研究生公共基础课

矩　阵　论

第四章　矩阵的广义逆

矩阵逆的概念只是对非奇异矩阵才有意义, 但是在实际问题中, 遇到的矩阵不一定是方阵, 这就产生了推广矩阵逆的概念问题, 产生了各种矩阵的广义逆. 本章就其最重要的Moore-Penrose 广义逆及其应用做简单介绍.

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设A是n阶矩阵, A可逆当且仅当存在n阶矩阵B, 使得

$$AB = BA = I$$

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设A是n阶矩阵, A可逆当且仅当存在n阶矩阵B, 使得

$$AB = BA = I$$

当A可逆时, 其逆惟一, 记为A^{-1}.

1. 满秩矩阵与单侧逆

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设A是n阶矩阵, A可逆当且仅当存在n阶矩阵B, 使得

$$AB = BA = I$$

当A可逆时, 其逆惟一, 记为A^{-1}.

1. 满秩矩阵与单侧逆

定义 4.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$BA = I_n,$$

则称A是左可逆的, 称B为A的一个左逆矩阵, 记为A_L^{-1}.

§4.1 矩阵的左逆与右逆

设A是n阶矩阵, A可逆当且仅当存在n阶矩阵B, 使得

$$AB = BA = I$$

当A可逆时, 其逆惟一, 记为A^{-1}.

1. 满秩矩阵与单侧逆

定义 4.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$BA = I_n,$$

则称A是左可逆的, 称B为A的一个左逆矩阵, 记为A_L^{-1}.

若存在矩阵$C \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$AC = I_m,$$

则称A是右可逆的, 称C为A的一个右逆矩阵, 记为A_R^{-1}.

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

定理 4.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则下列条件是等价的:

① A是左可逆的;

② A的零空间$N(A) = \{\mathbf{0}\}$;

③ $m \geq n$, $\operatorname{rank}(A) = n$, 即$A$是列满秩的;

④ $A^H A$是可逆的.

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

定理 4.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则下列条件是等价的:

① A是左可逆的;

② A的零空间$N(A)=\{\mathbf{0}\}$;

③ $m \geq n$, $\operatorname{rank}(A)=n$, 即A是列满秩的;

④ A^HA是可逆的.

证明 ① $\Rightarrow$ ② 设A是左可逆的, 则存在$B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得$BA=I_n$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A)$, $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 于是$\boldsymbol{x}=I_n\boldsymbol{x}=BA\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 故$N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

下面给出矩阵左可逆与右可逆的几个等价条件.

定理 4.1 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则下列条件是等价的:

① A是左可逆的;

② A的零空间$N(A) = \{\mathbf{0}\}$;

③ $m \geq n$, $\operatorname{rank}(A) = n$, 即$A$是列满秩的;

④ $A^H A$是可逆的.

证明 ① $\Rightarrow$ ② 设A是左可逆的, 则存在$B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得$BA = I_n$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A)$, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 于是$\boldsymbol{x} = I_n\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 故$N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

② $\Rightarrow$ ③ 设$N(A)=\mathbf{0}$, 由维数公式

$$\operatorname{rank}(A)=\dim R(A)=n-\dim N(A)=n$$

知A是列满秩的, 自然有$m\geq n$.

② $\Rightarrow$ ③ 设$N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\operatorname{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知A是列满秩的, 自然有$m \geq n$.

③ $\Rightarrow$ ④ 设$\operatorname{rank}(A) = n$, 由$\operatorname{rank}(A^H A) = \operatorname{rank}(A) = n$, 得$A^H A$可逆.

② ⇒ ③ 设$N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\mathrm{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知A是列满秩的, 自然有$m \geq n$.

③ ⇒ ④ 设$\mathrm{rank}(A) = n$, 由$\mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}(A) = n$, 得$A^H A$可逆.

④ ⇒ ① 设$A^H A$可逆, 由$(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$知, $(A^H A)^{-1} A^H$是A的一个左逆矩阵. ■

② $\Rightarrow$ ③ 设$N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\text{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知A是列满秩的, 自然有$m \geq n$.

③ $\Rightarrow$ ④ 设$\text{rank}(A) = n$, 由$\text{rank}(A^H A) = \text{rank}(A) = n$, 得$A^H A$可逆.

④ $\Rightarrow$ ① 设$A^H A$可逆, 由$(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$知, $(A^H A)^{-1} A^H$是A的一个左逆矩阵. $\blacksquare$

对于右可逆, 有类似的结果.

② ⇒ ③ 设$N(A) = \mathbf{0}$, 由维数公式

$$\operatorname{rank}(A) = \dim R(A) = n - \dim N(A) = n$$

知A是列满秩的, 自然有$m \geq n$.

③ ⇒ ④ 设$\operatorname{rank}(A) = n$, 由$\operatorname{rank}(A^H A) = \operatorname{rank}(A) = n$, 得$A^H A$可逆.

④ ⇒ ① 设$A^H A$可逆, 由$(A^H A)^{-1} A^H A = I_n$知, $(A^H A)^{-1} A^H$是A的一个左逆矩阵. ■

对于右可逆, 有类似的结果.

定理 4.2 设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则下列条件是等价的:

① A是右可逆的;

② A的列空间$R(A) = \mathbb{C}^m$;

③ $m \leq n, \operatorname{rank}(A) = m$, 即$A$是行满秩的;

④ AA^H是可逆的.

③ $m \leq n, \operatorname{rank}(A) = m$, 即$A$是行满秩的;

④ AA^H是可逆的.

例 4.1 矩阵$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$是右可逆的, 但不是左可逆的. 这是由于

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 6 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

③ $m \le n, \operatorname{rank}(A) = m$, 即$A$是行满秩的;

④ AA^H是可逆的.

例 4.1 矩阵$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$是右可逆的, 但不是左可逆的. 这是由于

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

注意到右逆最后一行元素是完全任意的, 故存在无穷多个右逆矩阵.

③ $m \le n$, $\operatorname{rank}(A) = m$, 即$A$是行满秩的;

④ AA^H是可逆的.

例 4.1 矩阵$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$是右可逆的, 但不是左可逆的. 这是由于

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

注意到右逆最后一行元素是完全任意的, 故存在无穷多个右逆矩阵.

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

定理 4.3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$是左可逆的, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$是$A$的一个左逆矩阵, 则线性方程组$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$有形如$\boldsymbol{X} = B\boldsymbol{b}$解的充分必要条件是

$$(I_m - AB)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

定理 4.3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$是左可逆的, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$是$A$的一个左逆矩阵, 则线性方程组$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$有形如$\boldsymbol{X} = B\boldsymbol{b}$解的充分必要条件是

$$(I_m - AB)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

若上式成立, 则方程组有惟一解

$$\boldsymbol{X} = (A^H A)^{-1} A^H \boldsymbol{b}.$$

一般地, 一个矩阵左可逆未必右可逆, 而且左逆矩阵和右逆矩阵都不是惟一的.

2. 单侧逆与解线性方程组

定理 4.3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$是左可逆的, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$是$A$的一个左逆矩阵, 则线性方程组$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$有形如$\boldsymbol{X} = B\boldsymbol{b}$解的充分必要条件是

$$(I_m - AB)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

若上式成立, 则方程组有惟一解

$$\boldsymbol{X} = (A^H A)^{-1} A^H \boldsymbol{b}.$$

证明 设方程组$AX = \boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{X}_0$, 则

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{X}_0 = A(BA)\boldsymbol{X}_0 = AB\boldsymbol{b},$$

证明 设方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{X}_0$, 则

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{X}_0=A(BA)\boldsymbol{X}_0=AB\boldsymbol{b},$$

故$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

证明 设方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{X}_0$, 则

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{X}_0=A(BA)\boldsymbol{X}_0=AB\boldsymbol{b},$$

故$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

反过来, 若$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则$AB\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 故$\boldsymbol{X}_0=B\boldsymbol{b}$是方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的解.

证明　设方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{X}_0$, 则

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{X}_0=A(BA)\boldsymbol{X}_0=AB\boldsymbol{b},$$

故$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

反过来, 若$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则$AB\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 故$\boldsymbol{X}_0=B\boldsymbol{b}$是方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的解.

当方程组有解时, 因为A左可逆, 所以$\mathrm{rank}(A)=n$, 从而方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有惟一解. 由$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$, 有

$$(A^HA)^{-1}A^HA\boldsymbol{X}=(A^HA)^{-1}A^H\boldsymbol{b},$$

证明 设方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{X}_0$, 则

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{X}_0=A(BA)\boldsymbol{X}_0=AB\boldsymbol{b},$$

故$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

反过来, 若$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 则$AB\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 故$\boldsymbol{X}_0=B\boldsymbol{b}$是方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的解.

当方程组有解时, 因为A左可逆, 所以$\mathrm{rank}(A)=n$, 从而方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有惟一解. 由$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$, 有

$$(A^HA)^{-1}A^HA\boldsymbol{X}=(A^HA)^{-1}A^H\boldsymbol{b},$$

即$\boldsymbol{X}=(A^HA)^{-1}A^H\boldsymbol{b}$为$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的惟一解. ■

证明 设方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有解$\boldsymbol{X}_0$, 则

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{X}_0=A(BA)\boldsymbol{X}_0=AB\boldsymbol{b},$$

故$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

反过来, 若$(I_m-AB)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则$AB\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 故$\boldsymbol{X}_0=B\boldsymbol{b}$是方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的解.

当方程组有解时, 因为A左可逆, 所以$\mathrm{rank}(A)=n$, 从而方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有惟一解. 由$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$, 有

$$(A^HA)^{-1}A^HA\boldsymbol{X}=(A^HA)^{-1}A^H\boldsymbol{b},$$

即$\boldsymbol{X}=(A^HA)^{-1}A^H\boldsymbol{b}$为$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$的惟一解. ∎

定理 4.4 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$是右可逆的, 则线性方程组$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$对任何$\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$都有解, 且对$A$的任意一个右逆矩阵$A_R^{-1}$, $\boldsymbol{X}=A_R^{-1}\boldsymbol{b}$是其解, 特别地, $\boldsymbol{X}=A^H(AA^H)^{-1}\boldsymbol{b}$是方程组$A\boldsymbol{X}=$

$\boldsymbol{b}$的一个解.

$\boldsymbol{b}$的一个解.

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

1. 减号广义逆

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

1. 减号广义逆

定义 4.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$G \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$AGA = A,$$

则称G为A的一个减号广义逆或$\{1\}$-逆.

§4.2 广义逆矩阵

有各种各样的矩阵广义逆, 本节仅介绍减号广义逆与加号广义逆(或Moore-Penrose广义逆), 重点介绍应用广泛的加号广义逆.

1. 减号广义逆

定义 4.2 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$G \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$AGA = A,$$

则称G为A的一个减号广义逆或$\{1\}$-逆.

注 4.1 A的全部减号广义逆的集合记为$A\{1\}$, $A\{1\}$的

元素用$A_1^-, A_2^-, \cdots$表示.

元素用$A_1^-, A_2^-, \cdots$表示.

设$A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$.

元素用$A_1^-, A_2^-, \cdots$表示.

设$A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$.

定理 4.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{m\times m}$和$Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

元素用$A_1^-, A_2^-, \cdots$表示.

设$A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$.

定理 4.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{m\times m}$和$Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

则$G \in A\{1\}$的充分必要条件是

$$G = Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}P,$$

元素用$A_1^-, A_2^-, \cdots$表示.

设$A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$.

定理 4.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, 若存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{m\times m}$和$Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

则$G \in A\{1\}$的充分必要条件是

$$G = Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

其中$U \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $V \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$, $W \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$是任意的.

元素用$A_1^-, A_2^-, \cdots$表示.

设$A=\mathbf{0}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A\{1\}=\mathbb{C}^{n\times m}$.

定理 4.5 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$, 若存在可逆矩阵$P\in\mathbb{C}^{m\times m}$和$Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

则$G\in A\{1\}$的充分必要条件是

$$G=Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}P,$$

其中$U\in\mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $V\in\mathbb{C}^{(n-r)\times r}$, $W\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$是任意的.

证明　充分性直接验证可知，下证必要性. 设G是A的任意一个减号广义逆，则$AGA = A$. 令

$$G = Q\begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 12 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设G是A的任意一个减号广义逆, 则$AGA = A$. 令

$$G = Q\begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix}P,$$

代入$AGA = A$中, 比较即得$X = I_r$, 故

$$G = Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}P.$$

■

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设G是A的任意一个减号广义逆, 则$AGA = A$. 令

$$G = Q \begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

代入$AGA = A$中, 比较即得$X = I_r$, 故

$$G = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P.$$

■

定理 4.6 设$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则$A$的减号广义逆惟一的充分必要条件是$m = n$, 且$A^{-1}$存在.

证明 充分性直接验证可知, 下证必要性. 设G是A的任意一个减号广义逆, 则$AGA = A$. 令

$$G = Q\begin{pmatrix} X & U \\ V & W \end{pmatrix}P,$$

代入$AGA = A$中, 比较即得$X = I_r$, 故

$$G = Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}P.$$

■

定理 4.6 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A$的减号广义逆惟一的充分必要条件是$m = n$, 且$A^{-1}$存在.

证明 充分性: 当$m = n$, 且A^{-1}存在时, $A^{-1} \in A\{1\}$. $\forall\, G \in A\{1\}$, 因为$AGA = A$, 用A^{-1}左右乘等式两边得$G =$

A^{-1}, 故减号广义逆惟一.

A^{-1}, 故减号广义逆惟一.

必要性: 设$\operatorname{rank}(A) = r$, 当$r = 0$时, 此时$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$与假定不符, 所以$r > 0$.

A^{-1}, 故减号广义逆惟一.

必要性: 设$\text{rank}(A) = r$, 当$r = 0$时, 此时$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$与假定不符, 所以$r > 0$.

当$m \neq n$时, 由定理4.5知$A\{1\}$不是单元素集.

A^{-1}, 故减号广义逆惟一.

必要性: 设$\text{rank}(A) = r$, 当$r = 0$时, 此时$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$与假定不符, 所以$r > 0$.

当$m \neq n$时, 由定理4.5知$A\{1\}$不是单元素集.

若A^{-1}不存在, 则$r < n$. 此时$A\{1\}$也不是单元素集.

A^{-1}, 故减号广义逆惟一.

必要性: 设$\mathrm{rank}(A)=r$, 当$r=0$时, 此时$A\{1\}=\mathbb{C}^{n\times m}$与假定不符, 所以$r>0$.

当$m\neq n$时, 由定理4.5知$A\{1\}$不是单元素集.

若A^{-1}不存在, 则$r<n$. 此时$A\{1\}$也不是单元素集.

综上A^{-1}存在. $\blacksquare$

A^{-1}, 故减号广义逆惟一.

必要性: 设rank$(A) = r$, 当$r = 0$时, 此时$A\{1\} = \mathbb{C}^{n\times m}$与假定不符, 所以$r > 0$.

当$m \neq n$时, 由定理4.5知$A\{1\}$不是单元素集.

若A^{-1}不存在, 则$r < n$. 此时$A\{1\}$也不是单元素集.

综上A^{-1}存在. ■

定理 4.7 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则A^{-}满足以下性质:

① $\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(A^{-})$;

② AA^{-}与$A^{-}A$都是幂等矩阵, 且$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^{-}) = \mathrm{rank}(A^{-}A)$;

③ $R(AA^{-}) = R(A)$, $N(A^{-}A) = N(A)$.

证明 ① $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^{-}A) \leq \operatorname{rank}(A^{-})$.

证明 ① $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^-A) \le \operatorname{rank}(A^-)$.

② 因为$AA^-A = A$, 所以$(AA^-)^2 = AA^-$, $(A^-A)^2 = A^-A$, 即AA^-与A^-A都是幂等矩阵.

证明 ① $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^-A)\le \mathrm{rank}(A^-)$.

② 因为$AA^-A=A$, 所以$(AA^-)^2=AA^-$, $(A^-A)^2=A^-A$, 即AA^-与A^-A都是幂等矩阵.

③ $\forall\ \alpha\in R(AA^-)$, 即存在$\beta\in\mathbb{C}^m$, 使$AA^-\beta=\alpha$. 由$A(A^-\beta)=\alpha$得$R(AA^-)\subseteq R(A)$.

证明 ① $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^{-}A) \leq \operatorname{rank}(A^{-})$.

② 因为$AA^{-}A = A$, 所以$(AA^{-})^2 = AA^{-}$, $(A^{-}A)^2 = A^{-}A$, 即AA^{-}与$A^{-}A$都是幂等矩阵.

③ $\forall\ \alpha \in R(AA^{-})$, 即存在$\beta \in \mathbb{C}^m$, 使$AA^{-}\beta = \alpha$.
由$A(A^{-}\beta) = \alpha$得$R(AA^{-}) \subseteq R(A)$.
$\forall\ \boldsymbol{y} \in R(A)$, 存在$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 使$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, 于是

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = AA^{-}(A\boldsymbol{x}) \in R(AA^{-}),$$

证明 ① $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA^{-}A)\le\operatorname{rank}(A^{-})$.

② 因为$AA^{-}A=A$, 所以$(AA^{-})^2=AA^{-}$, $(A^{-}A)^2=A^{-}A$, 即AA^{-}与$A^{-}A$都是幂等矩阵.

③ $\forall\ \alpha\in R(AA^{-})$, 即存在$\beta\in\mathbb{C}^m$, 使$AA^{-}\beta=\alpha$. 由$A(A^{-}\beta)=\alpha$得$R(AA^{-})\subseteq R(A)$.
$\forall\ \boldsymbol{y}\in R(A)$, 存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$, 使$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 于是

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=(AA^{-}A)\boldsymbol{x}=AA^{-}(A\boldsymbol{x})\in R(AA^{-}),$$

故$R(A)\subseteq R(AA^{-})$.

证明 ① $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^{-}A) \leq \text{rank}(A^{-})$.

② 因为$AA^{-}A = A$, 所以$(AA^{-})^2 = AA^{-}$, $(A^{-}A)^2 = A^{-}A$, 即AA^{-}与$A^{-}A$都是幂等矩阵.

③ $\forall\ \alpha \in R(AA^{-})$, 即存在$\beta \in \mathbb{C}^m$, 使$AA^{-}\beta = \alpha$. 由$A(A^{-}\beta) = \alpha$得$R(AA^{-}) \subseteq R(A)$.
$\forall\ \boldsymbol{y} \in R(A)$, 存在$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 使$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, 于是

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = AA^{-}(A\boldsymbol{x}) \in R(AA^{-}),$$

故$R(A) \subseteq R(AA^{-})$.

$\forall\ \alpha \in N(A)$, $A\alpha = \mathbf{0}$, 故$A^{-}A\alpha = A^{-}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 所以$N(A) \subseteq N(A^{-}A)$.

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 15 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

又$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A^{-}A)$, 有$A^{-}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 于是

$$A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = A(A^{-}A\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

又$\forall\ \boldsymbol{x} \in N(A^{-}A)$, 有$A^{-}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = A(A^{-}A\boldsymbol{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故$N(A^{-}A) \subseteq N(A)$. ■

又$\forall\ \boldsymbol{x} \in N(A^{-}A)$, 有$A^{-}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = A(A^{-}A\boldsymbol{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故$N(A^{-}A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{-} \in A\{1\}$, 则当方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解时, 其通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{b} + (I_n - A^{-}A)\boldsymbol{z},$$

又$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A^{-}A)$, 有$A^{-}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 于是

$$A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = A(A^{-}A\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

故$N(A^{-}A) \subseteq N(A)$. ∎

定理 4.8 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{-} \in A\{1\}$, 则当方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解时, 其通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{b} + (I_n - A^{-}A)\boldsymbol{z},$$

这里$\boldsymbol{z}$是任意的n维列向量.

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 15 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

又$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A^-A)$, 有$A^-A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 于是

$$A\boldsymbol{x} = (AA^-A)\boldsymbol{x} = A(A^-A\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

故$N(A^-A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^- \in A\{1\}$, 则当方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解时, 其通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = A^-\boldsymbol{b} + (I_n - A^-A)\boldsymbol{z},$$

这里$\boldsymbol{z}$是任意的n维列向量.

证明 先看齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$A = AA^-A,$$

对任意$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, 有

又$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A^{-}A)$, 有$A^{-}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 于是

$$A\boldsymbol{x} = (AA^{-}A)\boldsymbol{x} = A(A^{-}A\boldsymbol{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

故$N(A^{-}A) \subseteq N(A)$. ■

定理 4.8 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{-} \in A\{1\}$, 则当方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解时, 其通解可表示为

$$\boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{b} + (I_n - A^{-}A)\boldsymbol{z},$$

这里$\boldsymbol{z}$是任意的n维列向量.

证明 先看齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$A = AA^{-}A,$$

对任意$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$A(I_n - A^{-}A)\boldsymbol{z} = \mathbf{0},$$

即对任意$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^- A)\boldsymbol{z}$一定是$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解.

即对任意$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^- A)\boldsymbol{z}$一定是$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解.

要使$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解均可表示成这种形式, 只须证$I_n - A^- A$的秩为$n - r$, 其中$r$是$A$的秩. 由定理4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 16 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

即对任意$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^- A)\boldsymbol{z}$一定是$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解.

要使$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解均可表示成这种形式, 只须证$I_n - A^- A$的秩为$n - r$, 其中$r$是$A$的秩. 由定理4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

而

$$I_n - A^- A = I_n - Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} PA,$$

即对任意$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - A^- A)\boldsymbol{z}$一定是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解.

要使$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解均可表示成这种形式, 只须证$I_n - A^- A$的秩为$n - r$, 其中$r$是$A$的秩. 由定理4.5

$$A^- = Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

而
$$I_n - A^- A = I_n - Q \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} PA,$$

故
$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(I_n - A^- A) &= \operatorname{rank}(Q^{-1}(I_n - A^- A)Q) \\ &= \operatorname{rank}\left(I_n - \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -V & I_{n-r} \end{pmatrix} \right) = n - r. \end{aligned}$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 16 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

即对任意$\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^n$, $(I_n-A^-A)\boldsymbol{z}$一定是$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解.

要使$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解均可表示成这种形式, 只须证$I_n-A^-A$的秩为$n-r$, 其中$r$是$A$的秩. 由定理4.5

$$A^-=Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}P,$$

而
$$I_n-A^-A=I_n-Q\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}PA,$$

故

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(I_n-A^-A)&=\operatorname{rank}(Q^{-1}(I_n-A^-A)Q)\\ &=\operatorname{rank}\left(I_n-\begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)\\ &=\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -V & I_{n-r} \end{pmatrix}\right)=n-r.\end{aligned}$$

对非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 若它有解, 则由减号广义

逆的定义知$A^{-}\boldsymbol{b}$必为解, 所以通解为

$$\boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{b} + (I_n - A^{-}A)\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n.$$

■

逆的定义知$A^{-}\boldsymbol{b}$必为解, 所以通解为

$$\boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{b} + (I_n - A^{-}A)\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n.$$

■

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 17 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

● First ● Prev ● Next ● Last ● Go Back ● Full Screen ● Close ● Quit

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

定义 4.3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$G \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

① $AGA = A$;

② $GAG = G$;

③ $(AG)^H = AG$;

④ $(GA)^H = GA$;

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

定义 4.3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$G \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

① $AGA = A$;

② $GAG = G$;

③ $(AG)^H = AG$;

④ $(GA)^H = GA$;

则称G为A的Moore-Penrose广义逆或加号广义逆, 简称为A的M-P逆, 记为A^+.

2. Moore-Penrose广义逆(加号广义逆)

定义 4.3 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在矩阵$G \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

① $AGA = A$;

② $GAG = G$;

③ $(AG)^H = AG$;

④ $(GA)^H = GA$;

则称G为A的Moore-Penrose广义逆或加号广义逆, 简称为A的M-P逆, 记为A^+.

例 4.2 由定义直接验算,

例 4.2　由定义直接验算,

① 若$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$是其M-P逆.

例 4.2 由定义直接验算,

① 若$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$是其M-P逆.

② 若$B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$是其M-P逆.

例 4.2 由定义直接验算,

① 若$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$是其M-P逆.

② 若$B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$是其M-P逆.

③ 若$C=\begin{pmatrix}D&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$, D为可逆矩阵, 则$\begin{pmatrix}D^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$是其M-P逆.

例 4.2 由定义直接验算,

① 若$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$是其**M-P**逆.

② 若$B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 则$(\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})$是其**M-P**逆.

③ 若$C=\begin{pmatrix}D&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$, D为可逆矩阵, 则$\begin{pmatrix}D^{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$是其**M-P**逆.

定理 4.9 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$存在M-P逆, 则$A$的M-P逆是惟一的.

定理 4.9 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$存在M-P逆, 则$A$的M-P逆是惟一的.

证明 设G_1, G_2都是A的M-P逆, 则G_1与G_2均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

定理 4.9 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$存在M-P逆, 则$A$的M-P逆是惟一的.

证明 设G_1, G_2都是A的M-P逆, 则G_1与G_2均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

$$\begin{aligned} G_1 &= (G_1A)G_1 = (G_1A)^HG_1 = A^HG_1^HG_1 \\ &= (A^HG_2^HA^H)G_1^HG_1 = (G_2A)^H(G_1A)^HG_1 \\ &= G_2AG_1AG_1 = G_2AG_1, \end{aligned}$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 20 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

定理 4.9 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$存在M-P逆, 则$A$的M-P逆是惟一的.

证明 设G_1, G_2都是A的M-P逆, 则G_1与G_2均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

$$\begin{aligned}
G_1 &= (G_1A)G_1 = (G_1A)^HG_1 = A^HG_1^HG_1 \\
&= (A^HG_2^HA^H)G_1^HG_1 = (G_2A)^H(G_1A)^HG_1 \\
&= G_2AG_1AG_1 = G_2AG_1, \\
G_2 &= G_2(AG) = G_2(AG_2)^H = G_2G_2^HA^H \\
&= G_2G_2^H(A^HG_1^HA^H) = G_2(AG_2)^H(AG_1)^H \\
&= G_2AG_2AG_1 = G_2AG_1,
\end{aligned}$$

定理 4.9 若矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$存在M-P逆, 则$A$的M-P逆是惟一的.

证明 设G_1, G_2都是A的M-P逆, 则G_1与G_2均满足M-P逆的定义中的四个条件, 于是

$$\begin{aligned} G_1 &= (G_1A)G_1 = (G_1A)^HG_1 = A^HG_1^HG_1 \\ &= (A^HG_2^HA^H)G_1^HG_1 = (G_2A)^H(G_1A)^HG_1 \\ &= G_2AG_1AG_1 = G_2AG_1, \\ G_2 &= G_2(AG) = G_2(AG_2)^H = G_2G_2^HA^H \\ &= G_2G_2^H(A^HG_1^HA^H) = G_2(AG_2)^H(AG_1)^H \\ &= G_2AG_2AG_1 = G_2AG_1, \end{aligned}$$

故
$$G_1 = G_2.$$
■

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 21 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定理 4.10 任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$都存在**M-P**广义逆$A^+$.

设$\mathrm{rank}(A) = r$, A的一个满秩分解为

$$A = BC,\ B \in \mathbb{C}^{m\times r},\ C \in \mathbb{C}^{r\times n},\ \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r,$$

定理 4.10 任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$都存在**M-P**广义逆$A^+$. 设$\operatorname{rank}(A) = r$, A的一个满秩分解为

$$A = BC,\ B \in \mathbb{C}^{m\times r},\ C \in \mathbb{C}^{r\times n},\ \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r,$$

则

$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H.$$

定理 4.10 任意矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$都存在**M-P**广义逆$A^+$. 设rank$(A)=r$, A的一个满秩分解为

$$A = BC,\ B \in \mathbb{C}^{m\times r},\ C \in \mathbb{C}^{r\times n},\ \mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r,$$

则
$$A^+ = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H.$$

证明 因为rank(A) = rank(B) = rank(C) = r, 由定理4.1, B^HB是左可逆的, 又由4.2知, CC^H是右可逆的. 令$G = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$, 直接验证得, G满足**M-P**广义逆定义中的四个条件, 故G是A的**M-P**广义逆. 因为A的**M-P**广义逆惟一, 故

$$A^+ = G = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H.$$

■

例 4.3 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$的**M-P**逆.

例 4.3 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{pmatrix}$的M-P逆.

解 首先求A的满秩分解:

$$A=BC=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix},$$

故

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 4.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, A的奇异值分解为

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

定理 4.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$, A的奇异值分解为

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

则

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^H,$$

其中Δ为对角线由A的奇异值所构成的对角矩阵.

定理 4.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = r$, A的奇异值分解为

$$A = U \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

则
$$A^+ = V \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^H,$$

其中Δ为对角线由A的奇异值所构成的对角矩阵.

例 4.4 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的**M-P**逆.

定理 4.11 设矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$, A的奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} V^H,$$

则

$$A^+ = V\begin{pmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} U^H,$$

其中Δ为对角线由A的奇异值所构成的对角矩阵.

例 4.4 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的**M-P**逆.

解　A的奇异值分解是

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

解 A的奇异值分解是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 A的奇异值分解是

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$A^{+}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 25 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

$(AB)^+ = B^+A^+$不成立. 例如: 取

$$A = (1 \ \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

$(AB)^+ = B^+A^+$不成立. 例如: 取

$$A = (1\ \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^+ = (1\ \ 0),$$

而

$$(AB)^+ = (1)^+ = (1), \quad B^+A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 26 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

M-P逆与通常的逆矩阵有如下区别:

$(AB)^+ = B^+A^+$不成立. 例如: 取

$$A = (1\ \ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则

$$A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B^+ = (1\ \ 0),$$

而

$$(AB)^+ = (1)^+ = (1), \quad B^+A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

定理 4.12 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, 则A^+满足以下性质:

① $(A^+)^+ = A$;

② $(A^+)^H = (A^H)^+$;

③ $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$, 其中$\lambda^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0, \\ 0, \lambda = 0; \end{cases}$;

④ 若$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$是列满秩的, 则$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,
若A是行满秩的, 则$A^+ = A^H (A A^H)^{-1}$;

⑤ 若A有满秩分解$A = BC$, 则$A^+ = C^+ B^+$.

定理 4.12 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$, 则A^+满足以下性质:

① $(A^+)^+ = A$;

② $(A^+)^H = (A^H)^+$;

③ $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$, 其中$\lambda^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, \lambda \neq 0, \\ 0, \lambda = 0; \end{cases}$;

④ 若$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$是列满秩的, 则$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$,
若A是行满秩的, 则$A^+ = A^H (A A^H)^{-1}$;

⑤ 若A有满秩分解$A = BC$, 则$A^+ = C^+ B^+$.

证明 ④ 若A是列满秩的, 则A的满秩分解为$A = AI_n$, 即取$B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 28 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

证明 ④ 若A是列满秩的，则A的满秩分解为$A = AI_n$，即取$B = A, C = I_n$，则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

若A是行满秩的. 同理可证，$A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

证明 ④ 若A是列满秩的, 则A的满秩分解为$A = AI_n$, 即取$B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

若A是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$.

⑤ 若A有满秩分解$A = BC$, 则B列满秩, C行满秩, 由④知

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H, \quad C^+ = C^H (CC^H)^{-1},$$

证明 ④ 若A是列满秩的, 则A的满秩分解为$A = AI_n$, 即取$B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

若A是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$.

⑤ 若A有满秩分解$A = BC$, 则B列满秩, C行满秩, 由④知

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H, \quad C^+ = C^H(CC^H)^{-1},$$

故

$$A^+ = C^+ B^+. \qquad \blacksquare$$

证明 ④ 若A是列满秩的, 则A的满秩分解为$A = AI_n$, 即取$B = A, C = I_n$, 则

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H.$$

若A是行满秩的. 同理可证, $A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$.

⑤ 若A有满秩分解$A = BC$, 则B列满秩, C行满秩, 由④知

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H, \quad C^+ = C^H(CC^H)^{-1},$$

故

$$A^+ = C^+ B^+. \qquad \blacksquare$$

例 4.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 证明

① $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^+)$;

② $\mathrm{rank}(A^+A) = \mathrm{rank}(AA^+) = \mathrm{rank}(A)$.

例 4.5 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 证明

① $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^+)$;

② $\mathrm{rank}(A^+A) = \mathrm{rank}(AA^+) = \mathrm{rank}(A)$.

证明 ① 由$A = AA^+A$得, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^+A) \leq \mathrm{rank}(A^+)$; 由$A^+ = A^+AA^+$得, $\mathrm{rank}(A^+) \leq \mathrm{rank}(A^+AA^+) \leq \mathrm{rank}(A)$, 故

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^+).$$

例 4.5 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 证明

① $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^+)$;

② $\operatorname{rank}(A^+A)=\operatorname{rank}(AA^+)=\operatorname{rank}(A)$.

证明 ① 由$A=AA^+A$得, $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA^+A)\le\operatorname{rank}(A^+)$; 由$A^+=A^+AA^+$得, $\operatorname{rank}(A^+)\le\operatorname{rank}(A^+AA^+)\le\operatorname{rank}(A)$, 故

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^+).$$

② 一方面, $\operatorname{rank}(A^+A)\le\operatorname{rank}(A)$, 另一方面

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(AA^+A)\le\operatorname{rank}(A^+A),$$

故
$$\operatorname{rank}(A^+A) = \operatorname{rank}(A).$$

故
$$\mathrm{rank}(A^+A) = \mathrm{rank}(A).$$
同理
$$\mathrm{rank}(AA^+) = \mathrm{rank}(A). \qquad \blacksquare$$

故
$$\operatorname{rank}(A^+A) = \operatorname{rank}(A).$$
同理
$$\operatorname{rank}(AA^+) = \operatorname{rank}(A). \qquad \blacksquare$$

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

1. 投影变换与投影矩阵

左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

Page 31 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

1. 投影变换与投影矩阵

定义 4.4 设$\mathbb{C}^n = L \oplus M$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$. 如果线性变换$\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$满足$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, 则称$\sigma$是从$\mathbb{C}^n$沿子空间$M$到子空间$L$上的投影变换, 投影变换在空间$\mathbb{C}^n$的一组标准正交基下的矩阵称为投影矩阵.

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 31 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§4.3 投影变换

投影变换是研究广义逆矩阵和最小二乘问题的重要工具, 本节将较系统地讨论投影变换和正交投影变换.

1. 投影变换与投影矩阵

定义 4.4 设$\mathbb{C}^n = L \oplus M$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$. 如果线性变换$\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$满足$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, 则称$\sigma$是从$\mathbb{C}^n$沿子空间$M$到子空间$L$上的投影变换, 投影变换在空间$\mathbb{C}^n$的一组标准正交基下的矩阵称为投影矩阵.

投影变换σ把$\mathbb{C}^n$映射成子空间L, 故空间L称为投影子空间, 它就是σ的像空间$R(\sigma)$, 子空间M是投影变换的核空

间$N(\sigma)$.

定理 4.13 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ是幂等变换.

间$N(\sigma)$.

定理 4.13 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ是幂等变换.

证明 必要性: 设σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换, 则$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在$\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$, 使得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},\ \ \sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y},$$

间$N(\sigma)$.

定理 4.13 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ是幂等变换.

证明 必要性: 设σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换, 则$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在$\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$, 使得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, \ \ \sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y},$$

于是 $$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sigma[\sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{x}),$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 32 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

间$N(\sigma)$.

定理 4.13 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ是幂等变换.

证明 必要性: 设σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换, 则$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在$\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$, 使得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},\ \ \sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y},$$

于是 $$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sigma[\sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{x}),$$

故 $$\sigma^2 = \sigma.$$

间$N(\sigma)$.

定理 4.13 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ是幂等变换.

证明 必要性: 设σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换, 则$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在$\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in M$, 使得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},\ \ \sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y},$$

于是
$$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sigma[\sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{x}),$$

故
$$\sigma^2 = \sigma.$$

充分性: 首先证明

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})]$. 注意到$\sigma^2 = \sigma$, 有$\sigma[\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 于是$\sigma(\boldsymbol{x}) \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})]$. 注意到$\sigma^2 = \sigma$, 有$\sigma[\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 于是$\sigma(\boldsymbol{x}) \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall\, \boldsymbol{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为$\boldsymbol{x} \in R(\sigma)$, 故存在$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{y})$. 又由于$\boldsymbol{x} \in N(\sigma)$, 故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 于是

$$\boldsymbol{0} = \sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma^2(\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x},$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})]$. 注意到$\sigma^2 = \sigma$, 有$\sigma[\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 于是$\sigma(\boldsymbol{x}) \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall\, \boldsymbol{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为$\boldsymbol{x} \in R(\sigma)$, 故存在$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{y})$. 又由于$\boldsymbol{x} \in N(\sigma)$, 故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 于是

$$\mathbf{0} = \sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma^2(\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x},$$

故$R(\sigma) \cap N(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$, 于是

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma).$$

左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

Page 33 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})]$. 注意到$\sigma^2 = \sigma$, 有$\sigma[\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 于是$\sigma(\boldsymbol{x}) \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall\, \boldsymbol{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为$\boldsymbol{x} \in R(\sigma)$, 故存在$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{y})$. 又由于$\boldsymbol{x} \in N(\sigma)$, 故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 于是

$$\mathbf{0} = \sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma^2(\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x},$$

故$R(\sigma) \cap N(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$, 于是

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma).$$

此时, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在$\boldsymbol{y} \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{z} \in N(\sigma)$, 使得$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, 并且可以证明$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})]$. 注意到$\sigma^2 = \sigma$, 有$\sigma[\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x})] = \sigma(\boldsymbol{x}) - \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 于是$\sigma(\boldsymbol{x}) \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{x} - \sigma(\boldsymbol{x}) \in N(\sigma)$, 故

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) + N(\sigma).$$

其次, $\forall\, \boldsymbol{x} \in R(\sigma) \cap N(\sigma)$, 因为$\boldsymbol{x} \in R(\sigma)$, 故存在$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得$\boldsymbol{x} = \sigma(\boldsymbol{y})$. 又由于$\boldsymbol{x} \in N(\sigma)$, 故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, 于是

$$\boldsymbol{0} = \sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma^2(\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x},$$

故$R(\sigma) \cap N(\sigma) = \{\boldsymbol{0}\}$, 于是

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma).$$

此时, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 存在$\boldsymbol{y} \in R(\sigma)$, $\boldsymbol{z} \in N(\sigma)$, 使得$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, 并且可以证明$\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

这是因为, 由$\boldsymbol{y} \in R(\sigma)$, 存在$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{C}^n$, 使$\boldsymbol{y} = \sigma(\boldsymbol{x}_1)$, 又

左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

Page 33 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

由$\sigma(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$得，故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \sigma^2(\boldsymbol{x}_1) = \sigma(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}$.

由$\sigma(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$得，故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \sigma^2(\boldsymbol{x}_1) = \sigma(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}$.

所以, σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换. ■

由$\sigma(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$得，故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \sigma^2(\boldsymbol{x}_1) = \sigma(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}$.

所以, σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换. ■

推论 4.1 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵是幂等矩阵.

由$\sigma(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$得，故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \sigma^2(\boldsymbol{x}_1) = \sigma(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}$.

所以，σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换. ■

推论 4.1 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵是幂等矩阵.

投影矩阵A按如下方法求得.

由$\sigma(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$得，故$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \sigma(\boldsymbol{y}) = \sigma^2(\boldsymbol{x}_1) = \sigma(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}$.

所以, σ是$\mathbb{C}^n$空间沿M到L上的投影变换. ■

推论 4.1 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵是幂等矩阵.

投影矩阵A按如下方法求得.

设$\dim L = r$, 则$\dim M = n - r$. 在子空间L和M中分别取定基

$$\{y_1, y_2, \cdots, y_r\}, \{z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\},$$

于是$\{y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\}$便构成了$\mathbb{C}^n$的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, r,$$

$$A\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}, \ \ j = 1, 2, \cdots, n-r.$$

于是$\{y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\}$便构成了$\mathbb{C}^n$的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

$$A\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \cdots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}),$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 35 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

于是$\{y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\}$便构成了$\mathbb{C}^n$的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

$$A\boldsymbol{z}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \cdots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}),$$

于是

$$A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$

于是$\{y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\}$便构成了$\mathbb{C}^n$的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, r,$$

$$A\boldsymbol{z}_j = \mathbf{0}, \ \ j = 1, 2, \cdots, n-r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \cdots, y_r), \ \ C = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}),$$

于是
$$A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$
由于$(B \mid C)$是n阶可逆方阵, 因此投影矩阵A为

于是$\{y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\}$便构成了$\mathbb{C}^n$的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, r,$$

$$A\boldsymbol{z}_j = \mathbf{0},\ \ j = 1, 2, \cdots, n-r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \cdots, y_r),\ \ C = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}),$$

于是

$$A(B \mid C) = (B \mid \mathbf{0})$$

由于$(B \mid C)$是n阶可逆方阵, 因此投影矩阵A为

$$A = (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}.$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 35 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

于是$\{y_1, y_2, \cdots, y_r, z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}\}$便构成了$\mathbb{C}^n$的基. 根据投影矩阵的性质, 得

$$A\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

$$A\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-r.$$

作分块矩阵

$$B = (y_1, y_2, \cdots, y_r), \quad C = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-r}),$$

于是
$$A(B \mid C) = (B \mid \boldsymbol{0})$$

由于$(B \mid C)$是n阶可逆方阵, 因此投影矩阵A为

$$A = (B \mid \boldsymbol{0})(B \mid C)^{-1}.$$

例 4.6 设L是由向量$(1 \quad 0)^T$所生成的空间, M是向量$(1 \quad -1)^T$所生成的子空间, 则$\mathbb{R}^2$沿子空间M到子空间L上

的投影矩阵为

的投影矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

的投影矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

的投影矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

投影变换的一个子类–正交投影变换, 具有更好的性质.

的投影矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

投影变换的一个子类–正交投影变换, 具有更好的性质.

定义 4.5 设σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, $\mathbb{C}^n=R(\sigma)\oplus N(\sigma)$, 如果$R(\sigma)$的正交补子空间$R(\sigma)^{\perp}=N(\sigma)$, 则称$\sigma$是$\mathbb{C}^n$空间的正交投影变换. 正交投影变在$\mathbb{C}^n$空间的一组基下的矩阵称为正交投影矩阵.

的投影矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

2. 正交投影变换与正交投影矩阵

投影变换的一个子类–正交投影变换, 具有更好的性质.

定义 4.5 设σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, $\mathbb{C}^n=R(\sigma)\oplus N(\sigma)$, 如果$R(\sigma)$的正交补子空间$R(\sigma)^\perp=N(\sigma)$, 则称$\sigma$是$\mathbb{C}^n$空间的正交投影变换. 正交投影变在$\mathbb{C}^n$空间的一组基下的矩阵称为正交投影矩阵.

定理 4.14 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是正交投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵A为幂等的Hermite矩阵, 即$A^2 = A$, $A^H = A$.

定理 4.14 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是正交投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵A为幂等的Hermite矩阵, 即$A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设A是线性变换σ在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证$A^H = A$.

定理 4.14 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是正交投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵A为幂等的Hermite矩阵, 即$A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设A是线性变换σ在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证$A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \ \ R(\sigma)^{\perp} = N(\sigma),$$

定理 4.14 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是正交投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵A为幂等的**Hermite**矩阵, 即$A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设A是线性变换σ在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证$A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \;\; R(\sigma)^{\perp} = N(\sigma),$$

得

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A), \;\; R(A)^{\perp} = N(A),$$

定理 4.14 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是正交投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵A为幂等的Hermite矩阵, 即$A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设A是线性变换σ在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证$A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \quad R(\sigma)^{\perp} = N(\sigma),$$

得

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A), \quad R(A)^{\perp} = N(A),$$

又令$\boldsymbol{x} \in R(A)$, $\boldsymbol{y} \in N(A^H)$. 设$A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$, 由$A^2 = A$有$A\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{z}) = A^2\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$, 于是

定理 4.14 $\mathbb{C}^n$空间上的线性变换σ是正交投影变换的充分必要条件是σ关于某组基下的矩阵A为幂等的Hermite矩阵, 即$A^2 = A$, $A^H = A$.

证明 必要性: 设A是线性变换σ在某组基下的矩阵, 由定理4.13, 只需证$A^H = A$.

由

$$\mathbb{C}^n = R(\sigma) \oplus N(\sigma), \quad R(\sigma)^{\perp} = N(\sigma),$$

得

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A), \quad R(A)^{\perp} = N(A),$$

又令$\boldsymbol{x} \in R(A)$, $\boldsymbol{y} \in N(A^H)$. 设$A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$, 由$A^2 = A$有$A\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{z}) = A^2\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$, 于是

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x})^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^H A^H \boldsymbol{y}$$

$$= (\boldsymbol{x}, A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0,$$

故
$$N(A^H) \subseteq R(A)^{\perp}.$$

故 $$N(A^H) \subseteq R(A)^{\perp}.$$

另一方面, 对任意$\boldsymbol{y} \in R(A)^{\perp}$, 有

$$(A^H\boldsymbol{y},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ AA^H\boldsymbol{y}) = 0,$$

故 $$N(A^H) \subseteq R(A)^{\perp}.$$

另一方面, 对任意$\boldsymbol{y} \in R(A)^{\perp}$, 有

$$(A^H\boldsymbol{y},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ AA^H\boldsymbol{y}) = 0,$$

从而$A^H\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 即$\boldsymbol{y} \in N(A^H)$, 故$R(A)^{\perp} = N(A^H)$.

故 $$N(A^H) \subseteq R(A)^\perp.$$

另一方面, 对任意$\boldsymbol{y} \in R(A)^\perp$, 有
$$(A^H\boldsymbol{y},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ AA^H\boldsymbol{y}) = 0,$$
从而$A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 即$\boldsymbol{y} \in N(A^H)$, 故$R(A)^\perp = N(A^H)$. 于是
$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H),\ \ R(A)^\perp = N(A^H),$$

故
$$N(A^H) \subseteq R(A)^{\perp}.$$

另一方面, 对任意$\boldsymbol{y} \in R(A)^{\perp}$, 有
$$(A^H\boldsymbol{y},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ AA^H\boldsymbol{y}) = 0,$$
从而$A^H\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 即$\boldsymbol{y} \in N(A^H)$, 故$R(A)^{\perp} = N(A^H)$. 于是
$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H),\ \ R(A)^{\perp} = N(A^H),$$
由正交补的惟一性得$N(A) = N(A^H)$.

故
$$N(A^H) \subseteq R(A)^{\perp}.$$

另一方面, 对任意$\boldsymbol{y} \in R(A)^{\perp}$, 有
$$(A^H\boldsymbol{y},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ AA^H\boldsymbol{y}) = 0,$$
从而$A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 即$\boldsymbol{y} \in N(A^H)$, 故$R(A)^{\perp} = N(A^H)$. 于是
$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H),\ \ R(A)^{\perp} = N(A^H),$$
由正交补的惟一性得$N(A) = N(A^H)$.

同理, 由$(A^H)^2 = A^H$, 得
$$\mathbb{C}^n = R(A^H) \oplus N(A),\ \ R(A^H)^{\perp} = N(A),$$
故
$$R(A) = R(A^H).$$

故
$$N(A^H) \subseteq R(A)^{\perp}.$$

另一方面, 对任意$\boldsymbol{y} \in R(A)^{\perp}$, 有
$$(A^H\boldsymbol{y},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ AA^H\boldsymbol{y}) = 0,$$
从而$A^H\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 即$\boldsymbol{y} \in N(A^H)$, 故$R(A)^{\perp} = N(A^H)$. 于是
$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^H),\ \ R(A)^{\perp} = N(A^H),$$
由正交补的惟一性得$N(A) = N(A^H)$.

同理, 由$(A^H)^2 = A^H$, 得
$$\mathbb{C}^n = R(A^H) \oplus N(A),\ \ R(A^H)^{\perp} = N(A),$$
故
$$R(A) = R(A^H).$$

$\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 令$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, 其中$\boldsymbol{y} \in R(A) = R(A^H)$,

$\boldsymbol{z} \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}, \qquad \blacksquare$$

$\boldsymbol{z} \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

所以

$$A = A^H.$$

■

$\boldsymbol{z} \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}, \qquad \blacksquare$$

所以

$$A = A^H.$$

充分性: 因$A^2 = A$, 所以σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

左逆与右逆

广义逆矩阵

Home Page

Title Page

Page 39 of 47

Go Back

Full Screen

Close

Quit

$\boldsymbol{z} \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

所以

$$A = A^H. \qquad \blacksquare$$

充分性: 因$A^2 = A$, 所以σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in R(A)^{\perp}$, 由

$$(A\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A^H A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = 0$$

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

所以

$$A = A^H.$$

∎

充分性: 因$A^2 = A$, 所以σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in R(A)^{\perp}$, 由

$$(A\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A^H A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = 0$$

因此, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即$\boldsymbol{x} \in N(A)$.

$\boldsymbol{z} \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

所以
$$A = A^H.$$
■

充分性: 因$A^2 = A$, 所以σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in R(A)^{\perp}$, 由

$$(A\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A^H A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}) = 0$$

因此, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即$\boldsymbol{x} \in N(A)$.

又$\boldsymbol{x} \in R(A)$, $\boldsymbol{y} \in N(A)$, 有

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{0}) = 0,$$

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$Ax = Ay + Az = Ay = y,$$

$$A^H x = A^H y + A^H z = A^H y = y,$$ ■

所以
$$A = A^H.$$

充分性: 因$A^2 = A$, 所以σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall\, x \in R(A)^{\perp}$, 由

$$(Ax,\ Ax) = (x,\ A^H Ax) = (x,\ Ax) = 0$$

因此, $Ax = \mathbf{0}$, 即$x \in N(A)$.

又$x \in R(A)$, $y \in N(A)$, 有

$$(x,\ y) = (Ax,\ y) = (x,\ A^H y) = (x,\ \mathbf{0}) = 0,$$

因此, $y \in R(A)^{\perp}$, 即$N(A) \subseteq R(A)^{\perp}$.

$z \in N(A) = N(A^H)$, 由

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

$$A^H\boldsymbol{x} = A^H\boldsymbol{y} + A^H\boldsymbol{z} = A^H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y},$$

所以

$$A = A^H. \qquad \blacksquare$$

充分性: 因$A^2 = A$, 所以σ是$\mathbb{C}^n$空间的投影变换, 且

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A),$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in R(A)^\perp$, 由

$$(A\boldsymbol{x},\, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\, A^H A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\, A\boldsymbol{x}) = 0$$

因此, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即$\boldsymbol{x} \in N(A)$.

又$\boldsymbol{x} \in R(A)$, $\boldsymbol{y} \in N(A)$, 有

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, A^H\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \mathbf{0}) = 0,$$

因此, $\boldsymbol{y} \in R(A)^\perp$, 即$N(A) \subset R(A)^\perp$. 综合起来, 就是$R(A)^\perp =$

$N(A)$. ∎

$N(A)$. ■

作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵AA^+和A^+A.

$N(A)$. ■

作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵AA^+和A^+A.

定理 4.15 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

① $(A^+A)^2 = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$,

② $\mathbb{C}^n = R(A^+) \oplus N(A)$, $R(A^+)^\perp = N(A)$;

$N(A)$. ∎

作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵AA^+和A^+A.

定理 4.15 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

① $(A^+A)^2 = A^+A, (A^+A)^H = A^+A,$

② $\mathbb{C}^n = R(A^+) \oplus N(A), R(A^+)^\perp = N(A);$

③ $(AA^+)^2 = AA^+, (AA^+)^H = AA^+,$

④ $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), R(A)^\perp = N(A^+).$

$N(A)$. ■

作为正交投影矩阵的例子, 我们来研究矩阵AA^+和A^+A.

定理 4.15 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

① $(A^+A)^2 = A^+A, (A^+A)^H = A^+A,$

② $\mathbb{C}^n = R(A^+) \oplus N(A), R(A^+)^\perp = N(A);$

③ $(AA^+)^2 = AA^+, (AA^+)^H = AA^+,$

④ $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), R(A)^\perp = N(A^+).$

证明 ① $(A^+A)^2=(A^+AA^+)A=A^+A$, $(A^+A)^H=A^+A$就是M-P逆的定义.

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \;\; R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明$R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

证明 ① $(A^+A)^2=(A^+AA^+)A=A^+A$, $(A^+A)^H=A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n=R(A^+A)\oplus N(A^+A),\ \ R(A^+A)^\perp=N(A^+A),$$

下面证明$R(A^+A)=R(A^+)$, $N(A^+A)=N(A)$.

$\forall\, \boldsymbol{y}\in R(A^+A)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y}=A^+(A\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y}\in R(A^+)$, 即$R(A^+A)\subseteq R(A^+)$;

证明 ① $(A^+A)^2=(A^+AA^+)A=A^+A$, $(A^+A)^H=A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n=R(A^+A)\oplus N(A^+A),\ \ R(A^+A)^{\perp}=N(A^+A),$$

下面证明$R(A^+A)=R(A^+)$, $N(A^+A)=N(A)$.

$\forall\, \boldsymbol{y}\in R(A^+A)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y}=A^+(A\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y}\in R(A^+)$, 即$R(A^+A)\subseteq R(A^+)$;

$\forall\, \boldsymbol{y}\in R(A^+)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y}=A^+\boldsymbol{x}=A^+A(A^+\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y}\in R(A^+A)$, 即$R(A^+)\subseteq R(A^+A)$, 所以$R(A^+A)=R(A^+)$.

证明 ① $(A^+A)^2=(A^+AA^+)A=A^+A$, $(A^+A)^H=A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n=R(A^+A)\oplus N(A^+A),\ \ R(A^+A)^\perp=N(A^+A),$$

下面证明$R(A^+A)=R(A^+)$, $N(A^+A)=N(A)$.

$\forall\, \boldsymbol{y}\in R(A^+A)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y}=A^+(A\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y}\in R(A^+)$, 即$R(A^+A)\subseteq R(A^+)$;

$\forall\, \boldsymbol{y}\in R(A^+)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y}=A^+\boldsymbol{x}=A^+A(A^+\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y}\in R(A^+A)$, 即$R(A^+)\subseteq R(A^+A)$, 所以$R(A^+A)=R(A^+)$.

$\forall\, \boldsymbol{x}\in N(A^+A)$, $A^+A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由$A\boldsymbol{x}=A(A^+A\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, 故$N(A^+A)\subseteq N(A)$;

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A), \quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明$R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall\, \boldsymbol{y} \in R(A^+A)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y} = A^+(A\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y} \in R(A^+)$, 即 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$;

$\forall\, \boldsymbol{y} \in R(A^+)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y} = A^+\boldsymbol{x} = A^+A(A^+\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y} \in R(A^+A)$, 即$R(A^+) \subseteq R(A^+A)$, 所以$R(A^+A) = R(A^+)$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A^+A)$, $A^+A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由$A\boldsymbol{x} = A(A^+A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A^+A) \subseteq N(A)$;

$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A)$, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由$A^+(A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 故$N(A) \subseteq N(A^+A)$, 所以$N(A^+A) = N(A)$.

证明 ① $(A^+A)^2 = (A^+AA^+)A = A^+A$, $(A^+A)^H = A^+A$就是M-P逆的定义.

② 由定理4.14及①知, A^+A是正交投影矩阵, 故

$$\mathbb{C}^n = R(A^+A) \oplus N(A^+A),\quad R(A^+A)^\perp = N(A^+A),$$

下面证明$R(A^+A) = R(A^+)$, $N(A^+A) = N(A)$.

$\forall\, \boldsymbol{y} \in R(A^+A)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y} = A^+(A\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y} \in R(A^+)$, 即 $R(A^+A) \subseteq R(A^+)$;

$\forall\, \boldsymbol{y} \in R(A^+)$, 存在$\boldsymbol{x}$使$\boldsymbol{y} = A^+\boldsymbol{x} = A^+A(A^+\boldsymbol{x})$, 故$\boldsymbol{y} \in R(A^+A)$, 即$R(A^+) \subseteq R(A^+A)$, 所以$R(A^+A) = R(A^+)$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A^+A)$, $A^+A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由$A\boldsymbol{x} = A(A^+A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 故 $N(A^+A) \subseteq N(A)$;

$\forall\, \boldsymbol{x} \in N(A)$, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由$A^+(A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, 故$N(A) \subseteq N(A^+A)$, 所以$N(A^+A) = N(A)$.

同理可证③, ④. ■

同理可证③, ④. ■

定理 4.16 设W是$\mathbb{C}^n$的子空间, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{x}_0 \notin W$. 如果$\sigma$是$\mathbb{C}^n$空间向$W$的正交投影变换, 则$\sigma(\boldsymbol{x}_0)$是$W$中离$\boldsymbol{x}_0$最近的向量, 即在欧几里得范数$\|\cdot\|_2$意义下, $\forall\, \boldsymbol{y} \in W$, 都有

$$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0\|_2 \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\|_2.$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 42 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

同理可证③, ④. ■

定理 4.16 设W是$\mathbb{C}^n$的子空间, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{x}_0 \notin W$. 如果$\sigma$是$\mathbb{C}^n$空间向$W$的正交投影变换, 则$\sigma(\boldsymbol{x}_0)$是$W$中离$\boldsymbol{x}_0$最近的向量, 即在欧几里得范数$\|\cdot\|_2$意义下, $\forall\, \boldsymbol{y} \in W$, 都有

$$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0\|_2 \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\|_2.$$

证明 因为σ是$\mathbb{C}^n$空间向W的正交投影变换, 所以

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp},\ \ W = R(\sigma),\ \ W^{\perp} = N(\sigma),$$

同理可证③, ④. ■

定理 4.16 设W是$\mathbb{C}^n$的子空间, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{x}_0 \notin W$. 如果$\sigma$是$\mathbb{C}^n$空间向$W$的正交投影变换, 则$\sigma(\boldsymbol{x}_0)$是$W$中离$\boldsymbol{x}_0$最近的向量, 即在欧几里得范数$\|\cdot\|_2$意义下, $\forall\, \boldsymbol{y} \in W$, 都有

$$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0\|_2 \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0\|_2.$$

证明 因为σ是$\mathbb{C}^n$空间向W的正交投影变换, 所以

$$\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp}, \;\; W = R(\sigma), \;\; W^{\perp} = N(\sigma),$$

$\forall\, \boldsymbol{y} \in W$, 由于$[\boldsymbol{y} - \sigma(\boldsymbol{x}_0)] \in W$, $[\sigma(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_0] \in W^{\perp}$, 因此

$$\begin{aligned}\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 &\le \|\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)\|_2^2+\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2\\ &= \|[\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)]+[\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0]\|_2^2\\ &= \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2, \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)\|_2^2+\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 \\
&= \|[\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)]+[\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0]\|_2^2 \\
&= \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2, \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

故 $$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2 \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2, \forall\, \boldsymbol{y} \in W. \qquad \blacksquare$$

$$
\begin{aligned}
\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 \le \|\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)\|_2^2+\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 \\
= \|[\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)]+[\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0]\|_2^2 \\
= \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2, \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

故 $$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2 \le \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2, \forall\, \boldsymbol{y}\in W. \qquad \blacksquare$$

正交投影矩阵A可按如下方法求得:

$$\begin{aligned}\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)\|_2^2+\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 \\ =\|[\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)]+[\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0]\|_2^2 \\ =\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2,\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

故 $$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2 \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2, \forall\, \boldsymbol{y} \in W. \qquad \blacksquare$$

正交投影矩阵A可按如下方法求得:

假定$\dim L = r$, 则$\dim L^{\perp} = n-r$. 在子空间L和$L^{\perp}$中分别取定基

$$\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_r\}, \ \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{n-r}\},$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 43 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

$$\begin{aligned}\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2 &\le \|\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)\|_2^2+\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2^2\\ &= \|[\boldsymbol{y}-\sigma(\boldsymbol{x}_0)]+[\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0]\|_2^2\\ &= \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2, \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

故 $$\|\sigma(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0\|_2 \le \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_2, \forall\, \boldsymbol{y}\in W. \qquad \blacksquare$$

正交投影矩阵A可按如下方法求得:

假定$\dim L = r$, 则$\dim L^{\perp} = n-r$. 在子空间L和$L^{\perp}$中分别取定基

$$\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_r\}, \ \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_{n-r}\},$$

作矩阵

$$B=(\boldsymbol{y}_1\ \ \boldsymbol{y}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{y}_r),\ \ C=(\boldsymbol{z}_1\ \ \boldsymbol{z}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{z}_{n-r}),$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 43 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

则$B^H C = \mathbf{0}$. 由投影矩阵的求法有

$$
\begin{aligned}
A &= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1} \\
&= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}((B \mid C)^H)^{-1}(B \mid C)^H \\
&= (B \mid \mathbf{0})((B \mid C)^H(B \mid C))^{-1}(B \mid C)^H \\
&= (B \mid \mathbf{0})\begin{pmatrix} B^H B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^H C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
&= (B \mid \mathbf{0})\begin{pmatrix} (B^H B)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (C^H C)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
&= B(B^H B)^{-1}B.
\end{aligned}
$$

则$B^HC=\mathbf{0}$. 由投影矩阵的求法有

$$\begin{aligned}
A &= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1} \\
&= (B \mid \mathbf{0})(B \mid C)^{-1}((B \mid C)^H)^{-1}(B \mid C)^H \\
&= (B \mid \mathbf{0})((B \mid C)^H(B \mid C))^{-1}(B \mid C)^H \\
&= (B \mid \mathbf{0})\begin{pmatrix} B^HB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^HC \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
&= (B \mid \mathbf{0})\begin{pmatrix} (B^HB)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (C^HC)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^H \\ C^H \end{pmatrix} \\
&= B(B^HB)^{-1}B.
\end{aligned}$$

§4.4 最佳的最小二乘解

§4.4 最佳的最小二乘解

设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当$\boldsymbol{b} \in R(A)$. 如果$\boldsymbol{b} \in R(A)$, 称方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是相容的, 否则, 称其是不相容的.

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 45 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§4.4 最佳的最小二乘解

设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当$\boldsymbol{b} \in R(A)$. 如果$\boldsymbol{b} \in R(A)$, 称方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是相容的, 否则, 称其是不相容的. 对不相容的方程组, 希望求其近似解$\boldsymbol{u}$, 使得对欧几里得范数$\|\cdot\|_2$, 误差$\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}\|_2$达到极小.

§4.4 最佳的最小二乘解

设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$, 线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解当且仅当$\boldsymbol{b}\in R(A)$. 如果$\boldsymbol{b}\in R(A)$, 称方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$是相容的, 否则, 称其是不相容的. 对不相容的方程组, 希望求其近似解$\boldsymbol{u}$, 使得对欧几里得范数$\|\cdot\|_2$, 误差$\|A\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}\|_2$达到极小.

定义 4.6 设$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$, 如果存在$\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n$, 使得

$$\|A\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}\|_2\le\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2,\ \ \forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n,$$

§4.4 最佳的最小二乘解

设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当$\boldsymbol{b} \in R(A)$. 如果$\boldsymbol{b} \in R(A)$, 称方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是相容的, 否则, 称其是不相容的. 对不相容的方程组, 希望求其近似解$\boldsymbol{u}$, 使得对欧几里得范数$\|\cdot\|_2$, 误差$\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}\|_2$达到极小.

定义 4.6 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 如果存在$\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$

则称$\boldsymbol{u}$是方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的一个最小二乘解.

§4.4 最佳的最小二乘解

设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$有解当且仅当$\boldsymbol{b} \in R(A)$. 如果$\boldsymbol{b} \in R(A)$, 称方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$是相容的, 否则, 称其是不相容的. 对不相容的方程组, 希望求其近似解$\boldsymbol{u}$, 使得对欧几里得范数$\|\cdot\|_2$, 误差$\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}\|_2$达到极小.

定义 4.6 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 如果存在$\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$\|A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}\|_2 \le \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$

则称$\boldsymbol{u}$是方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的一个最小二乘解.

设$\boldsymbol{x}_0$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解, 如果对于$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的每一个最小二乘解$\boldsymbol{u}$, 都有

$$\|\boldsymbol{x}_0\|_2 \le \|\boldsymbol{u}\|_2,$$

左逆与右逆
广义逆矩阵
Home Page
Title Page
Page 45 of 47
Go Back
Full Screen
Close
Quit
•First •Prev •Next •Last •Go Back •Full Screen •Close •Quit

则称$\boldsymbol{x}_0$是**最佳的最小二乘解**(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

则称$\boldsymbol{x}_0$是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解.

则称$\boldsymbol{x}_0$是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解.

证明 由定理4.15知, AA^+是$\mathbb{C}^m$空间在$R(A)$上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\|_2 \le \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$

则称$\boldsymbol{x}_0$是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解.

证明 由定理4.15知, AA^+是$\mathbb{C}^m$空间在$R(A)$上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$

故$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解.

则称$\boldsymbol{x}_0$是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解.

证明 由定理4.15知, AA^+是$\mathbb{C}^m$空间在$R(A)$上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\|_2 \le \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$

故$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解.

又由定理4.15, 有

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), \ \ R(A)^\perp = N(A^+),$$

则称$\boldsymbol{x}_0$是最佳的最小二乘解(或称按范数最小的最小二乘解, 也称最佳逼近解).

定理 4.17 设$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是线性方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解.

证明 由定理4.15知, AA^+是$\mathbb{C}^m$空间在$R(A)$上的一个正交投影变换所对应的矩阵, 再由定理4.16, 有

$$\|A(A^+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\|_2 \le \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,$$

故$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解.

又由定理4.15, 有

$$\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A^+), \ R(A)^\perp = N(A^+),$$

每个$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$可惟一地分解为

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \ \boldsymbol{b}_1 \in R(A), \ \boldsymbol{b}_2 \in N(A^+),$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$
\begin{aligned}
\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 &= \|(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1) + (-\boldsymbol{b}_2)\|_2^2 \\
&= \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1\|_2^2 + \|\boldsymbol{b}_2\|_2^2, \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 &= \|(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1) + (-\boldsymbol{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1\|_2^2 + \|\boldsymbol{b}_2\|_2^2,\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

因此, $\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解当且仅当$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$的解.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \|(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1) + (-\boldsymbol{b}_2)\|_2^2$$
$$= \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1\|_2^2 + \|\boldsymbol{b}_2\|_2^2, \qquad \blacksquare$$

因此, $\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解当且仅当$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$的解.

设$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的任一个最小二乘解, 因$\boldsymbol{x}_0$也是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的最小二乘解, 故$A(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{x}_0 - A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}$, 从而$(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{u}) \in N(A)$. 由定理4.15知, $R(A^+)^\perp = N(A)$, 故从$\boldsymbol{x}_0 = A^+\boldsymbol{b} \in R(A^+)$得$\boldsymbol{x}_0$与$(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{u})$正交. 因此

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \|\boldsymbol{x}_0 + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_0)\|_2^2 = \|\boldsymbol{x}_0\|_2^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_0\|_2^2 \geq \|\boldsymbol{x}_0\|_2^2,$$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2 &= \|(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_1)+(-\boldsymbol{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_1\|_2^2+\|\boldsymbol{b}_2\|_2^2, \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

因此, $\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解当且仅当$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$的解.

设$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的任一个最小二乘解, 因$\boldsymbol{x}_0$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解, 故$A(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{x}_0-A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0}$, 从而$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u})\in N(A)$. 由定理4.15知, $R(A^+)^\perp=N(A)$, 故从$\boldsymbol{x}_0=A^+\boldsymbol{b}\in R(A^+)$得$\boldsymbol{x}_0$与$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u})$正交. 因此

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2=\|\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}_0)\|_2^2=\|\boldsymbol{x}_0\|_2^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2\geq\|\boldsymbol{x}_0\|_2^2,$$

证得$\boldsymbol{x}_0=A^+\boldsymbol{b}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解. $\blacksquare$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2 &= \|(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_1)+(-\boldsymbol{b}_2)\|_2^2 \\ &= \|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_1\|_2^2+\|\boldsymbol{b}_2\|_2^2,\end{aligned}$$ ■

因此, $\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解当且仅当$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$的解.

设$\boldsymbol{u}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的任一个最小二乘解, 因$\boldsymbol{x}_0$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小二乘解, 故$A(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{x}_0-A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0}$, 从而$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u})\in N(A)$. 由定理4.15知, $R(A^+)^\perp=N(A)$, 故从$\boldsymbol{x}_0=A^+\boldsymbol{b}\in R(A^+)$得$\boldsymbol{x}_0$与$(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{u})$正交. 因此

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2=\|\boldsymbol{x}_0+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}_0)\|_2^2=\|\boldsymbol{x}_0\|_2^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}_0\|_2^2\geq\|\boldsymbol{x}_0\|_2^2,$$

证得$\boldsymbol{x}_0=A^+\boldsymbol{b}$是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最佳的最小二乘解. ■

推论 4.2 设矩阵方程$A\boldsymbol{X} = B$, 其中$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, 则$\boldsymbol{X}_0 = A^+B$是$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$的最佳的最小二乘解.

推论 4.2 设矩阵方程$A\boldsymbol{X}=B$, 其中$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times k}$, 则$\boldsymbol{X}_0=A^{+}B$是$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$的最佳的最小二乘解.

应用最佳最小二乘解, 可以解决在实际中常常要求寻找经验公式的问题. 设由观测得到关于物理量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的一组数据为

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2), \cdots, (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m).$$

推论 4.2 设矩阵方程$A\boldsymbol{X}=B$, 其中$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times k}$, 则$\boldsymbol{X}_0=A^+B$是$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$的最佳的最小二乘解.

应用最佳最小二乘解, 可以解决在实际中常常要求寻找经验公式的问题. 设由观测得到关于物理量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的一组数据为

$$(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}_1),\ (\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_2),\ \cdots,\ (\boldsymbol{x}_m,\ \boldsymbol{y}_m).$$

人们希望通过这些数据, 找出函数$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$, 使得以$\delta_i=f(\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{y}_i\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$作为分量的误差向量$\boldsymbol{\delta}$按欧几里得范数$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$最小, 称如此得到的函数$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$的图形是拟合数据$(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{y}_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$的最佳拟合曲线.

推论 4.2 设矩阵方程$AX = B$, 其中$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, 则$\boldsymbol{X}_0 = A^{+}B$是$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$的最佳的最小二乘解.

应用最佳最小二乘解, 可以解决在实际中常常要求寻找经验公式的问题. 设由观测得到关于物理量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的一组数据为

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2), \cdots, (\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m).$$

人们希望通过这些数据, 找出函数$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, 使得以$\delta_i = f(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{y}_i \ i = 1, 2, \cdots, m$作为分量的误差向量$\boldsymbol{\delta}$按欧几里得范数$\|\boldsymbol{\delta}\|_2$最小, 称如此得到的函数$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$的图形是拟合数据$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i)(i = 1, 2, \cdots, m)$的最佳拟合曲线.