研究生公共基础课

矩 阵 论

第五章 矩阵分析

本章在引入向量和矩阵的范数及极限的基础上, 借助矩阵的幂级数来定义矩阵函数, 同时讨论函数矩阵的微分和积分, 最后介绍它们在求解微分方程组中的应用.

§5.1 向量范数

§5.1 向量范数

1. 向量范数的概念

§5.1 向量范数

1. 向量范数的概念

定义 5.1 设V是数域F上的线性空间, 且对于V的任一个向量$\boldsymbol{x}$, 对应一个非负实数$\|\boldsymbol{x}\|$, 满足以下条件:

① 正定性: $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$当且仅当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

② 齐次性: $\|a\boldsymbol{x}\| = |a| \cdot \|\boldsymbol{x}\|, a \in F$;

③ 三角不等式: 对任意$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 都有$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

则称$\|\boldsymbol{x}\|$为向量$\boldsymbol{x}$的范数, 称$[V; \|\cdot\|]$为赋范空间.

例 5.1 在n维酉空间$\mathbb{C}^n$中, 复向量$\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$的长度

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|\ x_1\ |^2 + |\ x_2\ |^2 + \cdots + |\ x_n\ |^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_2$.

例 5.1 在n维酉空间$\mathbb{C}^n$中, 复向量$\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$的长度

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|\ x_1\ |^2 + |\ x_2\ |^2 + \cdots + |\ x_n\ |^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_2$.

例 5.2 证明$\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_i |\ x_i\ |$是$\mathbb{C}^n$上的一种范数. 其中$\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T \in \mathbb{C}^n$.

例 5.1 在n维酉空间$\mathbb{C}^n$中, 复向量$\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$的长度

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_2$.

例 5.2 证明$\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_i |x_i|$是$\mathbb{C}^n$上的一种范数. 其中$\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T \in \mathbb{C}^n$.

证明 当$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$时, $x_1, x_2, \cdots, x_n$不全为零, 故$\|\boldsymbol{x}\| = \max_i |x_i| > 0$; $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, 当且仅当$x_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 即$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

例 5.1 在n维酉空间$\mathbb{C}^n$中, 复向量$\boldsymbol{x}=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$的长度

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}$$

就是一种向量范数. 通常称这种范数为2-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_2$.

例 5.2 证明$\|\boldsymbol{x}\|=\max\limits_i|x_i|$是$\mathbb{C}^n$上的一种范数. 其中$\boldsymbol{x}=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T\in\mathbb{C}^n$.

证明 当$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$时, $x_1, x_2, \cdots, x_n$不全为零, 故$\|\boldsymbol{x}\|=\max_i|x_i|>0$; $\|\boldsymbol{x}\|=0$, 当且仅当$x_i=0(i=1, 2, \cdots, n)$, 即$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

对任意$a \in F$, 有

$$\|a\boldsymbol{x}\| = \max_i \mid ax_i \mid = \mid a \mid \max_i \mid x_i \mid = \mid a \mid \|\boldsymbol{x}\|.$$

对任意$a \in F$, 有

$$\|a\boldsymbol{x}\| = \max_i \mid ax_i \mid = \mid a \mid \max_i \mid x_i \mid = \mid a \mid \|\boldsymbol{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意$\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| &= \max_i \mid x_i + y_i \mid \leq \max_i \mid x_i \mid + \max_i \mid y_i \mid \\ &= \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

对任意$a \in F$, 有

$$\|a\boldsymbol{x}\| = \max_i |ax_i| = |a| \max_i |x_i| = |a| \, \|\boldsymbol{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意$\boldsymbol{y} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| &= \max_i |x_i + y_i| \le \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \\ &= \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

故$\|\boldsymbol{x}\| = \max_i |x_i|$是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$\infty$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. ■

对任意$a \in F$, 有

$$\|a\boldsymbol{x}\| = \max_i \mid ax_i \mid = \mid a \mid \max_i \mid x_i \mid = \mid a \mid \|\boldsymbol{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意$\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| &= \max_i \mid x_i + y_i \mid \leq \max_i \mid x_i \mid + \max_i \mid y_i \mid \\ &= \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

故$\|\boldsymbol{x}\| = \max_i \mid x_i \mid$是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$\infty$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. ■

注 5.1 $\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$也是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为1-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_1$.

对任意$a \in F$, 有

$$\|a\boldsymbol{x}\| = \max_i \mid ax_i \mid = \mid a \mid \max_i \mid x_i \mid = \mid a \mid \|\boldsymbol{x}\|.$$

最后, 我们来证明三角不等式. 对任意$\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| &= \max_i \mid x_i + y_i \mid \leq \max_i \mid x_i \mid + \max_i \mid y_i \mid \\ &= \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

故$\|\boldsymbol{x}\| = \max_i \mid x_i \mid$是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$\infty$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. ■

注 5.1 $\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$也是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为1-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_1$.

一般地, $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\ x_i\ |^p\right)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < +\infty)$也是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$p$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_p$.

一般地, $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\ x_i\ |^p\right)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < +\infty)$也是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$p$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_p$.

例 5.3 设A是任意一个n阶正定矩阵, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是一个$n$维列向量. 证明

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

是一种向量范数, 称为加权范数或椭圆范数.

一般地, $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} (1 \le p < +\infty)$也是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$p$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_p$.

例 5.3 设A是任意一个n阶正定矩阵, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是一个$n$维列向量. 证明

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

是一种向量范数, 称为加权范数或椭圆范数.

证明 因为A正定, 所以$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} \ge 0$, 且$\|\boldsymbol{x}\|_A = 0$当且仅当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

一般地, $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p\right)^{\frac{1}{p}} (1 \le p < +\infty)$也是$\mathbb{C}^n$上的一种向量范数, 称这种范数为$p$-范数, 记作$\|\boldsymbol{x}\|_p$.

例 5.3 设A是任意一个n阶正定矩阵, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$是一个$n$维列向量. 证明

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

是一种向量范数, 称为加权范数或椭圆范数.

证明 因为A正定, 所以$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} \ge 0$, 且$\|\boldsymbol{x}\|_A = 0$当且仅当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

又对任意$a \in \mathbb{R}$, 有

$$\|a\boldsymbol{x}\|_A = ((a\boldsymbol{x})^T A (a\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{2}} = (a^2 \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\ a\ |\ \|\boldsymbol{x}\|_A.$$

$$= |\, a \,|\, \|\boldsymbol{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为A正定, 所以存在可逆矩阵P,使$P^TAP = I$, 从而

$$= |\, a \,|\, \|\boldsymbol{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为A正定, 所以存在可逆矩阵P,使$P^TAP = I$, 从而

$$A = (P^T)^{-1}P^{-1} = B^TB,$$

其中$B = P^{-1}$为可逆矩阵, 于是

$$= |a| \, \|\boldsymbol{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为A正定, 所以存在可逆矩阵P,使$P^TAP = I$, 从而

$$A = (P^T)^{-1}P^{-1} = B^TB,$$

其中$B = P^{-1}$为可逆矩阵, 于是

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{x}^TB^TB\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = ((B\boldsymbol{x})^TB\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|B\boldsymbol{x}\|_2,$$

故

$$= |\, a \,|\, \|\boldsymbol{x}\|_A.$$

最后, 我们三角不等式. 因为A正定, 所以存在可逆矩阵P,使$P^TAP = I$, 从而

$$A = (P^T)^{-1}P^{-1} = B^TB,$$

其中$B = P^{-1}$为可逆矩阵, 于是

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|_A &= (\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{x}^TB^TB\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = ((B\boldsymbol{x})^TB\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} \\ &= \|B\boldsymbol{x}\|_2,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_A &= \|B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|_2 = \|B\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{y}\|_2 \\ &\le \|B\boldsymbol{x}\|_2 + \|B\boldsymbol{y}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_A + \|\boldsymbol{x}\|_A.\end{aligned}$$

■

2. 向量范数的连续性与等价性

2. 向量范数的连续性与等价性

定理 5.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$\mathbb{C}^n$空间的一组基, $\|\boldsymbol{x}\|$是$\mathbb{C}^n$空间的任意一个向量范数, 则对任意$\varepsilon > 0$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i \in \mathbb{C}^n$, 存在$\delta > 0$, 当$|\ a_i - b_i\ | < \delta (i = 1, 2, \cdots, n)$时, 有

$$|\ \|\alpha\| - \|\beta\|\ | < \varepsilon.$$

向量范数
Home Page
Title Page
Page 8 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

2. 向量范数的连续性与等价性

定理 5.1 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$\mathbb{C}^n$空间的一组基, $\|\boldsymbol{x}\|$是$\mathbb{C}^n$空间的任意一个向量范数, 则对任意$\varepsilon > 0$, $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\alpha_i \in \mathbb{C}^n$, 存在$\delta > 0$, 当$|\ a_i - b_i\ | < \delta (i = 1, 2, \cdots, n)$时, 有

$$|\ \|\alpha\| - \|\beta\|\ | < \varepsilon.$$

证明 令$M = \max\limits_i \{\|\alpha_i\|\}$, 则$M > 0$, 选取$\delta$, 使得$0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{nM}$. 对任意向量$\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, 当$|\ a_i - b_i\ | < \delta(i =$

$1, 2, \cdots, n$)时, 有

$1, 2, \cdots, n$)时, 有

$$
\begin{aligned}
|\,\|\alpha\| - \|\beta\|\,| \le \|\alpha - \beta\| &\le \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\alpha_i \right\| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |\, a_i - b_i \,|\, \|\alpha_i\| \le M \sum_{i=1}^{n} |\, a_i - b_i \,| < \varepsilon. \blacksquare
\end{aligned}
$$

$1, 2, \cdots, n)$时, 有

$$\left|\, \|\alpha\| - \|\beta\| \,\right| \leq \|\alpha - \beta\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\alpha_i \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\, a_i - b_i \,| \, \|\alpha_i\| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\, a_i - b_i \,| < \varepsilon. \blacksquare$$

定义 5.2 设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$与$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是线性空间V上定义的两种范数. 如果存在正数c_1与c_2, 使得

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^{(2)} \leq \|\boldsymbol{x}\|^{(1)} \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in V, \tag{5-1}$$

$1, 2, \cdots, n$)时, 有

$$| \, \|\alpha\| - \|\beta\| \, | \le \|\alpha - \beta\| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\alpha_i \right\|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | \, \|\alpha_i\| \le M \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | < \varepsilon. \blacksquare$$

定义 5.2 设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$与$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是线性空间V上定义的两种范数. 如果存在正数c_1与c_2, 使得

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^{(2)} \le \|\boldsymbol{x}\|^{(1)} \le c_2\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}, \ \forall \, \boldsymbol{x} \in V, \tag{5-1}$$

则称这两个向量范数是等价的.

$1, 2, \cdots, n)$时, 有

$$\big|\,\|\alpha\| - \|\beta\|\,\big| \le \|\alpha - \beta\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)\alpha_i\right\|$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} |\, a_i - b_i \,|\, \|\alpha_i\| \le M\sum_{i=1}^{n} |\, a_i - b_i \,| < \varepsilon.\blacksquare$$

定义 5.2 设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$与$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是线性空间V上定义的两种范数. 如果存在正数c_1与c_2, 使得

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^{(2)} \le \|\boldsymbol{x}\|^{(1)} \le c_2\|\boldsymbol{x}\|^{(2)},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in V, \tag{5-1}$$

则称这两个向量范数是等价的.

定理 5.2 有限维线性空间的任意两种向量范数都是等价的.

向量范数
Home Page
Title Page
Page 9 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$1, 2, \cdots, n$)时, 有

$$| \|\alpha\| - \|\beta\| | \le \|\alpha - \beta\| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\alpha_i \right\|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | \|\alpha_i\| \le M \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | < \varepsilon. \blacksquare$$

定义 5.2 设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$与$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是线性空间V上定义的两种范数. 如果存在正数c_1与c_2, 使得

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^{(2)} \le \|\boldsymbol{x}\|^{(1)} \le c_2\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}, \ \forall \ \boldsymbol{x} \in V, \qquad (5\text{-}1)$$

则称这两个向量范数是等价的.

定理 5.2 有限维线性空间的任意两种向量范数都是等价的.

证明 因为n维线性空间V和$\mathbb{C}^n$空间是同构的, 所以只就$\mathbb{C}^n$空间来证明.

证明 因为n维线性空间V和$\mathbb{C}^n$空间是同构的, 所以只就$\mathbb{C}^n$空间来证明.

设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$和$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是$\mathbb{C}^n$空间的任意两种范数. 当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时, 不等式$(5-1)$显然满足.

向量范数
Home Page
Title Page
Page 10 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明 因为n维线性空间V和$\mathbb{C}^n$空间是同构的, 所以只就$\mathbb{C}^n$空间来证明.

设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$和$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是$\mathbb{C}^n$空间的任意两种范数. 当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时, 不等式$(5-1)$显然满足.

下面证明对$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 不等式$(5-1)$也成立.

证明　因为n维线性空间V和$\mathbb{C}^n$空间是同构的, 所以只就$\mathbb{C}^n$空间来证明.

设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$和$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是$\mathbb{C}^n$空间的任意两种范数. 当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$时, 不等式(5 − 1)显然满足.

下面证明对$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 不等式(5 − 1)也成立. 在$\mathbb{C}^n$空间中, 单位球面

$$S_1=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|^{(1)}=1\},$$
$$S_2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|^{(2)}=1\}$$

是有界闭集. $\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$和$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$都是S_1与S_2上的连续函数, 于是可取到最大值, 设

向量范数
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 10 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明　因为n维线性空间V和$\mathbb{C}^n$空间是同构的, 所以只就$\mathbb{C}^n$空间来证明.

设$\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$和$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$是$\mathbb{C}^n$空间的任意两种范数. 当$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$时, 不等式$(5-1)$显然满足.

下面证明对$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 不等式$(5-1)$也成立. 在$\mathbb{C}^n$空间中, 单位球面

$$S_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|^{(1)} = 1\},$$
$$S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|^{(2)} = 1\}$$

是有界闭集. $\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}$和$\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$都是S_1与S_2上的连续函数, 于是可取到最大值, 设

$$t_1 = \max_{\boldsymbol{x} \in S_1} \{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}\},$$
$$t_2 = \max_{\boldsymbol{x} \in S_2} \{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}\},$$

向量范数
Home Page
Title Page
Page 10 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

则t_1, $t_2 > 0$, 对任意$\boldsymbol{x} \neq 0$, 有$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}} \in S_1$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}} \in S_2$, 于是

则t_1，$t_2 > 0$，对任意$\boldsymbol{x} \neq 0$，有$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}} \in S_1$，$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}} \in S_2$，于是

$$t_1 \geq \left\| \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}} \right\|^{(2)} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}},$$

$$t_2 \geq \left\| \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}} \right\|^{(1)} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}. \qquad \blacksquare$$

则t_1, $t_2>0$, 对任意$\boldsymbol{x}\neq 0$, 有$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}\in S_1$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}\in S_2$, 于是

$$t_1\geq \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}\right\|^{(2)}=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}},$$

$$t_2\geq \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}\right\|^{(1)}=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}. \qquad \blacksquare$$

取$c_2=t_2$, $c_1=1/t_1$, 就有

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}\leq\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}\leq c_2\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}.\blacksquare$$

则$t_1,\ t_2>0$, 对任意$\boldsymbol{x}\neq 0$, 有$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}\in S_1$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}\in S_2$, 于是

$$t_1 \geq \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}\right\|^{(2)} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}},$$

$$t_2 \geq \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}\right\|^{(1)} = \frac{\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}}{\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}}. \qquad \blacksquare$$

取$c_2=t_2$, $c_1=1/t_1$, 就有

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^{(2)} \leq \|\boldsymbol{x}\|^{(1)} \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}.\blacksquare$$

§5.2 矩阵范数

§5.2 矩阵范数

矩阵空间$\mathbb{C}^{m\times n}$是一个mn维线性空间, 将$m\times n$矩阵A看作线性空间$\mathbb{C}^{m\times n}$中的向量, 可以按向量范数的办法来定义范数. 但是, 矩阵之间还有乘法运算, 它应该在定义矩阵时予以体现. 本书只涉及方阵的范数, 至于不是方阵的范数可类似定义.

1. 矩阵范数的概念

§5.2 矩阵范数

矩阵空间$\mathbb{C}^{m\times n}$是一个mn维线性空间，将$m\times n$矩阵A看作线性空间$\mathbb{C}^{m\times n}$中的向量，可以按向量范数的办法来定义范数．但是，矩阵之间还有乘法运算，它应该在定义矩阵时予以体现．本书只涉及方阵的范数，至于不是方阵的范数可类似定义．

1. 矩阵范数的概念

定义 5.3 设$\mathbb{F}^{n\times n}$上定义一个非负实数函数，使得对任意矩阵$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，对应一个非负实数$\|A\|$，满足以下四个条件：

① 正定性：$\|A\|\geq 0$，$\|A\|=0$当且仅当$A=\mathbf{0}$；

② 齐次性: $\|aA\| = |a|\,\|A\|, a \in \mathbb{F}$;

③ 三角不等式: 对任意$A,\ B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

④ 相容性: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

向量范数

Home Page

Title Page

Page 13 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

② 齐次性: $\|aA\| = |a|\,\|A\|, a \in \mathbb{F}$;

③ 三角不等式: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

④ 相容性: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

则称$\|A\|$为矩阵A的范数.

② 齐次性: $\|aA\| = |a|\,\|A\|, a \in \mathbb{F}$;

③ 三角不等式: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

④ 相容性: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

则称$\|A\|$为矩阵A的范数.

例 5.4 证明: 对任意$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$是矩阵范数.

② 齐次性: $\|aA\| = |a| \, \|A\|, a \in \mathbb{F}$;

③ 三角不等式: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

④ 相容性: 对任意$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 都有$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

则称$\|A\|$为矩阵A的范数.

例 5.4 证明: 对任意$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$是矩阵范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则

证明　正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}+b_{ij}\mid \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\mid a_{ij}\mid+\mid b_{ij})\mid \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}\mid+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mid b_{ij}\mid=\|A\|+\|B\|,\end{aligned}$$

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\|A+B\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij})|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|=\|A\|+\|B\|,$$

$$\|AB\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{i1}b_{1j}|+\cdots+|a_{in}b_{nj}|)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}(|a_{i1}|+\cdots+|a_{in}|)\cdot\sum_{j=1}^{n}(|b_{1j}|+\cdots+|b_{nj}|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | = \|A\|\|B\|. \blacksquare \qquad \blacksquare$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | = \|A\|\|B\|.\blacksquare \qquad \blacksquare$$

例 5.5 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}} = [\mathrm{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为Frobenius范数, 简称为F-范数.

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | = \|A\|\|B\|. \blacksquare \qquad \blacksquare$$

例 5.5 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}} = [\mathrm{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为Frobenius范数, 简称为F-范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|=\|A\|\|B\|.\blacksquare \qquad \blacksquare$$

例 5.5 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 证明

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=[\mathrm{tr}(A^HA)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为Frobenius范数, 简称为F-范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则

向量范数
Home Page
Title Page
Page 15 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | = \|A\|\|B\|. \blacksquare \qquad \blacksquare$$

例 5.5 设$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 证明

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}} = [\mathrm{tr}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$$

是矩阵范数. 称其为Frobenius范数, 简称为F-范数.

证明 正定性与齐次性容易验证, 下证三角不等式与相容性满足.

设$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\|A + B\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} + b_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid b_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|A\|_F + \|B\|_F,$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid b_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\|_F + \|B\|_F,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mid \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \mid^2\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mid b_{kj} \mid^2\right)\right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid b_{kj} \mid^2\right) \\
&= \|A\|_F^2\|B\|_F^2. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid b_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|A\|_F + \|B\|_F,$$

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mid \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \mid^2\right)\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mid b_{kj} \mid^2\right)\right]\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mid a_{ik} \mid^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid b_{kj} \mid^2\right)\\ &= \|A\|_F^2\|B\|_F^2.\end{aligned}$$

■

注 5.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$是矩阵$A$的奇异值, 则

$$\operatorname{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2.$$

注 5.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$是矩阵$A$的奇异值, 则

$$\operatorname{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

注 5.2 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$是矩阵$A$的奇异值, 则

$$\mathrm{tr}(A^HA)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

定义 5.4 设$\|\boldsymbol{x}\|$是向量范数, $\|A\|$是矩阵范数, 若

$$\|A\boldsymbol{x}\|\le\|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|,$$

注 5.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$是矩阵$A$的奇异值, 则

$$\mathrm{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

定义 5.4 设$\|\boldsymbol{x}\|$是向量范数, $\|A\|$是矩阵范数, 若

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|,$$

则称矩阵范数$\|A\|$与向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

注 5.2 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$是矩阵$A$的奇异值, 则

$$\mathrm{tr}(A^HA)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2,$$

故

$$\|A\|_F=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_r^2.$$

2. 诱导范数

定义 5.4 设$\|\boldsymbol{x}\|$是向量范数, $\|A\|$是矩阵范数, 若

$$\|A\boldsymbol{x}\|\leq\|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|,$$

则称矩阵范数$\|A\|$与向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

注 5.3 矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的. 这是因为, 由

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ \|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

注 5.3 矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的. 这是因为, 由

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ \|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned}
\|A\boldsymbol{x}\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} | \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j |^2\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^2\right)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^2\right) = \|A\|_F^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2,
\end{aligned}$$

注 5.3 矩阵的F-范数与向量的2-范数是相容的. 这是因为, 由

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ \|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} | \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j |^2\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^2\right)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} | x_j |^2\right) = \|A\|_F^2\|\boldsymbol{x}\|_2^2,\end{aligned}$$

于是 $$\|A\boldsymbol{x}\|_2 \le \|A\|_F\|\boldsymbol{x}\|_2.$$

定理 5.3 设$\|\boldsymbol{x}\|$是向量范数, 则

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\}$$

是与向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$相容的矩阵范数. 称其为由向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$所诱导的诱导范数.

定理 5.3 设$\|\boldsymbol{x}\|$是向量范数, 则

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\}$$

是与向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$相容的矩阵范数. 称其为由向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$所诱导的诱导范数.

证明 正定性与齐次性显然.

定理 5.3 设$\|\boldsymbol{x}\|$是向量范数, 则

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\}$$

是与向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$相容的矩阵范数. 称其为由向量范数$\|\boldsymbol{x}\|$所诱导的诱导范数.

证明 正定性与齐次性显然.

根据向量范数的三角不等式, 有

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|(A+B)\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} \\
&\le \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|+\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} \\
&\le \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} + \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \left\{ \frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} = \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

下证矩阵范数的相容性. 设$B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\ &\leq \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\right\}\cdot\max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\ &\leq \|A\|\cdot\|B\|. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

下证矩阵范数的相容性. 设$B \neq \mathbf{0}$, 则

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\
&\leq \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\right\}\cdot\max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\
&\leq \|A\|\cdot\|B\|. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$B = \mathbf{0}$或存在$\boldsymbol{x}$, 使$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明$\|A\|$与$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

下证矩阵范数的相容性. 设$B \neq \mathbf{0}$, 则

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|} \cdot \frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} \\
&\leq \max_{\boldsymbol{x}\neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|} \right\} \cdot \max_{\boldsymbol{x}\neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} \\
&\leq \|A\| \cdot \|B\|. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$B = \mathbf{0}$或存在$\boldsymbol{x}$, 使$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明$\|A\|$与$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

$$
\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \right\} \geq \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},
$$

下证矩阵范数的相容性. 设$B \neq \mathbf{0}$, 则

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\
&\leq \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\right\}\cdot\max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\
&\leq \|A\|\cdot\|B\|. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$B = \mathbf{0}$或存在$\boldsymbol{x}$, 使$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明$\|A\|$与$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

$$
\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \geq \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},
$$

所以

$$
\|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|. \qquad \blacksquare
$$

下证矩阵范数的相容性. 设$B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\}\\ &\leq \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\right\}\cdot\max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\}\\ &\leq \|A\|\cdot\|B\|. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

$B = \mathbf{0}$或存在$\boldsymbol{x}$, 使$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明$\|A\|$与$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \geq \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},$$

所以

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|. \qquad \blacksquare$$

注 5.4 由$\|\boldsymbol{x}\|_p$所诱导的矩阵范数称为矩阵的p-范数.

下证矩阵范数的相容性. 设$B \neq \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\ &\leq \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A(B\boldsymbol{x})\|}{\|B\boldsymbol{x}\|}\right\}\cdot\max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \\ &\leq \|A\|\cdot\|B\|. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

$B = \mathbf{0}$或存在$\boldsymbol{x}$, 使$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 上面的推导仍成立. 最后, 我们来证明$\|A\|$与$\|\boldsymbol{x}\|$是相容的.

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\} \geq \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},$$

所以
$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|. \qquad \blacksquare$$

注 5.4 由$\|\boldsymbol{x}\|_p$所诱导的矩阵范数称为矩阵的p-范数.

我们不加证明地给出三种p-范数的计算方法:

① $\|A\|_1 = \max\limits_{j} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\ a_{ij}\ | \right)$, 称为列和范数;

② $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1为$A^H A$的最大特征值, 称为谱范数;

③ $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |\ a_{ij}\ | \right)$, 称为行和范数.

① $\|A\|_1 = \max\limits_{j}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} |\right)$, 称为列和范数;

② $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1为$A^H A$的最大特征值, 称为谱范数;

③ $\|A\|_\infty = \max\limits_{i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |\right)$, 称为行和范数.

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}\ \ x_2^{(k)}\ \ \cdots\ \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \ldots$ 是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 如果当$k \to +\infty$时, 它的n个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \cdots \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \ldots$ 是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 如果当$k \to +\infty$时, 它的n个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i, \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是按分量收敛的. 向量$\alpha = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)^T$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \alpha$或$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \alpha$.

向量范数

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 22 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§5.3　向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5　设$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}\ \ x_2^{(k)}\ \ \cdots\ \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \ldots$ 是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 如果当$k \to +\infty$时, 它的n个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是按分量收敛的. 向量$\alpha = (a_1\ a_2\ \ \cdots\ \ a_n)^T$ 是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \alpha$或$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \alpha$.

如果至少有一个分量数列是发散的, 则称向量序列是发散的.

§5.3 向量序列和矩阵序列的极限

定义 5.5 设$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}\ \ x_2^{(k)}\ \ \cdots\ \ x_n^{(k)})^T, k = 1, 2, \ldots$ 是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 如果当$k \to +\infty$时, 它的n个分量数列都收敛, 即

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是按分量收敛的. 向量$\alpha = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \alpha$或$\boldsymbol{x}^{(k)} \to \alpha$.

如果至少有一个分量数列是发散的, 则称向量序列是发散的.

定义 5.6 设$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, $\|\boldsymbol{x}\|$是$\mathbb{C}^n$

空间的一个向量范数. 如果存在向量$\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当$k \to \infty$时, 有$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha\| \to 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于$\alpha$.

空间的一个向量范数. 如果存在向量$\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当$k \to \infty$时, 有$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha\| \to 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于$\alpha$.

定理 5.4 设$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 它按分量收敛的充分必要条件是它按$\mathbb{C}^n$空间的任意一个向量范数收敛.

空间的一个向量范数. 如果存在向量$\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当$k \to \infty$时, 有$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha\| \to 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于$\alpha$.

定理 5.4 设$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 它按分量收敛的充分必要条件是它按$\mathbb{C}^n$空间的任意一个向量范数收敛.

证明 利用范数的等价性,取$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$来证明. ■

空间的一个向量范数. 如果存在向量$\alpha \in \mathbb{C}^n$, 当$k \to \infty$时, 有$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha\| \to 0$, 则称向量序列按向量的范数收敛于$\alpha$.

定理 5.4 设$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^n$空间的一个向量序列, 它按分量收敛的充分必要条件是它按$\mathbb{C}^n$空间的任意一个向量范数收敛.

证明 利用范数的等价性,取$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$来证明. ■

定义 5.7 设$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\{A^{(k)}\}$是一个矩阵序列. 如果当$k \to \infty$时, 它的n^2个数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$都收敛, 即

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$按元素数列收敛. 矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$或$A^{(k)} \to A$.

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$按元素数列收敛. 矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$或$A^{(k)}\to A$.

如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是发散的.

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$按元素数列收敛. 矩阵$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$或$A^{(k)}\to A$.
如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是发散的.

矩阵序列有如下性质:

① 设$A^{(k)}\to A$, $B^{(k)}\to B$, 则

$$aA^{(k)}+bB^{(k)}\to aA+bB,\ \ a,\ b\in\mathbb{C}.$$

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$按元素数列收敛. 矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$或$A^{(k)} \to A$.
如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是发散的.

矩阵序列有如下性质:

① 设$A^{(k)} \to A$, $B^{(k)} \to B$, 则

$$aA^{(k)} + bB^{(k)} \to aA + bB, \quad a,\, b \in \mathbb{C}.$$

② 设$A^{(k)} \to A$, $B^{(k)} \to B$, 则

$$A^{(k)}B^{(k)} \to AB.$$

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$按元素数列收敛. 矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$是它的极限, 记为$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$或$A^{(k)} \to A$.

如果至少有一个元素数列是发散的, 则称矩阵序列是发散的.

矩阵序列有如下性质:

① 设$A^{(k)} \to A$, $B^{(k)} \to B$, 则

$$aA^{(k)} + bB^{(k)} \to aA + bB, \quad a,\ b \in \mathbb{C}.$$

② 设$A^{(k)} \to A$, $B^{(k)} \to B$, 则

$$A^{(k)}B^{(k)} \to AB.$$

③ 设$A^{(k)}$与A都是可逆矩阵, 且$A^{(k)} \to A$, 则

$$(A^{(k)})^{-1} \to A^{-1}.$$

③ 设$A^{(k)}$与A都是可逆矩阵, 且$A^{(k)} \to A$, 则

$$(A^{(k)})^{-1} \to A^{-1}.$$

定义 5.8 设$\{A^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵序列, $\|A\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵范数. 如果存在矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 当$k \to \infty$时, 有$\|A^{(k)} - A\| \to 0$, 则称矩阵序列按矩阵的范数收敛于$A$.

③ 设$A^{(k)}$与A都是可逆矩阵, 且$A^{(k)} \to A$, 则
$$(A^{(k)})^{-1} \to A^{-1}.$$

定义 5.8 设$\{A^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵序列, $\|A\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵范数. 如果存在矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 当$k \to \infty$时, 有$\|A^{(k)} - A\| \to 0$, 则称矩阵序列按矩阵的范数收敛于$A$.

定理 5.5 设$\{A^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵序列, 它按元素数列收敛的充分必要条件是它按$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的任意一个矩阵范数收敛.

③ 设$A^{(k)}$与A都是可逆矩阵, 且$A^{(k)} \to A$, 则

$$(A^{(k)})^{-1} \to A^{-1}.$$

定义 5.8 设$\{A^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵序列, $\|A\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵范数. 如果存在矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 当$k \to \infty$时, 有$\|A^{(k)} - A\| \to 0$, 则称矩阵序列按矩阵的范数收敛于$A$.

定理 5.5 设$\{A^{(k)}\}$是$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的一个矩阵序列, 它按元素数列收敛的充分必要条件是它按$\mathbb{C}^{n\times n}$空间的任意一个矩阵范数收敛.

定义 5.9 矩阵序列$\{A^{(k)}\}$是有界的,如果存在常数$M>0$, 使得对所有k都有

$$|a_{ij}^{(k)}|<M,\ \ i,j=1,2,\cdots,n.$$

定义 5.9 矩阵序列$\{A^{(k)}\}$是有界的,如果存在常数$M > 0$, 使得对所有k都有

$$\mid a_{ij}^{(k)} \mid < M, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

在矩阵序列中, 是常见的是由一个方阵的幂构成的序列, 关于这样的矩阵序列有以下概念和结果.

定义 5.10 设A为方阵, 且当$k \to \infty$时有$A^k \to 0$, 则称A为收敛矩阵.

定义 5.9 矩阵序列$\{A^{(k)}\}$是有界的,如果存在常数$M > 0$, 使得对所有k都有

$$| a_{ij}^{(k)} | < M, \ \ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

在矩阵序列中, 是常见的是由一个方阵的幂构成的序列, 关于这样的矩阵序列有以下概念和结果.

定义 5.10 设A为方阵, 且当$k \to \infty$时有$A^k \to 0$, 则称A为收敛矩阵.

例 5.6 对n阶方阵A的方幂所作成的矩阵序列$\{A^k\}$, 如果对某一种矩阵范数有$\|A\| < 1$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, 即$A$为收敛矩阵.

向量范数
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 26 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定义 5.9 矩阵序列$\{A^{(k)}\}$是有界的,如果存在常数$M > 0$, 使得对所有k都有

$$| a_{ij}^{(k)} | < M, \ \ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

在矩阵序列中, 是常见的是由一个方阵的幂构成的序列, 关于这样的矩阵序列有以下概念和结果.

定义 5.10 设A为方阵, 且当$k \to \infty$时有$A^k \to 0$, 则称A为收敛矩阵.

例 5.6 对n阶方阵A的方幂所作成的矩阵序列$\{A^k\}$, 如果对某一种矩阵范数有$\|A\| < 1$, 则$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, 即$A$为收敛矩阵.

证明 由矩阵范数的相容性, 有$\|A^k\| \leq \|A\|^k$, 又$\|A\| < 1$, 所以$\lim\limits_{k\to\infty}\|A^k\| = 0$, 由定理5.5, 得$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. ∎

证明 由矩阵范数的相容性, 有$\|A^k\| \le \|A\|^k$, 又$\|A\| < 1$, 所以$\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$, 由定理5.5, 得$\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. ■

§5.4 矩阵幂级数

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则称$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$为$A$的谱半径.

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则称$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$为$A$的谱半径.

所以,A的全部特征值分布在复平面上以原点为中心,$\rho(A)$为半径的圆盘上.

向量范数
Home Page
Title Page
Page 28 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则称$\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i|$为$A$的谱半径.

所以,A的全部特征值分布在复平面上以原点为中心,$\rho(A)$为半径的圆盘上.

例 5.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\rho(A^k) = (\rho(A))^k.$$

§5.4 矩阵幂级数

1. 谱半径

定义 5.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则称$\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i|$为$A$的谱半径.

所以,A的全部特征值分布在复平面上以原点为中心,$\rho(A)$为半径的圆盘上.

例 5.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则

$$\rho(A^k) = (\rho(A))^k.$$

证明 设A的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$A^k$的全部特征值为$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

证明 设A的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$A^k$的全部特征值为$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \to 0(k \to \infty)$的充分必要条件是$\rho(A) < 1$.

证明 设A的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$A^k$的全部特征值为$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \to 0 (k \to \infty)$的充分必要条件是$\rho(A) < 1$.

定理 5.6 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则对$\mathbb{C}^{n\times n}$上任意一种矩阵范数$\|A\|$, 都有

$$\rho(A) \le \|A\|,$$

证明 设A的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$A^k$的全部特征值为$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8 $A^k \to 0 (k \to \infty)$的充分必要条件是$\rho(A) < 1$.

定理 5.6 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则对$\mathbb{C}^{n\times n}$上任意一种矩阵范数$\|A\|$, 都有

$$\rho(A) \le \|A\|,$$

即A的谱半径是A的任意一种范数的下界.

证明　设A的全部特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则$A^k$的全部特征值为$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$, 于是有

$$\rho(A^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = (\rho(A))^k.$$

例 5.8　$A^k \to 0 (k \to \infty)$的充分必要条件是$\rho(A) < 1$.

定理 5.6　设矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则对$\mathbb{C}^{n\times n}$上任意一种矩阵范数$\|A\|$, 都有

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

即A的谱半径是A的任意一种范数的下界.

证明 设λ是A的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$是$\lambda$对应的特征向量, 作一个$n$阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \;\; \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

证明 设λ是A的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$是$\lambda$对应的特征向量, 作一个$n$阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \;\; \boldsymbol{0} \cdots \boldsymbol{0}),$$

则由$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, 有$AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

证明 设λ是A的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$是$\lambda$对应的特征向量, 作一个$n$阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \;\; \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有$AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又$B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以$|\lambda| \leq \|A\|$, 从而$\rho(A) \leq \|A\|$. ■

向量范数

Home Page

Title Page

Page 30 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

证明 设λ是A的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$是$\lambda$对应的特征向量, 作一个$n$阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \ \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, 有$AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又$B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以$|\lambda| \leq \|A\|$, 从而$\rho(A) \leq \|A\|$. ■

定理 5.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在某种矩阵范数$\|A\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

证明 设λ是A的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$是$\lambda$对应的特征向量, 作一个$n$阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \ \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有$AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又$B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以$|\lambda| \leq \|A\|$, 从而$\rho(A) \leq \|A\|$. ■

定理 5.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在某种矩阵范数$\|A\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

即A的谱半径是A的所有矩阵范数的下确界.

证明 设λ是A的任意一个特征值, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$是$\lambda$对应的特征向量, 作一个$n$阶方阵

$$B = (\boldsymbol{x} \ \ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}),$$

则由$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有$AB = \lambda B$. 于是

$$|\lambda| \cdot \|\lambda B\| = \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

又$B \neq \mathbf{0}$, $\|B\| > 0$, 所以$|\lambda| \leq \|A\|$, 从而$\rho(A) \leq \|A\|$. ■

定理 5.7 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则对任意$\varepsilon > 0$, 存在某种矩阵范数$\|A\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

即A的谱半径是A的所有矩阵范数的下确界.

如果在圆周$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho(A)\}$上的特征值$\lambda$对应的Jordan子

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

向量范数
Home Page
Title Page
Page 31 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

一个n阶复方阵A的**数值范围**(或**值域**)定义为

$$W(A) = \{\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}\}.$$

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

一个n阶复方阵A的数值范围(或值域)定义为

$$W(A) = \{\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}\}.$$

对于数值范围$W(A)$, 定义

$$w(A) = \sup\{|\ z\ |\mid z \in W(A)\},$$

称为A的数值半径, 即

$$w(A) = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} |\ \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x}\ |.$$

块都是一阶的, 则

$$\rho(A) = \|A\|_*$$

2. 数值范围

一个n阶复方阵A的数值范围(或值域)定义为

$$W(A) = \{\boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}\}.$$

对于数值范围$W(A)$, 定义

$$w(A) = \sup\{| z | \mid z \in W(A)\},$$

称为A的数值半径, 即

$$w(A) = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} | \boldsymbol{x}^H A\boldsymbol{x} |.$$

定理 5.8 设A是一个复方阵, 则

$$\rho(A) \le w(A) \le \sigma_1(A) \le 2w(A),$$

其中σ_1为A的最大奇异值.

定理 5.8 设A是一个复方阵, 则

$$\rho(A) \le w(A) \le \sigma_1(A) \le 2w(A),$$

其中σ_1为A的最大奇异值.

3. 矩阵幂级数

向量范数
Home Page
Title Page
Page 32 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定理 5.8 设A是一个复方阵, 则

$$\rho(A) \leq w(A) \leq \sigma_1(A) \leq 2w(A),$$

其中σ_1为A的最大奇异值.

3. 矩阵幂级数

定义 5.12 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 称

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k + \cdots$$

为矩阵A的幂级数, 记为$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.

定义 5.13 矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的前$N+1$项的和$S_N(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$称为**矩阵幂级数的部分和**. 若矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的部分和序列$\{S_N(A)\}$收敛, 则称$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$**收敛**; 否则, 称其为**发散**. 若$\lim\limits_{N\to\infty} S_N(A) = S$, 则称$S$为$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的**和矩阵**.

定义 5.13 矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的前$N+1$项的和$S_N(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k$称为矩阵幂级数的部分和. 若矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的部分和序列$\{S_N(A)\}$收敛, 则称$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$收敛; 否则, 称其为发散. 若$\lim_{N\to\infty} S_N(A) = S$, 则称$S$为$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的和矩阵.

定理 5.9 若复变量z的幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$的收敛半径为$R$, 而方阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的谱半径为$\rho(A)$, 则

① 当$\rho(A) < R$时, 矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$收敛;

② 当$\rho(A) > R$时, 矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$发散.

② 当$\rho(A) > R$时, 矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$发散.

证明 对$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 存在可逆矩阵$P$, 使得

$$A = PJP^{-1} = P\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

② 当$\rho(A) > R$时, 矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$发散.

证明 对$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 存在可逆矩阵$P$, 使得

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m(\lambda_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

其中$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, m.$

于是

$$S_N(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P S_N(J) P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} S_N(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_N(J_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

于是

$$S_N(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P S_N(J) P^{-1}$$
$$= P \begin{pmatrix} S_N(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_N(J_m) \end{pmatrix} P^{-1},$$

因此, 矩阵序列$\{S_N(A)\}$收敛当且仅当m个矩阵序列$\{S_N(J_1)\}$收敛, $i = 1, 2, \cdots, m$. 而

于是

$$S_N(A)=\sum_{k=0}^{N}a_kA^k=PS_N(J)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix} S_N(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & S_N(J_m)\end{pmatrix}P^{-1},$$

因此,矩阵序列$\{S_N(A)\}$收敛当且仅当m个矩阵序列$\{S_N(J_1)\}$收敛, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$. 而

$$S_N(J_i)=\begin{pmatrix} S_N(\lambda_i) & S'_N(\lambda_i) & \frac{1}{2!}S''_N(\lambda_i) & \cdots & \frac{S_N^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & S_N(\lambda_i) & S'_N(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & S'_N(\lambda_i) \\ & & & & S_N(\lambda_i)\end{pmatrix},$$

其中$S_N^{(t)}(\lambda_i)$表示$S_N(\lambda)$在$\lambda=\lambda_i$处的t阶导数, n_i是J_i的阶数.

其中$S_N^{(t)}(\lambda_i)$表示$S_N(\lambda)$在$\lambda=\lambda_i$处的t阶导数, n_i是J_i的阶数.

① 若$\rho(A) < R$, 则$|\ \lambda_i\ | < R$, 此时

$$\{S_N(\lambda_i)\}, \{S_N'(\lambda_i)\}, \cdots, \{S_N^{(n_i-1)}(\lambda_i)\}$$

皆收敛, 故$\{S_N(J_i)\}$收敛, 所以$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$收敛.

② 若$\rho(A) > R$, 则存在某个特征值λ_{i_0}, 使$|\ \lambda_{i_0}\ | > R$, 于是幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_{i_0}^k$发散, 从而$\{S_N(J_i)\}$发散, 故$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$发散. ■

其中$S_N^{(t)}(\lambda_i)$表示$S_N(\lambda)$在$\lambda=\lambda_i$处的t阶导数, n_i是J_i的阶数.

① 若$\rho(A)<R$, 则$|\lambda_i|<R$, 此时

$$\{S_N(\lambda_i)\},\ \{S_N'(\lambda_i)\},\ \cdots,\ \{S_N^{(n_i-1)}(\lambda_i)\}$$

皆收敛, 故$\{S_N(J_i)\}$收敛, 所以$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$收敛.

② 若$\rho(A)>R$, 则存在某个特征值λ_{i_0}, 使$|\lambda_{i_0}|>R$, 于是幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_{i_0}^k$发散, 从而$\{S_N(J_i)\}$发散, 故$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA^k$发散. ■

例 5.9 讨论矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I+A+A^2+\cdots+A^k+\cdots$$

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量z的幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$的收敛半径$R = 1$, 故当$\rho(A) < 1$, 即A的所有特征值的模小于时, 矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$收敛.

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量z的幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$的收敛半径$R = 1$, 故当$\rho(A) < 1$, 即$A$的所有特征值的模小于时, 矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$收敛.

当$\rho(A) < 1$时, 1不是A的特征值, $|I - A| \neq 0$, 故$I - A$可逆, 又

$$S_N(A) = I + A + A^2 + \cdots + A^N,$$

$$I - A^{N+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^N) = (I - A)S_N(A), \blacksquare$$

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解 复变量z的幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$的收敛半径$R = 1$, 故当$\rho(A) < 1$, 即$A$的所有特征值的模小于时, 矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$收敛.

当$\rho(A) < 1$时, 1不是A的特征值, $| I - A | \neq 0$, 故$I - A$可逆, 又

$$S_N(A) = I + A + A^2 + \cdots + A^N,$$

$$I - A^{N+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^N) = (I - A)S_N(A),$$

于是
$$\lim_{N\to\infty}(I - A)S_N(A) = \lim_{N\to\infty} I - A^{N+1} = I,$$

的敛散性, 当它收敛时, 求它的和矩阵.

解　复变量z的幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$的收敛半径$R=1$, 故当$\rho(A)<1$, 即A的所有特征值的模小于时, 矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$收敛.

当$\rho(A)<1$时, 1不是A的特征值, $|I-A|\neq 0$, 故$I-A$可逆, 又

$$S_N(A)=I+A+A^2+\cdots+A^N,$$

$$I-A^{N+1}=(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^N)=(I-A)S_N(A),$$

于是 $$\lim_{N\to\infty}(I-A)S_N(A)=\lim_{N\to\infty} I-A^{N+1}=I,$$

故 $$S=\lim_{N\to\infty} S_N(A)=(I-A)^{-1}.$$ ■

注 5.5 ① 当计算A的特征值比较困难时，由定理5.6知A的每个范数都是谱半径$\rho(A)$的上界，只要能找到一种特殊的矩阵范数$\|A\|$，使$\|A\| < R$，便可断定该矩阵幂级数是收敛的.

② 当矩阵的谱半径$\rho(A)$等于幂级数的收敛半径R时，定理5.9的判定方法失效，须单独考虑.

注 5.5 ① 当计算A的特征值比较困难时，由定理5.6知A的每个范数都是谱半径$\rho(A)$的上界，只要能找到一种特殊的矩阵范数$\|A\|$，使$\|A\| < R$，便可断定该矩阵幂级数是收敛的.

② 当矩阵的谱半径$\rho(A)$等于幂级数的收敛半径R时，定理5.9的判定方法失效，须单独考虑.

例 5.10 讨论矩阵幂级数$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$的敛散性，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

向量范数

Home Page

Title Page

Page 38 of 51

Go Back

Full Screen

Close

Quit

注 5.5 ① 当计算A的特征值比较困难时，由定理5.6知A的每个范数都是谱半径$\rho(A)$的上界，只要能找到一种特殊的矩阵范数$\|A\|$，使$\|A\| < R$，便可断定该矩阵幂级数是收敛的.

② 当矩阵的谱半径$\rho(A)$等于幂级数的收敛半径R时，定理5.9的判定方法失效，须单独考虑.

例 5.10 讨论矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$的敛散性，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

解 矩阵A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径$R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知A不能对角化, 于是, 存在可逆阵P, 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 矩阵A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径$R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知A不能对角化, 于是, 存在可逆阵P, 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而

$$A^k = P\begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1},$$

解 矩阵A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径$R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知A不能对角化, 于是, 存在可逆阵P, 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而
$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k = P \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

解 矩阵A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径$R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知A不能对角化, 于是, 存在可逆阵P, 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而
$$A^k = P\begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}P^{-1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k = P\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} \end{pmatrix}P^{-1}$$

由于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$与$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$均收敛, 因此$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}A^k$收敛. ■

解 矩阵A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\rho(A) = 1$, 收敛半径$R = 1$, 不能按定理5.9的判定方法来判断. 直接计算知A不能对角化, 于是, 存在可逆阵P, 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

而
$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^{k-1}k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k = P \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

由于$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$与$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$均收敛, 因此$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$收敛. ■

§5.5 矩阵函数

§5.5 矩阵函数

1. 矩阵函数的定义与性质

§5.5 矩阵函数

1. 矩阵函数的定义与性质

定义 5.14 设$f(z)$是复变量的解析函数, $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k$的收敛半径为$R$, 如果矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的谱半径$\rho(A)<R$, 则称

$$f(A)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k A^k$$

为A的矩阵函数.

§5.5 矩阵函数

1. 矩阵函数的定义与性质

定义 5.14 设$f(z)$是复变量的解析函数, $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kz^k$的收敛半径为$R$, 如果矩阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的谱半径$\rho(A)<R$, 则称

$$f(A)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kA^k$$

为A的矩阵函数.

向量范数
Home Page
Title Page
Page 40 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

例 5.11 函数

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

在整个复平面上都是收敛的, 于是无论$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$是任何矩阵, 有

例 5.11 函数

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

在整个复平面上都是收敛的, 于是无论$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是任何矩阵, 有

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,$$

$$\cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k},$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

分别称之为矩阵A的指数函数, 余弦函数, 正弦函数.

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

分别称之为矩阵A的指数函数, 余弦函数, 正弦函数.

同样地, 由

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

在复平面$|\ z\ | < 1$内是收敛的, 于是对$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 当$\rho(A) < 1$时, 有

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

分别称之为矩阵A的指数函数, 余弦函数, 正弦函数.

同样地, 由

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

在复平面$|\ z\ |< 1$内是收敛的, 于是对$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 当$\rho(A) < 1$时, 有

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

向量范数
Home Page
Title Page
Page 42 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

$$\ln(I+A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k.$$

$$\ln(I+A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k.$$

需要注意的是, 数学分析中关于基本初等函数的许多运算性质, 在矩阵分析中一般不再成立, 例如

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^B\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^{A+B}$$

一般不成立.

$$\ln(I+A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k.$$

需要注意的是, 数学分析中关于基本初等函数的许多运算性质, 在矩阵分析中一般不再成立, 例如

$$e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$$

一般不成立. 令$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$, 则

$$e^Ae^B=\begin{pmatrix}e^2&-(e-1)^2\\0&1\end{pmatrix},\quad e^Be^A=\begin{pmatrix}e^2&(e-1)^2\\0&1\end{pmatrix}$$

而$e^{A+B}=\begin{pmatrix}e^2&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$$\ln(I+A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}A^k.$$

需要注意的是, 数学分析中关于基本初等函数的许多运算性质, 在矩阵分析中一般不再成立, 例如

$$e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$$

一般不成立. 令$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$, 则

$$e^Ae^B=\begin{pmatrix}e^2&-(e-1)^2\\0&1\end{pmatrix},\quad e^Be^A=\begin{pmatrix}e^2&(e-1)^2\\0&1\end{pmatrix}$$

而$e^{A+B}=\begin{pmatrix}e^2&0\\0&1\end{pmatrix}$.

但是, 如果矩阵A和B可交换, 就有$e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$. 同样地, 在A和B可交换的条件下, 数学分析中许多三角恒等

式也可以推广到矩阵分析中, 例如

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

式也可以推广到矩阵分析中, 例如

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

2. 矩阵函数的求法

式也可以推广到矩阵分析中, 例如

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

2. 矩阵函数的求法

定理 5.10 设$f(z)$是复变量z的解析函数, $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 且存在可逆矩阵$P$, 使得

$$A=PJP^{-1}=P\mathrm{diag}(J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_m)P^{-1},$$

则

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}=P\mathrm{diag}(f(J_1),\ f(J_2),\ \cdots,\ f(J_m))P^{-1},$$

其中

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i \times n_i},$$

其中

$$f(J_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},$$

上述计算矩阵函数的方法比较繁琐, 下面介绍的最小多项式法, 比上述方法简便些.

向量范数
Home Page
Title Page
Page 45 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

其中

$$f(J_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},$$

上述计算矩阵函数的方法比较繁琐, 下面介绍的最小多项式法, 比上述方法简便些.

定理 5.11 设n阶矩阵A的最小多项式为

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为$A$的所有不同特征值, $\sum_{i=1}^{s}n_i=m$, $f(\lambda)$是

复变量λ的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

复变量λ的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则$f(A) = g(A)$的充分必要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad j = 0, 1, \cdots, n_i - 1 \tag{5-2}$$

复变量λ的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则$f(A) = g(A)$的充分必要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad j = 0, 1, \cdots, n_i - 1 \tag{5-2}$$

例 5.12 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算$e^A$, $\sin A$, e^{At}.

复变量λ的解析函数, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1},$$

则$f(A) = g(A)$的充分必要条件是

$$g^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, s, \quad j = 0, 1, \cdots, n_i - 1 \tag{5-2}$$

例 5.12 已知矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算$\mathrm{e}^A$, $\sin A$, e^{At}.

解 A的最小多项式为$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, 令

$$g(\lambda) = c_0 + c_1\lambda,$$

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

解得$c_0 = f(2) - 2f'(2)$, $c_1 = f'(2)$, 故

$$f(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

解得$c_0 = f(2) - 2f'(2)$, $c_1 = f'(2)$, 故

$$f(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{pmatrix}$$

当$f(z) = \mathrm{e}^z$时, $f(2) = \mathrm{e}^2$, $f'(2) = \mathrm{e}^2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^2 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e}^2 & -\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{cases} f(2) = c_0 + 2c_1, \\ f'(2) = c_1, \end{cases}$$

解得$c_0 = f(2) - 2f'(2)$, $c_1 = f'(2)$, 故

$$f(A) = c_0 I + c_1 A = \begin{pmatrix} f(2) & 0 & 0 \\ f'(2) & f(2) - f'(2) & f'(2) \\ f'(2) & -f'(2) & f(2) + f'(2) \end{pmatrix}$$

当$f(z) = \mathrm{e}^z$时, $f(2) = \mathrm{e}^2$, $f'(2) = \mathrm{e}^2$, 故

$$f(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^2 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e}^2 & -\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$$

当$f(z)=\sin z$时, $f(2)=\sin 2$, $f'(2)=\cos 2$, 故

$$f(A)=\begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2 \end{pmatrix}$$

当$f(z)=\sin z$时, $f(2)=\sin 2$, $f'(2)=\cos 2$, 故

$$f(A)=\begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2 \end{pmatrix}$$

当$f(z)=\mathrm{e}^{tz}$时, $f(2)=\mathrm{e}^{2t}$, $f'(2)=t\mathrm{e}^{2t}$, 故

$$f(A)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}-t\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} & -t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

当$f(z)=\sin z$时, $f(2)=\sin 2$, $f'(2)=\cos 2$, 故

$$f(A)=\begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & 0 \\ \cos 2 & \sin 2-\cos 2 & \cos 2 \\ \cos 2 & -\cos 2 & \sin 2+\cos 2 \end{pmatrix}$$

当$f(z)=\mathrm{e}^{tz}$时, $f(2)=\mathrm{e}^{2t}$, $f'(2)=t\mathrm{e}^{2t}$, 故

$$f(A)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}-t\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} & -t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

§5.6 函数矩阵的微分与积分

考虑矩阵元素是实变量t的实函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$A(t)$中所有的元素$a_{ij}(t)$定义在同一区间$[a, b]$上.

向量范数
Home Page
Title Page
Page 49 of 51
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§5.6 函数矩阵的微分与积分

考虑矩阵元素是实变量t的实函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$A(t)$中所有的元素$a_{ij}(t)$定义在同一区间$[a, b]$上.

$A(t)$在区间$[a, b]$上有界, 连续, 可微, 可积是指所有的$a_{ij}(t)$在$[a, b]$上有界, 连续, 可微, 可积. 因此, 数学分析中的相关运算都可以平行地推广到函数矩阵上. 例如:

① $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)+B(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t),$$

② $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)B(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\cdot B(t)+A(t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t),$$

③ 若$A(t)$与$A^{-1}(t)$都可微, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right)A^{-1}(t),$$

③ 若$A(t)$与$A^{-1}(t)$都可微, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right)A^{-1}(t),$$

④ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A,$$

⑤ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(tA) = -A\sin(tA) = -(\sin tA)A,$$

⑥ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(tA) = A\cos(tA) = (\cos tA)A,$$

③ 若$A(t)$与$A^{-1}(t)$都可微, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right)A^{-1}(t),$$

④ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA}=A\mathrm{e}^{tA}=\mathrm{e}^{tA}A,$

⑤ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(tA)=-A\sin(tA)=-(\sin tA)A,$

⑥ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(tA)=A\cos(tA)=(\cos tA)A,$

⑦ $\displaystyle\int[aA(t)+bB(t)]\mathrm{d}t=a\int A(t)\mathrm{d}t+b\int B(t)\mathrm{d}t,$

⑧ $\displaystyle\int C\cdot A(t)\mathrm{d}t=C\int A(t)\mathrm{d}t,$

⑨ $$\int A(t)B'(t)\mathrm{d}t = A(t)B(t) - \int A'(t)B(t)\mathrm{d}t.$$

⑨ $\int A(t)B'(t)\mathrm{d}t = A(t)B(t) - \int A'(t)B(t)\mathrm{d}t.$