研究生公共基础课

矩　阵　论

定义

Home Page

Title Page

Page 1 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

第六章 矩阵的Kronecker积与Hadamard积

§6.1 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的定义

定义 6.1 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{s\times t}$, 则$A$与$B$的Kronecker积$A\otimes B$定义为

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{ms\times nt}. \qquad (6\text{-}1)$$

§6.1　矩阵的Kronecker积与Hadamard积的定义

定义 6.1　设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{s\times t}$, 则$A$与$B$的Kronecker积$A\otimes B$定义为

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{ms\times nt}. \tag{6-1}$$

如果A与B是同阶矩阵, 即$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A$与$B$的Hadamard积$A\circ B$定义为

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}. \tag{6-2}$$

§6.1　矩阵的Kronecker积与Hadamard积的定义

定义 6.1　设$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{s\times t}$, 则$A$与$B$的Kronecker积$A\otimes B$定义为

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{ms\times nt}. \tag{6-1}$$

如果A与B是同阶矩阵, 即$A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则$A$与$B$的Hadamard积$A\circ B$定义为

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}. \tag{6-2}$$

矩阵的Kronecker积也称为直积或张量积. 矩阵的Hadamard积也称为Schur积.

矩阵的Kronecker积也称为直积或张量积. 矩阵的Hadamard积也称为Schur积.

例 6.1 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, 计算$A \otimes B$, $B \otimes A$, $A \circ B$, $B \circ A$.

矩阵的Kronecker积也称为直积或张量积. 矩阵的Hadamard积也称为Schur积.

例 6.1 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&5\\4&-3\end{pmatrix}$, 计算$A\otimes B$, $B\otimes A$, $A\circ B$, $B\circ A$.

解
$$A\otimes B=\begin{pmatrix}B&2B\\3B&4B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&5&-2&10\\4&-3&8&-6\\\hline -3&15&-4&20\\12&-9&16&-12\end{array}\right),$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix}-A&5A\\4A&-3A\end{pmatrix}==\left(\begin{array}{cc|cc}-1&-2&5&10\\-3&-4&15&20\\\hline 4&8&-3&-6\\12&16&-9&-12\end{array}\right),$$

矩阵的Kronecker积也称为直积或张量积. 矩阵的Hadamard积也称为Schur积.

例 6.1 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&5\\4&-3\end{pmatrix}$, 计算$A\otimes B$, $B\otimes A$, $A\circ B$, $B\circ A$.

解

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}B&2B\\3B&4B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&5&-2&10\\4&-3&8&-6\\\hline -3&15&-4&20\\12&-9&16&-12\end{array}\right),$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix}-A&5A\\4A&-3A\end{pmatrix}==\left(\begin{array}{cc|cc}-1&-2&5&10\\-3&-4&15&20\\\hline 4&8&-3&-6\\12&16&-9&-12\end{array}\right),$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}, B \circ A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}, B \circ A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

性质 6.1 ① $\mathbf{0} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}, \mathbf{0} \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

② $I \otimes I = I, I \circ I = I.$

③ 如果A是对角矩阵, 则$A \otimes B$是准对角矩阵, $A \circ B$是对角矩阵,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & & & \\ & a_{22}B & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}B \end{pmatrix},$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6.1 设A, B, C是矩阵, k是数, 则下列性质成立

① $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$,

② $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C, (B+C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$,

③ $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C$,

④ $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H$,

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 6.1 设A, B, C是矩阵, k是数, 则下列性质成立

① $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$,

② $A \otimes (B+C) = A \otimes B + A \otimes C, (B+C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$,

③ $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C$,

④ $(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H$,

定理 6.2 设矩阵A, B, C, D是使下列运算有意义的矩阵, 则有

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$$

定理 6.2 设矩阵A, B, C, D是使下列运算有意义的矩阵, 则有

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=((AC)\otimes(BD)).$$

证明 设$(A\otimes B)_{ik}$表示矩阵按B阶数分块中的第i行, 第k列子块矩阵.

因此, 用分块矩阵的乘法, 有

$$\begin{aligned}((A\otimes B)(C\otimes D))_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}(A\otimes B)_{ik}(C\otimes D)_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}B)(c_{kj}D)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}(BD)=(AC)_{ij}BD\end{aligned}$$

从而 $$(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)). \quad \blacksquare \quad \blacksquare$$

定义

Home Page

Title Page

Page 8 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

从而 $(A\otimes B)(C\otimes D)=((AC)\otimes(BD)).$ ■ ■

推论 6.1 设$A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则

$$A\otimes B=(I_m\otimes B)(A\otimes I_n).$$

从而 $(A \otimes B)(C \otimes D) = ((AC) \otimes (BD)).$ ■ ■

推论 6.1 设$A \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则

$$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n).$$

定理6.2给出了Kronecker积与矩阵乘法的关系式, 应用它可以得到许多涉及Kronecker积运算得到的矩阵的重要性质.

从而 $$(A\otimes B)(C\otimes D)=((AC)\otimes(BD)).$$ ■ ■

推论 6.1 设$A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则
$$A\otimes B=(I_m\otimes B)(A\otimes I_n).$$

定理6.2给出了Kronecker积与矩阵乘法的关系式, 应用它可以得到许多涉及Kronecker积运算得到的矩阵的重要性质.
矩阵的Hadamard积比较简单, 易于验证下列性质成立:

性质 6.2 ① $(kA)\circ B=A\circ(kB)$,

② $A\circ(B+C)=A\circ B+A\circ C$,

③ $(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$,

④ $(A \circ B)^H = A^H \circ B^H.$

④ $(A \circ B)^H = A^H \circ B^H$.

Hadamard积$A \circ B$事实上是Kronecker积$A \otimes B$的一个子矩阵:

定理 6.3 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 集合$S = \{1, n+2, 2n+3, 3n+4, \cdots, (n-1)n+n\}$, 则Hadamard积$A \circ B$是Kronecker积$A \otimes B$中同时取$S$中的数对应的行和列得到的子矩阵, 记为$A \otimes B\{S\} = A \circ B$.

④ $(A \circ B)^H = A^H \circ B^H$.

Hadamard积$A \circ B$事实上是Kronecker积$A \otimes B$的一个子矩阵:

定理 6.3 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 集合$S = \{1, n+2, 2n+3, 3n+4, \cdots, (n-1)n+n\}$, 则Hadamard积$A \circ B$是Kronecker积$A \otimes B$中同时取$S$中的数对应的行和列得到的子矩阵, 记为$A \otimes B\{S\} = A \circ B$.

§6.2 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的性质

§6.2 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的性质

这一节主要从矩阵的角度, 讨论$A \otimes B$和$A \circ B$的一些性质.

Home Page
Title Page
Page 10 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

§6.2 矩阵的Kronecker积与Hadamard积的性质

这一节主要从矩阵的角度, 讨论$A \otimes B$和$A \circ B$的一些性质.

定理 6.4 设A和B是使下列运算有意义的矩阵, 对A与B的Kronecker积矩阵$A \otimes B$, 下列性质成立.

① 若A, B可逆, 则矩阵$A \otimes B$可逆, 且$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;

② 当方阵$A \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$时, 方阵$A \otimes B$的行列式

$$| A \otimes B | = | B \otimes A | = | A |^n | B |^m;$$

③ 若A和B都是Hermite矩阵, 则$A \otimes B$是Hermite矩阵;

④ 若A与B都是酉矩阵, 则$A \otimes B$是酉矩阵.

③ 若A和B都是Hermite矩阵, 则$A\otimes B$是Hermite矩阵;

④ 若A与B都是酉矩阵, 则$A\otimes B$是酉矩阵.

证明 ① A^{-1}和B^{-1}存在, 由定理6.2,

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})=I\otimes I=I,$$

③ 若A和B都是Hermite矩阵, 则$A \otimes B$是Hermite矩阵;

④ 若A与B都是酉矩阵, 则$A \otimes B$是酉矩阵.

证明 ① A^{-1}和B^{-1}存在, 由定理6.2,

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I \otimes I = I,$$

故$A \otimes B$可逆, 且$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

③ 若A和B都是Hermite矩阵, 则$A\otimes B$是Hermite矩阵;

④ 若A与B都是酉矩阵, 则$A\otimes B$是酉矩阵.

证明 ① A^{-1}和B^{-1}存在, 由定理6.2,

$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})=I\otimes I=I$,

故$A\otimes B$可逆, 且$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$.

② 对方阵A, 存在可逆矩阵P和Jordan矩阵J_A, 使$A=PJ_AP^{-1}$, 其中

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

定义
Home Page
Title Page
Page 11 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit
●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit

$$且 |A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

且$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

由定理6.2及其推论,

$$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n) = (I_m \otimes B)((PJ_AP^{-1}) \otimes I_n)$$
$$= (I_m \otimes B)(P \otimes I)(J_A \otimes I_n)(P \otimes I)^{-1},$$

定义
Home Page
Title Page
Page 12 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit

且$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

由定理6.2及其推论,

$$A \otimes B = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n) = (I_m \otimes B)((PJ_AP^{-1}) \otimes I_n)$$
$$= (I_m \otimes B)(P \otimes I)(J_A \otimes I_n)(P \otimes I)^{-1},$$

故

$$|A \otimes B| = |I_m \otimes B||J_A \otimes I_n|$$
$$= \begin{vmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n I \end{vmatrix}$$
$$= |B|^m \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right) = |A|^n |B|^m .$$

同理可证 $$|B\otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

定义

Home Page

Title Page

Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证 $$|B\otimes A|=|A|^n|B|^m.$$

③ 由$A^H=A, B^H=B$, 则$(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H=A\otimes B$, 故$A\otimes B$也是Hermite矩阵.

同理可证 $$|B\otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

③ 由$A^H = A, B^H = B$, 则$(A\otimes B)^H = A^H\otimes B^H = A\otimes B$, 故$A\otimes B$也是Hermite矩阵.

④ 由$A^H A = AA^H = I, B^H B = BB^H = I$, 则

$$\begin{aligned}(A\otimes B)^H(A\otimes B) &= (A^H\otimes B^H)(A\otimes B)\\ &= (A^H A)\otimes(B^H B) = I\otimes I = I.\end{aligned}$$

定义

Home Page

Title Page

Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证 $$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

③ 由$A^H = A, B^H = B$, 则$(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$,
故$A \otimes B$也是Hermite矩阵.

④ 由$A^H A = AA^H = I, B^H B = BB^H = I$, 则

$$\begin{aligned}(A \otimes B)^H (A \otimes B) &= (A^H \otimes B^H)(A \otimes B) \\ &= (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I.\end{aligned}$$

同理可验证 $$(A \otimes B)(A \otimes B)^H = I,$$

同理可证 $\quad | B \otimes A |=| A |^n | B |^m.$

③ 由$A^H = A, B^H = B$, 则$(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$, 故$A \otimes B$也是Hermite矩阵.

④ 由$A^H A = AA^H = I, B^H B = BB^H = I$, 则

$$(A \otimes B)^H (A \otimes B) = (A^H \otimes B^H)(A \otimes B) = (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I.$$

同理可验证 $\quad (A \otimes B)(A \otimes B)^H = I,$

故$A \otimes B$是酉矩阵. ■ ■

定义

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 13 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

同理可证 $$|B \otimes A| = |A|^n |B|^m.$$

③ 由$A^H = A, B^H = B$, 则$(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = A \otimes B$, 故$A \otimes B$也是Hermite矩阵.

④ 由$A^H A = AA^H = I, B^H B = BB^H = I$, 则

$$\begin{aligned}(A \otimes B)^H (A \otimes B) &= (A^H \otimes B^H)(A \otimes B) \\ &= (A^H A) \otimes (B^H B) = I \otimes I = I.\end{aligned}$$

同理可验证 $$(A \otimes B)(A \otimes B)^H = I,$$

故$A \otimes B$是酉矩阵. ■ ■

定理 6.5 设A, B使下列运算有意义, 则有

① 设A, B为同阶矩阵, 且A等价于B, 则对任意单位矩阵I, $(A\otimes I)$等价于$(B\otimes I)$.

② 设方阵$A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$相似于$J_A$, B相似于J_B, 则$A\otimes B$相似于$J_A\otimes J_B$.

① 设A, B为同阶矩阵, 且A等价于B, 则对任意单位矩阵I, $(A\otimes I)$等价于$(B\otimes I)$.

② 设方阵$A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$相似于$J_A$, B相似于J_B, 则$A\otimes B$相似于$J_A\otimes J_B$.

证明 ① A等价于B, 故存在可逆矩阵P, Q, 使$PAQ=B$. 对任意单位矩阵I, $P\otimes I$和$Q\otimes I$仍然是可逆矩阵, 由

$$(P\otimes I)(A\otimes I)(Q\times I)=(PAQ)\otimes I=B\otimes I,$$

所以$(A\otimes I)$等价于$(B\otimes I)$.

定义

Home Page

Title Page

Page 14 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

① 设A, B为同阶矩阵, 且A等价于B, 则对任意单位矩阵I, $(A \otimes I)$等价于$(B \otimes I)$.

② 设方阵$A \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$相似于$J_A$, B相似于J_B, 则$A \otimes B$相似于$J_A \otimes J_B$.

证明 ① A等价于B, 故存在可逆矩阵P, Q, 使$PAQ = B$. 对任意单位矩阵I, $P \otimes I$和$Q \otimes I$仍然是可逆矩阵, 由

$$(P \otimes I)(A \otimes I)(Q \times I) = (PAQ) \otimes I = B \otimes I,$$

所以$(A \otimes I)$等价于$(B \otimes I)$.

② 设$P^{-1}AP = J_A$, $Q^{-1}BQ = J_B$, 则$P \otimes Q$仍然是可逆矩

阵, 且

$$(P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q) = (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ)$$
$$= J_A \otimes J_B. \blacksquare \qquad \blacksquare$$

定义

Home Page

Title Page

Page 15 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

阵, 且

$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes Q)=(P^{-1}AP)\otimes(Q^{-1}BQ)$$
$$=J_A\otimes J_B.\blacksquare \qquad \blacksquare$$

定理 6.6 设方阵$A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, A的特征值是λ_i, 相应的特征向量是$\boldsymbol{x}_i$, $i=1,2,\cdots,m$. 方阵$B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, B的特征值是μ_i, 相应的特征向量是$\boldsymbol{y}_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

① $A\otimes B$的特征值是$\lambda_i\mu_j$, 对应的特征向量是$\boldsymbol{x}_i\otimes\boldsymbol{y}_j$.

② 方阵A的Kronecker和$A\oplus B=A\otimes I_n+I_m\otimes B$ 的特征值是$\lambda_i+\mu_j$, 对应的特征向量是$\boldsymbol{x}_i\otimes\boldsymbol{y}_j$.

阵, 且

$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes Q)=(P^{-1}AP)\otimes(Q^{-1}BQ)$$
$$=J_A\otimes J_B.\blacksquare \qquad \blacksquare$$

定理 6.6 设方阵$A\in\mathbb{F}^{m\times m}$, A的特征值是λ_i, 相应的特征向量是$\boldsymbol{x}_i$, $i=1,2,\cdots,m$. 方阵$B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, B的特征值是μ_i, 相应的特征向量是$\boldsymbol{y}_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

① $A\otimes B$的特征值是$\lambda_i\mu_j$, 对应的特征向量是$\boldsymbol{x}_i\otimes\boldsymbol{y}_j$.

② 方阵A的Kronecker和$A\oplus B=A\otimes I_n+I_m\otimes B$ 的特征值是$\lambda_i+\mu_j$, 对应的特征向量是$\boldsymbol{x}_i\otimes\boldsymbol{y}_j$.

定理 6.7 设方阵$A \in \mathbb{F}^{m\times m}$的特征值是$\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 方阵$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$的特征值是$\mu_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 则矩阵

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^{T} c_{ij} A^i \otimes B^j$$

的特征值是

$$P(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^{T} c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j, \ r = 1, 2, \cdots, m, \ s = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 6.7 设方阵$A \in \mathbb{F}^{m\times m}$的特征值是$\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 方阵$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$的特征值是$\mu_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 则矩阵

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^{T} c_{ij} A^i \otimes B^j$$

的特征值是

$$P(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^{T} c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j, \ r = 1, 2, \cdots, m, \ s = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 6.8 设$f(z)$为解析函数, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 且$f(A)$存在, 则

$$f(I_m \otimes A) = I_m \otimes F(A),$$

$$f(A \otimes I_m) = f(A) \otimes I_m.$$

定理 6.7 设方阵$A \in \mathbb{F}^{m\times m}$的特征值是$\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 方阵$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$的特征值是$\mu_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 则矩阵

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^{T} c_{ij} A^i \otimes B^j$$

的特征值是

$$P(\lambda_r, \mu_s) = \sum_{i,j=0}^{T} c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j, \ r = 1, 2, \cdots, m, \ s = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 6.8 设$f(z)$为解析函数, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 且$f(A)$存在, 则

$$f(I_m \otimes A) = I_m \otimes F(A),$$
$$f(A \otimes I_m) = f(A) \otimes I_m.$$

定理 6.9 (Schur积定理) 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$, B是半正定(正定)矩阵, 则$A \circ B$也是半正定(正定)矩阵.

定理 6.9 (Schur积定理) 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$, B是半正定(正定)矩阵, 则$A \circ B$也是半正定(正定)矩阵.

证明 设A, B分别是秩为k和l的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^H,$$
$$B = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^H + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_2^H + \cdots + \boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^H,$$

定义

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 17 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理 6.9 (Schur积定理) 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$, B是半正定(正定)矩阵, 则$A \circ B$也是半正定(正定)矩阵.

证明 设A, B分别是秩为k和l的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^H,$$
$$B = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^H + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_2^H + \cdots + \boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H,$$

定理 6.9 (Schur积定理) 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$, B是半正定(正定)矩阵, 则$A \circ B$也是半正定(正定)矩阵.

证明 设A, B分别是秩为k和l的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^H,$$
$$B = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^H + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_2^H + \cdots + \boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H,$$

其中$\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{v}_i \circ \boldsymbol{w}_j$.

定理 6.9 (Schur积定理) 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$, B是半正定(正定)矩阵, 则$A\circ B$也是半正定(正定)矩阵.

证明 设A, B分别是秩为k和l的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^H,$$
$$B = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^H + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_2^H + \cdots + \boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A\circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H,$$

其中$\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{v}_i \circ \boldsymbol{w}_j$.

而$\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H$是半正定矩阵, 故其和$A\circ B$是半正定矩阵.

定理 6.9 (Schur积定理) 设A, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 如果$A$, B是半正定(正定)矩阵, 则$A \circ B$也是半正定(正定)矩阵.

证明 设A, B分别是秩为k和l的半正定矩阵, 则由定理3.6,

$$A = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^H + \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^H,$$
$$B = \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_1^H + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_2^H + \cdots + \boldsymbol{w}_l\boldsymbol{w}_l^H,$$

由此, 可将Hadamard积表示为

$$A \circ B = \sum_{i,j=1}^{k,l} \boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H,$$

其中$\boldsymbol{u}_{ij} = \boldsymbol{v}_i \circ \boldsymbol{w}_j$.

而$\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H$是半正定矩阵, 故其和$A \circ B$是半正定矩阵.

当A, B是正定矩阵时, 我们只需证$A \circ B$非奇异.

用反证法. 设$A \circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 但$(A \circ B)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H (A \circ B)\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \boldsymbol{x}^H \boldsymbol{u}_{ij} \boldsymbol{u}_{ij}^H \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{k,l} \|\boldsymbol{u}_{ij}^H \boldsymbol{x}\|_2^2 = 0,$$

用反证法. 设$A\circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 但$(A\circ B)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H(A\circ B)\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\|\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}\|_2^2=0,$$

这导出

$$\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\ \text{或}\ \boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=\mathbf{0},$$

用反证法. 设$A\circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 但$(A\circ B)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H(A\circ B)\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\|\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}\|_2^2=0,$$

这导出

$$\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \text{或}\ \ \boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=\boldsymbol{0},$$

又$\boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)^H\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$, 这说明$(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)$与$\mathbb{F}^n$中正交基$\{\boldsymbol{w}_j\}$中的每一个正交, 因此有

用反证法. 设$A\circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 但$(A\circ B)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H(A\circ B)\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\|\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}\|_2^2=0,$$

这导出

$$\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \text{或}\ \ \boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=\boldsymbol{0},$$

又$\boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)^H\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$, 这说明$(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)$与$\mathbb{F}^n$中正交基$\{\boldsymbol{w}_j\}$中的每一个正交, 因此有

$$\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0},\ i=1,\,2,\,\cdots,\,n,$$

定义

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

用反证法. 设$A\circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 但$(A\circ B)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H(A\circ B)\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\|\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}\|_2^2=0,$$

这导出

$$\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ 或\ \boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=\boldsymbol{0},$$

又$\boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)^H\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$, 这说明$(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)$与$\mathbb{F}^n$中正交基$\{\boldsymbol{w}_j\}$中的每一个正交, 因此有

$$\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,n,$$

注意到 $\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,n,$

用反证法. 设$A\circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 但$(A\circ B)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H(A\circ B)\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\|\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}\|_2^2=0,$$

这导出

$$\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ 或\ \ \boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=\boldsymbol{0},$$

又$\boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)^H\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$, 这说明$(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)$与$\mathbb{F}^n$中正交基$\{\boldsymbol{w}_j\}$中的每一个正交, 因此有

$$\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,n,$$

注意到 $\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ i=1,2,\cdots,n,$

故$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 这与$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$矛盾. ■

用反证法. 设$A\circ B$是奇异矩阵, 则存在$\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 但$(A\circ B)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 有

$$\boldsymbol{x}^H(A\circ B)\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{u}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{k,l}\|\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}\|_2^2=0,$$

这导出

$$\boldsymbol{u}_{ij}^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \text{或}\ \ \boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=\boldsymbol{0},$$

又$\boldsymbol{x}^H(\boldsymbol{v}_i\circ\boldsymbol{w}_j)=(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)^H\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{0}$, 这说明$(\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i)$与$\mathbb{F}^n$中正交基$\{\boldsymbol{w}_j\}$中的每一个正交, 因此有

$$\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0},\ i=1,\,2,\,\cdots,\,n,$$

注意到 $\quad\boldsymbol{x}\circ\bar{v}_i=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ i=1,\,2,\,\cdots,\,n,$

故$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 这与$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$矛盾. ■

§6.3 矩阵的向量化算子与Kronecker积

§6.3 矩阵的向量化算子与Kronecker积

定义 6.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 其中$A_i \in \mathbb{F}^m$是$A$的第$i$列, 则$A$的向量算子$\mathrm{Vec}(A)$, 定义为:

$$\mathrm{Vec}(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{mn}.$$

定义

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 19 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

§6.3 矩阵的向量化算子与Kronecker积

定义

定义 6.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 其中$A_i \in \mathbb{F}^m$是$A$的第$i$列, 则$A$的向量算子Vec($A$), 定义为:

$$\mathrm{Vec}(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{mn}.$$

例 6.2 Vec(A)在A上的作用是依A的列的顺序将A转化为一个列向量. 例如

Home Page
Title Page
Page 19 of 27
Go Back
Full Screen
Close
Quit
First Prev Next Last Go Back Full Screen Close Quit

$$\mathrm{Vec}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\,2\;\;0\;\;5\;\;1\;\;-1\;\;4\;\;4\;\;2\;\;3\;\;3\;\;7\;\;1)^T.$$

$$\mathrm{Vec}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\,2\ \ 0\ \ 5\ \ 1\ \ -1\ \ 4\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 7\ \ 1)^T.$$

性质 6.3 ① 当A是$m \times n$矩阵时, $\mathrm{Vec}(A)$是mn维列向量;

② 当$\boldsymbol{x}$是向量时, $\mathrm{Vec}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Vec}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$;

③ 当$\boldsymbol{x}$是m维向量, $\boldsymbol{y}$是n维向量时, $\mathrm{Vec}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T) = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$;

④ Vec是线性变换, 即$A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, a, b是数,

$$\mathrm{Vec}(aA + bB) = a\mathrm{Vec}(A) + b\mathrm{Vec}(B);$$

⑤ 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是线性空间$\mathbb{F}^{m\times n}$中的线性无关向量组, 则$\mathrm{Vec}(A_1), \mathrm{Vec}(A_2), \cdots, \mathrm{Vec}(A_k)$是空间$\mathbb{F}^{mn}$中的线性无关向量组.

定义

⑤ 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是线性空间$\mathbb{F}^{m\times n}$中的线性无关向量组, 则$\mathrm{Vec}(A_1), \mathrm{Vec}(A_2), \cdots, \mathrm{Vec}(A_k)$是空间$\mathbb{F}^{mn}$中的线性无关向量组.

定理 6.10 设矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times k}, B \in \mathbb{F}^{k\times s}, C \in \mathbb{F}^{s\times n}$, 则

$$\mathrm{Vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{Vec}(B). \tag{6-3}$$

⑤ 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是线性空间$\mathbb{F}^{m\times n}$中的线性无关向量组, 则$\mathrm{Vec}(A_1), \mathrm{Vec}(A_2), \cdots, \mathrm{Vec}(A_k)$是空间$\mathbb{F}^{mn}$中的线性无关向量组.

定理 6.10 设矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times k}, B \in \mathbb{F}^{k\times s}, C \in \mathbb{F}^{s\times n}$, 则

$$\mathrm{Vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{Vec}(B). \tag{6-3}$$

证明 设

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_S \end{pmatrix}, \quad C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix},$$

⑤ 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是线性空间$\mathbb{F}^{m\times n}$中的线性无关向量组, 则$\mathrm{Vec}(A_1), \mathrm{Vec}(A_2), \cdots, \mathrm{Vec}(A_k)$是空间$\mathbb{F}^{mn}$中的线性无关向量组.

定理 6.10 设矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times k}, B \in \mathbb{F}^{k\times s}, C \in \mathbb{F}^{s\times n}$, 则

$$\mathrm{Vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{Vec}(B). \tag{6-3}$$

证明 设

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_S \end{pmatrix}, \quad C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix},$$

则

$$ABC = A\left(\sum_{j=1}^{s} c_{j1}B_j \quad \sum_{j=1}^{s} c_{j2}B_j \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{s} c_{jn}B_j \right)$$

$$
= \left(A\sum_{j=1}^{s} c_{j1}B_j \;\; A\sum_{j=1}^{s} c_{j2}B_j \;\; \cdots \;\; A\sum_{j=1}^{s} c_{jn}B_j \right)
$$

$$
= \left(\sum_{j=1}^{s} c_{j1}AB_j \;\; \sum_{j=1}^{s} c_{j2}AB_j \;\; \cdots \;\; \sum_{j=1}^{s} c_{jn}AB_j \right)
$$

$$= \begin{pmatrix} A\sum_{j=1}^{s} c_{j1}B_j & A\sum_{j=1}^{s} c_{j2}B_j & \cdots & A\sum_{j=1}^{s} c_{jn}B_j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s} c_{j1}AB_j & \sum_{j=1}^{s} c_{j2}AB_j & \cdots & \sum_{j=1}^{s} c_{jn}AB_j \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Vec}(ABC) &= \begin{pmatrix} c_{11}A & c_{21}A & \cdots & c_{s1}A \\ c_{12}A & c_{22}A & \cdots & c_{s2}A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n}A & c_{2n}A & \cdots & c_{sn}A \end{pmatrix} \mathrm{Vec}(B) \\ &= (C^T \otimes A)\mathrm{Vec}(B). \end{aligned}$$

■

推论 6.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $X \in \mathbb{F}^{k\times s}$, $C \in \mathbb{F}^{s\times n}$, 则有

① $\mathrm{Vec}(A\boldsymbol{X}) = (I_n \otimes A)\mathrm{Vec}(\boldsymbol{X})$;

② $\mathrm{Vec}(\boldsymbol{X}C) = (C^T \otimes I_k)\mathrm{Vec}(\boldsymbol{X})$.

推论 6.2 设$A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $X \in \mathbb{F}^{k\times s}$, $C \in \mathbb{F}^{s\times n}$, 则有

① $\mathrm{Vec}(A\boldsymbol{X}) = (I_n \otimes A)\mathrm{Vec}(\boldsymbol{X})$;

② $\mathrm{Vec}(\boldsymbol{X}C) = (C^T \otimes I_k)\mathrm{Vec}(\boldsymbol{X})$.

例 6.3 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程$AX + XB = D$.

解 用向量化算子Vec作用在方程两边, 有$\mathrm{Vec}(AX) + \mathrm{Vec}(XB) = \mathrm{Vec}(D)$, 故

$$(I_2 \otimes A + B^T \otimes I_2)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{6-4}$$

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{6-4}$$

解得

$$\mathrm{Vec}(X) = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ -1\ )^T.$$

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{6-4}$$

解得

$$\mathrm{Vec}(X) = (\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ -1\ )^T.$$

因此, 原方程组的解矩阵是$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ■

定义

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 24 of 27

Go Back

Full Screen

Close

Quit

即

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{6-4}$$

解得

$$\mathrm{Vec}(X) = (\,0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; -1\,)^T.$$

因此, 原方程组的解矩阵是$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ■

例 6.4 设$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方

程$A_1ZB_1 + A_2ZB_2 = D$.

解 用向量化算子Vec作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2)\mathrm{Vec}(Z) = \mathrm{Vec}(D),$$

程$A_1ZB_1 + A_2ZB_2 = D$.

解 用向量化算子Vec作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2)\mathrm{Vec}(Z) = \mathrm{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

程$A_1ZB_1 + A_2ZB_2 = D$.

解 用向量化算子Vec作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2)\mathrm{Vec}(Z) = \mathrm{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解得该方程组的惟一解为

$$\mathrm{Vec}(Z) = (\,1 \quad -1 \quad -2 \quad 0\,)^T,$$

程$A_1ZB_1 + A_2ZB_2 = D$.

解 用向量化算子Vec作用在方程两边, 得

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2)\mathrm{Vec}(Z) = \mathrm{Vec}(D),$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

解得该方程组的惟一解为

$$\mathrm{Vec}(Z) = (\,1 \quad -1 \quad -2 \quad 0\,)^T,$$

即

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 6.3 称$K_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E_{ij}^{T}\otimes E_{ij}^{T}$为交换矩阵.

定义 6.3 称$K_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E_{ij}^{T}\otimes E_{ij}^{T}$为交换矩阵.

性质 6.4 交换矩阵有下列性质,

① $K_{mn}^{T}=K_{nm}$;

② $K_{1n}=K_{n1}=I_n$;

③ $K_{mn}=\sum_{j=i}^{n}(\boldsymbol{e}_j^{T}\otimes I_m\otimes \boldsymbol{e}_j)$.

定义 6.3 称$K_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E_{ij}^{T}\otimes E_{ij}^{T}$为交换矩阵.

性质 6.4 交换矩阵有下列性质,

① $K_{mn}^{T}=K_{nm}$;

② $K_{1n}=K_{n1}=I_n$;

③ $K_{mn}=\sum_{j=i}^{n}(\boldsymbol{e}_j^T\otimes I_m\otimes \boldsymbol{e}_j)$.

定理 6.11 设$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则

$$\mathrm{Vec}(A)=K_{mn}^{T}\mathrm{Vec}(A^T).$$

定理 6.12 设矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times q}$, 则

$$K_{mn}(B \otimes A)K_{pq}^T = A \otimes B.$$

定理 6.12 设矩阵$A \in \mathbb{F}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times q}$, 则

$$K_{mn}(B \otimes A)K_{pq}^T = A \otimes B.$$