Repetition: Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zufallsvariable X: Ordnet jedem Zufallsexperiment genau eine Zahl zu
- Können somit X auch als *Funktion* auffassen
- Beispiel: Zufallsvariable X ordnet einer zufällig ausgewählten, in der Schweiz lebenden Person, die Körpergrösse in cm zu
- Hier: Körpergrösse wird auf Zentimeter gerundet
- *Definitionsmenge* dieser Zufallsvariable X: Menge aller in der Schweiz lebenden Personen
- Zufallsvariable X kann nur folgende Werte annehmen (*Wertemenge*):

$$W_X = \{0, 1, 2, \dots, 500\}$$

- Wertebereich absichtlich zu gross gewählt $\rightarrow$ Sicher alle vorkommenden Werte sind dabei
- Wertemenge besteht also nur aus endlich vielen ganzen Zahlen
- Eine solche Menge heisst *diskret*
- Wichtig: Können *keinen* Wert zwischen zwei Werten der Wertemenge auswählen
- Die Menge ist „löchrig"
- Dies kann man als saloppe Definition von „diskret" auffassen

- Zufallsvariable X: Misst die Körpergrösse einer zufällig ausgewählten Person
- Wählen nun zufällig (deshalb Zufallsvariable) eine Person aus
- Name der Person: *Tabea*
- Annahme: Jeder Name kommt nur genau einmal vor, was natürlich nicht der Fall ist
- Hätten auch AHV-Nummer wählen können, die eindeutig ist
- Tabea hat eine Körpergrösse 166 cm (auf cm gerundet)
- Formulierung mit Zufallsvariable:

$$X(\text{Tabea}) = 166$$

- Auswahl einer weiteren Person: *Tadeo* mit Körpergrösse von 176 cm
- Schreiben:

$$X(\text{Tadeo}) = 176$$

- Dies kann man mit jeder in der Schweiz lebenden Person machen
- Ausdruck:

$$X = 174$$

  - *Ereignis* eine Person ausgesucht zu haben, die eine gerundete Körpergrösse von 174 cm hat
- Man spricht von einer *Realisierung* $x = 174$ von X
- *Unterschied*: Gross- und Kleinschreibung:
  - $x = 174$: *Zahl*
  - $X = 174$: *Menge* (Personen mit gerundeter Körpergrösse 174 cm)

- Diesem Ereignis kann man eine W'keit zuordnen:

$$P(X = 174)$$

- Berechnung: Anzahl Personen mit gerundeter Körpergrösse von 174 cm durch Anzahl der in der Schweiz lebenden Personen dividieren
- Können für jeden Wert x im Wertebereich W'keit berechnen:

$$P(X = x)$$

- Insbesondere:

$$P(X = 500) = 0$$

  - Es gibt keine Person mit so einer Körpergrösse
- Deswegen: Spielt keine Rolle, wenn Wertemenge viel zu gross gewählt

- Können weitere W'keiten bestimmen
- W'keit, dass eine zufällig ausgewählte Person eine gerundete Körpergrösse von 170 cm *oder weniger* hat:

$$P(X \leq 170)$$

- Dies entspricht *nicht* der W'keit:

$$P(X < 170)$$

- Dies ist W'keit, dass eine zufällig ausgewählte Person eine gerundete Körpergrösse *kleiner als* 170 cm hat
- Körpergrösse 170 cm gehört hier *nicht* dazu

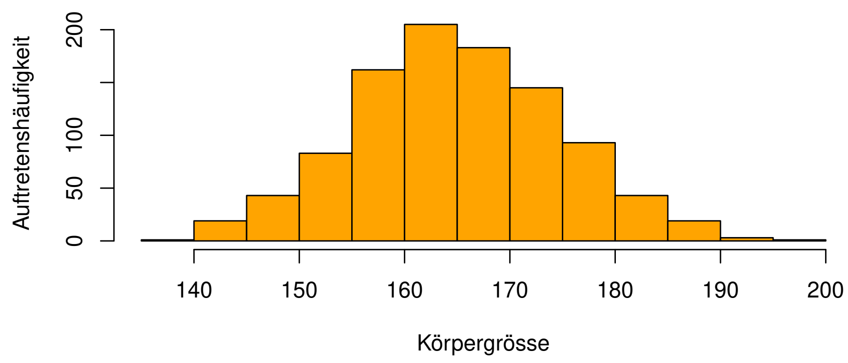
- Wichtig: Es gilt z. B.

$$P(X < 160) \leq P(X < 170)$$

- W'keit eine zufällig eine Person auszuwählen, die kleiner als 160 cm ist, ist kleiner gleich, als dass sie kleiner als 170 cm ist
- Wichtig: Alle W'keiten der Verteilung aufaddiert, ergibt 1:

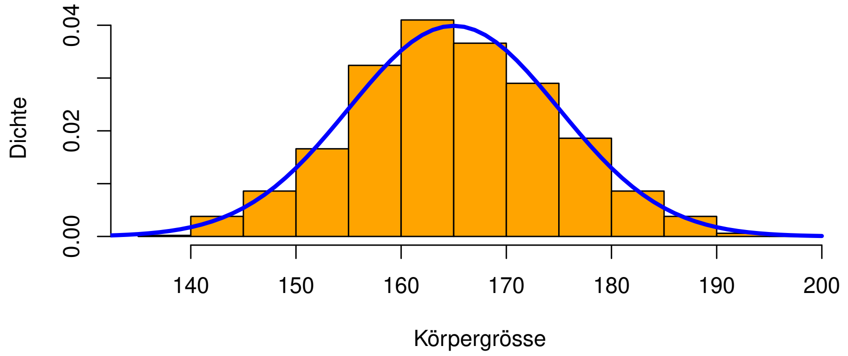
$$P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 499) + P(X = 500) = 1$$

- Wählen zufällig 1000 erwachsene Frauen aus
- Körpergrösse messen und ein Histogramm erstellen:



- *Form* des Histogrammes sehr typisch $\rightarrow$ kommt recht häufig vor
- In Mitte Balken hoch
- Werden immer kleiner, je weiter sie von Mitte entfernt sind

- Versuchen Kurve einzuzeichnen, die Histogramm möglichst gut folgt

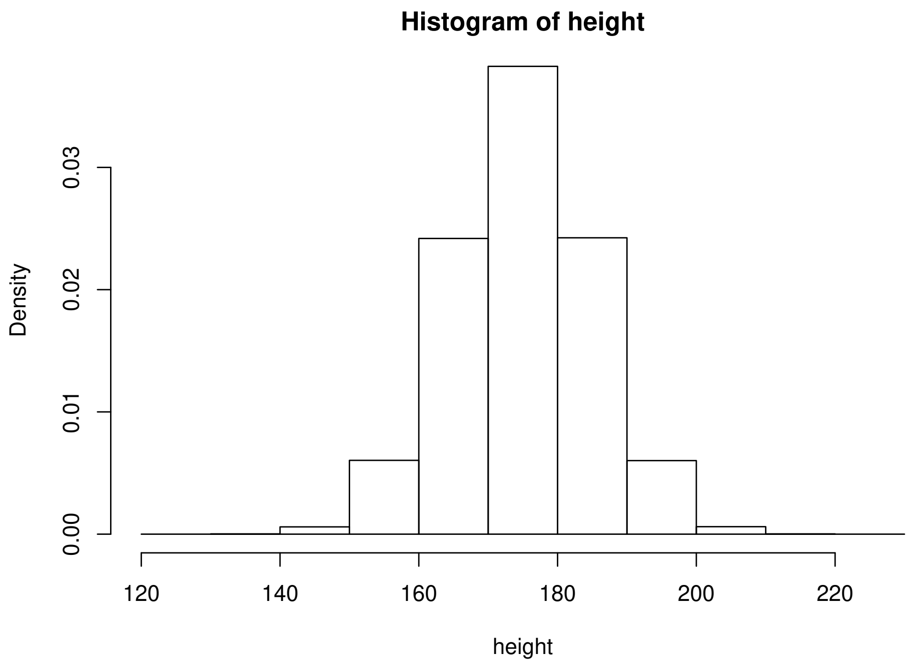


- Auf vertikaler Achse Dichten auftragen $\rightarrow$ Fläche von Histogramm 1
- Blaue Kurve heisst *Normalverteilungskurve*

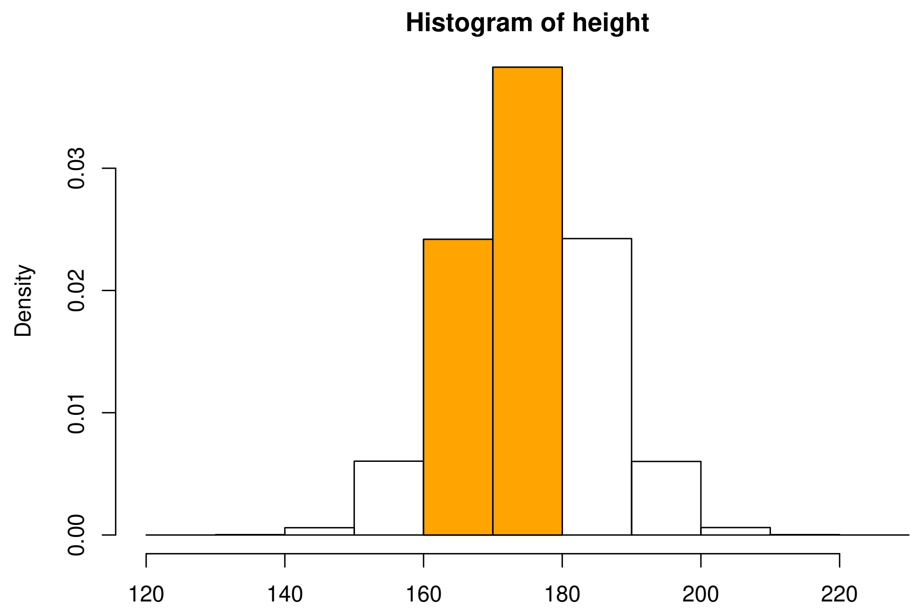
From discrete to continuous probability distribution

- Simulation of the body height (in cm) of one million persons
- Plot a histogram of these heights
- Assumption: Height of each person is known as accurately as possible
- Histogram below is normalized: Sum of the area all bars equals 1
- Start with a bar width of 10 cm

- Histogram:

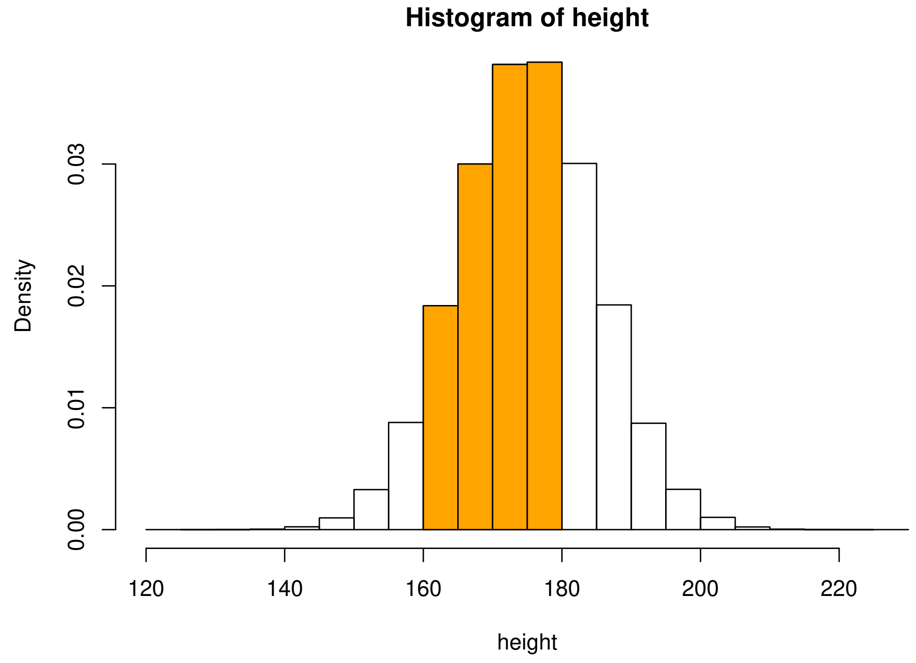


- In the following histogram: The two bars from 160 to 180 are coloured
- Histogram:



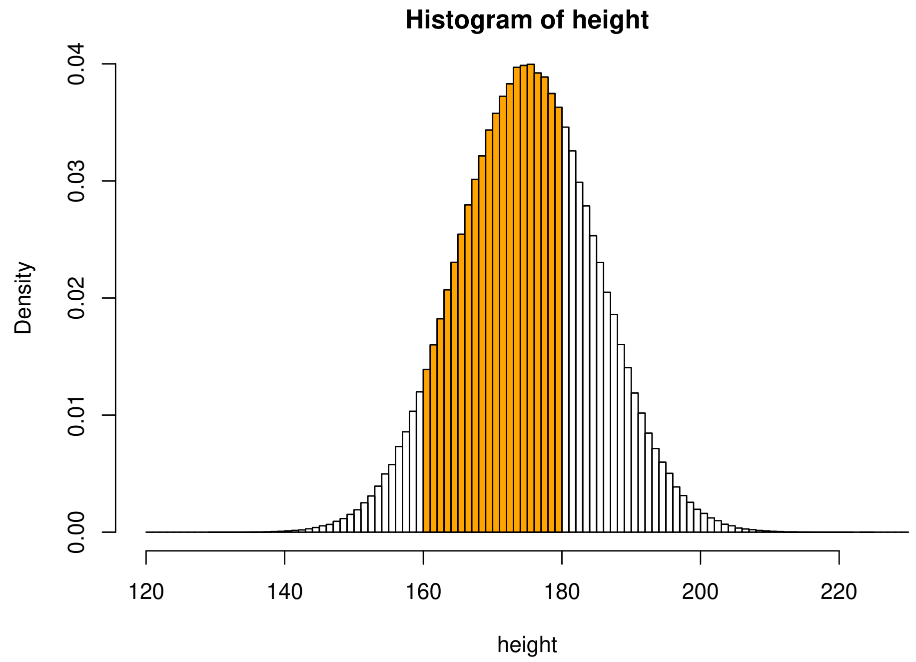
- Histogram is normalized: Interpretation of the area of this two bars as the probability that a randomly selected person of these 1 000 000 people has a height between 160 cm and 180 cm
- The reasoning for this runs as follows: The height of *any* of these persons is contained in the histogram
- Probability that *any* height of randomly choosen person is contained in the histogram is 1
- Area of the sum of the areas of all bars $\rightarrow$ 1
- Now regard the area of the two bars as the proportion of all the people with a height contained in these two bars
- This proportion is nothing else than the corresponding probability

- Histogram with bar width of 5 cm:

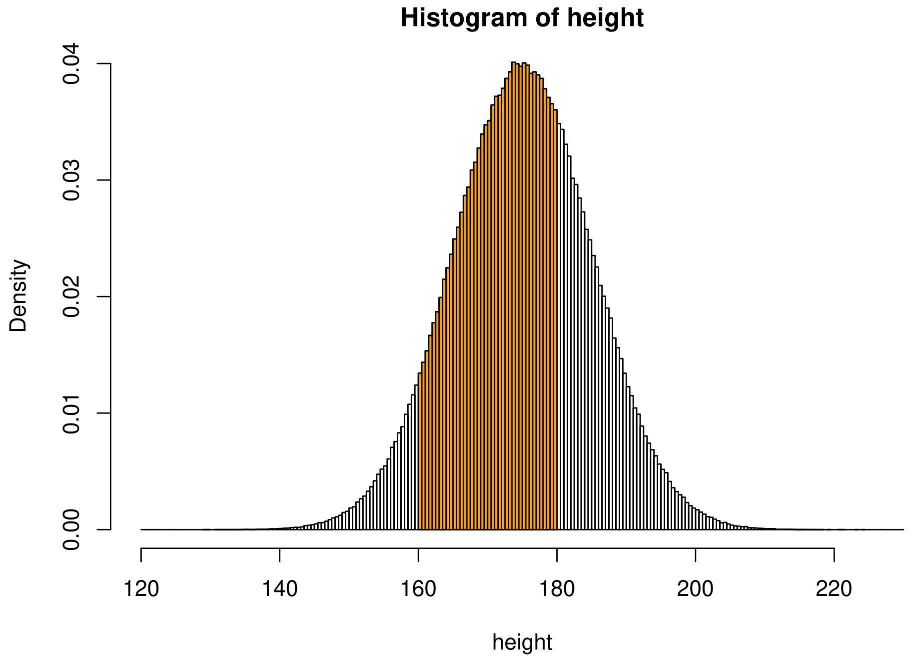


- The area of the sum of all the areas of the bars is still 1
- The interpretation of the coloured area is the same as above
- Note: Area of the individual bars is less than the area of the individual bars in the histogram before

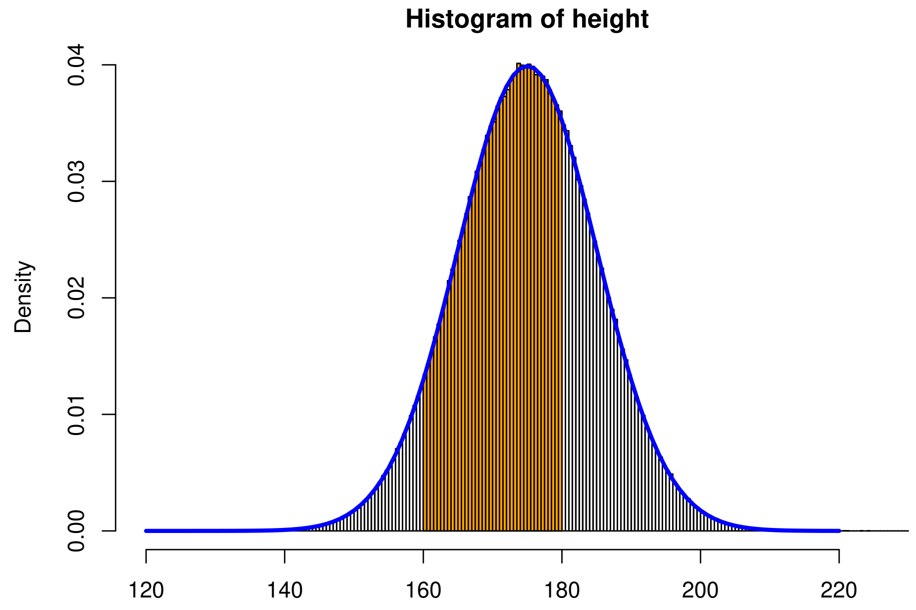
- Histogram with bar width of 1 cm



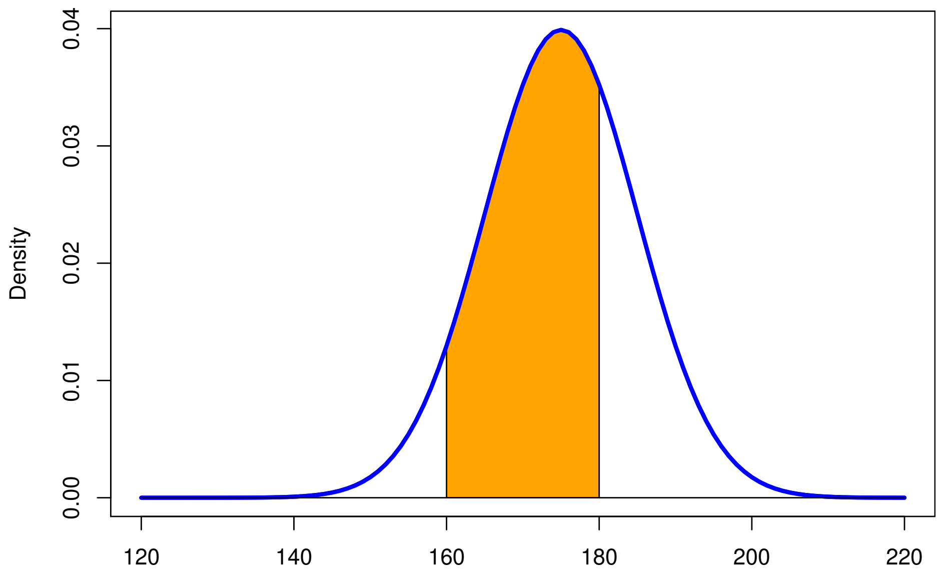
- Histogram with bar width of 0.5 cm



- Bar width gets smaller $\rightarrow$ Histogram follows a smooth curve:
- Histogram with smooth curve



- Now the final step
- Bar width tends to 0 (infinitely small)



- The „histogram" follows a smooth curve
- The area under this curve is 1
- The coloured area is still the probability, that a randomly choosen person has a height between 160cm and 180cm
- The area of an individual „bars" is 0
- The blue curve is called *probability density function*

Kontinuierliche Messdaten

- In vielen Anwendungen: Nicht Zähldaten, sondern *Messdaten*
- Messdaten können jeden Wert in einem bestimmten Bereich annehmen
- Bsp: Gemessenen Körpergrössen (in cm) von Menschen *jeden* Wert im Intervall $[0, 500]$:
- Also auch

$$145.325\,986\,54\ldots$$

- Voraussetzung: Beliebig genaue Messung möglich

Definitionen

- *Wertebereich* W_X einer Zufallsvariable $\rightarrow$ Menge aller Werte, die X annehmen kann
- Zufallsvariable X heisst *stetig*, wenn deren Wertebereich W_X kontinuierlich ist
- Kontinuierlich heisst: „Zusammenhängend" und nicht „löchrig", wie Menge $\{1, 2, 3\}$ oder $\{1.2, 2.4, 3.6, 4.8, \ldots\}$
- Wichtige kontinuierliche Wertebereich:

$$W_X = \mathbb{R},\ \mathbb{R}^+ \quad \text{oder} \quad [0, 1]$$

- Letzter Fall: Zahlen 0 und 1 *und* alle Zahlen dazwischen

Intervalle

- Intervall, wo die Grenzen innerhalb oder ausserhalb des Intervalls sein sollen $\rightarrow$ eckige und runde Klammern
  - Runde Klammer: Wert ausserhalb des Intervalls
  - Eckige Klammer: Wert innerhalb des Intervalls
- Intervall $(a, b]$ beschreibt also alle Punkte x mit $x > a$ und $x \leq b$

Beispiel

- Intervall

$$(1.2, 2.5]$$

  enthält die Zahl 1.2 nicht, die Zahl 2.5 schon
- Unterschied zum Intervall

$$[1.2, 2.5]$$

  minimal
- Es enthält nur den einen Punkt 1.2 der Zahlengeraden mehr
- In praktischer Hinsicht spielt es keine Rolle spielt, ob das 1. oder 2. Intervall verwendet wird

Punktwahrscheinlichkeit 0

- W'keitsverteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen: „Punkt"-W'keiten $P(X = x)$ für alle möglichen x im Wertebereich
- Aber für stetige Zufallsvariable X:

$$P(X = x) = 0$$

  für alle $x \in W_X$
- Folgerung: W'keitsverteilung von X kann nicht mittels der Angaben von „Punkt"-W'keiten beschrieben werden

Beispiel

- ZV X_0 uniform auf $W_0 = \{0, 1, \ldots, 9\} \to P(X_0 = x) = \frac{1}{10}$
- ZV X_1 uniform auf $W_1 = \{0.0, 0.1, \ldots, 9.9\} \to P(X_1 = x) = \frac{1}{100}$
- ZV X_2 uniform auf $W_2 = \{0.00, 0.01, \ldots, 9.99\} \to P(X_2 = x) = \frac{1}{1000}$

  $\vdots$
- ZV X_i uniform auf $W_i \to P(X_i = x) = \frac{1}{10^{i+1}}$
- ZV X_∞ uniform auf $W_\infty = [0, 10] \to P(X_\infty = x) = 0$

Punktw'keit ist null
bei kontinuierlichen Zufallsvariablen!

Beispiel: Körpergrösse

- Messen Körpergrösse von Personen
- W'keit *genau* eine Körpergrösse von $182.254\,680\,895\,434\ldots$ cm zu messen ist gleich 0:

$$P(X = 182.254\,680\,895\,434\ldots) = 0$$

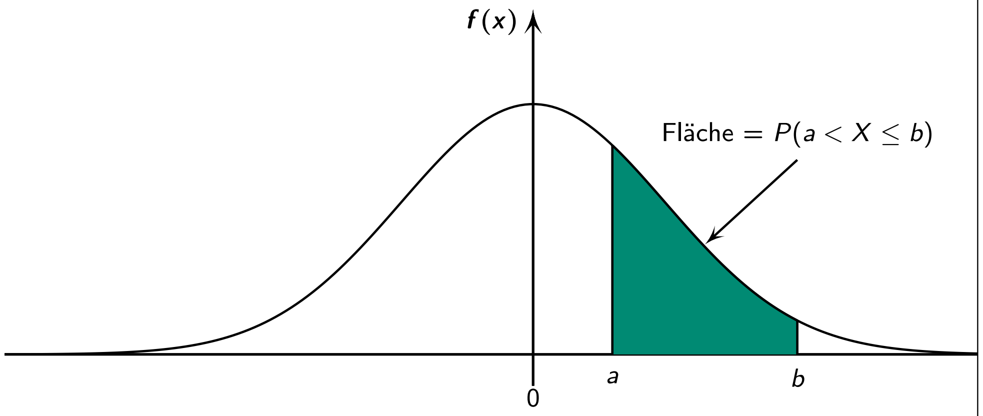
- Verwendung der W'keit einen exakten Messwert zu messen, bringt nichts
- Aber möglich: W'keit, dass ein Messwert in einem bestimmten Bereich liegt

- Beispiel: zwischen 174 und 175 cm:

$$P(174 < X \leq 175)$$

- Diese W'keit ist dann nicht mehr 0
- Begriff: W'keitsdichte

Dichtefunktion



Eigenschaften der Dichtefunktion

- Es gilt für alle x:

$$f(x) \geq 0$$

- Es gilt

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

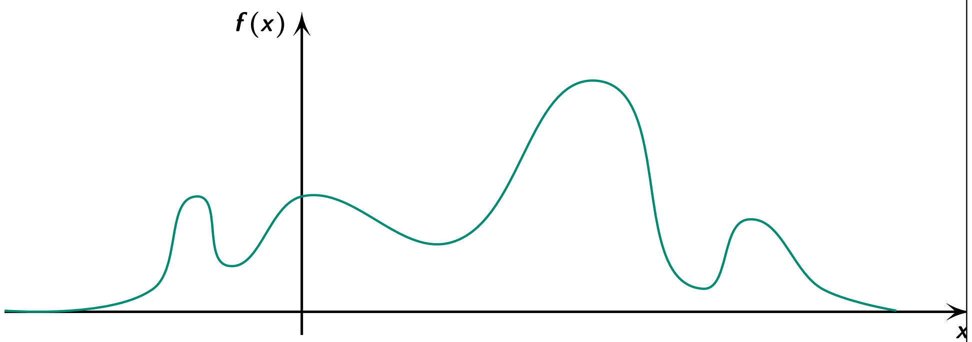
- Dies entspricht der Fläche zwischen a und b unter $f(x)$
- Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

- Dies ist die W'keit, dass *irgendein* Wert gemessen wird.

Beispiel: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

- Skizze:



- W'keitsdichtefunktionen müssen keine „schöne" Form haben
- Normalerweise aber „schöne" Form vorhanden

Wahrscheinlichkeitsdichte - kumulative Verteilungsfunktion

- Es gilt wie schon gesehen:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Nach HDI (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) gibt es ein $F(x)$ mit

$$f(x) = F'(x)$$

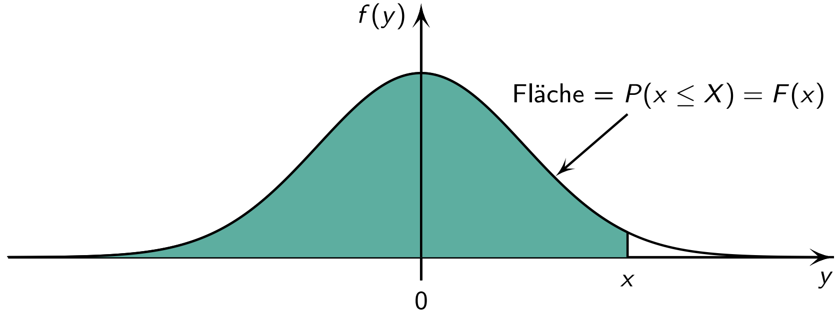
- Definition

Kumulative Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Kumulative Verteilungsfunktion

- Skizze:



- Es gilt dann:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Kumulative Verteilungsfunktion: Eigenschaften

- $F(x) = P(X \leq x)$ ist W'keit:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

- W'keit $P(X \leq -\infty)$, dass ein Messwert kleiner als $-\infty$ ist, ist 0:

$$F(-\infty) = 0$$

- Die W'keit $P(X \leq \infty)$, dass ein Messwert kleiner als ∞ ist, ist 1:

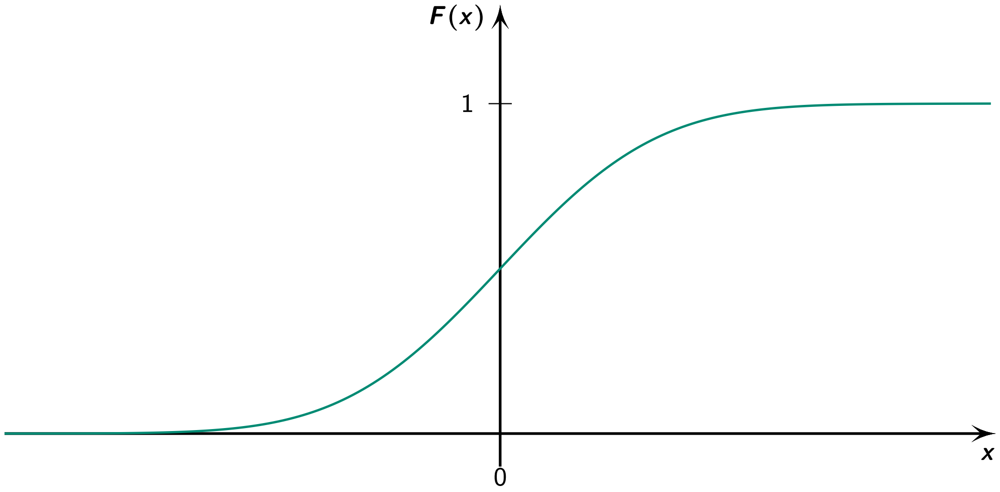
$$F(\infty) = 1$$

- Die Funktion von $F(x)$ ist monoton wachsend. Es gilt also für $a < b$:

$$F(a) \leq F(b)$$

- Wichtiger Punkt: Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ ist grösser gleich 0

Graph der kumulativen Verteilungsfunktion



Bemerkung

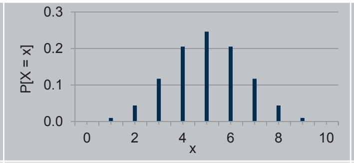
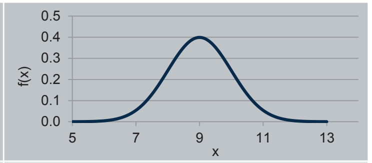
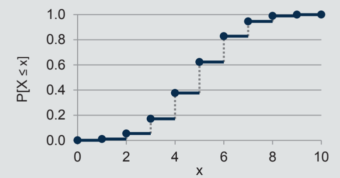
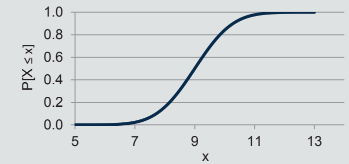
- Weil für stetige Zufallsvariablen gilt

$$P(X = a) = P(X = b) = 0$$

spielt es keine Rolle, ob wir $<$ oder $\leq$ schreiben

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Vergleich der Konzepte (diskret vs. stetig)

	Diskret	Stetig
Dichte		
Kumulative Verteilungsfunktion	 $F(x) = \sum_{k:x_k \le x} p(x_k)$	 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
Erwartungswert	$E[X] = \sum_{k \ge 1} x_k p(x_k)$	$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert und Varianz

- *Erwartungswert* ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Varianz* ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

Quantile

- *Quantile* $q(\alpha)$ für $0 < \alpha < 1$ einer Zufallsvariablen X:

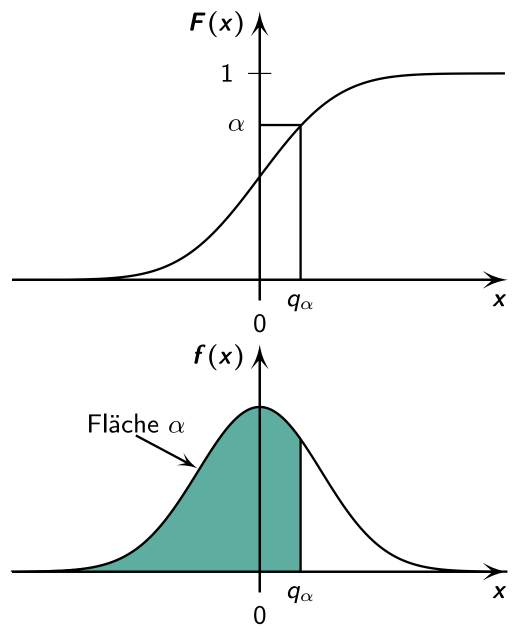
$$P(X \le q(\alpha)) = \alpha$$

- Das heisst:

$$F(q(\alpha)) = \alpha \Leftrightarrow q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$$

- Interpretation: $q(\alpha)$ ist der Punkt, wo Fläche von $-\infty$ bis $q(\alpha)$ unter der Dichte f gleich α ist
- 50 %-Quantil heisst der *Median*

Abbildung: Quantile

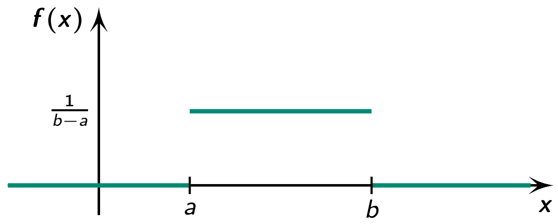


Beispiel: Körpergrösse

- Messen wieder Körpergrösse
- Beispiel: für $\alpha = 0.75$ ist das zugehörige Quantil $q(\alpha) = 182.5$
- D.h.: 75 % der gemessenen Personen kleiner oder gleich 182.5 cm

Uniforme Verteilung

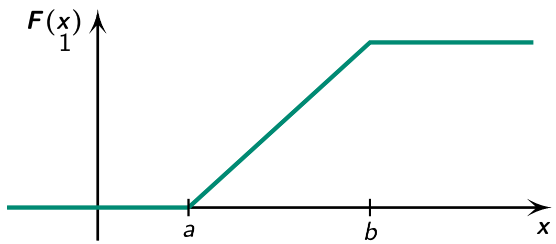
- *Situation*: Jeder Wert im Intervall $[a, b]$ ist gleich wahrscheinlich
- Zufallsvariable V X: Ein Wert aus $[a, b]$ $\quad\rightarrow\quad X \sim \text{Unif}(a, b)$
- „X ist uniform verteilt auf dem Intervall $[a, b]$"
- Dichte: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ falls $a \leq x \leq b$, sonst 0



- Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x < b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$$

- Graph:



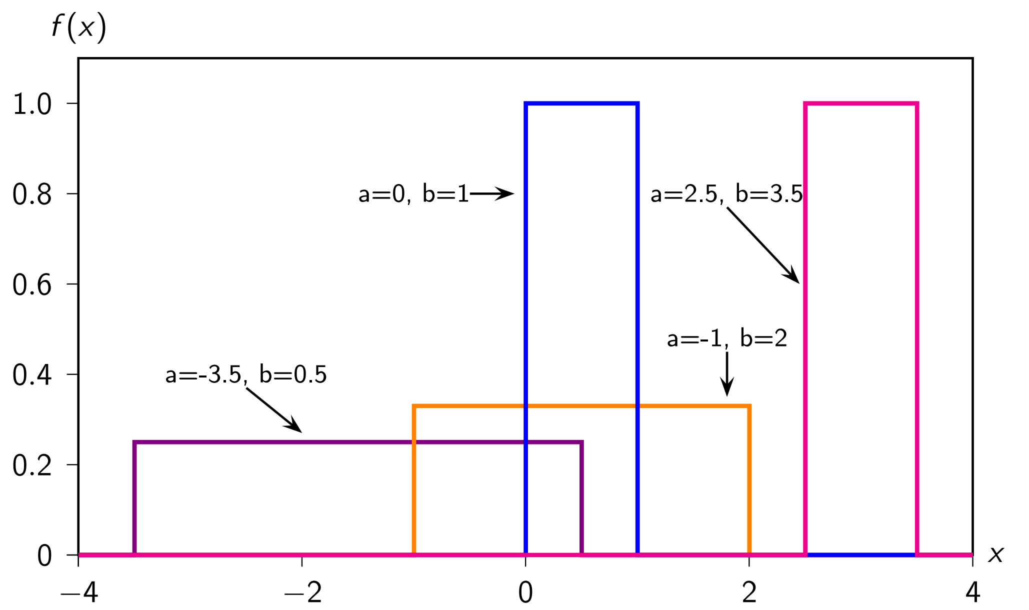
- *Erwartungswert*:

$$\text{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

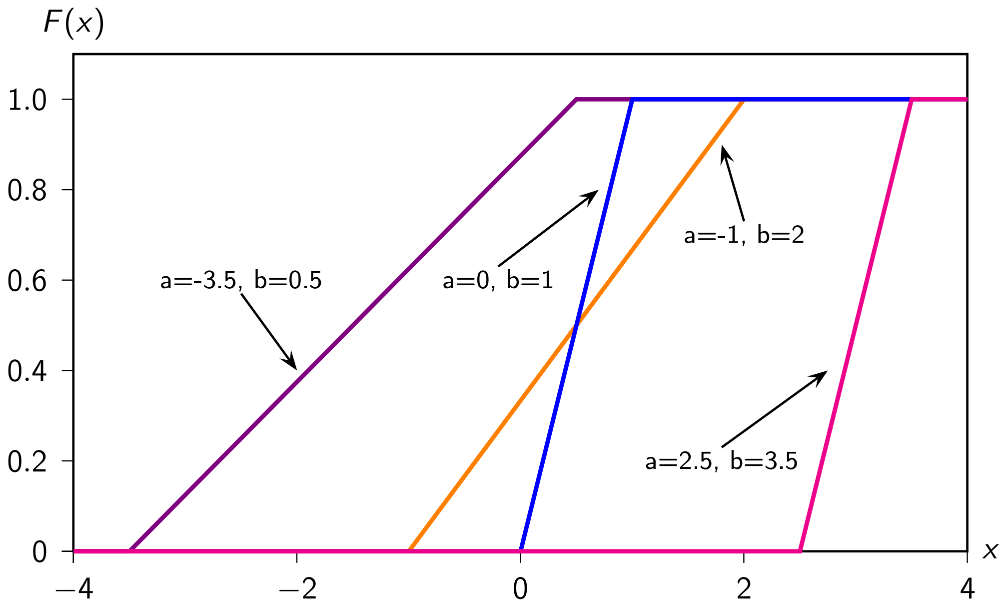
- *Varianz*:

$$\text{Var} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Uniforme Verteilung: Illustration Dichten



Uniforme Verteilung: Illustration kum. Vert.fn



Beispiel: Wartezeit an Haltestelle

- Zürich: Trams fahren alle 7 Minuten
- Annahme: Man kommt zu zufälliger Zeit an Haltestelle vorbei
- Wie wahrscheinlich ist es, dass man höchstens eine Minute warten muss?
- X: Wartezeit in Minuten

$$X \sim \text{Unif}(0, 7)$$

- Es gilt dann

$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1-0}{7-0} = \frac{1}{7}$$

Beispiel mit Python: $X \sim \text{Unif}(0, 7)$

- $P(X \leq 1)$

```
from scipy.stats import uniform, expon, norm

uniform.cdf(x=1, loc=0, scale=7)
## 0.14285714285714285
```

- $P(0.5 \leq X \leq 2.2)$

```
uniform.cdf(x=2.2, loc=0, scale=7) - uniform.cdf(x=0.5, loc=0, scale=7)
## 0.2428571428571429
```


- Dichte an der Stelle $x = 3$ (das ist *nicht* die W'keit)

```
uniform.pdf(x=1, loc=0, scale=7)
## 0.14285714285714285
```

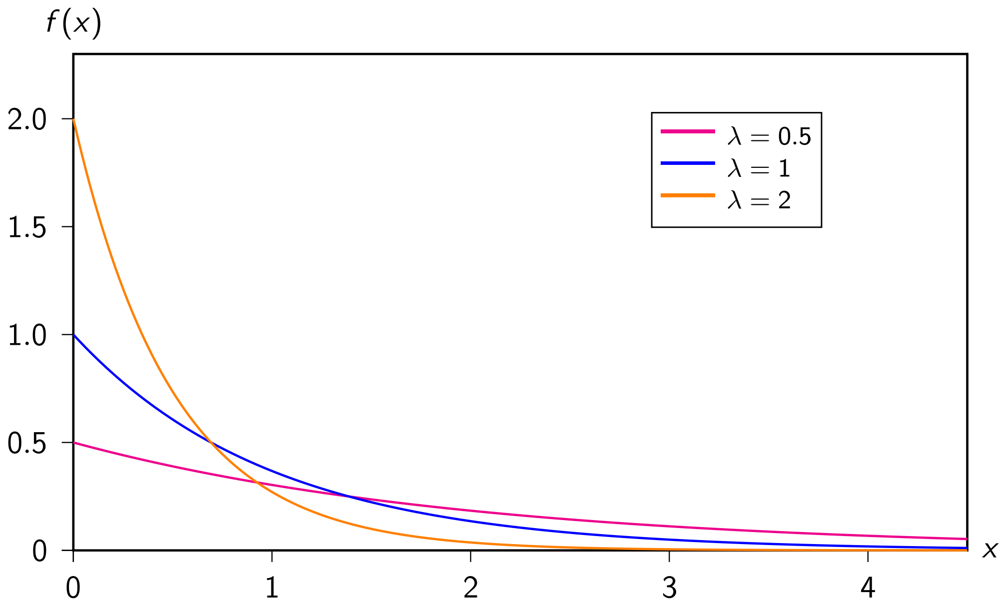
- Uniform verteilte Zufallszahlen generieren, z.B. $X_i \sim \text{Unif}(0, 7)$ mit $i = 1, 2, 3$:

```
uniform.rvs(size=3, loc=0, scale=7)
## [0.47183002 5.47628775 2.95250666]
```

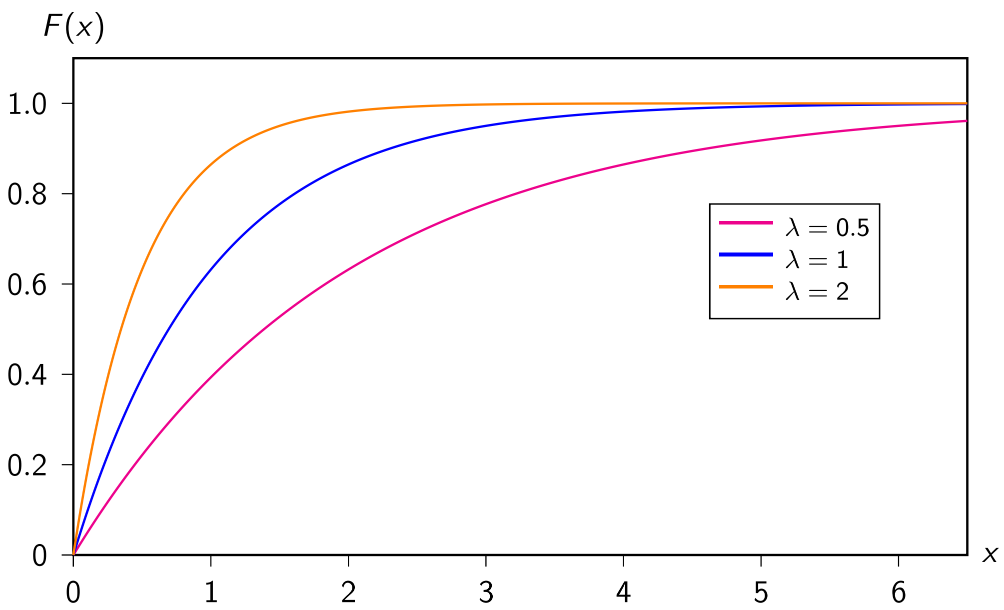
Exponentialverteilung: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- *Wertebereich* $W_X = [0, \infty)$
- *Dichte* $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x \geq 0$
- *Verteilungsfunktion* $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \; x \geq 0$
- *Erwartungswert* $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- *Varianz* $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- *Anwendung* Lebenszeit techn. Systeme (ohne Alterungserscheinungen), Wartezeiten, stetige Version der geom. Verteilung, ...

Exponentialverteilung: Illustration Dichten



Exponentialverteilung: Illustration kumul. Vert.fn



Beispiel Exponentialverteilung: Radioaktiver Zerfall

- Wie lange dauert es, bis ein bestimmtes radioaktives Isotop zerfällt?
- Modell für diese zufällige Lebenszeit : *Exponentialverteilung*
- T : Zerfallszeit ; somit $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

Beispiel Exponentialverteilung: Radioaktiver Zerfall

- Für welchen Zeitpunkt wird die W'keit, dass das Isotop bis dahin zerfällt, gleich $\frac{1}{2}$?
- *Antwort*: Median,

$$F(t_{1/2}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

- Lösung: nach t auflösen (logarithmieren):

$$-\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

- In radioaktiven Gegenstand gibt es sehr viele aktive Isotope
- W'keit $\frac{1}{2}$ des Zerfalls eines einzelnen Isotops $\rightarrow$ Relative Häufigkeit der zerfallenen Isotope bis zum Zeitpunkt $\frac{0.693}{\lambda}$
- Man nennt

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

die *Halbwertszeit*

- Bsp.: Halbwertszeit Americium: 16.02 h, Halbwertszeit Uran (235) : 703'800'000 Jahre

Exponential-Verteilung mit Python

- Annahme: $X \sim$ Exp(3) $\rightarrow$ W'keit $P(X \leq 4)$ mit Python :

```
expon.cdf(x=4, loc=0, scale=1/3)
## 0.9999938557876467
```

- Wert der W'keitsdichtefunktion berechnet mit Python :

```
expon.pdf(x=1, loc=0, scale=1/3)
## 0.0003702294122600387
```

- Beachte: `scale=1/λ`

Normalverteilung (Gaussverteilung): $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

- *Wertebereich*

$$W = (-\infty, \infty)$$

- *Dichte*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

- *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

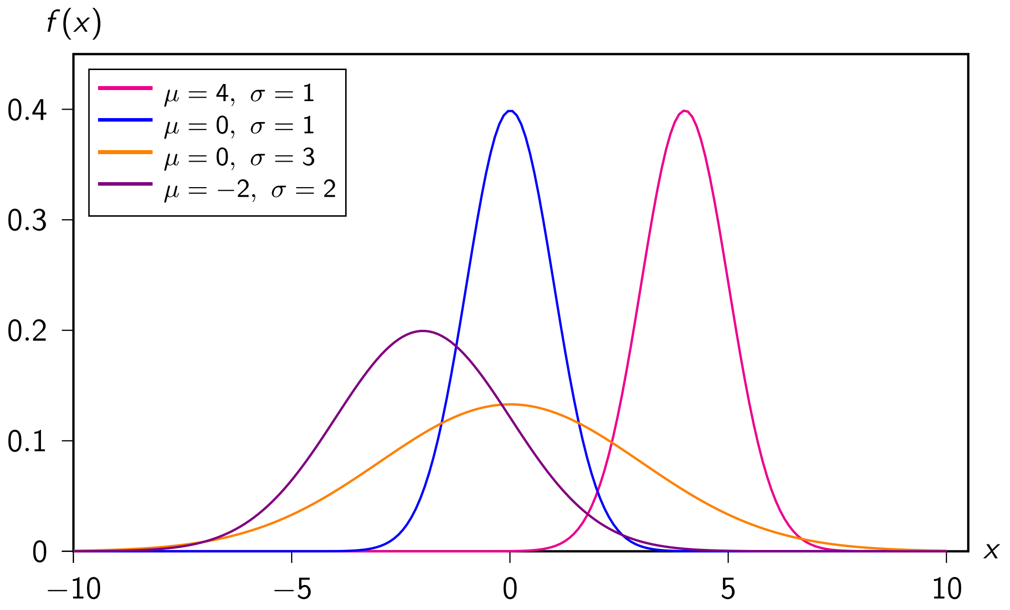
- *Erwartungswert*

$$\mathrm{E}[X] = \mu$$

- *Varianz*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

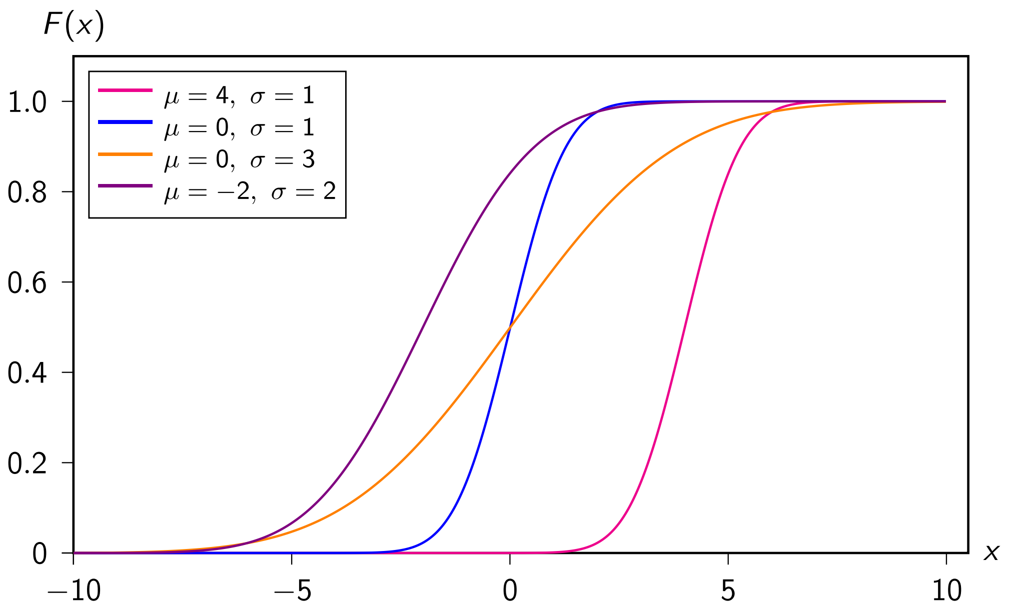
Normalverteilung: Illustration Dichten



Eigenschaften der Normalverteilung

- Dichtefunktionen „glockenförmig"
- Durch Parameter μ Verschiebung der Kurve
  - nach rechts, falls μ positiv
  - nach links, falls μ negativ
- Durch Parameter σ wird die Kurve
  - schmal und hoch um μ, falls σ klein (nahe bei 0)
  - weit und tief um μ, falls σ gross

Normalverteilung: Illustration kumul. Vert.fn.



Beispiel mit Python: Verteilung von IQ

- Anwendung: Häufigste Verteilung für Messwerte
- Beispiel: IQ Tests folgen einer Normalverteilung mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 15
- Wie gross die W'keit ist, dass jemand einen IQ von mehr als 130 hat, also als hochbegabt gilt?
- $P(X > 130)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$. Gesucht:

$$1 - P(X \leq 130)$$

```
1-norm.cdf(x=130, loc=100, scale=15)
## 0.022750131948179209
```

- Also rund 2 % der Bevölkerung ist hochbegabt
- In welchem Intervall liegen 90 % der IQ Ergebnisse?
- Gesucht: c, so dass

$$P(100 - c < X < 100 + c) = 0.9$$

also

$$P(X < 100 - c) = 0.05 \qquad \text{und} \qquad P(X > 100 + c) = 0.95$$

```
norm.ppf(q=0.05, loc=100, scale=15)
## 75.32719559572791
```

```
norm.ppf(q=0.95, loc=100, scale=15)
## 124.67280440427209
```


- Also liegen 90 % der IQ Ergebnisse im Intervall [75, 125]
- Wieviel Prozent der Bevölkerung liegen innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert liegen?
- Gesucht W'keit

$$P(85 \leq X \leq 115)$$

```
norm.cdf(x=115, loc=100, scale=15) - norm.cdf(x=85, loc=100, scale=15)
## 0.6826894921370859
```

- D.h., etwa $\frac{2}{3}$ der Bevölkerung haben einen IQ zwischen 85 und 115

Normalverteilung: Eigenschaften

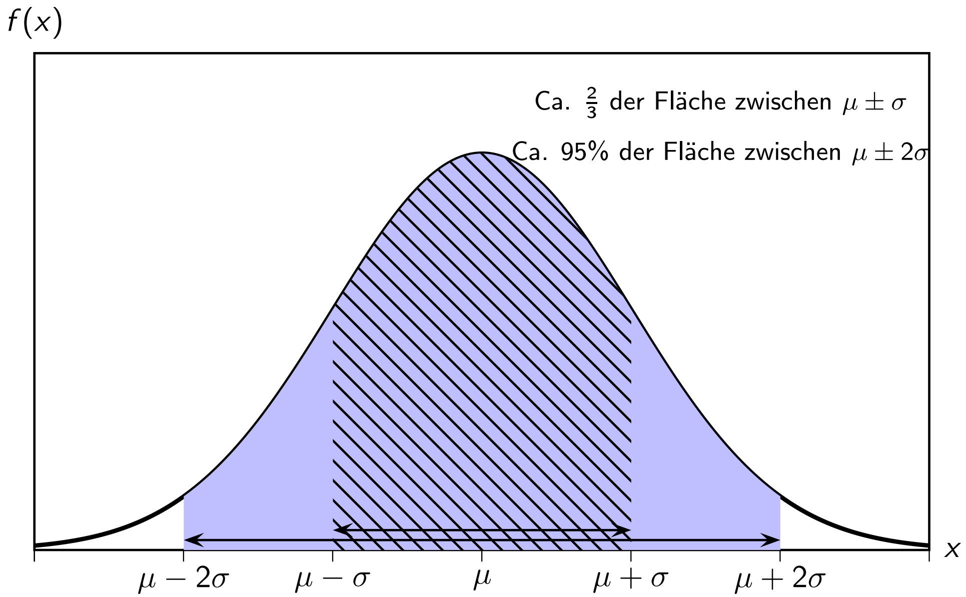
- Letzte Resultat aus Beispiel gilt für alle Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Die W'keit, dass eine Beobachtung eine höchstens Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, ist etwa $\frac{2}{3}$:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{2}{3}$$

- Normalverteilung: Konkrete Aussage für die Streuung als „mittlere" Abweichung vom Erwartungswert
- W'keit, dass eine Beobachtung höchstens zwei Standardeinheiten vom Erwartungswert abweicht:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

Normalverteilung: Eigenschaften



Normalverteilung: Standardnormalverteilung

- *Standardnormalverteilung* falls

$$\mu = 0,\ \sigma^2 = 1$$

- Dichte der Standardnormalverteilung $\rightarrow$ $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- Kumul. Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\rightarrow$ $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$$

- Diese ist nicht geschlossen darstellbar $\rightarrow$ Nicht integrierbar

Normalverteilung: Standardisierung

- Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Man spricht von der *Standardisierung* von X (auf Erwartungswert 0 und Varianz 1)
- *Beispiel:* Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 4$

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{5-2}{2}\right) \\ &= P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.93 \end{aligned}$$

```
norm.cdf(x=1.5)
## 0.9331927987311419
```