Izpeljava enačb za sistem vozička s palico na neravni površini

Anej Svete

6. marec 2020

1 Uvod

S pomočjo Lagrangeeve formulacije gibalnih enačb izpeljem enačbe dinamike v sistemu vozička s palico na neravni površini. Enačbe so zastavljene, za izpeljavo diferencialnih enačb pa sem uporabil Mathematico.

Najprej predstavim enačbe za originalni problem, nato pa izpeljem še enačbe za razširjeno različico na podlagi posplošenih koordinat s in Θ, kjer je s parameter, odvisen od časa in implicitno namesto pozicije x določa krivuljo. V zadnjem delu so predstavljene še enačbe, kjer je krivulja terena določena s pozicijo x, kar poenostavi dobljene enačbe.

Za pomoč pri izpeljavi se zahvaljujem asistentu Juretu Slaku s FMF UL in IJS.

2 Enačbe prvotnega problema, kot jih vrne Mathematica

Enačbi, ki ju na podlagi Lagrangeeve formulacije gibalnih enačb vrne Mathematica, nista povsem enaki tistim, ki se pogosto pojavljajo v literaturi, zato dodajam tudi te. Služijo tudi za primerjavo kompleksnosti v primerjavi z izpeljanim problemom. Enačbi sta:

$$\ddot{x} = \frac{F + m\sin(\Theta)\left(-g\cos(\Theta) + l\dot{\Theta}^2\right)}{m + M - m\cos(\Theta)^2}$$

$$\ddot{\Theta} = -\frac{(\cos(\Theta)F + \sin(\Theta))\left(-g(m+M) + lm\cos(\Theta)\dot{\Theta}^2\right)}{l\left(m + M - m\cos(\Theta)^2\right)}$$

3 Gibanje, parametrizirano s s in Θ

Za posplošeni koordinati vzamemo s in Θ in ne x ter Θ, kjer je s parameter, ki implicitno preko funkcije x določa absciso telesa in omogoča, da je teren parametrična krivulja na ravnini, torej da krivulja, po kateri potuje voziček, ni nujno funkcija pozicije na osi x. To omogoča izris poljubne poti, s čimer lahko problem poljubno otežimo.

Za lažjo izpeljavo vpeljemo podobne predpostavke kot pri prvotnem sistemu, le da tokrat obravnavamo voziček še kot točkasto telo, da lahko zanemarimo vrtilno količino togega telesa pri premikanju. Kot prej je vsa masa palice skoncentrirana na vrhu, torej jo obravnavamo kot točkasto telo.

Konstante so M - masa vozička, m - masa palice, l - dolžina palice in F - *moč potiska*.

$x(s)$ predstavlja lokacijo vozička na abscisni osi, $y(s)$ pa enačbo krivulje terena, po katerem se giblje voziček in s tem višino trenutne pozicije. Z $(x_1(s,\Theta), y_1(s,\Theta))$ označimo lokacijo vozička (ki je v tem primeru torej točka) v odvisnosti od s in Θ, z $(x_2(s,\Theta), y_2(s,\Theta))$ pa lokacijo vrha palice.

Z $x(s)$ in $y(s)$ torej lahko izrazimo lokaciji na sledeči način:

$$x_1(s,\Theta) = x(s)$$
$$y_1(s,\Theta) = y(s)$$
$$x_2(s,\Theta) = x(s) + l\sin(\Theta)$$
$$y_2(s,\Theta) = y(s) + l\cos(\Theta)$$

Odvodi teh funkcij po času so torej:

$$\dot{x}_1(s,\Theta) = \dot{x}(s)\,\dot{s}$$
$$\dot{y}_1(s,\Theta) = \dot{y}(s)\,\dot{s}$$
$$\dot{x}_2(s,\Theta) = \dot{x}(s)\,\dot{s} + l\dot{\Theta}cos(\Theta)$$
$$\dot{y}_2(s,\Theta) = \dot{y}(s)\,\dot{s} - l\dot{\Theta}sin(\Theta)$$

Kinetična energija sistema je

$$T = T_{voziček} + T_{palica}$$
$$= \frac{1}{2}M\left((\dot{x}(s)\,\dot{s})^2 + (\dot{y}(s)\,\dot{s})^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}(s)\,\dot{s} + l\dot{\Theta}\cos(\Theta)\right)^2 + \left(\dot{y}(s)\,\dot{s} - l\dot{\Theta}\sin(\Theta)\right)^2\right)$$

Potencialna pa

$$V = V_{voziček} + V_{palica}$$
$$= -gMy(s) - gm(y(s) + l\cos(\Theta))$$

Ti dve enačbi vstavimo v Lagrangeevo formulacijo gibalnih enačb $\mathcal{L} = T - V$ in dobimo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Theta}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Theta}=0$$

Ti dve enačbi rešimo z Mathematico in izrazimo $\ddot{s}$ ter $\ddot{\Theta}$ na sledeči način:

$$\ddot{s}=\frac{f_1\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)}{g_1\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)}$$

$$\ddot{\Theta}=\frac{f_2\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)}{g_2\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)}$$

Tu so:

$$\begin{aligned}
f_1\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)= \\
&-2F \\
&+\ddot{y}\left(s\right)\left(g\left(m+2M+m\cos\left(2\ddot{\Theta}\right)\right)-2lm\cos(\Theta)\dot{\Theta}^2\right) \\
&+\ddot{y}\left(s\right)\dot{s}^2\left(m\sin(2\Theta)\ddot{x}(s)+\left(m+2M+m\cos\left(2\Theta\right)\right)\ddot{y}\left(s\right)\right) \\
&+\dot{x}\left(s\right)\left(gm\sin\left(2\Theta\right)-2lm\sin\left(\Theta\right)\dot{\Theta}^2\right) \\
&+\dot{x}\left(s\right)\dot{s}^2\left(\left(m+2M-m\cos\left(2\Theta\right)\right)\ddot{x}\left(s\right)+m\sin(2\Theta)\ddot{y}\left(s\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)= \\
&\left(-m-2M+m\cos\left(2\Theta\right)\right)\dot{x}\left(s\right)^2 \\
&-2m\sin\left(2\Theta\right)\dot{x}\left(s\right)\dot{y}\left(s\right) \\
&-\left(m+2M+m\cos\left(2\Theta\right)\right)\dot{y}\left(s\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)= \\
&F\left(\cos\left(\Theta\right)\dot{x}\left(s\right)-\sin\left(\Theta\right)\dot{y}\left(s\right)\right) \\
&+\left(\sin\left(\Theta\right)\dot{x}\left(s\right)+\cos\left(\Theta\right)\dot{y}\left(s\right)\right)\dot{y}\left(s\right)\left(-\left(lm\sin\left(\Theta\right)\dot{\Theta}^2\right)+\left(m+M\right)\dot{s}^2\ddot{x}\left(s\right)\right) \\
&+\left(\sin\left(\Theta\right)\dot{x}\left(s\right)+\cos\left(\Theta\right)\dot{y}\left(s\right)\right)\dot{x}\left(s\right)\left(lm\cos\left(\Theta\right)\dot{\Theta}^2+\left(m+M\right)\left(-g-\dot{s}^2\ddot{y}\left(s\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$g_2\left(\Theta,\dot{\Theta},s,\dot{s},x,\dot{x},\ddot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right)=$$

$$l\left(-m-M+m\cos\left(\Theta\right)^2\right)\dot{x}\left(s\right)^2$$
$$-\,lm\sin\left(2\Theta\right)\dot{x}\left(s\right)\dot{y}\left(s\right)$$
$$-\,\frac{1}{2}l\left(m+2M+m\cos\left(2\Theta\right)\right)\dot{y}\left(s\right)^2$$

Kot omenjeno sta dobljeni enačbi precej kompleksnejši od originalnih. Zato se lahko omejimo na terene, kjer je višina funkcija abscise, da dobimo enostavnejše enačbe. To je predstavljeno v naslednjem razdelku.

4 Gibanje, parametrizirano z x in Θ

Predpostavke in nastavek okolja so enaki kot v prejšnjem razdelku, le da tu za posplošeni koordinati vzamemo neposredno x in Θ, kjer je x eksplicitno določa absciso telesa. S tem se dobljene enačbe poenostavijo, toda še vedno so precej obsežnejše od originalnih.

Tokrat x predstavlja lokacijo vozička na abscisni osi, $y\left(x\right)$ pa ima isto vlogo kot prej. Tudi x_1, x_2, y_1, y_2 pomenijo isto kot prej.

Z x in $y\left(x\right)$ lokaciji izrazimo na sledeči način:

$$x_1\left(x,\Theta\right)=x$$
$$y_1\left(x,\Theta\right)=y\left(x\right)$$
$$x_2\left(x,\Theta\right)=x+l\sin\left(\Theta\right)$$
$$y_2\left(x,\Theta\right)=y\left(x\right)+l\cos\left(\Theta\right)$$

Odvodi teh funkcij po času so torej:

$$\dot{x}_1\left(x,\Theta\right)=\dot{x}$$
$$\dot{y}_1\left(x,\Theta\right)=\dot{y}\left(x\right)\dot{x}$$
$$\dot{x}_2\left(x,\Theta\right)=\dot{x}+l\dot{\Theta}cos\left(\Theta\right)$$
$$\dot{y}_2\left(x,\Theta\right)=\dot{y}\left(x\right)\dot{x}-l\dot{\Theta}sin\left(\Theta\right)$$

Kinetična energija sistema je

$$T=T_{voziček}+T_{palica}$$

$$=\frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\left(\dot{y}\left(x\right)\dot{x}\right)^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}+l\dot{\Theta}\cos\left(\Theta\right)\right)^2+\left(\dot{y}\left(x\right)\dot{x}-l\dot{\Theta}\sin\left(\Theta\right)\right)^2\right)$$

Potencialna pa

$$V = V_{voziček} + V_{palica}$$

$$= -gMy\left(x\right) - gm\left(y\left(x\right) + l\cos\left(\Theta\right)\right)$$

Ti dve enačbi vstavimo v Lagrangeevo formulacijo gibalnih enačb $\mathcal{L} = T - V$ in dobimo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = F$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = 0$$

Ti dve enačbi rešimo z Mathematico in izrazimo $\ddot{s}$ ter $\ddot{\Theta}$ na sledeči način:

$$\ddot{x} = \frac{f_1\left(\Theta, \dot{\Theta}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}\right)}{g_1\left(\Theta, \dot{\Theta}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}\right)} \tag{1}$$

$$\ddot{\Theta} = \frac{f_2\left(\Theta, \dot{\Theta}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}\right)}{g_2\left(\Theta, \dot{\Theta}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}\right)} \tag{2}$$

Tu so:

$$f_1\left(\Theta, \dot{\Theta}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}\right) =$$
$$2F$$
$$+ 2lm\dot{\Theta}^2\left(\sin\left(\Theta\right) + \cos\left(\Theta\right)\dot{y}\left(x\right)\right)$$
$$+ \left(m\sin\left(2\Theta\right) + \left(m + 2M + m\cos\left(2\Theta\right)\right)\dot{y}\left(x\right)\right)\left(g - \dot{x}^2\ddot{y}\left(x\right)\right)$$

$$g_1\left(\Theta, \dot{\Theta}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}\right) =$$
$$m + 2M - m\cos\left(2\Theta\right)$$
$$+ 2m\sin\left(2\Theta\right)\dot{y}\left(x\right)$$
$$+ \left(m + 2M + m\cos\left(2\Theta\right)\right)\dot{y}\left(x\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
f_2\left(\Theta,\dot{\Theta},x,\dot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right) = & \\
& -2\left(F\left(\cos\left(\Theta\right)-\sin\left(\Theta\right)\dot{y}\left(x\right)\right)-\left(\sin\left(\Theta\right)+\cos\left(\Theta\right)\dot{y}\left(x\right)\right)\right) \\
& \cdot\left(lm\dot{\Theta}^2\left(-\cos\left(\Theta\right)+\sin\left(\Theta\right)\dot{y}\left(x\right)\right)-\left(m+M\right)\left(g-\dot{x}^2\ddot{y}\left(x\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2\left(\Theta,\dot{\Theta},x,\dot{x},y,\dot{y},\ddot{y}\right) = & \\
& l\left(m+2M-m\cos\left(2\Theta\right)+\sin\left(2\Theta\right)\dot{y}\left(x\right)\right) \\
& +l\left(m+2M+m\cos\left(2\Theta\right)\right)\dot{y}\left(x\right)^2
\end{aligned}
$$