# Deskriptive Statistik
# Eindimensionale Daten


Peter Büchel

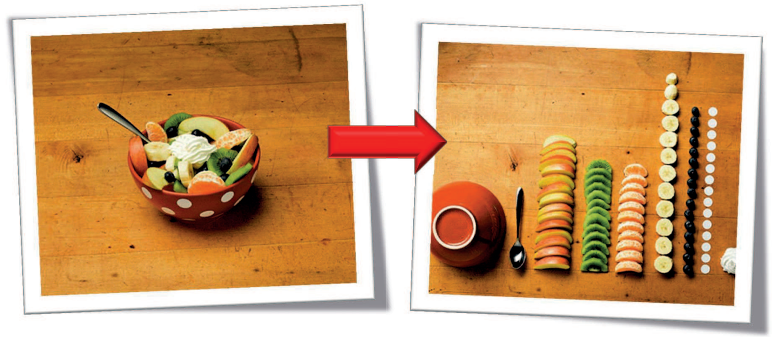
HSLU TA


Stat: SW02



## Ziele der Deskriptiven Statistik

- Daten *zusammenfassen* durch *numerische Kennwerte*
- *Graphische Darstellung* der Daten





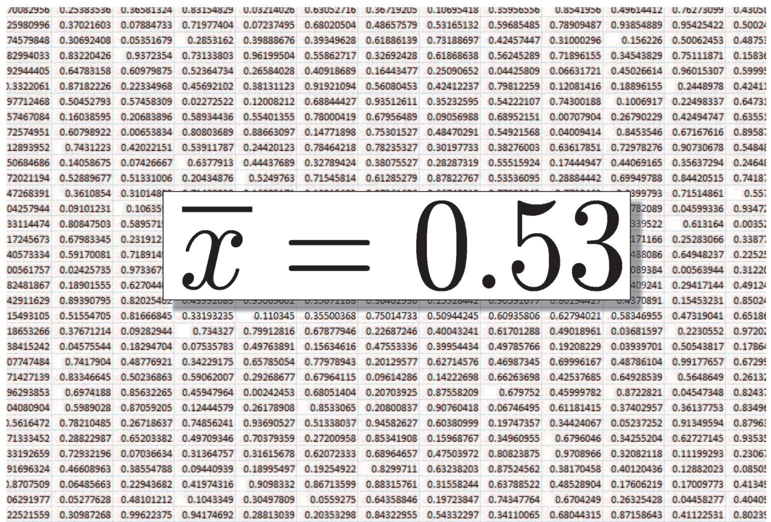
## Daten

- In diesem Modul $\rightarrow$ meist *reale Daten*
- *Datensatz*
  Wiederholte Messungen: Freigesetzte Wärme beim Übergang von Eis bei $-0.7\,^\circ$C zu Wasser bei $0\,^\circ$C
  $\rightarrow$ 13 Werte (siehe Skript) (in cal/g) $\rightarrow$ Methode $A$

  $$79.98;\ 80.04;\ 80.02; \ldots\ 80.02;\ 80.00;\ 80.02$$

- Basierend auf den Daten: Diverse *Kennwerte* berechnen bzw. Daten *graphisch darstellen*
- **Warnung**: Wann immer wir einen Datensatz „reduzieren" (durch Kennzahlen oder Graphiken), geht *Information verloren*!





# Überblick

- Bekannt: $n$ beobachtete Datenpunkte (Messungen)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

(z.B. Verkehrsaufkommen an $n$ verschiedenen Tagen)

- Unterscheidung zwischen Lage- und Streuungsparametern
- *Lageparameter* („Wo liegen die Beobachtungen auf der Mess-Skala?")
  - Arithmetisches Mittel („Durchschnitt")
  - Median
  - Quantile
- *Streuungsparameter* („Wie streuen die Daten um ihre mittlere Lage?")
  - Empirische Varianz / Standardabweichung
  - Quartilsdifferenz



# Arithmetisches Mittel

- Definition:

**Arithmetisches Mittel**

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Umgangssprachlich: *Durchschnitt*

- Beispiel Schmelzwärme: Arithmetische Mittel der $n = 13$ Messungen

$$\overline{x} = \frac{79.98 + 80.04 + \ldots + 80.03 + 80.02 + 80.00 + 80.02}{13} = 80.020\,77$$



# Arithmetisches Mittel

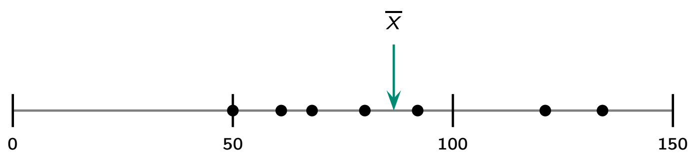
- Python-Befehl

```
from pandas import Series
import pandas as pd

methodeA = Series([79.98, 80.04, 80.02, 80.04, 80.03,
80.03, 80.04, 79.97, 80.05, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02])

methodeA.mean()
## 80.02076923076923
```

- Arithmetische Mittel: Anschaulich




Schwerpunkt der Daten



# Streuung

- Arithmetisches Mittel : „Wo ist die „Mitte" der Daten?"

- Aber: Beispiel von (fiktiven) Schulnoten:

2; 6; 3; 5 und 4; 4; 4; 4

- Beide Mittelwert 4, aber Verteilung der Daten um Mittelwert ziemlich unterschiedlich
  - 1. Fall: Zwei gute und zwei schlechte Schüler
  - 2. Fall: Alle Schüler gleich gut

- Datensätze haben eine verschiedene *Streuung* um den Mittelwert

## Streuung numerisch

- 1. Idee: Durchschnitt der *Unterschiede zum Mittelwert*
  1. Fall:
  $$\frac{(2-4)+(6-4)+(3-4)+(5-4)}{4} = \frac{-2+2-1+1}{4} = 0$$
  Zweiter Fall auch 0 $\rightarrow$ Keine Aussage

- Problem: Unterschiede können *negativ* werden $\rightarrow$ Können sich aufheben



## Streuung

- Nächste Idee: Unterschiede durch die Absolutwerte ersetzen
  1. Fall:
  $$\frac{|(2-4)|+|(6-4)|+|(3-4)|+|(5-4)|}{4} = \frac{2+2+1+1}{4} = 1.5$$
- D.h.: Noten weichen im Schnitt 1.5 vom Mittelwert ab
- 2. Fall: Dieser Wert natürlich auch 0
- Je grösser dieser Wert (immer grösser gleich 0) , desto mehr unterscheiden sich die Daten bei gleichem Mittelwert untereinander
- Dieser Wert für die Streuung: *mittlere absolute Abweichung*
- Aber: Theoretische Nachteile



## Empirische Varianz und Standardabweichung

- Besser: *Empirische Varianz* und *empirische Standardabweichung* für das Mass der Variabilität oder Streuung der Messwerte verwendet
- Definition:

**Empirische Varianz $Var(x)$ und Standardabweichung $s_X$**

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

und

$$s_x = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$



## Eigenschaften der Varianz

- Bei Varianz: Abweichungen $x_i - \overline{x}$ quadrieren , damit sich Abweichungen nicht gegenseitig aufheben können
- Nenner $n-1$, anstelle von $n$ $\rightarrow$ mathematisch begründet
- Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz
- Durch Wurzelziehen wieder dieselbe Einheit wie bei Daten selbst
- Ist empirische Varianz (und damit die Standardabweichung) gross, so ist die Streuung der Messwerte um das arithmetische Mittel gross
- *Wert* der empirische Varianz hat keine physikalische Bedeutung
  $\rightarrow$ Man weiss nur, je grösser der Wert umso grösser die Streuung

## Beispiele: Schmelzwärme

- Arith. Mittel der $n = 13$ Messungen ist $\overline{x} = 80.02$ (siehe oben)
- Empirische Varianz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(x) &= \frac{(79.98-80.02)^2+(80.04-80.02)^2+\cdots+(80.00-80.02)^2+(80.02-80.02)^2}{13-1}\\ &= 0.000\,574\end{aligned}$$

- Empirische Standardabweichung:

$$s_x = \sqrt{0.000574} = 0.024$$

- D.h.: „mittlere" Abweichung vom Mittelwert 80.02 cal/g ist 0.024 cal/g



## Beispiele: Schmelzwärme

- Von Hand sehr mühsam. Mit pandas-Methoden:
  Varianz:

```
methodeA.var()
## 0.0005743589743590099
```

Standardabweichung:

```
methodeA.std()
## 0.023965787580611863
```



## Median

- Ein weiteres Lagemass für die „Mitte" $\rightarrow$ *Median*
- Sehr vereinfacht gesagt: Wert, bei dem die Hälfte der Messwerte unter diesem Wert liegen
- Beispiel: Prüfung in der Schule ist Median 4.6
- D.h.: Hälfte der Klasse liegt unter dieser Note
- Umgekehrt liegen die Noten der anderen Hälfte *über* dieser Note
- Obige Interpretation des Medians ist sehr vereinfacht dargestellt. Die exakte Definition folgt nun.



## Geordnete Strichprobe

- Datensatz in aufsteigender Reihenfolge *ordnen*
- Bezeichnung der *geordneten Daten* mit $x_{(i)}$:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$$

- Beispiel: $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 2$:

$$x_{(1)} = x_3 = 2, \qquad x_{(2)} = x_1 = 3, \qquad x_{(3)} = x_2 = 7$$

## Median

- Bestimmung *Median*: Daten zuerst der Grösse nach ordnen:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

- Für die Daten der Methode $A$ heisst dies

79.97; 79.98; 80.00; 80.02; 80.02; 80.02; 80.03; 80.03; 80.03; 80.04; 80.04; 80.04; 80.05

- Median ist nun sehr einfach zu bestimmen
- Unter diesen 13 Messungen: Wert der mittleren Beobachtung
- Dies ist in diesem Fall der Wert der 7. Beobachtung:

79.97; 79.98; 80.00; 80.02; 80.02; 80.02; 80.03; 80.03; 80.03; 80.04; 80.04; 80.04; 80.05



## Median

- Median des Datensatzes der Methode $A$ ist 80.03
- D.h.: Knapp die Hälfte der Messwerte, nämlich 6 Beobachtungen sind kleiner oder gleich 80.03
- Ebenso sind 6 Messwerte grösser oder gleich dem Median
- Ungerade Anzahl Messungen $\rightarrow$ *Genau* eine mittlere Messung



## Median

- Vorher: Anzahl der Daten ungerade und damit ist die mittlere Beobachtung eindeutig bestimmt
- Anzahl Daten gerade $\rightarrow$ *Keine* mittlere Beobachtung
- *Definition* Median: Mittelwert der beiden mittleren Beobachtungen
- Beispiel: Datensatz der Methode $B$ hat 8 Beobachtungen
- Ordnen den Datensatz: Median Durchschnitt von der 4. und 5. Beobachtung

79.94; 79.95; 79.97; 79.97; 79.97; 79.94; 80.02; 80.03

$$\frac{79.97 + 79.97}{2} = 79.97$$



## Median

- Mit pandas erhalten wir für die Methode $A$

```
methodeA.median()
## 80.03
```

und für die Methode $B$

```
methodeB = Series([80.02, 79.94, 79.98, 79.97, 79.97,
80.03, 79.95, 79.97])

methodeB.median()
## 79.97
```

- Als Median kann Wert auftreten, der in Messreihe nicht vorkommt
- Annahme: Mittlere Beobachtungen der Methode $B$ sind Werte 79.97 und 79.98:

$$\frac{79.97 + 79.98}{2} = 79.975$$

## Median vs. arithmetisches Mittel

- Zwei Lagemasse für die Mitte eines Datensatzes
- Welches ist nun „besser"?
- Dies kann man so nicht sagen, das kommt auf die jeweilige Problemstellung an. Am besten werden beide Masse gleichzeitig verwendet.
- Eigenschaft des Medians: *Robustheit*
- Das heisst: Wird viel weniger stark durch extreme Beobachtungen beeinflusst als das arithmetisches Mittel



## Median vs. arithmetisches Mittel

- Beispiel: Bei der grössten Beobachtung ($x_9 = 80.05$) ist ein Tippfehler passiert und $x_9 = 800.5$ eingegeben worden
- Das arithmetische Mittel ist dann

$$\overline{x} = 135.44$$

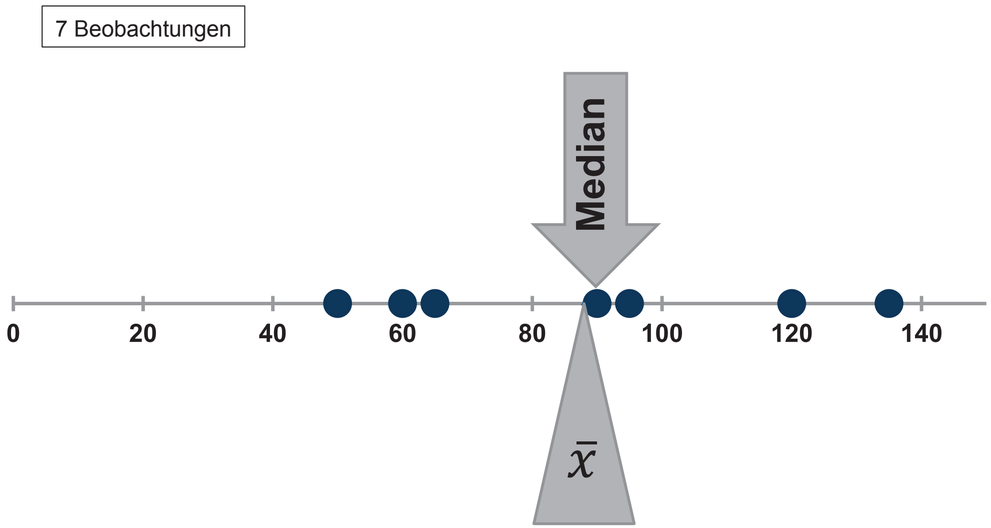
- Der Median ist aber nach wie vor

$$x_{(7)} = 80.03$$

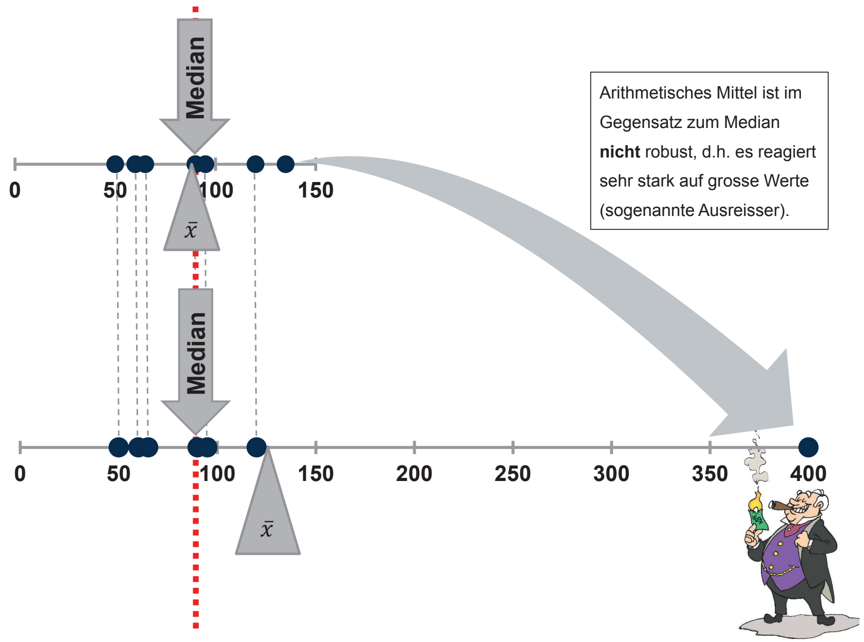
- Arithmetisches Mittel: Durch Veränderung einer Beobachtung sehr stark beeinflusst
- Median hier gleich bleibt $\rightarrow$ robust



## Arith. Mittel vs. Median: Einkommen [$k$ CHF]





"Sollen wir das arithmetische Mittel als durchschnittliche Körpergröße nehmen und den Gegner erschrecken, oder wollen wir ihn einlullen und nehmen den Median?"



## Quartile

- Median: Wert, wo die Hälfte der Beobachtungen kleiner (oder gleich) wie dieser Wert sind
- Analoge Überlegung: Unteres und oberes Quartil
- Unteres Quartil: Wert, wo 25 % aller Beobachtungen kleiner oder gleich und 75 % grösser oder gleich sind wie dieser Wert
- Oberes Quartil: Wert, wo 75 % aller Beobachtungen kleiner oder gleich und 25 % grösser oder gleich wie dieser Wert sind
- Achtung: Meist gibt es nicht *exakt* 25 % der Beobachtungen
- Man *definiert* Wert für das untere Quartil bzw. obere Quartil



## Beispiel: Schmelzwärme

- Methode $A$ hat $n = 13$ Messpunkte $\rightarrow$ 25 % davon ist 3.25
- Man *wählt* nächstgrösseren Wert $x_{(4)}$ als unteres Quartil:

79.97; 79.98; 80.00; 80.02; 80.02; 80.02; 80.03; 80.03; 80.03; 80.04; 80.04; 80.04; 80.05

- Unteres Quartil ist 80.02
- Knapp ein Viertel der Messwerte ist gleich oder kleiner 80.02
- Oberes Quartil: *Wählen* $x_{(10)}$, da für $0.75 \cdot 13 = 9.75$ die Zahl 10 der nächsthöhere Wert ist

79.97; 79.98; 80.00; 80.02; 80.02; 80.02; 80.03; 80.03; 80.03; 80.04; 80.04; 80.04; 80.05

- Knapp drei Viertel der Messwerte sind kleiner oder gleich 80.04



- Methode $B$: 25 % der Werte 2 $\rightarrow$ ganze Zahl
- *Wählen* dann *nächste* Beobachtung $x_{(3)}$ als unteres Quartil

79.94; 79.95; 79.97; 79.97; 79.97; 79.94; 80.02; 80.03

- Unteres Quartil der Methode $B$ ist also 79.97

## Bemerkungen

- Hier jeweils aufgerundet, falls 25 % bzw. 75 % der Anzahl Beobachtungen nicht ganz ist
- Hätten auch *abrunden* können $\rightarrow$ Andere Werte für die Quartile
- Für grosse Datensätze: Spielt praktisch keine Rolle, ob auf- oder abgerundet oder gerundet wird
- Aber: Es gibt keine einheitliche Definition für die Quartile



## pandas

- pandas kennt keine eigenen Befehle für die Quartile
- Allgemeinerer Befehl quantile (Quantile kommen gleich)
- Python: Quartile nach unserer Definition Option interpolation="lower"
- Für das untere Quartil der Methode *A* lautet der Befehl

```
methodeA.quantile(q=.25, interpolation="lower")
## 80.02
```

und für das obere

```
methodeA.quantile(q=.75, interpolation="lower")
## 80.04
```



## pandas

- Methode *B*:

```
methodeB.quantile(q=.25, interpolation="lower")
## 79.95
```

- Dies entspricht *nicht* unserem oben bestimmten Wert 79.97
- Python führt noch Korrekturfaktor zur Berechnung der Quantile ein
- Dieser ist aber für grosse Datensätze irrelevant



## Quartilsdifferenz

- *Quartilsdifferenz* ist ein Streuungsmass für die Daten

$$\text{oberes Quartil} - \text{unteres Quartil}$$

- Es misst die Länge des Intervalls, das etwa die Hälfte der „mittleren" Beobachtungen enthält
- Je kleiner dieses Mass, umso näher liegt die Hälfte aller Werte um den Median und umso kleiner ist die Streuung
- Dieses Streuungsmass ist robust
- Quartilsdifferenz der Methode *A*

$$80.04 - 80.02 = 0.02$$

## pandas

- Mit pandas

```
q75, q25 = methodeA.quantile(q = [.75, .25],
interpolation="lower")

iqr = q75 - q25
iqr
## 0.020000000000010232
```

- Die (oder ungefähr die ) Hälfte der Messwerte liegt also in einem Bereich der Länge 0.02



## Quantile

- Quartile auf jede andere Prozentzahl verallgemeinern: Quantile
- 10 %-Quantil: Wert, wo 10 % der Werte kleiner oder gleich und 90 % der Werte grösser oder gleich diesem Wert sind
- *Empirische $\alpha$-Quantil*: Wert, wo $\alpha \times 100\,\%$ der Datenpunkte kleiner oder gleich und $(1-\alpha) \times 100\ \%$ der Punkte grösser oder gleich sind
- Definition

**Empirische $\alpha$-Quantile $(0 < \alpha < 1)$**

$x_{(\alpha n+1)}$, falls $\alpha \cdot n$ eine natürliche Zahl ist

$x_{(k)}$, wobei $k$ die Zahl $\alpha \cdot n$ aufgerundet ist, falls $\alpha \cdot n \notin \mathbb{N}$



- Wie bei den Quartilen:
  - Aufgerunden, falls die entsprechende Prozentzahl der Beobachtungen nicht ganz;
  - sonst nächsthöheren Wert
- Empirischer Median ist empirisches 50 %–Quantil
- Empirisches 25 %–Quantil ist unteres Quartil
- Empirisches 75 %–Quantil ist oberes Quartil



- pandas: 10 %– und 70 %–Quantil der Methode *A*:

```
methodeA.quantile(q=.1, interpolation="lower")
methodeA.quantile(q=.7, interpolation="lower")
## 79.98
## 80.03
```

- Knapp 10 % der Messwerte sind kleiner oder gleich 79.98
- Entsprechend: Knapp 70 % der Messwerte kleiner oder gleich 80.03

## Beispiel

- Noten an Prüfung in Schulklasse mit 24 SchülerInnen:

  4.2, 2.3, 5.6, 4.5, 4.8, 3.9, 5.9, 2.4, 5.9, 6, 4, 3.7, 5, 5.2, 4.5, 3.6, 5, 6, 2.8, 3.3, 5.5, 4.2, 4.9, 5.1

- Verschiedene Quantile mit pandas:

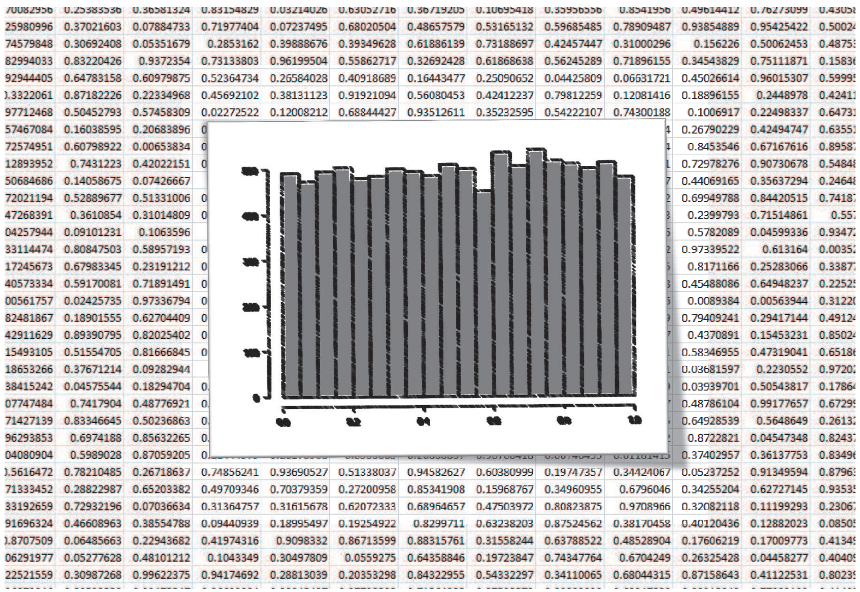
```
noten = Series([4.2, 2.3, 5.6, 4.5, 4.8, 3.9, 5.9, 2.4, 5.9, 6, 4,
3.7, 5, 5.2, 4.5, 3.6, 5, 6, 2.8, 3.3, 5.5, 4.2, 4.9, 5.1])

noten.quantile(q = np.linspace(.2,1,5), interpolation="lower")
## 0.2    3.6
## 0.4    4.2
## 0.6    4.9
## 0.8    5.5
## 1.0    6.0
## dtype: float64
```

- D.h.: Knapp 20 % der SuS sind schlechter als 3.6
- 20 % SchülerInnen nicht möglich, da dies 4.8 SuS wären
- 60 %–Quantil: (Knapp) diese Anzahl Prozent der SuS waren schlechter oder gleich einer 4.9

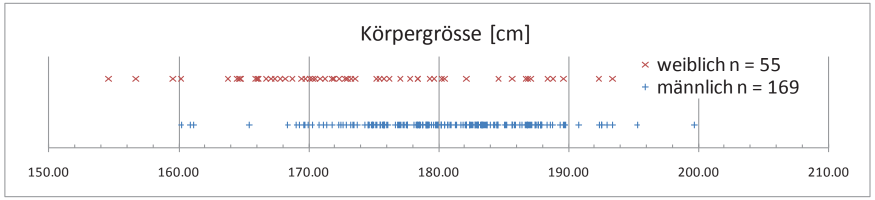


## Graphische Darstellungen





## Eindimensionales Streudiagramm



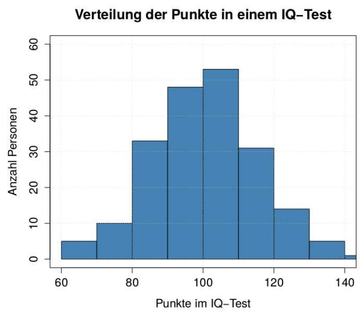

- Guter Überblick, falls nicht zu viele Daten vorhanden sind
- Achtung bei diskret verteilten Daten (Punkte liegen aufeinander!)



## Histogramm

- *Histogramm*: Graphischer Überblick über die auftretenden Werte
- Aufteilung des Wertebereichs in $k$ *Klassen* (Intervalle)
- Faustregel:
  - bei weniger als 50 Messungen ist die Klassenzahl 5 bis 7
  - bei mehr als 250 Messungen wählt man 10 bis 20 Klassen
- Zeichne für jede Klasse einen *Balken*, dessen Höhe proportional zur Anzahl Beobachtungen in dieser Klasse ist

## Beispiel: IQ-Test

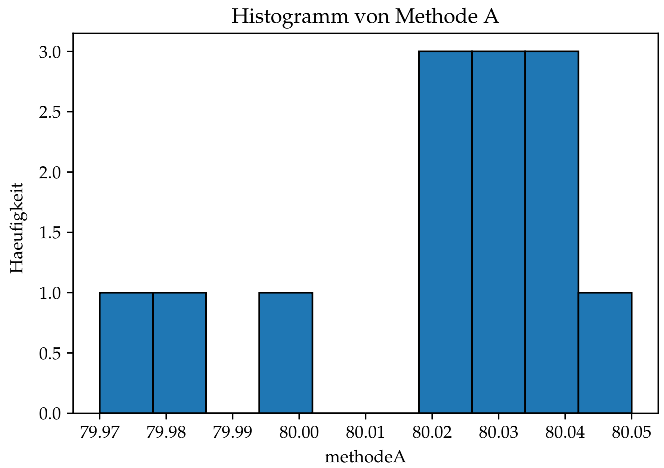



- Histogramm von IQ-Test Ergebnis von 200 Personen
- Breite der Klassen: 10 IQ-Punkte; für jede Klasse gleich
- Höhe der Balken: Anzahl Personen, die in diese Klasse fallen
- Beispiel: ca. 14 Personen fallen in die Klasse zwischen 120 - 130 IQ-Punkten



## Python

Für die Methode $A$ sieht das Histogramm wie folgt aus:






## Python

Es wurde mit folgendem Code erzeugt:

```
import pandas as pd
from pandas import DataFrame, Series
import matplotlib.pyplot as plt

methodeA = Series([79.98, 80.04, 80.02, 80.04, 80.03, 80.03,
80.04, 79.97, 80.05, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02])

methodeB = Series([80.02, 79.94, 79.98, 79.97, 79.97, 80.03,
79.95, 79.97])

methodeA.plot(kind="hist", edgecolor="black")

plt.title("Histogramm von Methode A")
plt.xlabel("methodeA")
plt.ylabel("Haeufigkeit")

plt.show()
```



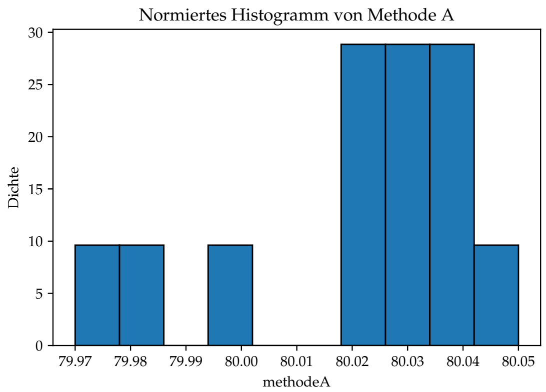
## Bemerkungen

- Methode $A$ 13 Messungen $\rightarrow$ 10 Balken (pandas-default)
- Bedeutung der Anzahlen (Frequency):
  - 10 Klassen mit Werten im Bereich $[79.97, 80.05]$ $\rightarrow$ Balkenbreite
    $$\frac{80.05 - 79.97}{10} = 0.008$$
  - 1. Klasse 79.97-79.978: Anzahl Beobachtungen 79.97 berücksichtigt
  - 2. Klasse Werte 79.98; usw.
- pandas selbst keine Graphiken $\rightarrow$ Bibliothek matplotlib
- Pandas-Attribut plot für Plots $\rightarrow$ Option kind="hist"
- Mit dem Python -Befehl lassen sich auch die Anzahl Klassen festlegen, Überschriften ändern, usw. (siehe Übungen)

## Histogramm: Dichte

- Histogramm oben: Höhe der Balken entspricht Anzahl Beobachtungen in Klasse
- Andere Form des Histogramms

```
methodeA.plot(kind="hist", normed=True,
edgecolor="black")
```






- *Gesamtfläche* der Balken ist 1
- Auf der vertikalen Achse sind nun die *Dichten* angegeben
- Herauslesen: über

$$(80.018 - 80.026) \cdot 28.846 = 0.23$$

also etwa 23 % der Daten zwischen 80.018 und 80.026 befinden

- Balkenhöhe: Anzahl Beobachtungen in einem Balken mit $\frac{1}{n}$ multiplizieren, diese Zahl durch die Balkenbreite dividiert
- Unser Beispiel: 3 Beobachtungen im Intervall $[80.018, 80.026]$
- Balkenhöhe:

$$\frac{\frac{1}{13} \cdot 3}{0.008} = 28.8462$$

- Vorteil: Messungen mit unterschiedlichen Umfängen besser miteinander vergleichbar



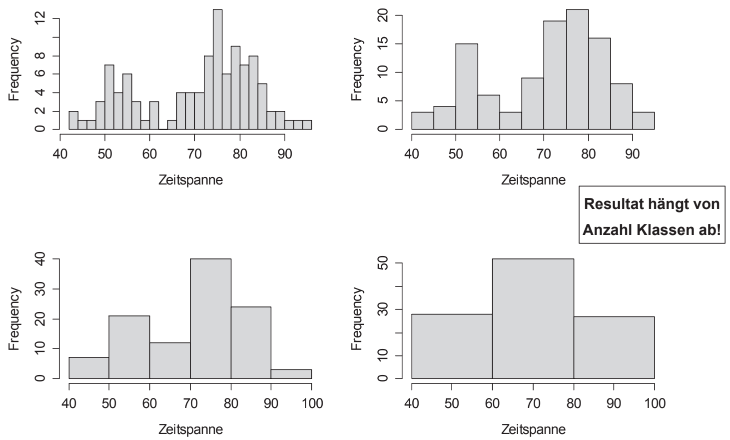
## Old Faithful Geysir (Yellowstone NP): Daten

- *Zeitspanne* [min] zwischen Ausbrüchen
- *Eruptionsdauer* [min]
- Daten finden Sie auf ILIAS

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Tag | Zeitspanne | Eruptionsdauer | |
| 2 | 1 | 78 | 4.4 | |
| 3 | 1 | 74 | 3.9 | |
| 4 | 1 | 68 | 4 | |
| 5 | 1 | 76 | 4 | |
| 6 | 1 | 80 | 3.5 | |
| 7 | 1 | 84 | 4.1 | |
| 8 | 1 | 50 | 2.3 | |
| 9 | 1 | 93 | 4.7 | |
| 10 | 1 | 55 | 1.7 | |
| 11 | 1 | 76 | 4.9 | |
| 12 | 1 | 58 | 1.7 | |
| 13 | 1 | 74 | 4.6 | |
| 14 | 1 | 75 | 3.4 | |
| 15 | 2 | 80 | 4.3 | |
| 16 | 2 | 56 | 1.7 | |
| 17 | 2 | 80 | 3.9 | |
| 18 | 2 | 69 | 3.7 | |
| 19 | 2 | 57 | 3.1 | |
| 20 | 2 | 90 | 4 | |
| 21 | 2 | 42 | 1.8 | |
| 22 | 2 | 91 | 4.1 | |
| 23 | 2 | 51 | 1.8 | |



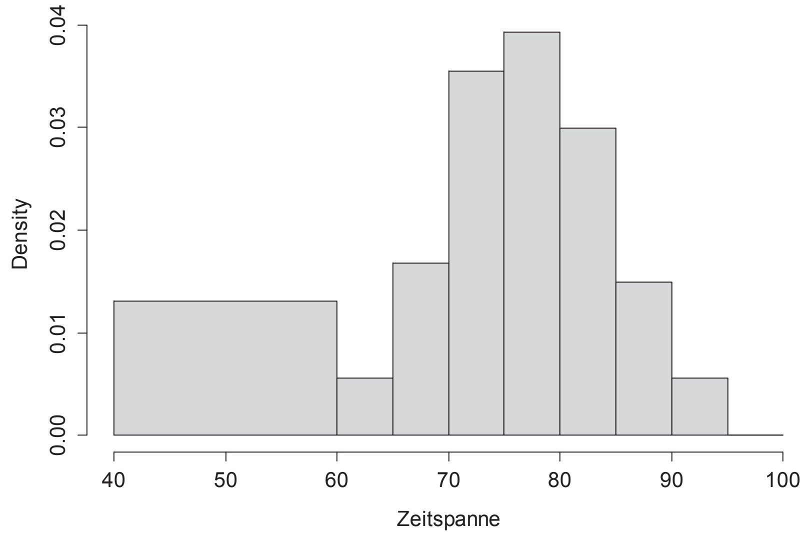
## Histogramme der Zeitspanne (verschiedene Anzahl Klassen)




Interaktiv Klassen verändern (bei anderen Daten):

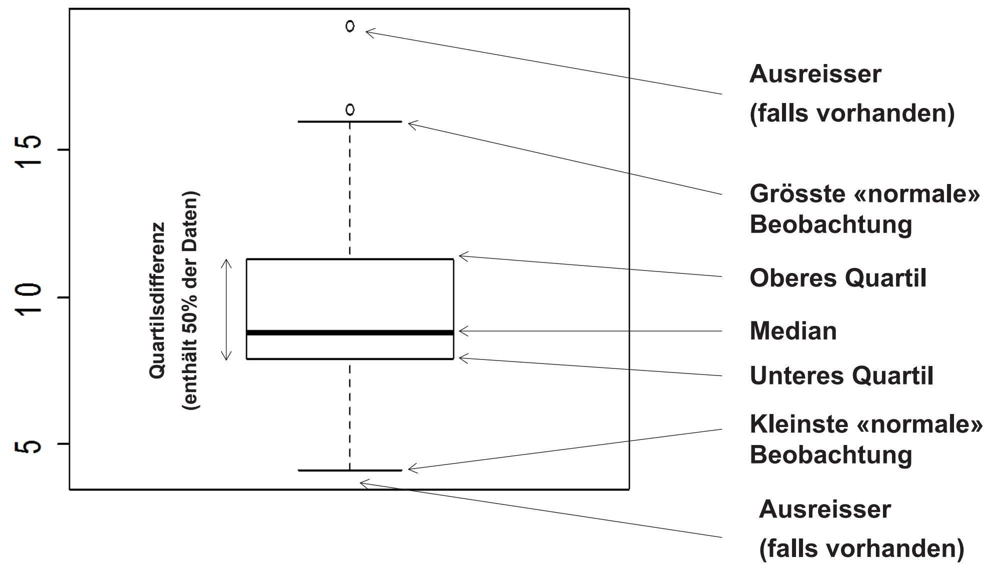
http://www.amstat.org/publications/jse/v6n3/applets/Histogram.html

## Histogramm der Zeitspanne mit unterschiedlicher Intervallbreite






## Boxplot: Schematischer Aufbau





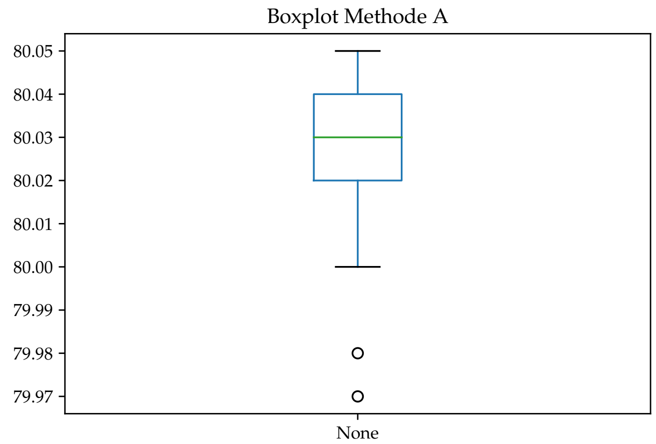

## Boxplot: Schematischer Aufbau

- *Grösste normale Beobachtung*: Grösste Beobachtung, die höchstens $1.5 \cdot r$ vom oberen Quartil entfernt ist ($r$: *Quartilsdifferenz*)
- *Kleinste normale Beobachtung*: Analog definiert mit dem unteren Quartil
- *Ausreisser* sind Punkte, die ausserhalb dieser Bereiche liegen

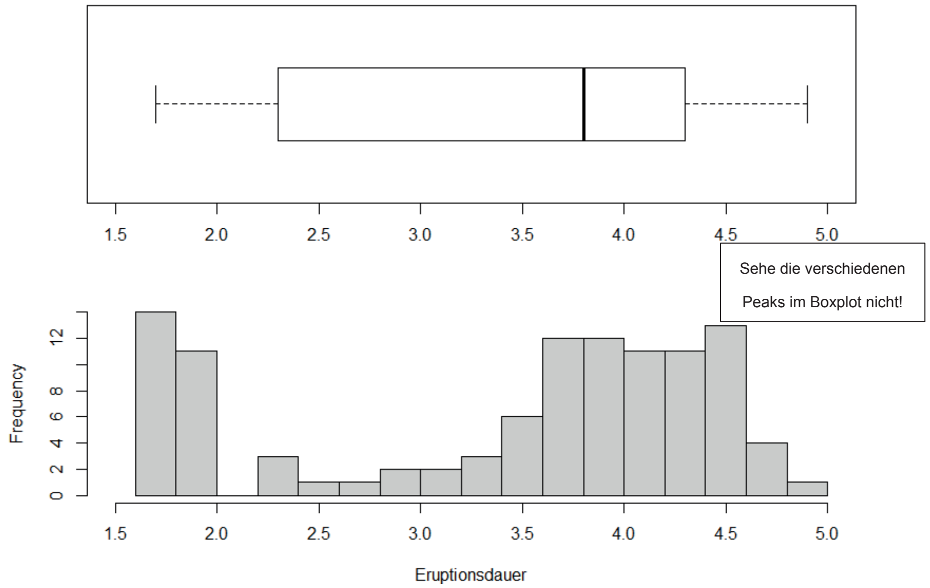


## Python

```
methodeA.plot(kind="box", title="Boxplot Methode A")
```



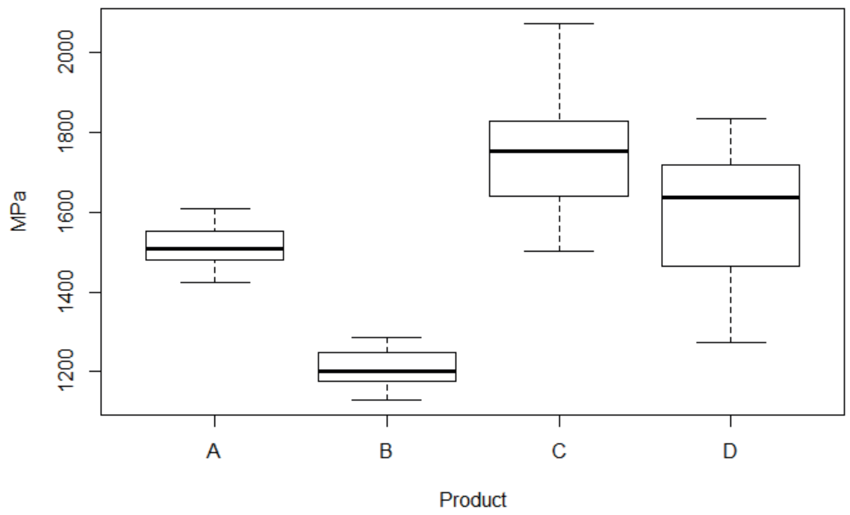
## Boxplot und Histogramm der Eruptionsdauer





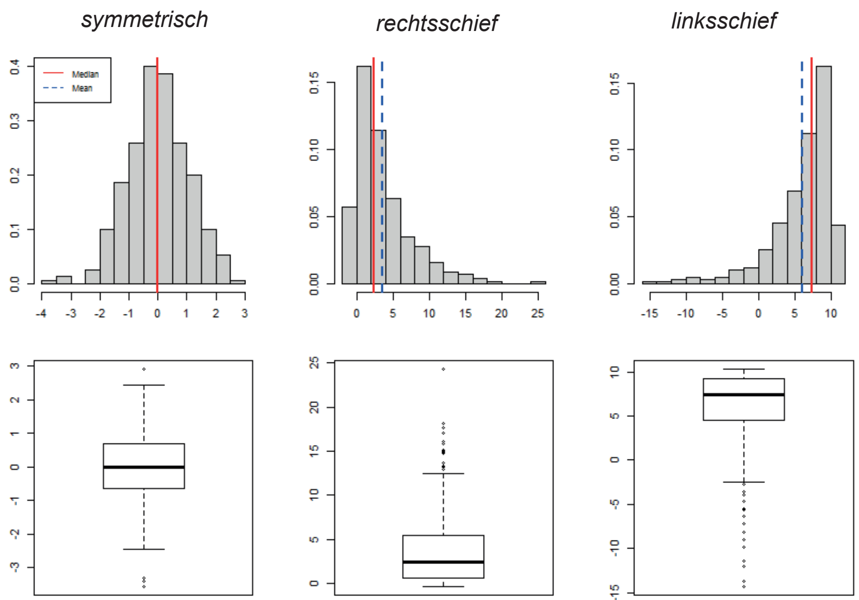

## Mehrere Boxplots

Mit mehreren Boxplots kann man einfach und schnell die Verteilung von verschiedenen Gruppen (Methoden, Produkte, ...) vergleichen






## Schiefe






## Boxplot: Bemerkungen

- Im *Boxplot* sind ersichtlich:
  - Lage
  - Streuung
  - Schiefe
- Man sieht aber z.B. *nicht*, ob eine Verteilung mehrere „Peaks" hat