1 Task Scheduling Problem

有m个机器，n个任务，第i个任务在第j个机器上的运行时间为t_{ij}，求最快完成这些任务的调度方案。

规划问题为

$$\begin{aligned} &\min_{X}\ T = \max_{i} \sum_{j} x_{ij} t_{ij} \\ &s.t.\ (1)\ x_{ij} \in \{0,1\}, \\ &\qquad (2)\ \sum_{j} x_{i,j} = 1,\ \forall i. \end{aligned} \tag{1}$$

求解上述问题的近似最优解，需进行一下步骤：

1.1 Feasibility Linear Programming

将整数规划问题(1)放松为线性规划，并采用可行性线性规划求解，对于给定的解T，$\forall i,j\ t_{ij} > T\ \ x_{ij} = 0$，约束条件为

$$\begin{cases} \sum_{j:t_{ij}\le T}\ x_{ij} = 1, & \forall i. \\ \sum_{i}\ \ x_{ij} t_{ij} \le T, & \forall j. \\ 0 \le x_{ij}, & \forall i,j \end{cases} \tag{2}$$

从T_0开始，判断(2)是否有解，若有解，则判断$T_1 = T_0/2$是否有解。若无解，则判断$T_2 = (T_0 + T_1)/2$是否有解；若有解，则判断$T_2 = T_1/2$是否有解……如此对解进行二分搜索，直至找到最小的可满足答案T^*。

线性规划解的可满足判断可以在多项式时间内完成，而二分搜索的时间复杂度是$O(logn)$，所以可以在多项式时间内得到可满足的最短时间T^*。

1.2 Rounding

T^*对应的最优解X^*中包含$m \times n$个变量，确定$m \times n$个变量需要$m \times n$个线性无关等式，(2)中第一个约束和第二个约束分别有m, n个等式，那么第三个约束还需要提供$m \times n - (m+n)$个等式关系。已知，线性规划问题的最优解一定落在可行域的边缘，所以至少有$m \times n - (m+n)$个$x_{ij} = 0$，即最多有$m+n$个$x_{ij} \neq 0$。

以n个任务和m个机器为节点，x_{ij}为边的权重（不考虑零权重边），构造一个任务分配关系的二部图，根据上述分析，二部图中最多有$m+n$条

边。现通过在保证个机器负载不增加的前提下，调整任务分配，删除二部图中的环路，将二部图转化为树。

下面进行任务分配，任务叶子节点直接分配给直接相连的机器。树的其他部分，以任务节点为根节点，得到任务节点和机器节点逐层交替的多叉树结构，每个任务都分配给它的某一子节点。

多叉树结构保证了每个机器最多分配到一个任务，而每个任务的$t_{ij} \leq T^*$，则这样得到的任务分配方案，对应的运行时间$\overline{T^*} \leq 2T^*$，即近似比为2。

Homework

用上述思路求解其他NP难问题，给出近似比≤ 3的算法及证明