第3章：高斯模型

- 概述
- 高斯判别式分析
- 用高斯联合分布进行推理
- 线性高斯系统
- **Inferring the parameters of an MVN**

概述

高斯分布的重要性

- 多元高斯分布（正态分布 MVN）
  - 是最广泛使用的联合概率密度分布
  - 它用于连续随机变量
  - 它是构成许多模型的基础

多元高斯分布

$$N(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} \mid \boldsymbol{\Sigma} \mid^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right]$$

- **x** = [x_1, . . . , x_D] : *随机向量，每个分量都是随机变量*
- **μ**：均值向量
- **Σ**: 协方差矩阵

马氏距离（Mahalanobis distance）

- 高斯分布的指数部分，具有距离特征
  - **我们把它称为马氏距离:**

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$$

- 常用的欧氏距离：

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$$

马氏距离分析

- 协方差矩阵可以分解成：$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U\Lambda U}^T$,
  - **U ：特征向量组成的正交矩阵，$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$,**
    - ***$\mathbf{u}_i$：U的第 i列，是第i个特征向量***
  - **Λ：特征值组成的对角矩阵.**

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}^{-T}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{T} = \sum_{i=1}^{D}\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T$$

- 所以，马氏距离可变成：

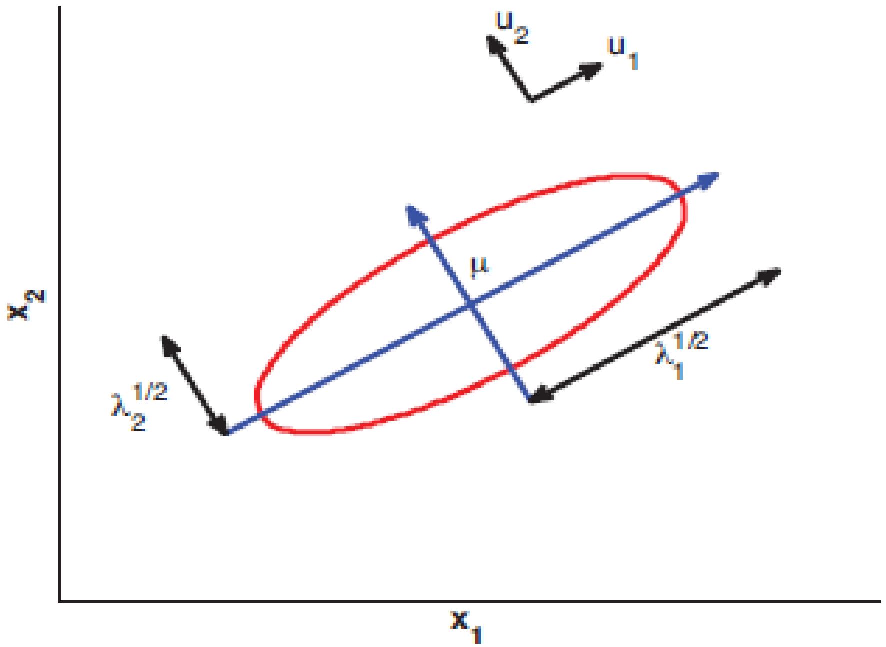
$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\left(\sum_{i=1}^{D}\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T\right)(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \qquad \textit{where}\ \ y_i = \mathbf{u}_i^T(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$$

$$= \sum_{i=1}^{D}\frac{1}{\lambda_i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{D}\frac{y_i^2}{\lambda_i}$$

多元高斯分布的特点

❖ 不失一般性，考虑2维空间，马氏距离可写成：

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2}$$



❖ 沿椭圆轮廓都是等概率密度

❖ 特征向量确定椭圆的方向

❖ 特征值决定了它的伸长程度。

基于最大似然，估计多元高斯分布的参数

- 定理：*N个独立同分布的样本* $\mathbf{x_i} \sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, *则最大似然估计的参数结果为*

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{mle} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{mle} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T = \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T) - \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^T$$

- 在单变量情形下，变成我们熟悉的形式:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{x} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - (\bar{x})^2$$

高斯分布具有最大熵

- 在给定了均值和方差的所有分布中，高斯分布的熵最大
- 为了简化符合，假设均值为0
- 定理：**设**$q(x)$ 是任意密度分布，满足 $\int q(\mathbf{x}) x_i x_j = \boldsymbol{\Sigma}_{ij}$ 。

  如果 $p = N(0,\Sigma)$，则 $h(q) \le h(p)$
- 高斯分布的熵：

$$h(N(\mu,\Sigma)) = \frac{1}{2}\ln[(2\pi e)^D|\Sigma|]$$

高斯判别分析(GDA)

产生式分类器回顾

❖ 我们知道产生式分类器：

$$p(y=c|x,\theta)=\frac{p(y=c|\theta)p(x|y=c,\theta)}{\sum_{c'}p(y=c'|\theta)p(x|y=c',\theta)}$$

❖ 我们可以用下面规则进行决策：

$$\hat{y}(\mathbf{x})=\arg\max_{c}[\log p(y=c\mid\pi_{c})+\log p(x\mid\theta_{c})]$$

高斯判别分析

- 假设类条件密度服从高斯分布： $p(\mathbf{x} \mid y = c, \theta) = N(x \mid \boldsymbol{\mu}_c, \boldsymbol{\Sigma}_c)$

- 决策规则就变成： $\hat{y}(\mathbf{x}) = \arg\max_c [\log \pi_c + \log N(x \mid \boldsymbol{\mu}_c, \boldsymbol{\Sigma}_c)]$

  - 用这个式子进行推理，称为（高斯）判别式分析 **(GDA)**
  - 尽管它是产生式而不是判别式分类器
  - 如果 Σ_c is 是对角阵，则等价于朴素贝叶斯.

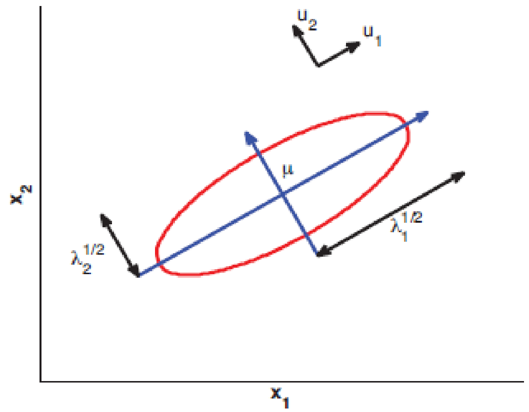
分类器的决策规则变为多项式

- 决策规则:

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \arg\max_{c}[\log \pi_c + \log N(x \mid \boldsymbol{\mu}_c, \boldsymbol{\Sigma}_c)]$$

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \arg\max_{c}[\log \pi_c - \frac{1}{2}\log|2\pi\Sigma_c| - \frac{1}{2}(x-\mu_c)^T \Sigma_c^{-1}(x-\mu_c)]$$

  - 决策规则就变成了多项式



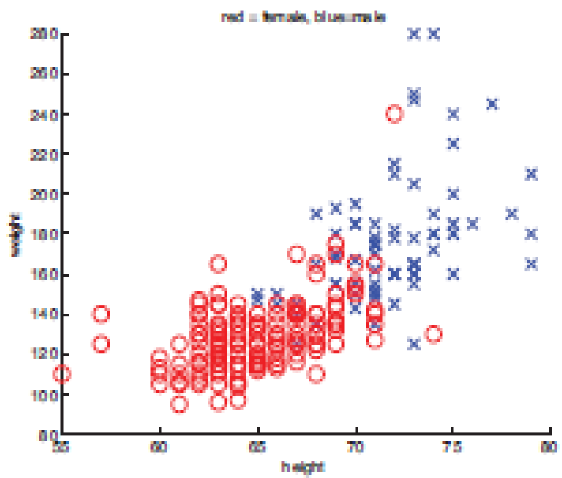
最近中心分类器

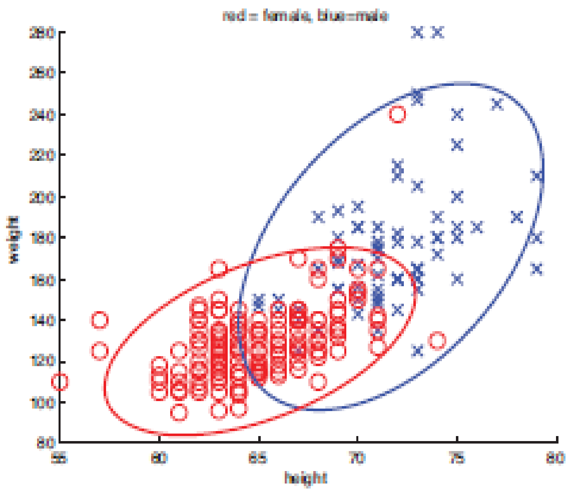
- 假定类先验为均匀分布
- 分类器就变成为:

$$\hat{y}(x) = \underset{c}{\operatorname{argmin}} (x - \mu_c)^T \Sigma_c^{-1} (x - \mu_c)$$

最近中心分类器应用

- 样本数据取自人群的身高体重
- 每个类的2d高斯拟合图示
  - 概率分布的95% 都在椭圆的内部.





二次判别分析(QDA)

- 对于类c1和c2，如果x属于c1，则应有： $p(y=c_1 \mid x) > p(y=c_2 \mid x)$
- 令，

$$\delta(x) = p(y=c_1 \mid x) - p(y=c_2 \mid x)$$

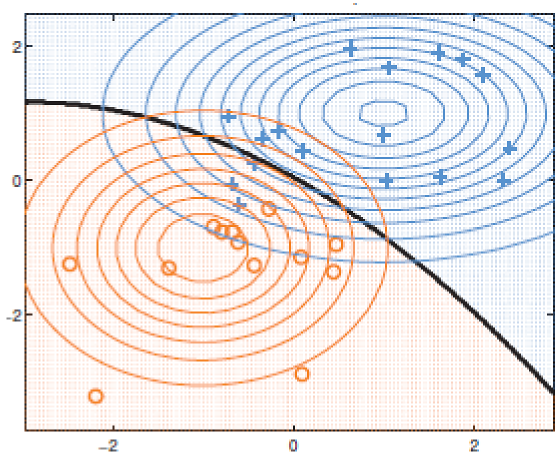
$$= -\frac{1}{2}(x-\mu_{c1})^T \Sigma_{c1}^{-1}(x-\mu_{c1}) - \frac{1}{2}\log|\Sigma_{c1}|$$

$$+\frac{1}{2}(x-\mu_{c2})^T \Sigma_{c2}^{-1}(x-\mu_{c2}) + \frac{1}{2}\log|\Sigma_{c2}| + \log\frac{\pi_{c1}}{\pi_{c2}}$$

- δ(x) 成为了判别函数，因为是二次多项式，特称为二次判别分析
  - δ(x)>0 则 x∈c1,
  - δ(x)<0 则 x∈c2

二次判别分析的边界

- 二次判别分析中，判别函数δ(x) =0，表示x在c1和c2类的边界上

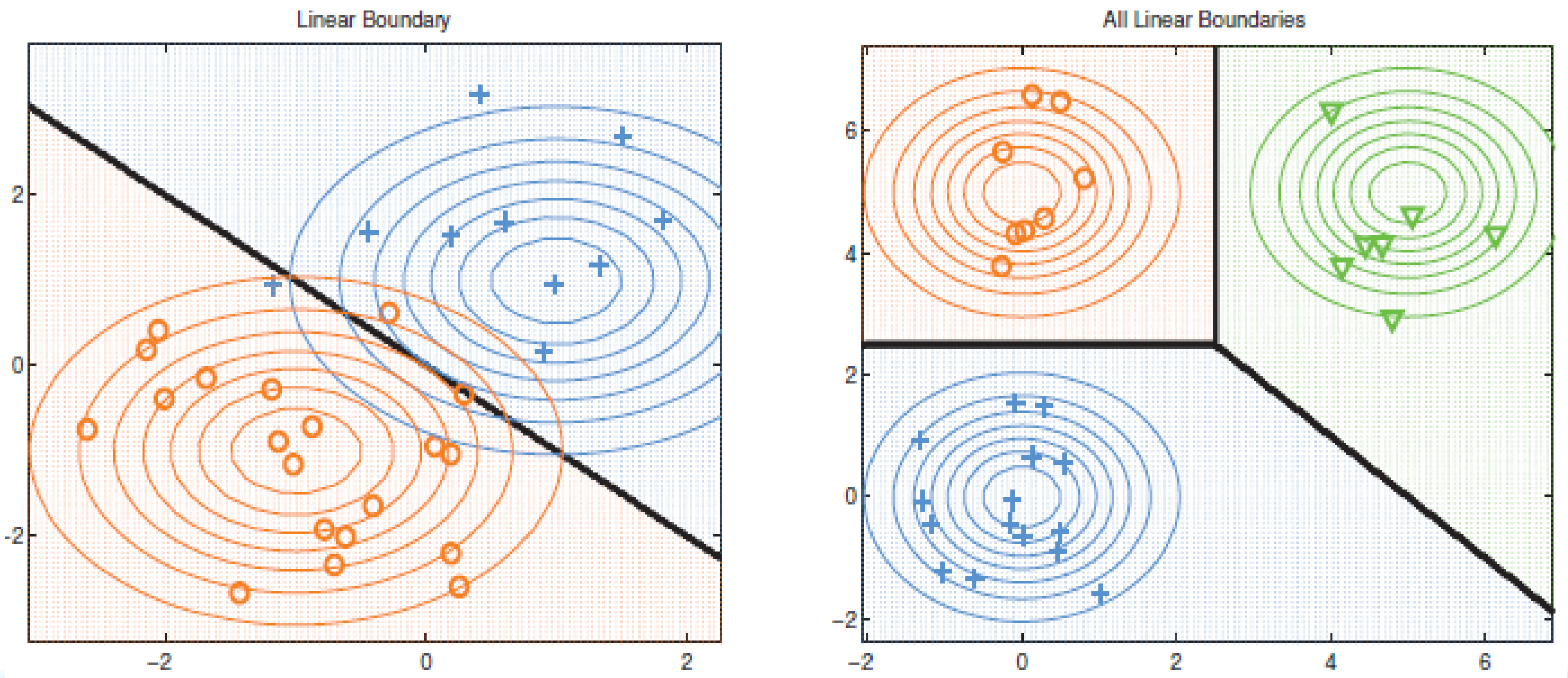


线性判别分析(LDA)

- 在二次判别分析中，如果协方差矩阵$\Sigma_{c1}=\Sigma_{c2}=\Sigma$，则判别函数δ(x)变成了一次多项式:

$$\delta(x)=-\frac{1}{2}\mu_{c1}^{T}\Sigma^{T}x-\frac{1}{2}x^{T}\Sigma^{T}\mu_{c1}-\frac{1}{2}\mu_{c1}^{T}\Sigma^{T}\mu_{c1}+\frac{1}{2}\mu_{c2}^{T}\Sigma^{T}x+\frac{1}{2}x^{T}\Sigma^{T}\mu_{c2}+\frac{1}{2}\mu_{c2}^{T}\Sigma^{T}\mu_{c2}+\log\frac{\pi_{c1}}{\pi_{c2}}$$

- **因此，称为线性判别分析**
- **其类边界δ(x) =0 为一条直线**



一般由概率构造的判别分析

- 在两类分类条件下，生成式分类器为：

$$p(c_1|x)=\frac{p(c_1)p(x|c_1)}{p(c_1)p(x|c_1)+p(c_2)p(x|c_2)}=\frac{1}{1+\frac{p(c_2)p(x|c_2)}{p(c_1)p(x|c_1)}}$$

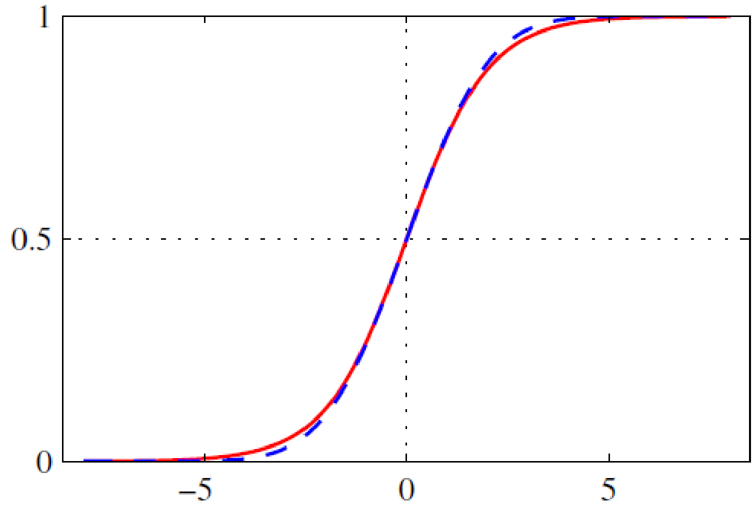
- 设

$$a=\ln\frac{p(c_1)p(x|c_1)}{p(c_2)p(x|c_2)}$$

- 则

$$p(c_1 \mid x)=\frac{1}{1+\exp(-a)}=\sigma(a)$$

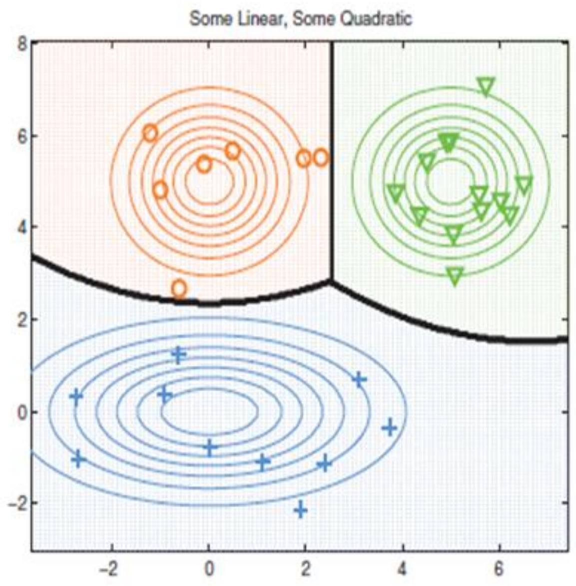
  - 这个是sigmoid函数



- 判别函数： $\delta(x)=a$

多类分类器

- 一种表示多类分类器的方法
  - 运用一组判别函数 $\delta_{i,j}(x)$, $i,j=1,2,\ldots,K$
  - $x \in C_i$， $\text{argmax}_j\ (\delta_j(x))$



运用高斯联合分布进行推理

问题的提出

- 给定联合概率分布, *p(x1, x2)*,
- 计算这些有用的分布
  - ***边缘分布： p(x1)***
  - ***条件分布： p(x1|x2).***

多元高斯分布的边缘分布

❖ 定理

- *设* **x = (x1, x2)** *服从联合高斯分布，参数为：*

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix},\quad \Lambda=\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

- *则有边缘分布：*

$$p(x_1)=N(x_1\,|\,\mu_1,\Sigma_{11}),\quad p(x_2)=N(x_2\,|\,\mu_2,\Sigma_{22})$$

多元高斯分布的条件分布

- 定理
  - *设* **x = (x1, x2)** *服从联合高斯分布，参数为：*

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

  - *则有后验条件分布：*

$$p(x_1 \mid x_2) = N(x_1 \mid \mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$$

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) = \mu_1 - \Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{12}(x_2 - \mu_2)$$

$$= \Sigma_{12}(\Lambda_{11}\mu_1 - \Lambda_{12}(x_2 - \mu_2))$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = \Lambda_{11}^{-1}$$

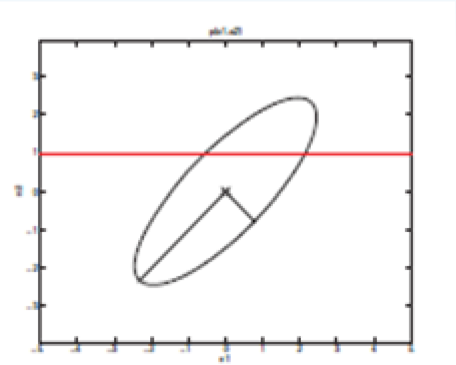
举例说明

边缘分布与条件分布

2元高斯分布

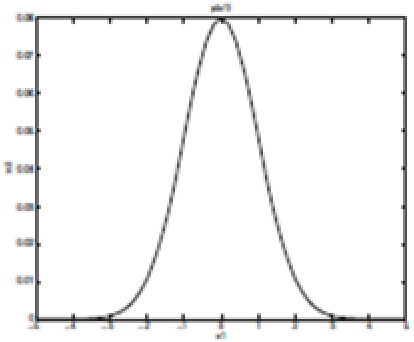
- 二元联合高斯分布*p(x1, x2)*:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$



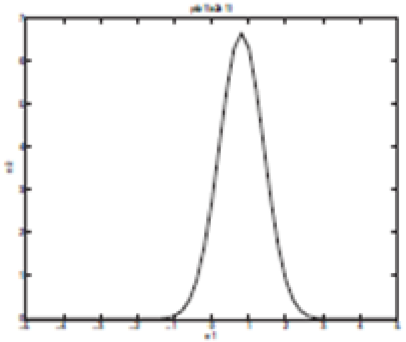
- 边缘分布 *p(x1) 是一元高斯分布*

$$p(x_1) = N(x_1 \mid \mu_1, \sigma_1^2)$$



- 条件分布 *p(x1) 是一元高斯分布*

$$p(x_1 \mid x_2) = N\left(x_1 \mid \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2 - \frac{(\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$$



  - *当 ρ = 0.8, σ1 = σ2 = 1, μ = 0 和 x2 = 1. p(x1|x2) = N(x1|0.8, 0.36),*

基于无噪声数据拟合函数

- 估计一个函数*f()*
  - 定义在 [0, T]区间，
  - *因为数据无噪声， f(0)=b1，f(T)=b2.*
- 高斯插值
  - *将 f() 的定义域分成n 等分*

$$x_j = f(s_j), \quad s_j = jh, \quad h = \frac{T}{n}, \quad 0 \le j \le n$$

  - 假设*f() 是光滑的，则:*

$$x_j \approx \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_{j+1}), \quad 1 \le j \le n-1$$

用概率观点看待拟合

- 设随机变量：　$\varepsilon_j \sim N(0, 1/\lambda)$，$1 \le j \le n\text{-}1$
- 则有：

$$x_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_{j+1}) + \varepsilon_j, \quad 1 \le j \le n-1$$

  - 写成矩阵形式：**LX = ε**

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in R^{(n-1)\times(n+1)} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

  - 将***x***看成两部分：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_n \end{pmatrix}$$

随机变量函数的分布

- 设随机变量 $x \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $f()$ 为线性函数:
  - $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$
- 则有: $\mathbf{y} \sim \mathrm{N}(\mathrm{E}[\mathbf{y}], \mathrm{cov}\,[\mathbf{y}])$
  - $\mathrm{E}\,[\mathbf{y}] = \mathrm{E}\,[\mathbf{Ax} + \mathbf{b}] = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$
    - 其中: $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}\,[\mathbf{x}]$.
  - $\mathrm{cov}\,[\mathbf{y}] = \mathrm{cov}[\mathbf{Ax} + \mathbf{b}] = \mathbf{A\Sigma A}^{T}$
    - 其中: $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{cov}[\mathbf{x}]$.

x的先验分布

- **x**的先验分布为：

$$p(x) = N(x \mid 0, (\lambda^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1}) \propto \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \| \mathbf{L}x \|_2^2 \right)$$

- *参数λ可看成是调节L 尺度，函数变化大小*
  - *参数λ变大：函数变光滑*
  - *参数λ变小：函数变得“摆动”。*

X的后验分布

- 将x看成两部分：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} x_0 = b_1 \\ x_n = b_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2], \quad \mathbf{L}_1 \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \quad \mathbf{L}_2 \in \mathbf{R}^{(n-1)\times 2}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{L}_1\mathbf{x}' + \mathbf{L}_2\mathbf{x}'' = \mathbf{L}_1(\mathbf{x}' + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{x}'')$$

- We can partition the precision matrix of the joint distribution:
  - So, we can get

$$\Lambda = \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1^T\mathbf{L}_1 & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}_2^T\mathbf{L}_1 & \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

$$p(x_1 \mid x_2) = N(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$$

$$\mu_{1|2} = -\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{12}x_2 = -\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2x_2$$

$$\Sigma_{1|2} = \Lambda_{11}^{-1}$$

X的后验分布

- *将x看成两部分：*

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{x}''\end{pmatrix}\qquad \mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{pmatrix}\qquad \mathbf{x}''=\begin{pmatrix}x_0=b_1\\ x_n=b_2\end{pmatrix}$$

- 对应的 ***L*** 矩阵也分成两部分

$$\mathrm{L}=[\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2],\quad \mathrm{L}_1\in \mathrm{R}^{(n-1)\times(n-1)},\quad \mathrm{L}_2\in \mathrm{R}^{(n-1)\times 2}$$

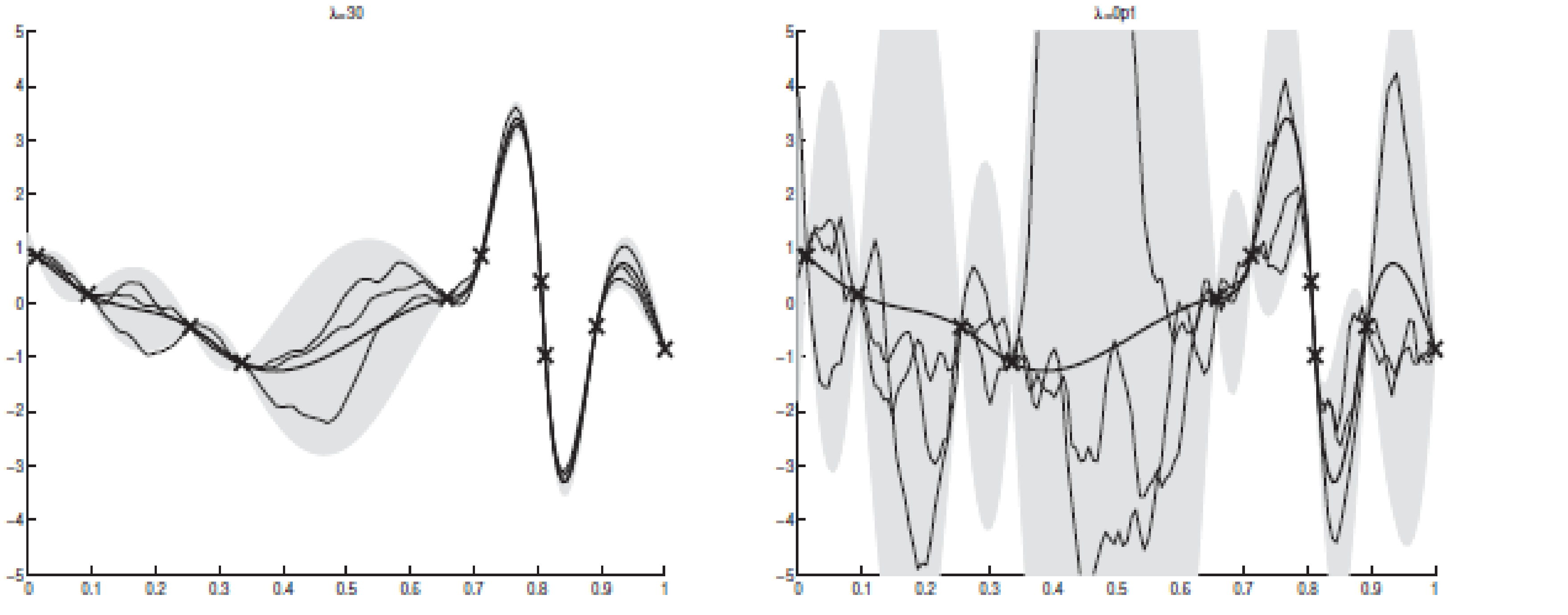
- 因此，我们有：$p(x'\mid x'')\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left\|L_1(x'+L_1^{-1}L_2x'')\right\|^2\right)$

$$p(x'\mid x'')\sim N(\mu',\Sigma')$$

$$\mu'=-L_1^{-1}L_2b\qquad \Sigma'=\sigma^2(L_1^TL_1)^{-1}$$

插值算法举例

- λ不同，得到的拟合曲线平滑性不同 ((a) λ = 3，0. (b) λ = 0.01)



(a) (b)

线性高斯系统

什么是线性高斯系统

- 我们称: **y = Ax +b为线性高斯系统，如果**
  - 设 **x** $\in$ ***R***^{Dx} *是隐随机变量,*　　***y*** $\in$ ***R***^{Dy} ***是x的具有噪声的观察值 .***
  - 其先验与似然:

$$P(x) = N(x \mid \mu_x, \Sigma_x)$$
$$P(y \mid x) = N(y \mid Ax + b, \Sigma_y)$$

  - ***A*** 为 **$D_y \times D_x$.**维矩阵
- 线性高斯系统可表示为: ***x*** $\rightarrow$ ***y,***
- 希望研究如何从***y*** 推断出 ***x (y*** $\rightarrow$ ***x)***

贝叶斯规则

- 给定一个线性高斯系统 **y = Ax +b**
  - 有后验分布：

$$P(x \mid y) = N(x \mid \mu_{x|y}, \Sigma_{x|y})$$

$$\Sigma_{x|y}^{-1} = \Sigma_x^{-1} + A^T \Sigma_y^{-1} A \ ,$$

$$\mu_{x|y} = \Sigma_{x|y}[A^T \Sigma_y^{-1}(y-b) + \Sigma_x^{-1}\mu_x]$$

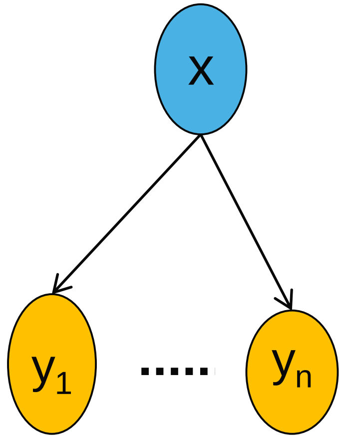
  - 观测变量先验

$$P(y) = N(y \mid \mathbf{A}\mu_x + b, \Sigma_y + \mathbf{A}\Sigma_x \mathbf{A}^T)$$

基于线性高斯系统推断未知标量

- 从有噪声测量值中推断未知标量
  - 假设：某个隐变量x的N个带噪声测量yi值
  - 测量噪声具有固定精度$\lambda_y=1/\sigma^2$，
  - 似然：

$$P(y_i \mid x) = N(y_i \mid x, \lambda_y^{-1})$$



- 隐变量服从高斯分布:

$$P(x) = N(x \mid \mu_0, \lambda_0^{-1})$$

- 我们的问题就是要计算隐变量的后验：$p(x|y_1, . . . , y_N, \sigma^2)$.

计算观测值条件下隐变量的后验概率

- *将问题定义成向量形式:*
  - **y = (**$y_1, \ldots, y_N$**),**
  - ***A* = 1**^T_N *(an 1 × N row vector of 1's),*
  - **Σ**$^{-1}_y$ = *diag(λy***I***).*
- *We get*

$$P(x\mid y)=N(x\mid \mu_N,\lambda_N^{-1})$$

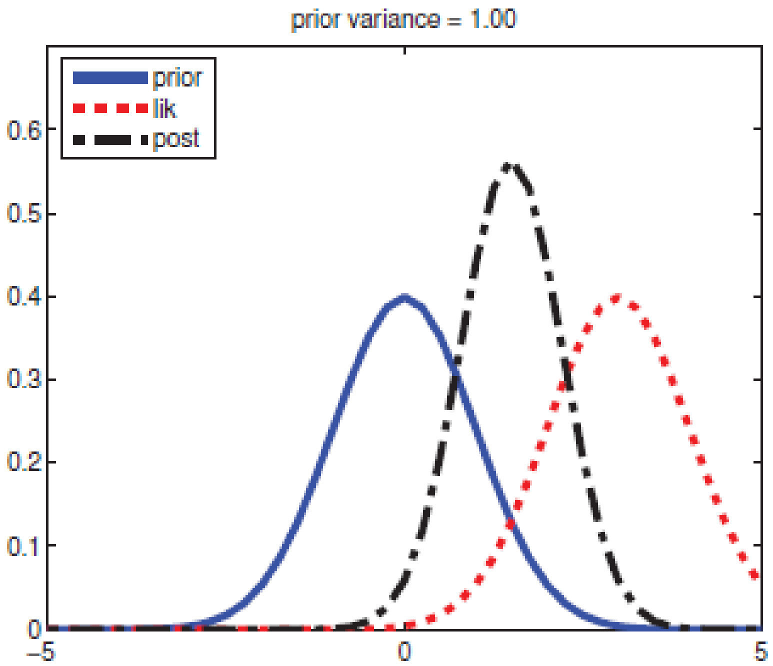
$$\lambda_N=\lambda_0+N\lambda_y$$

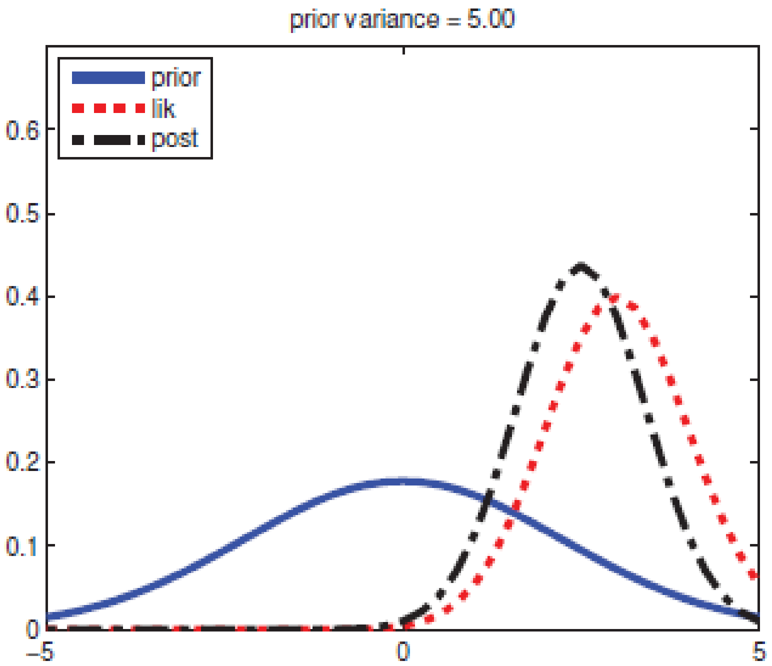
$$\mu_N=\frac{N\lambda_y\bar{y}+\lambda_0\mu_0}{\lambda_N}=\frac{N\lambda_y}{N\lambda_y+\lambda_0}\bar{y}+\frac{\lambda_0}{N\lambda_y+\lambda_0}\mu_0$$

$$\textit{where}\quad \bar{y}=\mathrm{MLE}$$

推理结果

- 给定带噪声的观测值$y = 3$，*推断隐变量x*





基于线性高斯系统推断未知向量

- *观测向量* $\boldsymbol{y}_i \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Sigma}_y)$　　$1 \le i \le N$
- *隐变量的先验* $\boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}_0,\boldsymbol{\Sigma}_0)$.
- *设* $A = I,\ b = 0$, *则有*：

$$P(\mathbf{x} \mid y_1,\cdots,y_N) = N(\mathbf{x} \mid \mu_N,\Sigma_N)$$

$$\Sigma_N^{-1} = \Sigma_0^{-1} + N\Sigma_y^{-1}$$

$$\mu_N = \Sigma_N(\Sigma_y^{-1}(N\overline{y}) + \Sigma_0^{-1}\mu_0)$$

推断未知向量举例

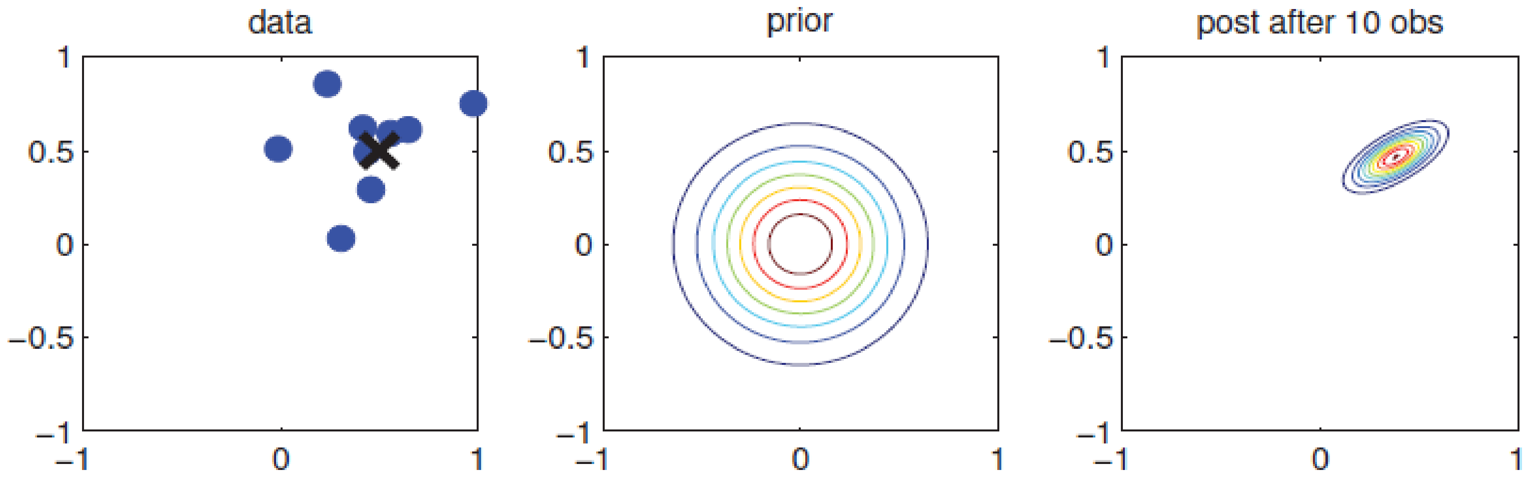
❖ *假设：*

- X为物体在二维空间中的真实但未知位置，比如雷达上的导弹或飞机：$x = [0.5, 0.5]^T$
- $\mathbf{y}_i$ 为有噪声的观测值，如雷达“闪烁”：$\boldsymbol{y_i \sim N(x,\Sigma_y)}$, $\Sigma y = 0.1[2, 1; 1, 1]$

❖ 当收到更多信号时，我们可以更好地定位来源。

❖ *先验分布：$p(x) = N(x|0, 0.1\mathbf{I}_2)$.*

❖ *基于10 个观测数据的后验.*



基于线性高斯系统的传感器融合

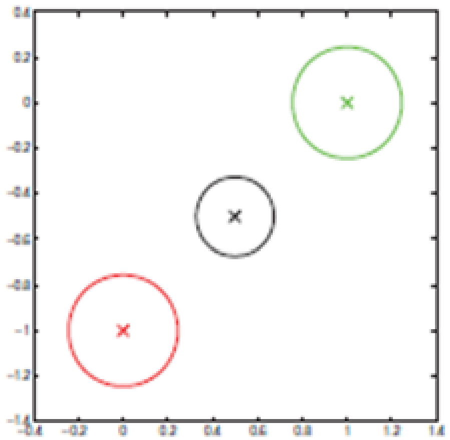
- *我们想把多个测量设备的结果结合起来；*
  - **$y_i = A_i x + b_i$**
  - *每个传感器的可靠性不同，观测值具有不同协方差*
  - *对应的后验概率是数据的适当加权平均值。*
  - *融合的任务：求 $p(x|y_1, \ldots, y_n)$.*

基于线性高斯系统的传感器融合举例

- *假设隐变量x服从正态分布，但方差很大，实际不含什么信息:*
  - $p(x) = N(\mu_0, \Sigma_0) = N(0, 10^{10}\mathbf{I}_2)$
- *有2个带噪声的观测量：* $y1 \sim N(x, \Sigma_{y1})$ and $y2 \sim N(x, \Sigma_{y,2})$
- *融合的任务：求* $p(x|y1, y2)$.
- *讨论3种情形*

情形1：2个传感器同样可靠

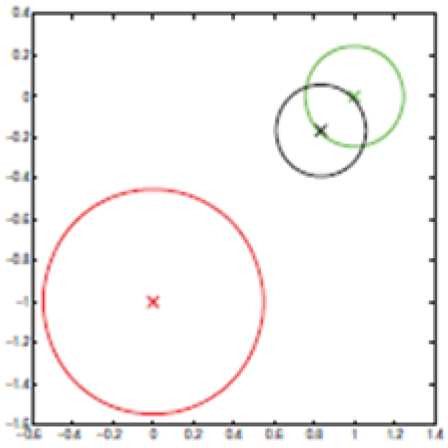
- *两个传感器可靠性相同*
  - $\Sigma_{y1} = \Sigma_{y2} = 0.01\mathbf{I}_2$
- 观测到： y1 = (0,−1) (红叉)， y2 = (1, 0) (绿叉)
- *推断*：$E(\mu|y1, y2, \theta)$ (黑叉).
  - 后验均值位于y1 和y2之间的中点



(a)

情形2: 2个传感器可靠性不同

- *两个传感器可靠性不同*
  - $\boldsymbol{\Sigma}_{y1} = 0.05\mathbf{I}_2$ *and* $\boldsymbol{\Sigma}_{y,2} = 0.01\mathbf{I}_2$,
  - 传感器 2 比传感器1 更可靠
  - 后验均值更接近 y2



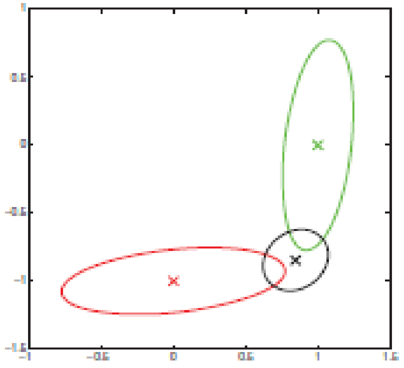
(b)

情形3：两个传感器各有所长

- *传感器1水平方向更可靠，传感器2竖直方向更可靠*

$$\Sigma_{y1} = 0.01\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{y2} = 0.01\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

- 后验均值包含两个传感器的优点
  - **y1的水平成分**
  - **y2的竖直成分**



(c)

基于有噪声数据拟合函数

- 有N 个含噪声观测值 y_i; 对应于观测元素 $x_1, . . . , x_N$.
- 基于此，构造线性高斯系统:
  - $\mathbf{y = Ax + \varepsilon}$，其中 $\varepsilon \sim N(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma}_y)$, $\boldsymbol{\Sigma}_y = \sigma^2\mathbf{I}$, σ^2 为观测噪声
  - $\mathbf{A}$ 是$\mathbf{N} \times \mathbf{D}$ 维投影矩阵，表示选出的观测元素
- 根据贝叶斯规则：

$$P(x \mid y) = N(x \mid \mu_{x|y}, \Sigma_{x|y})$$

$$\Sigma_{x|y}^{-1} = \Sigma_x^{-1} + A^T \Sigma_y^{-1} A \ ,$$

$$\mu_{x|y} = \Sigma_{x|y} [A^T \Sigma_y^{-1} (y - b) + \Sigma_x^{-1} \mu_x]$$

- 即可得出拟合函数

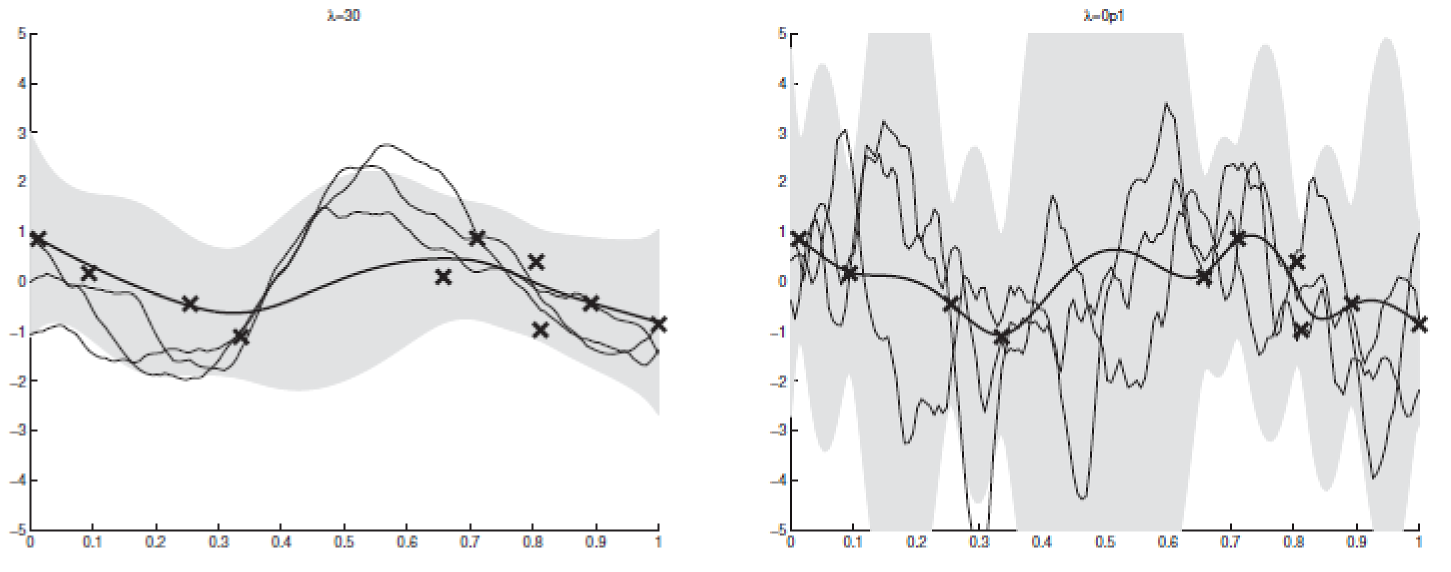
基于有噪声数据拟合函数举例

- 如果观测次数 $N = 2$， *隐变量 x 是D =4维向量, A为选择观测元素的矩阵，则有：*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{\Sigma_x = (L^T L)^{-1}}$ (***L*** *is the 是与无噪声数据插值例子中的L相同*

- 噪声方差 $\sigma 2 = 1$
- *斯先验精度参数 λ.*
  - *(a) $\lambda = 30$. (b) $\lambda = 0.01$.*



(a) (b)

推断多元高斯分布的参数

问题的提出

- 如何推断高斯分布的参数本身
  - 设数据 $x_i \sim N(\mu,\Sigma)$ for $i = 1 : N$.
- 为简化问题, 分三步导出后验分布:
  - 首先，估计 $p(\mu|D,\Sigma)$;
  - 然后，计算$p(\Sigma|D,\mu)$;
  - *最后得到联合分布*：$p(\mu,\Sigma|D)$.

估计均值 μ的后验分布

- 前面已经讨论过基于最大似然估计参数:

$$P(D|\mu) = N(\bar{x}|\mu, \frac{1}{N}\Sigma)$$

- 采用共轭先验*p(**μ**)* **= *N(μ|m0,V0)*** .
- 可以得到后验分布:

$$P(\mu|D,\Sigma) = N(\mu|m_N, V_N)$$

$$V_N^{-1} = V_0^{-1} + N\Sigma^{-1}$$

$$m_N = V_N(\Sigma^{-1}(N\bar{x}) + V_0^{-1}m_0)$$

- 如果设先验分布几乎等于均匀分布：***V0*** **= ∞I.**
  - 后验分布变成：***p(μ|D,Σ)*** **=** *N*($\bar{x}$ **, *(1/*N*)Σ)*，*这意味着:***
    - ⑩ **后验均值等于最大似然**
    - ⑩ **后验方差变成了：1/N.**