^{1}\sum_{q=N}^{1}f(p,q)e^{-j2\pi(u(M-p)/M+v(N-q)/N)}$$

$$=\sum_{p=M}^{1}\sum_{q=N}^{1}f(p,q)e^{j2\pi(up/M+vq/N)}$$

$$=\sum_{p=1}^{M}\sum_{q=1}^{N}f(p,q)e^{j2\pi(up/M+vq/N)}$$

$$=\sum_{p=0}^{M-1}\sum_{q=0}^{N-1}f(p,q)e^{j2\pi(up/M+vq/N)}$$

$$=conj(F(u,v))$$

注意，上式成立，要求 f(p,N)=f(p,0)；对于任意的 p

F(M,q)=f(0,q)；对于任意的 q。

从变换图像的比较来看，$g(x,y)=f(M-x,N-y)$

相当于图像绕中心旋转了 180 度，然后向右一列、向下平移一行的结果。（是循环移动）

在计算图像做自相关系数时，就应该是 ifft2(F.* conj(F))，取结果的第 0 行（或者前几行）。（自相关是 f. *f， (imfilter)，即 f * f 的反 （conv），）

r(x,y) 表示将一幅图像平移(x,y)像素后，与原始图像的乘积。只考虑水平平移关系时，就只用考虑 r 的第一行，其列坐标值对应平移的像素数。

5、高斯函数的傅里叶系数仍是高斯的

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-j2\pi ux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - j2\pi ux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + j\sqrt{2}\sigma\pi u)^2 - 2\sigma^2\pi^2u^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-2\sigma^2\pi^2u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + j\sqrt{2}\sigma\pi u)^2} dx$$

令：$y = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + j\sqrt{2}\sigma\pi u$

上式积分变为：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-2\sigma^2\pi^2u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma dy$$

$$= e^{-2\sigma^2\pi^2u^2}$$

6、频域的卷积与空域的乘积

% 理解 $f(x, y)\square h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \otimes H(u, v)$

```
I=im2double(imread('rice.png'));
J=im2double(imread('cameraman.tif'));
IJ=I.*J;
FI=fft2(I);
FJ=imrotate(fft2(J),180);
FC=imfilter(FI,FJ,'circular');
```

```
IFC=ifft2(FC);
T=abs(IFC)/(size(I,1)*size(I,2));
figure,imshow(T,[]);
figure,imshow(IJ);
D=T-IJ;
max(D(:))     % 最后的差距非常小
min(D(:))
```

第四章 频率域图像增强的理解

P120

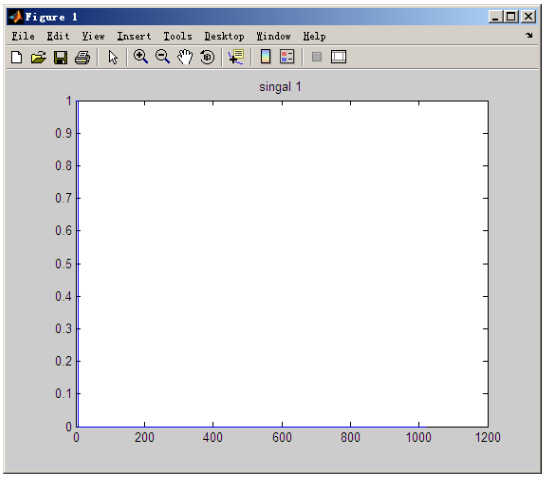
一个恰当的比喻是将傅里叶变换比作一个玻璃棱镜。棱镜是可以将光分成不同颜色成分的物理仪器，每个成分的颜色由波长或频率决定。傅里叶变换可以看做“数学的棱镜”，将函数基于频率分成不同的成分。

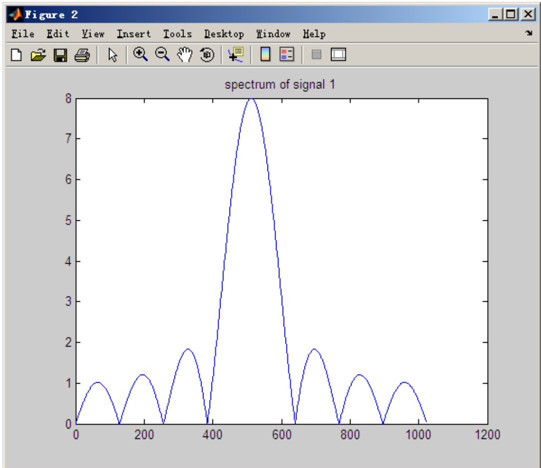
Fourier_120.m

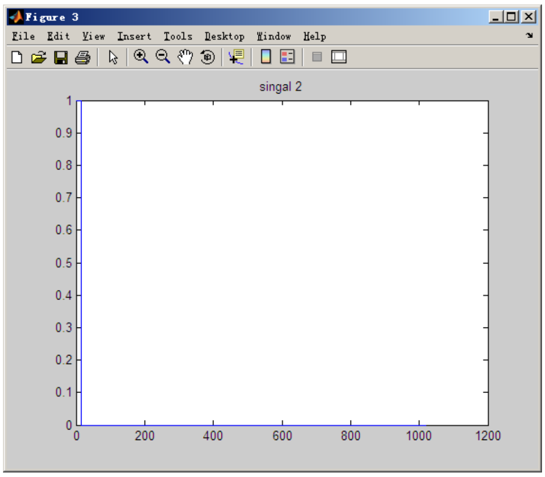
```
% 数字图像处理， 冈萨雷斯， P120
% 一维函数的傅里叶谱

% 解释采样间隔 与频率间隔 的关系 du = 1/(M * dx)

% 信号持续时间延长一倍，过零点的频率加快 一倍。

M=1024;
K=8;
A=1

x=0:M-1;
f1=zeros(1,M);
f1(1:K)=A;

figure,plot(x,f1),title('singal 1');

f1_shift=f1.*((-1).^x);
```

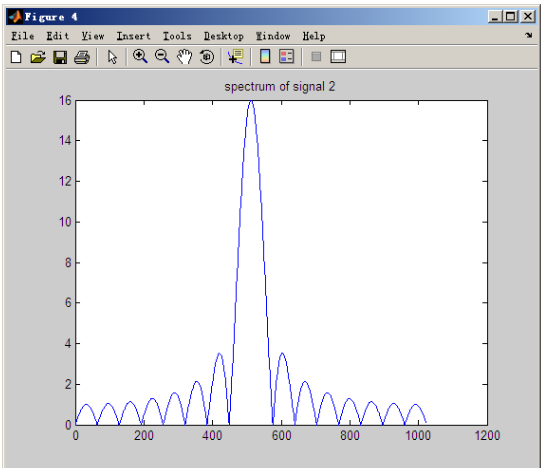
```
F1=abs(fft(f1_shift));
figure, plot(x,F1);title('spectrum of signal 1');


f2=zeros(1,M);
f2(1:2*K)=A;

figure,plot(x,f2);title('singal 2');

f2_shift=f2.*((-1).^x);

F2=abs(fft(f2_shift));
figure, plot(x,F2);title('spectrum of signal 2');

figure,plot(x,F1);hold on; plot(x,F2,'r');
```

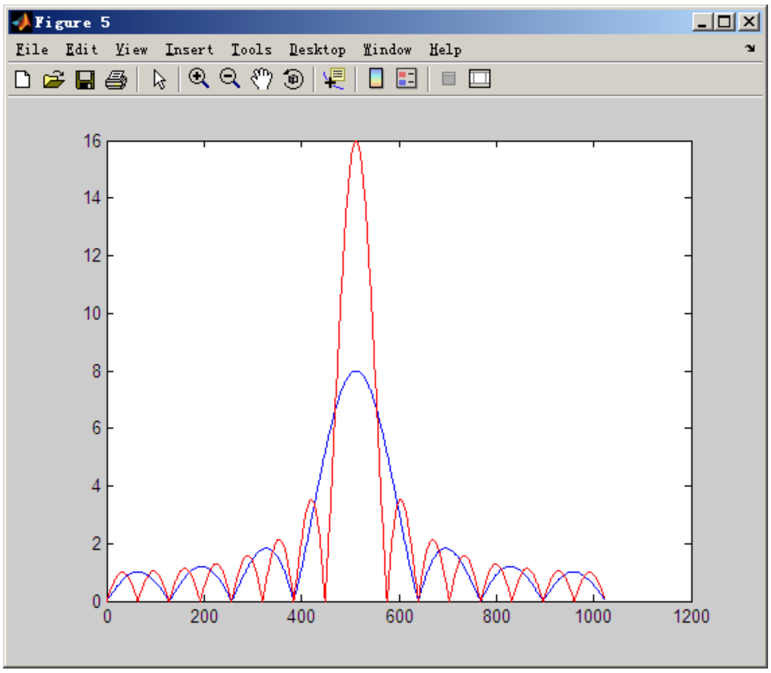
运行结果：











理解：

(1) 红色（信号 2）的中心幅度加倍了。直流信号，或者说信号的平均值加了倍。

(2) 红色频谱中零点的数量加倍。

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$$

如果说，将信号 2 的抽样步长加大一倍，从其前 16 个点抽出 8 个来，总共抽出 M/2 个点，从而将信号的周期缩短一倍，频率加快 1 倍。从频率抽样的角度看，Δu，即频率抽样步长缩短一倍。

换一种理解思路。从函数内积的概念来看。振幅是信号在基函数上的投影。当信号为 1 的持续区间内，通过一个完整的周期信号，内积为 0。信号的持续时间长，说明，通过一个低频周期基函数，即频率小的信号，就可以使内积为 0，因而过零点就更靠近中心，过零点的数量就会加倍。

信号的频谱分析：

对于一个正弦信号，sin(x), 分析其频谱，理论上应只在一个地方有幅值，而其他地方皆应为 0。 实践时，可能出现以下错误，致使结果有偏差。

(1) 产生的信号不是整周期

当 X=0:0.1:2*pi; F=sin(X);产生一个周期的信号

当 X=0:0.1:2*pi+len; 产生一个长于 2pi 周期的函数。若将新函数进行周期性延拓，并不等价于 sinx 的周期性延拓。

（2）X 抽样的步长引起的误差。

当 X=0:0.1:2pi，时，最后的 X 是 6.2

当 X=0:0.01:2pi 时，最后的 X 是 6.28

(3) 计算 sin(X)等时产生的误差。

P123
二维下

$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$ ， $\Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$ 的理解

Fourier_123.m

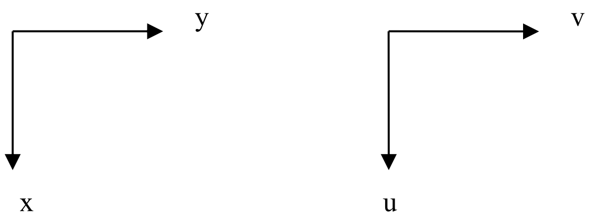
```
% 数字图像处理， 冈萨雷斯， P123
% 二维 Fourier 变换，显示频率谱图


rows=256;
cols=256;
r_center=rows/2;
c_center=cols/2;

I=zeros(rows,cols);

I1=double(I);

% 产生第一个图像
I1(r_center-10:r_center+9,c_center-20:c_center+19)=255;
figure,imshow(I1,[]);title('image 1');

% 下面生成 (-1)^(x+y) 函数
[x,y]=meshgrid(1:cols,1:rows);
Shift=double((-1).^(x+y));

% 原始信号的平移
f1_shift = I1.*Shift;

% FFT 变换
F1= log(abs(fft2(f1_shift)));

figure,imshow(F1,[]);title('spectrum for image 1');


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

I2=double(I);

% 产生第一个图像
I2(r_center-50:r_center+49,c_center-20:c_center+19)=255;
```

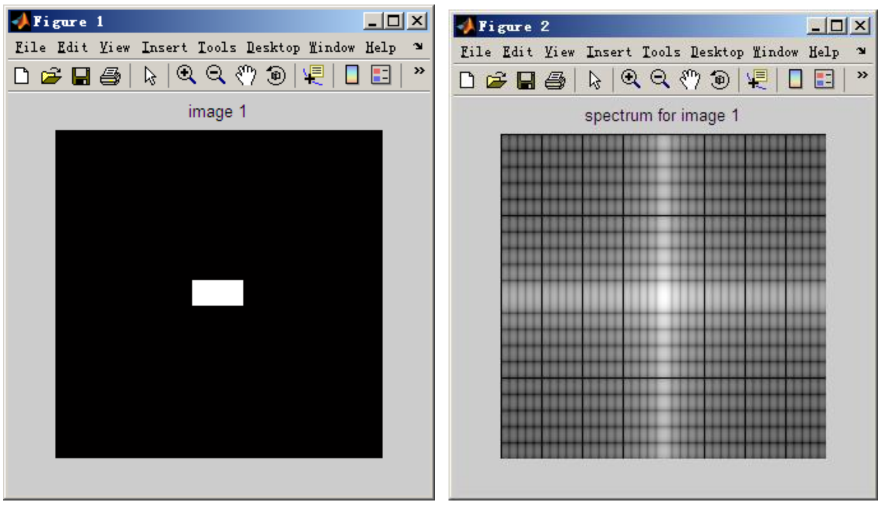
figure,imshow(I2,[]);title('image 2');

% 原始信号的平移
f2_shift = I2.*Shift;

% FFT 变换
F2= log(abs(fft2(f2_shift)));

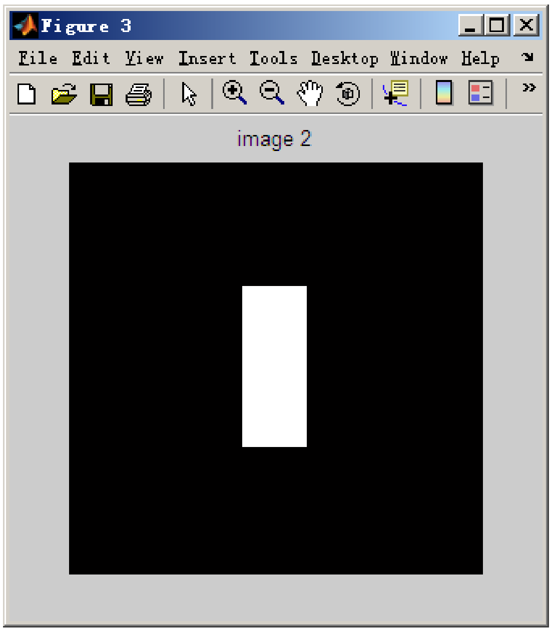
figure,imshow(F2,[]);title('spectrum for image 2');

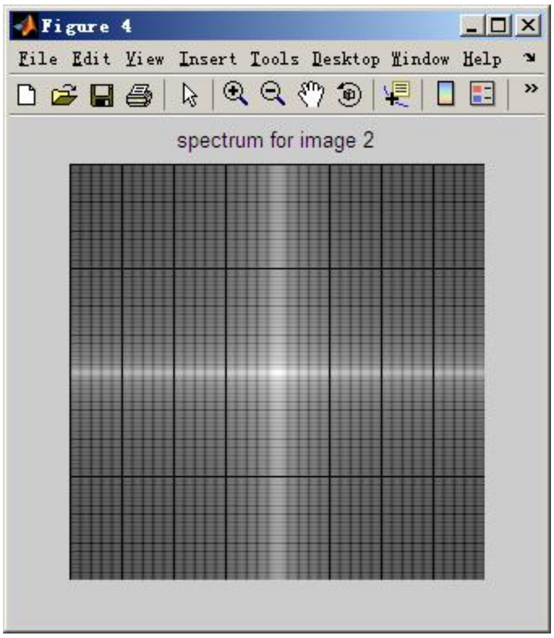




X 方向的信号短，u 方向的信号显得宽。

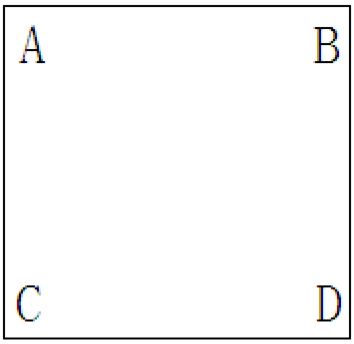
反过来，如下图。X 方向的信号长，u 方向的信号显得窄。



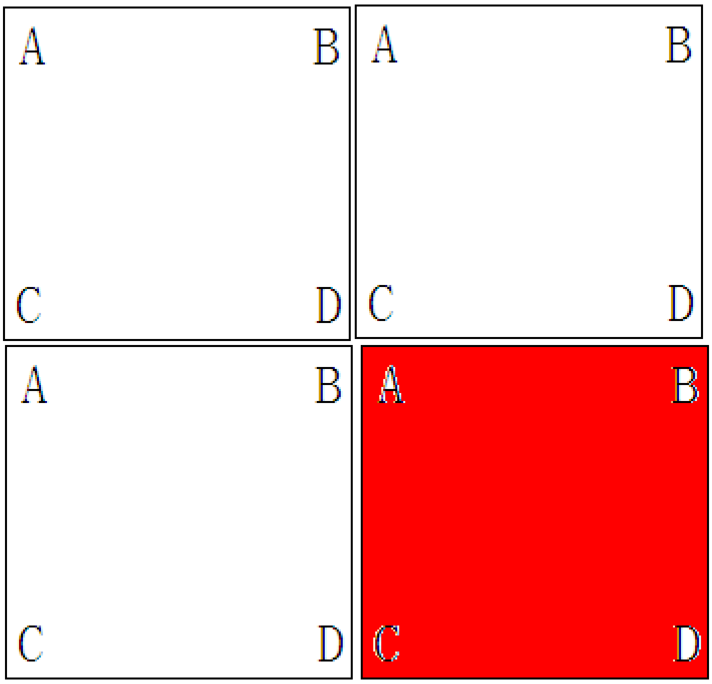


傅里叶变换，频谱中心移到图中心的理解

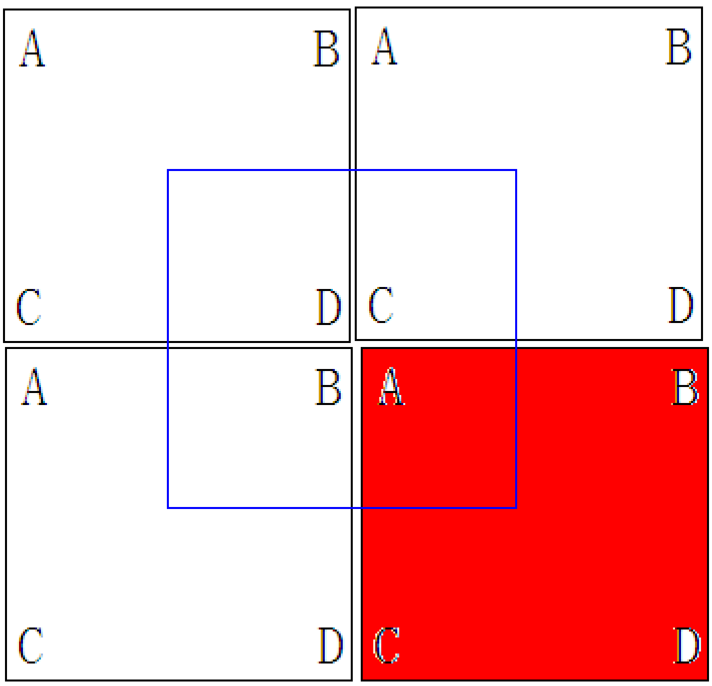
假设原始信号不平移，生成的 Fourier 级数如下图。用 A,B,C,D 表示四个角。



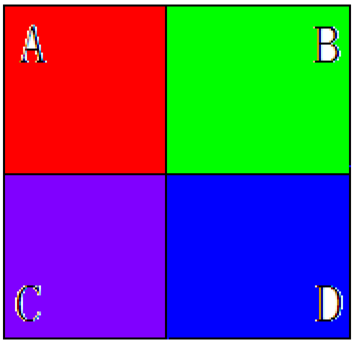
设下图中的红色块是 变换出的 Fourier 矩阵。根据周期性，将其向左，向上，向左上扩展。

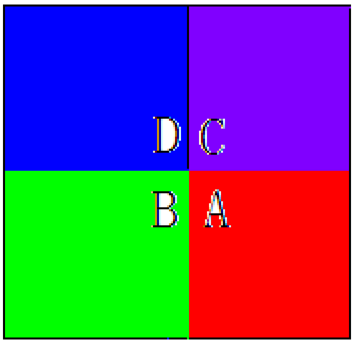


取中心蓝色线条框住的块，即为平移后的结果。



以色块对比，说明是如何平移的。





平移的实现方法有 2 种。

一是先平移原始信号，再进行傅里叶变换。

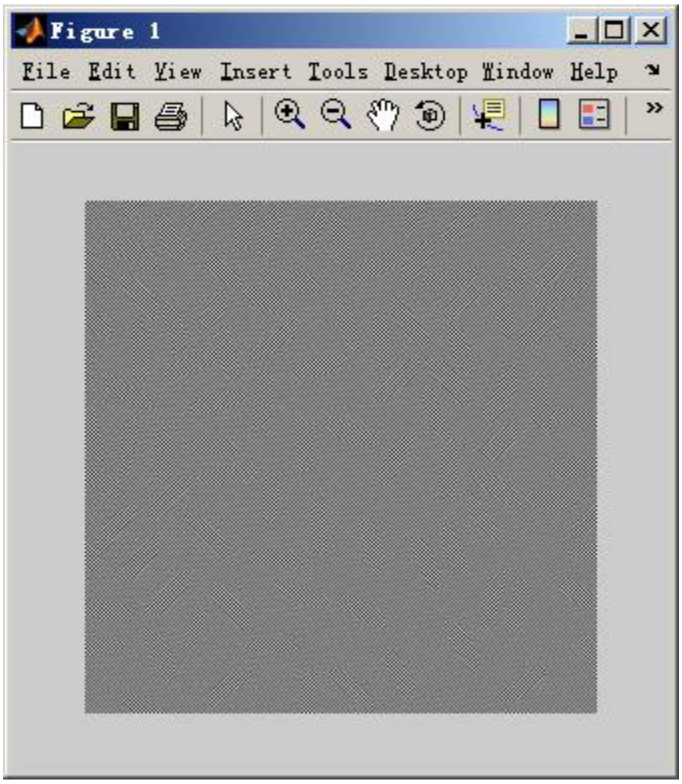
$$f\_n(x,y)=f(x,y)*(-1)^{x+y} \qquad F=fft2(f\_n)$$

二是先变换，在平移：

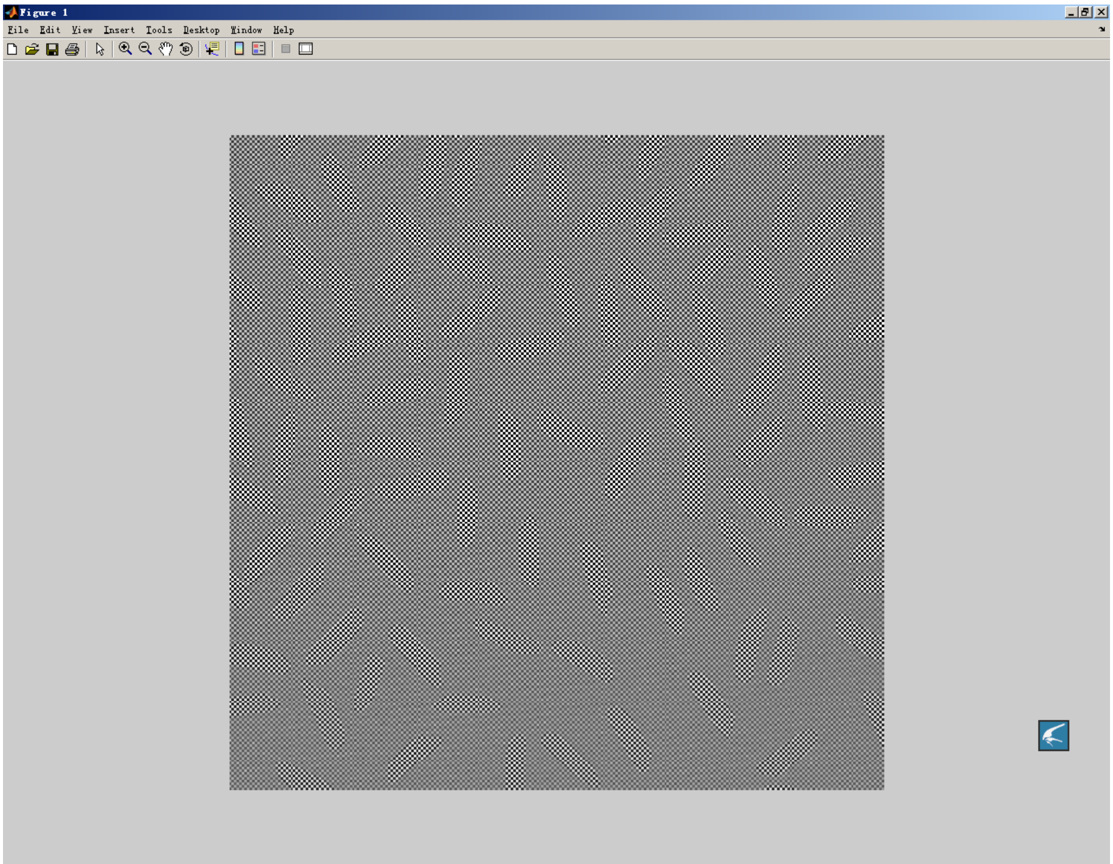
$$F=fftshift(fft2(f))$$

注意：此处的平移和传统概念中的平移有差别。

对于原图像的平移，是其原图像的像素值正负交替变化，如下图。（就像在图像上打了一个很密的黑色的网）（比原始图像要暗很多）



全屏观察如下。



频率域的基本性质 (P124)

每个$F(u,v)$项包含了被指数项修正的$f(x,y)$的所有值。因此，除了特殊情况，一般不可能建立图像特定分量和其变换之间的直接联系。然而，可以建立傅里叶变换的频率分量与图像空间特征（图像中强度变化模式）之间的联系。

变化最慢的频率成分对应图像的平均灰度。

低频对应着图像的慢变化分量。

高频对应图像越来越快的灰度级。

二维傅里叶变换的基函数的理解

$e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$，对于给定的（u0 ,v0），

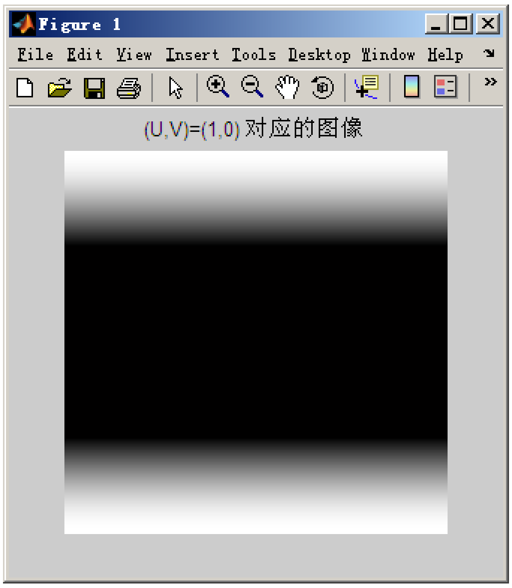
对应的函数为 $\cos(2\pi u_0 x/M+2\pi v_0 y/N)+j\sin(2\pi u_0 x/M+2\pi v_0 y/N)$

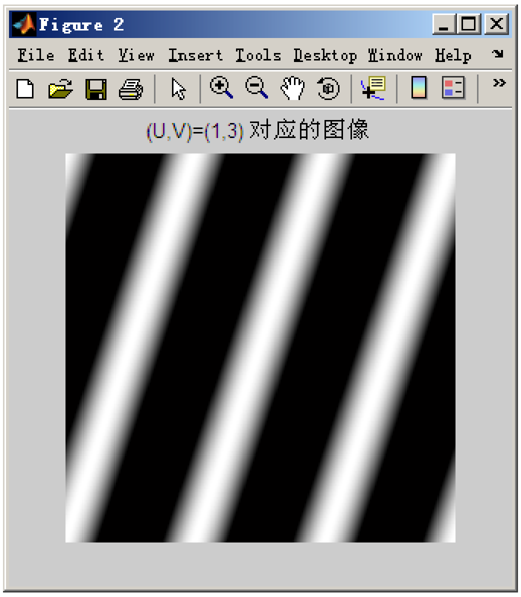
只考虑 $\cos(2\pi u_0 x/M+2\pi v_0 y/N)$

对于某一给定的列而言（与 y 方向垂直），y 值是确定的，因而可以将上式看成是 x 的一个函数，即 $\cos(2\pi u_0 x/M+\phi)$。由 x 取值为 0…M 知，这是在 x 方向出现 u0 个周期的余弦函数。对任意一个给定的列而言，都是如此，只是列与列之间的初始相位不同。

换过来看，对任意一行，x 值是固定的，因而是行方向上出现 v0 个周期的函数。给定(u0,v0),就决定了函数的形态。F(u0,v0) 就是 f 函数在这一形态函数上的投影，即可反应这一形态上函数的变化程度。

```
Fourier_basic_f.m
% Fourier 基本函数

M=256;
N=256;
[y,x]=meshgrid(1:N,1:M);

% (U,V)=(1,0) 对应的图像
fb1=cos(2*pi*x/M);

figure,imshow(fb1),title('(U,V)=(1,0) 对应的图像');

% (U,V)=(1,3) 对应的图像
fb2=cos(2*pi*x/M+2*pi*3*y/N);

figure,imshow(fb2),title('(U,V)=(1,3) 对应的图像');
```





4.2.4 空间域滤波和频率域滤波之间的对应关系

假设源信号为单位脉冲信号，即只有一个点有非零值，而其他虽有点的值皆为 0。则其 Fourier 变换的结果是对所有的(u,v), |F(u,v)|都一样，只是相位角有差别。

下面用程序例证了 空域滤波与频率域滤波的等价性。

```
% fourier_conv_127.m
img = imread('rice.png');
figure(1),imshow(img),title('Original image');
[rows,cols]=size(img);
img=double(img);
F=fft2(img);
FT_show=log(abs(fftshift(F)));
figure,imshow(FT_show,[]);
% 先生成一个中心化函数 shift
%    注，grid 的顺序与 矩阵的行，列是反顺序的。
[y, x]=meshgrid(1:cols,1:rows);
shift=(-1).^(x+y);
% 用空域的滤波器 转到频率域处理
% fsize, 滤波器的大小 为 fsize * fsize
fsize=21;
win = fspecial('gaussian',fsize,2);
I_space_filte=uint8(imfilter(img,win));
figure,imshow(I_space_filte);title('after space filte');

% 将 win 中心化, 即模板的中心应是原点？生成一个与原图像一样大的模板 h
h=zeros(rows,cols);
```

```
r_center=floor(rows/2);
c_center=floor(cols/2);
hlen=floor(fsize/2);
h(r_center-hlen+1:r_center-hlen+fsize,c_center-hlen+1:c_center-hlen+fsize)=win;

% 下面两种方法，将 h 从时间域 变换到频域的 H 是相同的
% H=fft2(fftshift(h));
H=fft2(h).*shift;
F_E2=F.*H;
I2=uint8(ifft2(F_E2));
figure,imshow(I2);title('after frequency filter');

% 说明：I2 与 I_space_filte 除了边界像素略有差别外，其他是完全形同的。
%%%%% 另外一种等价的方法
f_shift=fftshift(img);
F_C=fft2(f_shift);
H_C=fft2(h);
f_modify=ifft2(F_C.*H_C);
I3=uint8(f_modify);
figure,imshow(I3);title('another filter method');
```

说明：

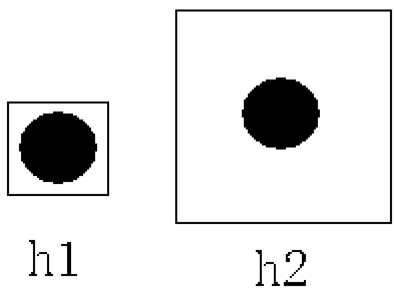
(1) 构造了一个空间域滤波器

由于滤波器的尺寸与图像的尺寸不同，在频率域做点乘时，大小不配。因而，生成了一个新的模板；将原来小尺寸的滤波器放在新模板的中心，然后在其他地方都填写成 0.

另外，可以直接用 fspecial 产生与原图大小一样的滤波器，例如：

h = fspecial('gaussian',[rows cols],2);

此时的滤波器与产生一个小尺寸滤波器再补 0，是非常接近的。对于 Gauss 型的滤波器，关键是后面的参数 Sigma；以及由于尺寸限制而产生的信号截断问题。由于远离中心的值都很小，因此截断成 0,产生的差别不大。



如图，有 h1,h2 两个滤波器，中心（黑色部分）是相同的，其他(空白)元素值

为 0。用 h1,h2 进行滤波的结果是相同的。

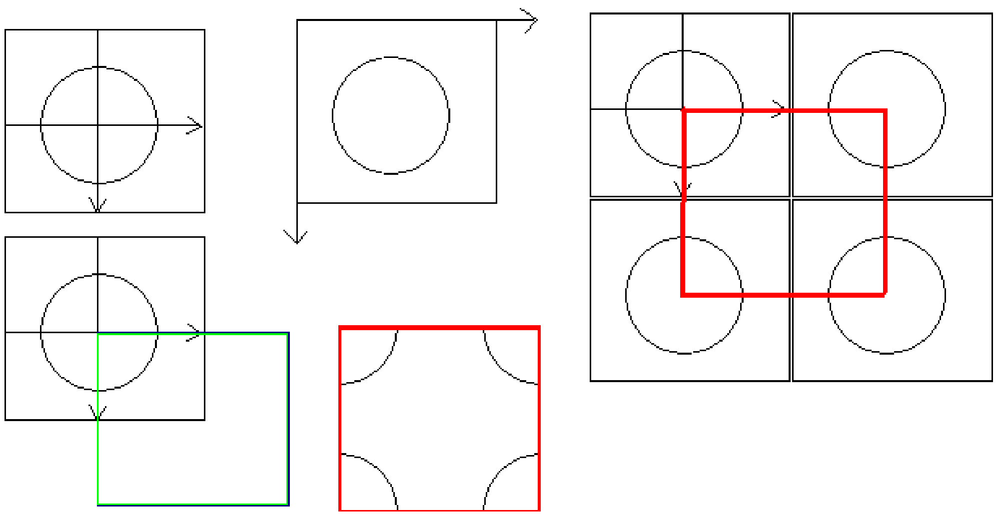
剖析：为什么理论上 $f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$

而实际计算 Ifft2(Fft2(f).*fft2(h))时，结果产生了平移

在空间滤波中，认为 h 的中心是坐标原点，即 h(0,0)处于中心位置，整个模板的范围是[-M/2,-N/2]-[M/2,N/2]。

实际计算时，h 的坐标都是正的，其中心移到了[M/2,N/2]处，模板的尺寸范围是[0,0]-[M,N]。

如下图所示，标准的滤波器坐标如最左边的图，希望的用正坐标表达的矩阵如绿色方框，绿色方框中的内容是什么呢？中间的小图我们实际计算时（FFT 变换）采用的模板。它与下面的小红框中的内容相差一个中心化！大图中的红框是从(0.0)点开始取一个周期，得到小红框图（此时的坐标就变成了正的），用小红框的矩阵就与原始的 h 的作用结果是等同的。



(2) 图像变换到频域

直接使用 fft2(f) 即可。

(3) 模板转到频域

h → H = fft2(fftshift(h));

(4) 频率反变换到空间域

细致的辨析：理论上有， $f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$

证明：

令： $g(x,y) = f(x,y)*h(x,y)$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

$$G(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} g(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)\}e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}\}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} h(x-m,y-n)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}\}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\{H(u,v)e^{-j2\pi(um/M+vn/N)}\}$$

$$= H(u,v)\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)e^{-j2\pi(um/M+vn/N)}$$

$$= H(u,v)F(u,v)$$

缠绕问题：

直接用上述实践方法做出的结果与 imfilter(I,h)，在边界上有些差别。为什么？

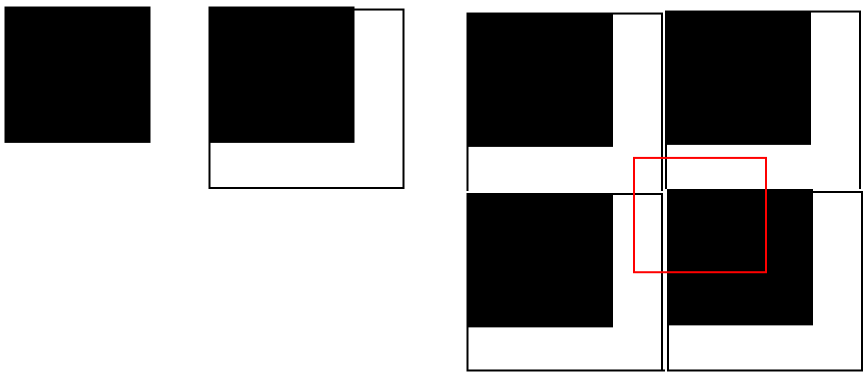
在上面的公式中，利用了：

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$$

而：**f** 函数在平移时，在上面的计算公式中，是一种周期性的平移。因而其计算结果实际上等效于 **imfilter(I,h,’circular’)**。

如果要追求 **imfilter(I,h)**,即 **I** 的周围以 **0** 延拓。则在 **FFT** 变换前，要对图

像 I 延拓。（白色部分为补的 0，最后一个为对新图的周期延拓，等价于原图的补 0）



在 imfilter 中，有参数：imfilter(I,h,'circular');
'circular' 参数，即周期性延拓，其参数的结果与 FFT 变换相同。

实践操作：

$$fftshift(ifft2(fft2(f).*fft2(h)))$$

正确的解法是：

```
f=zeros(512,512);
f(1:256,1:256)=img;
h=zeros(512,512);
h (1:256,1:256)=fspecial('gaussian',256,2);
r = ifft2(fft2(f).*fft2(h));
```

再从 r 中截取中间部分。(uint8(r))
实际上，任意尺寸的模版均是如此。例如
h(1:21,1:21)=fspecial('gaussian',21,2);同样可以得到正确的结果。
详细的说明 见 4.6.3 节。

理解 (-1)^(x+y) 与 中心化

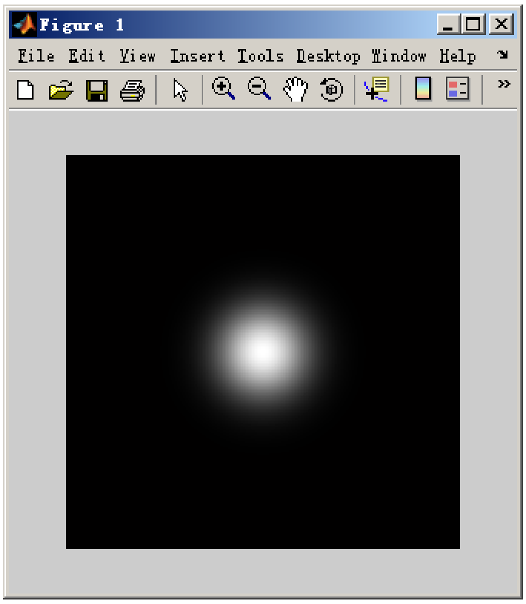
它们是成对出现。在变换的一边是(-1)^(x+y)，另一边就是中心化。

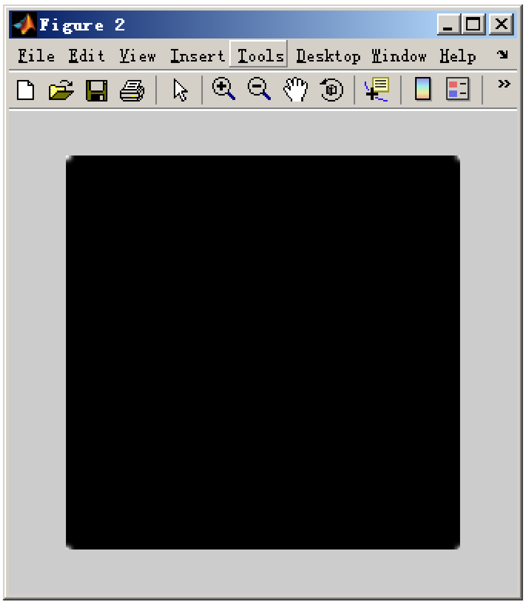
对于原始信号是否中心化，对应的 Fourier,，只是是否在结果上乘(-1)^(x+y)。例如：

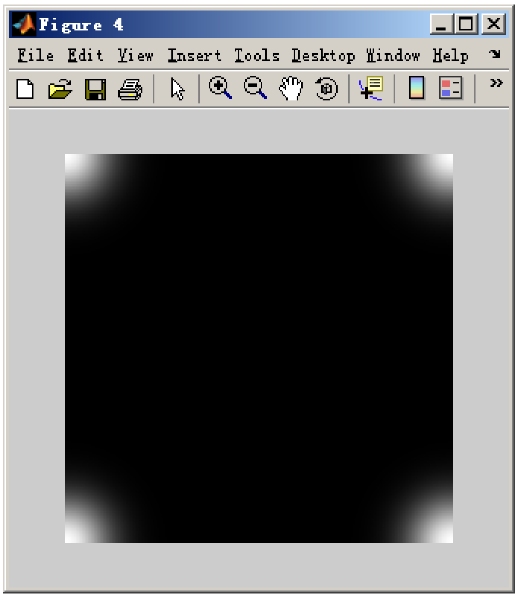
对于一幅图像 f，尽管 f 与 fftshift(f) 看起来有很大的不同，但是：

$$abs(fft2(f)) = abs(fft2(fftshift(f)))$$

直观上看，对于 fftshift(f) 进行 Fourier 变换，其能量仍然在低频分量上，Fig1,Fig4 都对应 Fig2。







直接在频率域构造的滤波器 与 空间域的滤波器

两者有很大的差别。

(1) 直接构造的频率滤波器，是一个实函数。而空域滤波器转到频域中的函数，变成了复数形式。

(2) 直接构造的频率滤波器，一般是一个正函数，特别是低通滤波器。

(3) 从空域滤波器转到频域中的函数一般会出现正负交替，因而一般要乘以 (-1)^(u+v)。

(4) 低通滤波器，一般的中心值为 1。而对于空域的平滑滤波器，系数之和为 1。

(5) 对于频域的滤波器，反变换到空间域上，会成为一个复数形式，并不能用一个实函数刻画出来。

```
[v,u]=meshgrid(-127:128,-127:128);
H=exp((-u.*u-v.*v)/1800);
```

```
h=ifft2(H);
```

原始信号的平移：

信号的平移，并不能改变各频率分量，但是对于某一个频率而言的信号，其相位会发生变化，这会引起复数的实部和虚部都发生变化，如 $(\cos\theta, \sin\theta)$

信号的平移，是一种周期性的平移，而不是把一部分丢去，而另一部分补0；而是需要周期性扩展的（首尾相连）。卷积中产生缠绕也来源于周期性延拓。

傅里叶变换的一些性质和应用

参见《实用小波方法》，徐长发

```
%   在一幅图像 (I) 上 ，扣出一个小块 (J);
%   现要找出 J 出现在 I 的何位置

I=imread('rice.png');
J=I(24:68,35:100);
I=double(I);
K=double(zeros(256,256));
K(1:45,1:66)=J;
L=ifft2(fft2(I).*conj(fft2(K)));
[x y]=find(L==max(L(:)));
```

也可以：
```
L= fft2(I).*conj(fft2(K));
L=L./abs(L);
H=ifft2(L);
[x y]=find(H==max(H(:)));
```

问题：为何归一化后，对求最大值的位置无影响？

实验：

(1) 傅里叶变换后，对幅度谱加噪，然后重建图像，结果如何？

（基本保留原图信息）

(2) 对相位谱加噪，然后重建图像，结果如何？

（图像被破坏）

(3) 基于相位一致性的边缘检测？（不同周期分量在边缘处有相同的相位？）

(4) PFT(Phase spectrum of Fourier Transform) : 基于相位谱的显著图获取方法。只保留相位（将整幅均归一化为 1)，然后反变换

(5) PQFT (Phase spectrum of Quaternion Fourier Transform) 基于相位谱的四元素。。。

8、测量图像的平移距离

```
%
% 图像平移，其对应的傅里叶变换有相互关系，是一个周期函数
% 相互关系的反傅里叶变换，表现为单点值很大，对应的位移点
I=imread('cameraman.tif');
I=im2double(I);
F1=fft2(I);
J=circshift(I,[5 10]);
F2=fft2(J);
 [v,u]=meshgrid(0:255,0:255);
S=exp(-j*2*pi*(u*5+v*10)/256);
Z=F1.*S;   %  Z 与 F2 很接近
SF=F2./F1;
Shift=ifft2(SF);
figure,imshow(abs(Shift));
```