



## IEL – protokol k projektu

Ondřej Sedláček  
xsedla1o

14. prosince 2019

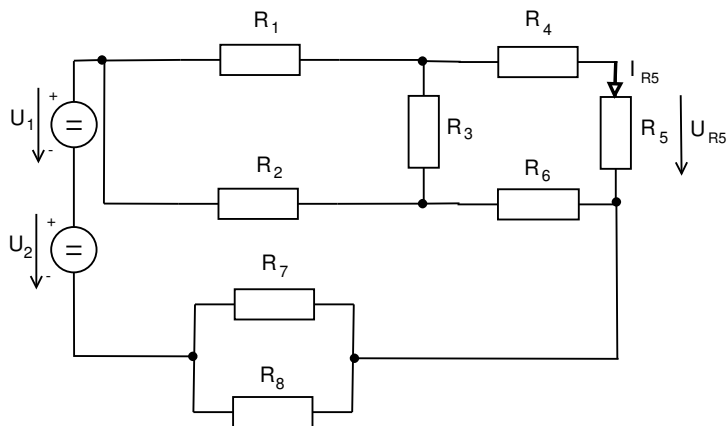
### Obsah

|   |                  |    |
|---|------------------|----|
| 1 | Příklad 1        | 2  |
| 2 | Příklad 2        | 5  |
| 3 | Příklad 3        | 8  |
| 4 | Příklad 4        | 11 |
| 5 | Příklad 5        | 14 |
| 6 | Shrnutí výsledků | 16 |

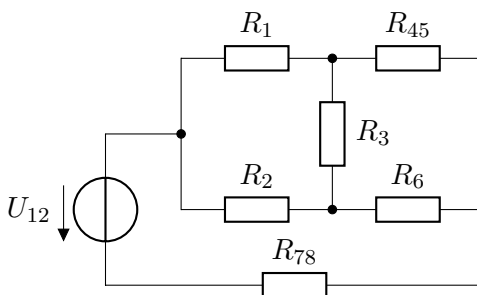
## Příklad 1

Stanovte napětí  $U_{R5}$  a proud  $I_{R5}$ . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

| sk. | $U_1$ [V] | $U_2$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $R_3$ [ $\Omega$ ] | $R_4$ [ $\Omega$ ] | $R_5$ [ $\Omega$ ] | $R_6$ [ $\Omega$ ] | $R_7$ [ $\Omega$ ] | $R_8$ [ $\Omega$ ] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| H   | 135       | 80        | 680                | 600                | 260                | 310                | 575                | 870                | 355                | 265                |



Obvod zjednodušujeme podle metody, nejprve spojíme paralelně zapojené rezistory  $R_7$  a  $R_8$  do  $R_{78}$ , sériově zapojené  $R_4$  a  $R_5$  do  $R_{45}$  a zároveň sloučíme sériově zapojené zdroje  $U_1$  a  $U_2$  do  $U_{12}$



$$R_{78} = \frac{R_8 \cdot R_7}{R_8 + R_7}$$

$$R_{78} = \frac{355 \cdot 265}{355 + 265}$$

$$R_{78} = 151,733\Omega$$

$$R_{45} = R_4 + R_5$$

$$R_{45} = 310 + 575$$

$$R_{45} = 885\Omega$$

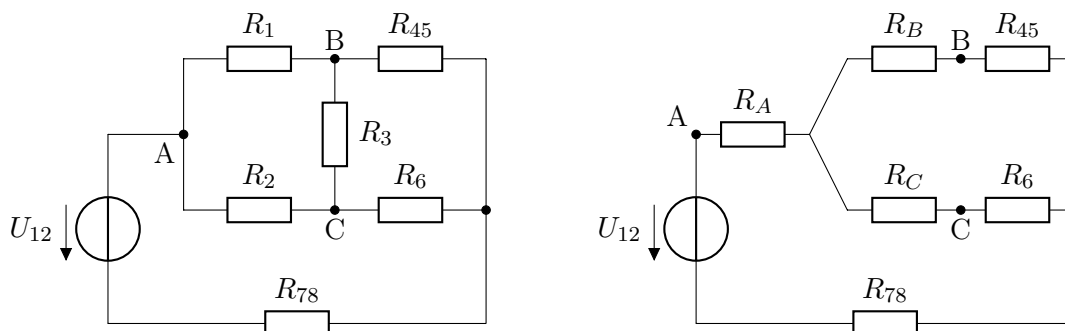
$$U_{12} = U_1 + U_2$$

$$U_{12} = 135 + 80$$

$$U_{12} = 215V$$

(1.1)

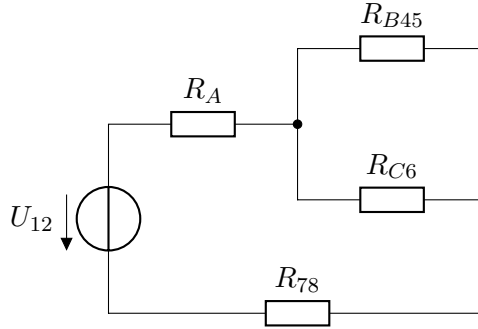
Vybrané uzly si označíme A, B, C a provedeme transformaci trojúhelník-hvězda viz 1.



Obrázek 1: transformace

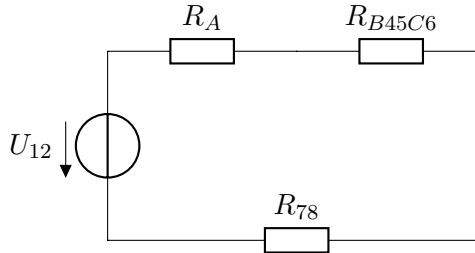
$$\begin{aligned}
R_A &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} & R_B &= \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} & R_C &= \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\
R_A &= \frac{680 \cdot 600}{680 + 600 + 260} & R_B &= \frac{680 \cdot 260}{680 + 600 + 260} & R_C &= \frac{600 \cdot 260}{680 + 600 + 260} \\
R_A &= 264,935\Omega & R_B &= 114,805\Omega & R_C &= 101,298\Omega
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Dále sloučíme sériově zapojené rezistory  $R_B$  a  $R_{45}$ , stejně tak  $R_C$  a  $R_6$ .



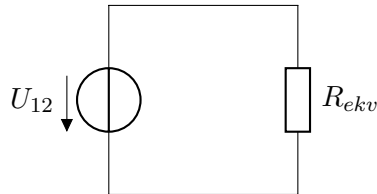
$$\begin{aligned}
R_{B45} &= R_B + R_{45} & R_{C6} &= R_C + R_6 \\
R_{B45} &= 114,805 + 885 & R_{C6} &= 101,298 + 870 \\
R_{B45} &= 999,805\Omega & R_{C6} &= 971,298\Omega
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Poté nám zbývá jen sloučit paralelně zapojené  $R_{B45}$  a  $R_{C6}$  a dostáváme sériové zapojení tří rezistorů, které opět součítáme.



$$\begin{aligned}
R_{B45C6} &= \frac{R_{B45} \cdot R_{C6}}{R_{B45} + R_{C6}} \\
R_{B45C6} &= \frac{999,805 \cdot 971,298}{999,805 + 971,298} \\
R_{B45C6} &= 492,672\Omega
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Výsledkem je ekvivalentní obvod s jediným zdrojem a ekvivalentním odporem  $R_{ekv}$



$$\begin{aligned}
R_{ekv} &= R_A + R_{B45C6} + R_{78} \\
R_{ekv} &= 264,935 + 492,672 + 151,733 \\
R_{ekv} &= 909,34\Omega
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Naším cílem je stanovit napětí a proud na rezistoru  $R_5$ . K tomu potřebujeme nejprve zjistit proud  $I_{ekv}$  v ekvivalentním obvodu, na základě tohoto proudu zjistíme napětí  $U_{RB45C6}$ , které je pak rovno  $U_{RB45}$  i  $U_{RC6}$ , protože jde o paralelní zapojení.

$$\begin{aligned}
 I_{ekv} &= \frac{U_{12}}{R_{ekv}} & U_{RB45C6} &= I_{ekv} \cdot R_{B45C6} \\
 I_{ekv} &= \frac{215}{909,34} & U_{RB45C6} &= 0,2364 \cdot 492,672 & U_{RB45C6} &= U_{RB45} = U_{RC6} \\
 I_{ekv} &= 0,2364A & U_{RB45C6} &= 116,467V
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$R_{B45}$  je sloučením sériového zapojení  $R_B$ ,  $R_4$  a  $R_5$ , na základě čehož víme, že protékající proud na těchto rezistorech bude stejný. Takto získáme  $I_{R5}$ . Ve chvíli kdy máme  $I_{R5}$ , stačí nám ho pronásobit odporem  $R_5$  a získáváme hledané napětí  $U_{R5}$ .

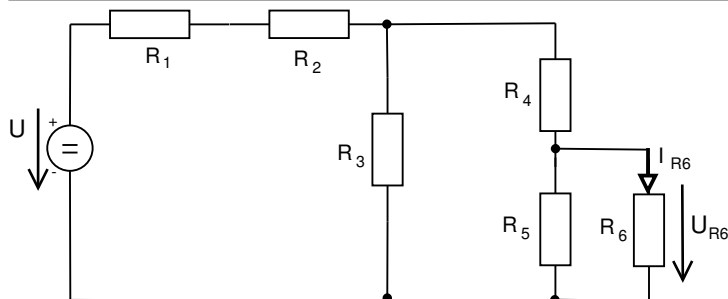
$$\begin{aligned}
 I_{R5} &= I_{RB45} = \frac{U_{RB45}}{R_{B45}} & U_{R5} &= I_{R5} \cdot R_5 \\
 I_{R5} &= \frac{116,467}{999,805} & U_{R5} &= 0,1165A \cdot 575 \\
 I_{R5} &= 0,1165A & U_{R5} &= 66,9919V
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Napětí  $U_{R5}$  je tedy 66,9919V a proud  $I_{R5}$  se rovná 0,1165A.

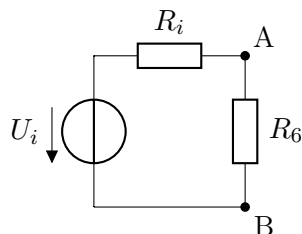
## Příklad 2

Stanovte napětí  $U_{R6}$  a proud  $I_{R6}$ . Použijte metodu Théveninovy věty.

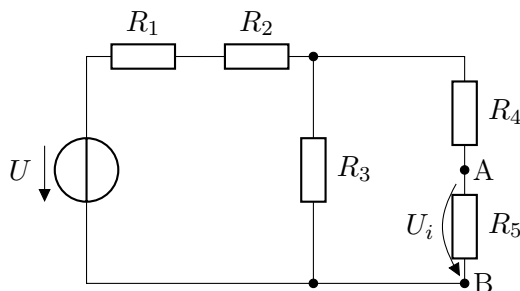
| sk. | $U$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $R_3$ [ $\Omega$ ] | $R_4$ [ $\Omega$ ] | $R_5$ [ $\Omega$ ] | $R_6$ [ $\Omega$ ] |
|-----|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| B   | 100     | 50                 | 310                | 610                | 220                | 570                | 200                |



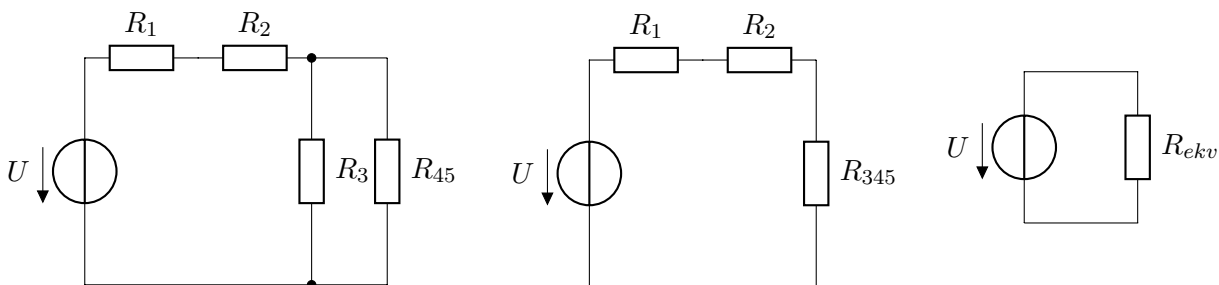
Podle Theveninovy věty můžeme zadaný obvod převést na následující:



Potřebujeme tedy zjistit  $U_i$  a  $R_i$ .  $U_i$  můžeme odvodit z původního obvodu metodou zjednodušování poté, co z obvodu vynecháme zátěž. Z obrázku vidíme, že  $U_i$  se bude rovnat napětí  $U_{R5}$ .



Sloučíme sériově zapojené  $R_4$  a  $R_5$ , dále paralelně zapojené  $R_3$  a  $R_{45}$  a zbudou nám sériově zapojené  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_{345}$ , ze kterých sloučením získáváme  $R_{ekv}$ .



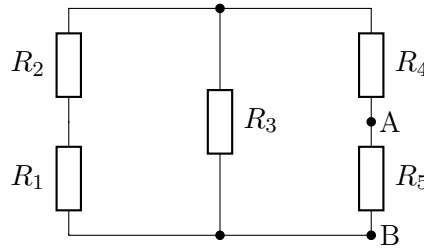
$$\begin{aligned}
R_{45} &= R_4 + R_5 & R_{345} &= \frac{R_3 \cdot R_{45}}{R_3 + R_{45}} & R_{ekv} &= R_1 + R_2 + R_{345} \\
R_{45} &= 220 + 570 & R_{345} &= \frac{610 \cdot 790}{610 + 790} & R_{ekv} &= 50 + 310 + 344,2142 \\
R_{45} &= 790\Omega & R_{345} &= 344,2142\Omega & R_{ekv} &= 704,2142\Omega
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Proud v našem ekvivalentním obvodu  $I_{ekv}$  poté snadno vypočítáme a pomocí něho se dalšími výpočty dostaneme k  $U_{R5}$  a tedy i  $U_i$ .

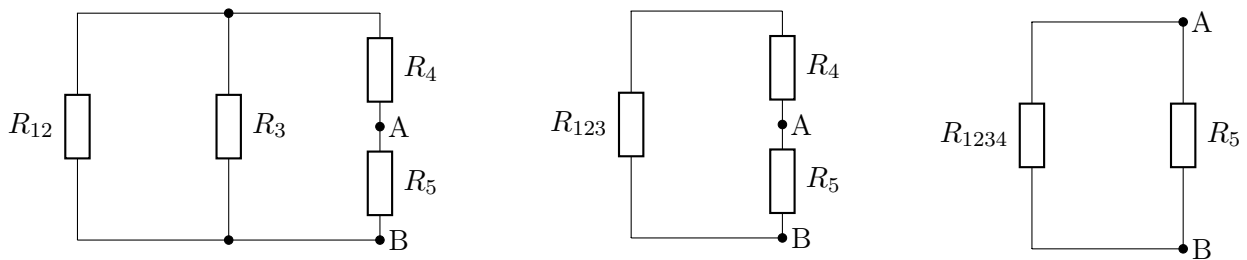
$$\begin{aligned}
I_{ekv} &= \frac{U}{R_{ekv}} & U_{R345} &= I_{ekv} \cdot R_{345} & I_{R45} &= \frac{U_{R345}}{R_{45}} \\
I_{ekv} &= \frac{100}{704,2142} & U_{R345} &= 0,1420 \cdot 344,2142 & I_{R45} &= \frac{48,8791}{790} \\
I_{ekv} &= 0,1420A & U_{R345} &= 48,8791V & I_{R45} &= 0,0618A
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
U_{R5} &= I_{R45} \cdot R_5 & U_i &= U_{R5} \\
U_{R5} &= 0,0618 \cdot 570 & U_i &= 35,2672V \\
U_{R5} &= 35,2672V
\end{aligned}$$

Máme tedy napětí  $U_i = 35,2672V$ , ale stále potřebujeme vypočítat hodnotu  $R_i$ . Tu získáme tak, že v původním obvodu vynecháme zátěž, zdroj nahradíme zkratem a v takto vzniklém obvodu budeme počítat odpor mezi body A a B.

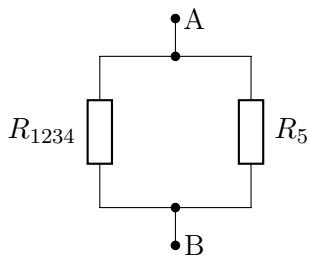


Spojením sériově zapojených  $R_1$  a  $R_2$  získáme  $R_{12}$ , které je zapojeno paralelně s  $R_3$ . Spojíme a máme  $R_{123}$ . Ten je v sériovém zapojení s  $R_4$ , takže opět spojíme a dostáváme  $R_{1234}$ .



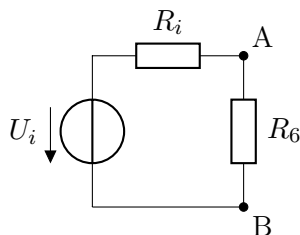
$$\begin{aligned}
R_{12} &= R_1 + R_2 & R_{123} &= \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} & R_{1234} &= R_{123} + R_4 \\
R_{12} &= 50 + 310 & R_{123} &= \frac{360 \cdot 610}{360 + 610} & R_{1234} &= 226,3917 + 220 \\
R_{12} &= 360\Omega & R_{123} &= 226,3917\Omega & R_{1234} &= 426,3917\Omega
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Z následujícího obrázku už jasně vidíme paralelní zapojení  $R_{1234}$  a  $R_5$ , a tak jejich spojením získáme odpor mezi body A, B, tedy  $R_i$ .



$$\begin{aligned}
 R_i &= \frac{R_{1234} \cdot R_5}{R_{1234} + R_5} \\
 R_i &= \frac{426,3917 \cdot 570}{426,3917 + 570} \\
 R_i &= 250,3397\Omega
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

$R_i$  je tedy  $250,3397\Omega$ . Nyní se můžeme vrátit k našemu obvodu ze začátku, pro který platí:



$$I = \frac{U_i}{R_i + R_6} \tag{2.5}$$

Z toho vypočítáme hledané hodnoty následovně

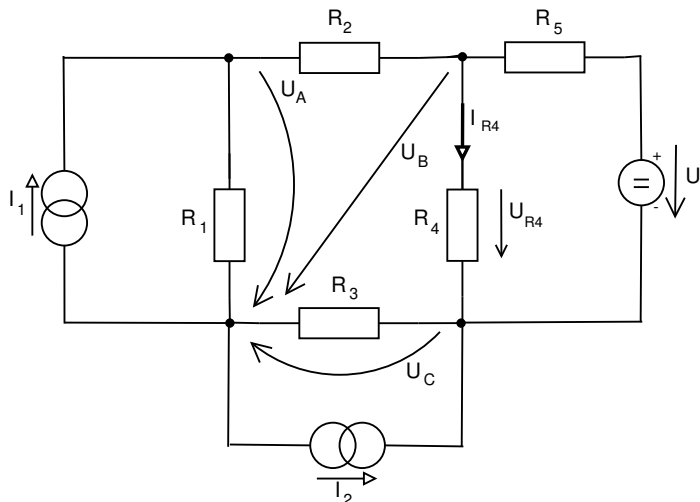
$$\begin{aligned}
 I_{R6} = I &= \frac{U_i}{R_i + R_6} & U_{R6} &= I_{R6} \cdot R_6 \\
 I_{R6} &= \frac{35,2672}{250,3397 + 200} & U_{R6} &= 0,0783 \cdot 200 \\
 I_{R6} &= 0,0783A & U_{R6} &= 15,6625V
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Hledané napětí  $U_{R6}$  je tedy  $15,6625V$  a hledaný proud  $I_{R6}$  je  $0,0783A$ .

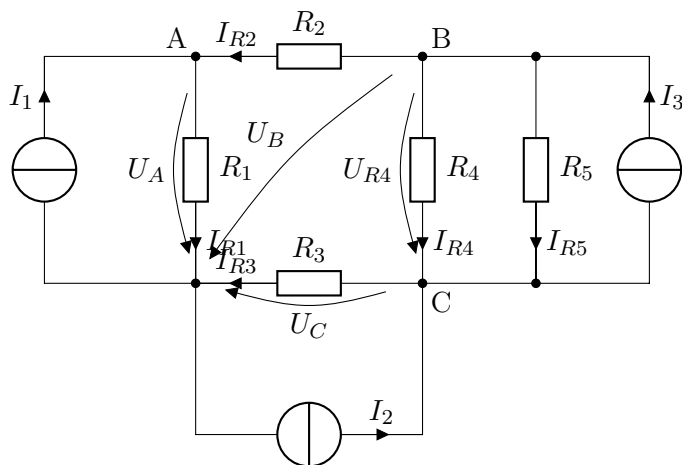
### Příklad 3

Stanovte napětí  $U_{R4}$  a proud  $I_{R4}$ . Použijte metodu uzlových napětí ( $U_A, U_B, U_C$ ).

| sk. | $U$ [V] | $I_1$ [A] | $I_2$ [A] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $R_3$ [ $\Omega$ ] | $R_4$ [ $\Omega$ ] | $R_5$ [ $\Omega$ ] |
|-----|---------|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| A   | 120     | 0.9       | 0.7       | 53                 | 49                 | 65                 | 39                 | 32                 |



Metoda uzlových proudů spočívá ve vytvoření rovnic pro několik uzlů obvodu a ve výpočtu jejich napětí vzhledem k uzlu referenčnímu z vzniklé soustavy lineárních rovnic. Jelikož máme v obvodu napěťový i proudový zdroj, pro zjednodušení práce při výpočtech si zdroj napěťový převedeme na proudový.



$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{U}{R_5} \\
 I_3 &= \frac{120}{32} \\
 I_3 &= 3,75A
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nyní sestavíme rovnice pro jednotlivé uzly.

$$\begin{aligned}
 A : \quad & I_1 + I_{R2} - I_{R1} = 0 \\
 B : \quad & -I_{R2} - I_{R4} - I_{R5} + I_3 = 0 \\
 C : \quad & -I_{R3} + I_{R4} + I_{R5} + I_2 - I_3 = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$



Dále z rovnic úpravami vyjádříme  $U_A$ ,  $U_B$  a  $U_C$ .

$$\begin{aligned} I_{R1} - I_{R2} &= I_1 \\ I_{R2} + I_{R4} + I_{R5} &= I_3 \\ -I_{R3} + I_{R4} + I_{R5} &= I_3 - I_2 \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} \frac{U_A}{R_1} - \frac{U_B - U_A}{R_2} &= I_1 \\ \frac{U_B - U_A}{R_2} + \frac{U_B - U_C}{R_4} + \frac{U_B - U_C}{R_5} &= I_3 \\ -\frac{U_C}{R_3} + \frac{U_B - U_C}{R_4} + \frac{U_B - U_C}{R_5} &= I_3 - I_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$


---

$$\begin{aligned} U_A \cdot (R_1 + R_2) - U_B \cdot R_1 &= I_1 \cdot (R_1 R_2) \\ -U_A \cdot (R_4 R_5) + U_B \cdot (R_4 R_5 + R_2 R_5 + R_2 R_4) - U_C \cdot (R_2 R_5 + R_2 R_4) &= I_3 \cdot (R_2 R_4 R_5) \\ U_B \cdot (R_3 R_5 + R_3 R_4) - U_C \cdot (R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5) &= (I_3 - I_2) \cdot (R_3 R_4 R_5) \end{aligned}$$


---

Vzniká nám matice soustavy a sloupkový vektor pravé strany, do obou dosadíme.

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & -(R_1) & 0 \\ -(R_4 R_5) & (R_4 R_5 + R_2 R_5 + R_2 R_4) & -(R_2 R_5 + R_2 R_4) \\ 0 & (R_3 R_5 + R_3 R_4) & -(R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \cdot (R_1 R_2) \\ I_3 \cdot (R_2 R_4 R_5) \\ (I_3 - I_2) \cdot (R_3 R_4 R_5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (53 + 49) & -(53) & 0 \\ -(39 \cdot 32) & (39 \cdot 32 + 49 \cdot 32 + 49 \cdot 39) & -(49 \cdot 32 + 49 \cdot 39) \\ 0 & (65 \cdot 32 + 65 \cdot 39) & -(65 \cdot 39 + 65 \cdot 32 + 39 \cdot 32) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 9 \cdot (53 \cdot 49) \\ 3, 75 \cdot (49 \cdot 39 \cdot 32) \\ (3, 75 - 0, 7) \cdot (65 \cdot 39 \cdot 32) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 102 & -53 & 0 \\ -1248 & 4727 & -3479 \\ 0 & 4615 & -5863 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2337, 3 \\ 229320 \\ 247416 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Pro zjištění proudu  $I_{R4}$  budeme potřebovat  $U_B$  a  $U_C$ . Ty z naší soustavy dostaneme použitím Cramerova pravidla.

$$M_0 = \begin{pmatrix} 102 & -53 & 0 \\ -1248 & 4727 & -3479 \\ 0 & 4615 & -5863 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$|M_0| = 102 \cdot 4727 \cdot (-5863) + 0 + 0 - 0 + 3479 \cdot 4615 \cdot 102 + 5863 \cdot 53 \cdot 1248$$

$$|M_0| = -801396960$$

$$M_B = \begin{pmatrix} 102 & 2337,3 & 0 \\ -1248 & 229320 & -3479 \\ 0 & 247416 & -5863 \end{pmatrix}$$

$$|M_B| = 102 \cdot 229320 \cdot (-5863) + 0 + 0 - 0 + 3479 \cdot 247416 \cdot 102 - 5863 \cdot 2337,3 \cdot 1248$$

$$|M_B| = -66443855587,2$$

$$U_B = \frac{|M_B|}{|M_0|}$$

$$U_B = \frac{-66443855587,2}{-801396960}$$

$$U_B = 82,9100V$$

$$M_C = \begin{pmatrix} 102 & -53 & 2337,3 \\ -1248 & 4727 & 229320 \\ 0 & 4615 & 247416 \end{pmatrix}$$

$$|M_C| = 102 \cdot 4727 \cdot 247416 - 1248 \cdot 4615 \cdot 2337,3 + 0 - 0 - 229320 \cdot 4615 \cdot 102 - 247416 \cdot 53 \cdot 1248$$

$$|M_C| = -18481999536$$

$$U_C = \frac{|M_C|}{|M_0|}$$

$$U_C = \frac{-18481999536}{-801396960}$$

$$U_C = 23,0622V$$

(3.6)

Vypočítané hodnoty dosadíme.

$$U_{R4} = U_B - U_C$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4}$$

$$U_{R4} = 82,9100 - 23,0622$$

$$I_{R4} = \frac{59,8478}{39}$$

$$U_{R4} = 59,8478V$$

$$I_{R4} = 1,5345A$$

(3.7)

Hledané napětí  $U_{R4}$  má hodnotu 59,8478V a hledaný proud  $I_{R4}$  má hodnotu 1,5345A.

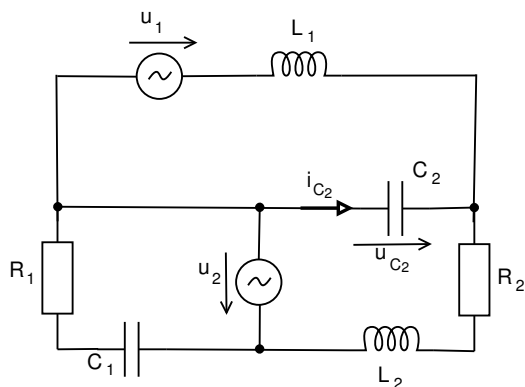
## Příklad 4

Pro napájecí napětí platí:  $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$ ,  $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$ .

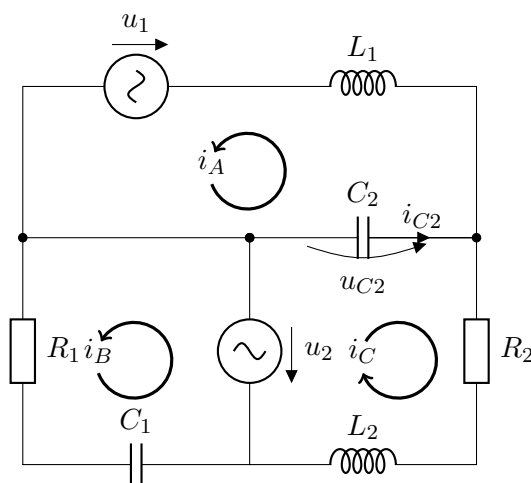
Ve vztahu pro napětí  $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$  určete  $|U_{C_2}|$  a  $\varphi_{C_2}$ . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

| sk. | $U_1$ [V] | $U_2$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $L_1$ [mH] | $L_2$ [mH] | $C_1$ [ $\mu$ F] | $C_2$ [ $\mu$ F] | $f$ [Hz] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|------------|------------|------------------|------------------|----------|
| H   | 65        | 60        | 10                 | 10                 | 160        | 75         | 155              | 70               | 95       |



Postupujeme podle metody smyčkových proudů, nejprve tedy zvolíme směr smyček a sestavíme pro každou smyčku rovnici.



$$\begin{aligned} i_A \omega L_1 j - i_A \frac{1}{\omega C_2} j - i_C \frac{1}{\omega C_2} j - u_1 &= 0 \\ i_B R_1 - i_B \frac{1}{\omega C_1} j - u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$-i_A \frac{1}{\omega C_2} j - i_C \frac{1}{\omega C_2} j + i_C R_2 + i_C \omega L_2 j - u_2 = 0$$

Rovnice upravíme na tvar vhodný na použití matice.

$$\begin{aligned} i_A (\omega L_1 j - \frac{1}{\omega C_2} j) + i_C (-\frac{1}{\omega C_2} j) &= u_1 \\ i_B (R_1 - \frac{1}{\omega C_1} j) &= u_2 \\ i_A (-\frac{1}{\omega C_2} j) + i_C (R_2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) j) &= u_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Rovnice dosadíme do matice.

$$\begin{pmatrix} \omega L_1 j - \frac{1}{\omega C_2} j & 0 & -\frac{1}{\omega C_2} j \\ 0 & R_1 - \frac{1}{\omega C_1} j & 0 \\ -\frac{1}{\omega C_2} j & 0 & R_2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Spočítáme  $\omega$ , dosadíme čísla.

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi 95$$

$$\omega = 190\pi$$

$$\begin{pmatrix} 190\pi 0,16j - \frac{1}{190 \cdot 0,00007\pi} j & 0 & -\frac{1}{190 \cdot 0,00007\pi} j \\ 0 & 10 - \frac{1}{190 \cdot 0,000155\pi} j & 0 \\ -\frac{1}{190 \cdot 0,00007\pi} j & 0 & 10 + (190\pi 0,075 - \frac{1}{190 \cdot 0,00007\pi}) j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Zjednodušíme matici.

$$\begin{pmatrix} (30,4\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j & 0 & -\frac{1}{0,0133\pi} j \\ 0 & 10 - \frac{1}{0,02945\pi} j & 0 \\ -\frac{1}{0,0133\pi} j & 0 & 10 + (14,25\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Z matice spočítáme  $i_A$  a  $i_C$ , potřebné pro výpočet, pomocí Cramerova pravidla.

$$M_0 = \begin{pmatrix} (30,4\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j & 0 & -\frac{1}{0,0133\pi} j \\ 0 & 10 - \frac{1}{0,02945\pi} j & 0 \\ -\frac{1}{0,0133\pi} j & 0 & 10 + (14,25\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j \end{pmatrix}$$

$$|M_0| = ((30,4\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j) \cdot (10 - \frac{1}{0,02945\pi} j) \cdot (10 + (14,25\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j) - (-\frac{1}{0,0133\pi} j) \cdot (10 - \frac{1}{0,02945\pi} j) \cdot (-\frac{1}{0,0133\pi} j)$$

$$|M_0| = -1447,91980 + 17083,32022j$$

$$M_A = \begin{pmatrix} 65 & 0 & -\frac{1}{0,0133\pi} j \\ 60 & 10 - \frac{1}{0,02945\pi} j & 0 \\ 60 & 0 & 10 + (14,25\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$|M_A| = 65 \cdot (10 - \frac{1}{0,02945\pi} j) \cdot (10 + (14,25\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j) - (-\frac{1}{0,0133\pi} j) \cdot (10 - \frac{1}{0,02945\pi} j) \cdot 60$$

$$|M_A| = 36658,21152 + 20876,83293j$$

$$i_A = \frac{|M_A|}{|M_0|}$$

$$i_A = \frac{36658,21152 + 20876,83293j}{-1447,91980 + 17083,32022j}$$

$$i_A = 1,03276 - 2,23338j \quad A$$

$$\begin{aligned}
M_C &= \begin{pmatrix} (30,4\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j & 0 & 65 \\ 0 & 10 - \frac{1}{0,02945\pi}j & 60 \\ -\frac{1}{0,0133\pi}j & 0 & 60 \end{pmatrix} \\
|M_C| &= ((30,4\pi - \frac{1}{0,0133\pi})j) \cdot (10 - \frac{1}{0,02945\pi}j) \cdot 60 \\
&\quad - 65 \cdot (10 - \frac{1}{0,02945\pi}j) \cdot (-\frac{1}{0,0133\pi}j) \\
|M_C| &= 6206,48240 + 57422,31537j \\
i_C &= \frac{|M_C|}{|M_0|} \\
i_C &= \frac{6206,48240 + 57422,31537j}{-1447,91980 + 17083,32022j} \\
i_C &= 3,30676 - 0,64357j \text{ A}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Vypočítáme  $i_{C2}$  a  $u_{C2}$ .

$$\begin{aligned}
i_{C2} &= i_C + i_A & u_{C2} &= i_{C2} \cdot -\frac{1}{\omega C_2}j \\
i_{C2} &= 3,30676 - 0,64357j + 1,03276 - 2,23338j & u_{C2} &= (4,33952 - 2,87695j) \cdot -\frac{1}{0,0133\pi}j \\
i_{C2} &= 4,33952 - 2,87695j & u_{C2} &= -6.88542 - 10.38580j
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Zbývá vypočítat hledané  $|U_{C2}|$  a  $\varphi_{C2}$ .

$$\begin{aligned}
|U_{C2}| &= \sqrt{Real^2 + Imag^2} & \varphi_{C2} &= \arctg(\frac{Imag}{Real}) \\
|U_{C2}| &= \sqrt{6.88542^2 + 10.38580^2} & \varphi_{C2} &= \arctg(\frac{-10.38580}{-6.88542}) \\
|U_{C2}| &= 12.46089V & \varphi_{C2} &= 56.46^\circ
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Dopočítáme pro skutečný kvadrant. Protože obě složky jsou záporné, jedná se o třetí kvadrant a přepočet je tedy následující.

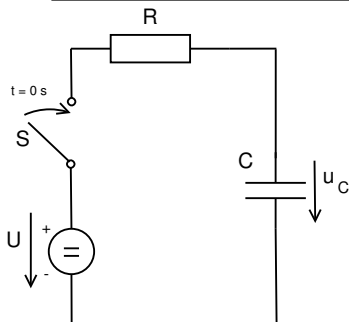
$$\begin{aligned}
\varphi_{C2} &= 180^\circ + 56.46^\circ \\
\varphi_{C2} &= 236.46^\circ
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Hledané hodnoty jsou tedy 12.46089V pro  $|U_{C2}|$  a 236.46° pro  $\varphi_{C2}$ .

## Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase  $t = 0[\text{s}]$  sepne spínač  $S$ . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení  $u_C = f(t)$ . Provedte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

| sk. | $U$ [V] | $C$ [F] | $R$ [ $\Omega$ ] | $u_C(0)$ [V] |
|-----|---------|---------|------------------|--------------|
| B   | 30      | 10      | 20               | 15           |



Pro sestavení rovnice vyjdeme z následujících vztahů.

$$u'_C = \frac{i}{C} \quad U = u_R + u_C \quad u_R = R \cdot i \quad (5.1)$$

Z nich odvodíme následující.

$$\begin{aligned} U &= R \cdot i + u_C & u'_C &= \frac{\frac{U - u_C}{R}}{C} \\ i &= \frac{U - u_C}{R} & u'_C &= \frac{U - u_C}{RC} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Po úpravách dostáváme diferenciální rovnici 1.řádu, ke které stanovíme počáteční podmínku dle zadání.

$$\begin{aligned} u'_C &= \frac{U}{RC} - \frac{u_C}{RC} \\ u'_C + \frac{u_C}{RC} &= \frac{U}{RC} \\ u'_C(t) + \frac{u_C(t)}{RC} &= \frac{U}{RC} \quad u_C(0) = 15\text{V} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Vyjádříme  $\lambda$ .

$$\lambda = -\frac{1}{RC} \quad (5.4)$$

Vytvoříme rovnici pro  $u_C$ , dosadíme  $\lambda$  a zderivujeme ji, abychom dostali rovnici pro  $u'_C(t)$ .

$$\begin{aligned} u_C(t) &= c(t) \cdot e^{\lambda t} \\ u_C(t) &= c(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\ u'_C(t) &= c'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + c(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) \\ u'_C(t) &= c'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{c(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tuto rovnici dosadíme ve zderivované i nezderivované formě do původní diferenciální rovnice.

$$\begin{aligned} u'_C(t) + \frac{u_C(t)}{RC} &= \frac{U}{RC} \\ c'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{c(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} + \frac{c(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} &= \frac{U}{RC} \\ c'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{U}{RC} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vyjádříme  $c'(t)$ .

$$c'(t) = \frac{U \cdot e^{\frac{t}{RC}}}{RC} \quad (5.7)$$

Integrujeme abychom dostali  $c(t)$ .

$$\begin{aligned} \int c'(t) &= \int \frac{U \cdot e^{\frac{t}{RC}}}{RC} \\ c(t) &= \frac{U \cdot e^{\frac{t}{RC}}}{RC} \cdot RC \\ c(t) &= U \cdot e^{\frac{t}{RC}} + k \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dosadíme do  $u_C(t) = c(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= (U \cdot e^{\frac{t}{RC}} + k) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\ u_C(t) &= U \cdot e^{\frac{t}{RC}} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + k \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \\ u_C(t) &= U + k \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nyní máme řešení v obecném tvaru. Dosadíme hodnoty a počáteční podmínku, abychom spočítali naši integrační konstantu  $k$ .

$$\begin{aligned} u_C(0) &= 30 + k \cdot e^{-\frac{0}{20 \cdot 10}} \\ 15 &= 30 + k \\ k &= -15 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Naše řešení pro  $u_C(t)$  je tedy

$$u_C(t) = 30 - 15 \cdot e^{-\frac{t}{200}} \quad (5.11)$$

Pro zkoušku dosadíme  $u_C$  a  $u'_C$  do původní rovnice.

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U + k \cdot e^{-\frac{t}{RC}} & u'_C(t) &= \frac{U - u_C(t)}{RC} & u'_C(t) + \frac{u_C(t)}{RC} &= \frac{U}{RC} \\ & & u'_C(t) &= \frac{U - (U + k \cdot e^{-\frac{t}{RC}})}{RC} & -\frac{k \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} + \frac{U + k \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} &= \frac{U}{RC} \\ & & u'_C(t) &= -\frac{k \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} & \frac{U}{RC} &= \frac{U}{RC} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Rovnost platí.

## Shrnutí výsledků

| Příklad | Skupina | Výsledky                                    |                               |
|---------|---------|---|-------------------------------|
| 1       | H       | $U_{R5} = 66,9919V$                         | $I_{R5} = 0,1165A$            |
| 2       | B       | $U_{R6} = 15,6625V$                         | $I_{R6} = 0,0783A$            |
| 3       | A       | $U_{R4} = 59,8478V$                         | $I_{R4} = 1,5345A$            |
| 4       | H       | $ U_{C2}  = 12.46089V$                      | $\varphi_{C2} = 236.46^\circ$ |
| 5       | B       | $u_C(t) = 30 - 15 \cdot e^{-\frac{t}{200}}$ |                               |