Simulation pour l'équation des Ondes

Clément MARADEI

Institut Galilée & Inria Paris

Janvier-Février 2023

Introduction

- L'équation des ondes est un modèle qui permet de décrire la propagation des ondes acoustiques dans le sous-sol.
- Un modèle a été proposé pour prendre en compte l'atténuation au sein de milieux saturés. Il comporte deux termes additionnels.
- On cherche à comparer les deux modèles et comprendre le rôle de chaque paramètre.

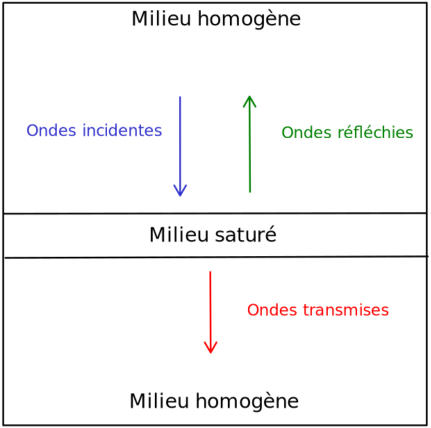


Table des matières

On considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et de frontière $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.
Trouver $u : \Omega \times]0, T[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \operatorname{div}(\nabla u(x,t)) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \in]0, T[$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Avec des conditions aux limites sur $\partial\Omega$, c étant la vitesse de propagation de l'onde.

On veut simuler un milieu infini, mais on doit introduire des bords à distance finie, ce qui crée des réflexions non-physiques. Les CLA approchent la condition de "non-réflexion parfaite" qu'il n'est pas possible d'implémenter.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad \forall x \in \Gamma, \quad \forall t \in]0,T[$$

On établit dans un premier temps le problème continu. On considère l'espace $V = \left\{ v | v \in H^1(\Omega) \text{ et } v_{|_{\Gamma_1}} = 0 \right\}$. En multipliant l'équation des ondes par une fonction test $v \in V$ et en intégrant sur Ω, on obtient $\forall v \in V$

$$\int_\Omega \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(s,t)v(s)ds$$

$$= \int_{\Gamma_3} g_2(s,t)v(s)ds + \int_\Omega f(x,t)v(x)dx$$

On considère l'espace d'approximation suivant :

$$V_h(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(\Omega), \forall K, v_{|_K} \in P_1 \text{ et } v_{|_{\Gamma_1}} = 0 \right\}$$

Pour la discrétisation en temps, on utilise une méthode de différences finies en temps et on rend le schéma implicite avec un paramètre θ. On utilise donc :

$$\frac{d^2}{dt^2} u_h(t_n) \approx \frac{u_h^{n+1} - 2_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} \text{ et } \frac{d}{dt} u_h(t_n) \approx \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t}$$

Et

$$u_h^n \approx \theta u_h^{n+1} + (1 - 2\theta) u_h^n + \theta u_h^{n-1}$$

En en notant $u_h^n = u_h(t_n)$. une approximation de la solution analytique au temps t_n., on est amené à résoudre un problème variationnel de la forme $A(u_h^{n+1}, v_h) = L(v_h)$ pour chaque pas de temps.

$$A(u_h^{n+1}, v_h) = \int_\Omega u_h^{n+1} v_h dx + c^2 \Delta t \int_\Omega \theta \nabla u_h^{n+1} \nabla v_h dx + \frac{c}{2} \Delta t \int_{\Gamma_2} u_h^{n+1} v_h ds$$

Et $L(v_h) = \int_\Omega (2u_h^n - u_h^{n-1}) v_h dx - c^2 \Delta t^2 \int_\Omega ((1-2\theta)\nabla(u_h^n) + \theta \nabla(u_h^{n-1})) \nabla v_h dx$

$$+\Delta t^2 c^2 \int_\Omega f(t_n) v_h dx + \Delta t^2 c^2 \int_{\Gamma_3} g_2(t_n) + \frac{c}{2} \Delta t \int_{\Gamma_2} u_h^{n-1} v_h ds$$

Ici, $u_h = (u_h^0, u_n^1, ..., u_h^{N_t})$. Au temps t_{n+1}, u_h^n et u_h^{n-1} sont connus, ils font donc partie de la forme linéaire.

Exemples

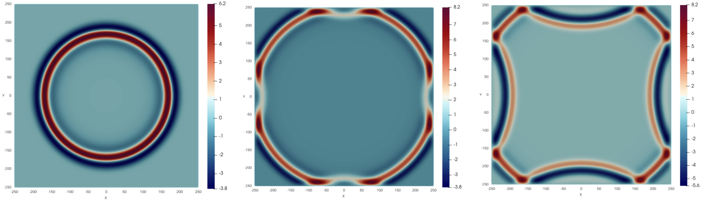


Figure: Modèle sans CLA

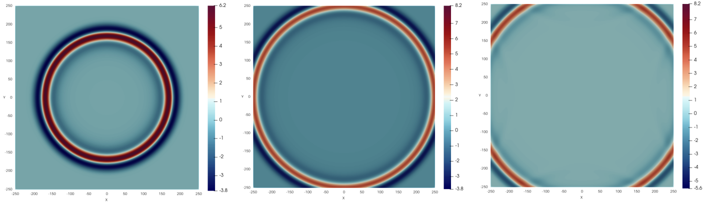


Figure: Modèle avec CLA

Table des matières

Table des matières

On considère l'équation $\forall x \in \Omega, \forall t \in]0, T[$

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \eta \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{div}(\nabla u(x,t)) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \mathrm{div}(\nabla u(x,t)) = f(x,t)$$

Avec les conditions :

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

$$u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in]0,T[\times \Gamma$$

On a donc ajouté le terme $\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ et le terme $\eta \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div} \nabla u$ qui est un terme d'ordre 3.

Puisqu'on a imposé des conditions aux limites de Dirichet homogènes, on considère l'espace de Hilbert $V = H_0^1(\Omega)$. On multiplie alors l'équation par une fonction test $v \in V$ puis on intègre sur Ω. On a

$$\int_\Omega \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega c^2 \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\eta \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx \quad \forall v \in V$$

Comme pour le modèle acoustique, on considère une discrétisation en temps et en espace pour résoudre un problème sous la forme $A(u_h^{n+1}, v_h) = L(v_h)$ pour chaque pas de temps.

On choisit la solution analytique donnée par Kim et Douglas. $\Omega = (0,1)^2$ et $T = 1$:

$$u(x,y,t) = \left(1 + 0.5\sin(\pi^2 t)\right)\sin(5\pi x)\sin(3\pi y), \quad (x,y,t) \in \Omega \times]0,T[$$

Avec le terme source correspondant. On a les résultats de convergence suivant.

	$\theta = 0.25$		$\theta = 0.5$	
$(\Delta t, h)$	$E_\infty(T=1)$	Ordre observé	$E_\infty(T=1)$	Ordre obse
$(0.02, 0.04)$	4.91E-2		5.01E-2	
$(0.01, 0.02)$	1.69E-2	1.70	1.72E-2	1.71
$(0.005, 0.01)$	6.11E-3	1.66	6.16E-3	1.67
$(0.0025, 0.005)$	2.40E-3	1.60	2.45E-3	1.59

Table: Estimation de l'ordre de convergence suivant θ

Il n'existe pas de CLA connus pour le modèle avec amortissement. En revanche, il a été proposé un modèles avec des PML : *Perfectly Matched Layers*. On étend le domaine avec une couche absorbante qui ne provoque pas de réfléxions non désirées. Sa formulation demande l'introduction de plusieurs fonctions auxiliaires. On reprend la formulation de Zhao et Gao.

On considère le domaine $\Omega\times]0,T[$ où $\Omega = [-a_1 - L_1, a_1 + L_1] \times [-a_2 - L_2, a_2 + L_2]$. L_1 et L_2 représente l'épaisseur des couches suivant x et y.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + (\xi_1 + \xi_2 + \gamma)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + [\xi_1\xi_2 + \gamma(\xi_1 + \xi_2)]\, u(x,t) \\ +c^2 \mathrm{div}\nabla u(x,t)) + \eta\nabla\cdot\phi(x,t) - \gamma\xi_1\xi_2\psi(x,t) + c^2 = f(x,t) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = \Gamma_1\phi(x,t) + \Gamma_2\nabla u(x,t) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = u(x,t) \end{cases}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -\xi_1 & 0 \\ 0 & -\xi_2 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \xi_2 - \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 - \xi_2 \end{bmatrix}$$

Les fonctions ξ_1 et ξ_2 sont les fonctions d'atténuations liées aux PML.

On en vient à résoudre succéssivement 4 formulations variationnelles discrètes dans l'espace des éléments finis V_k^h défini précédemment :

$$\int_\Omega \left(\frac{\psi_h^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} \right) z dx = \int_\Omega u^n z dx, \quad z \in V^h(\Omega) \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{u^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \int_\Omega (\xi_1 + \xi_2 + \gamma) \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2\Delta t} v dx \\
&+ \int_\Omega \left[\xi_1 \xi_2 + \gamma(\xi_1 + \xi_2) u_h^n\right] v dx + \eta \int_\Omega \frac{\nabla u_h^{n+1} - \nabla u_h^{n-1}}{2\Delta t} \nabla v dx \\
&+ \int_\Omega c^2 \nabla \left(\theta u_h^{n+1} + (1-2\theta) u_h^n + \theta u_h^{n-1}\right) \nabla v dx + \eta \int_\Omega \phi^n \nabla v dx \\
&+ \int_\Omega \phi^n \nabla (c^2 v) dx + \int_\Omega \gamma \xi_1 \xi_2 \psi^n v dx = \int_\Omega f^n v dx, \quad v \in V^h(\Omega)
\end{aligned} \tag{2}$$

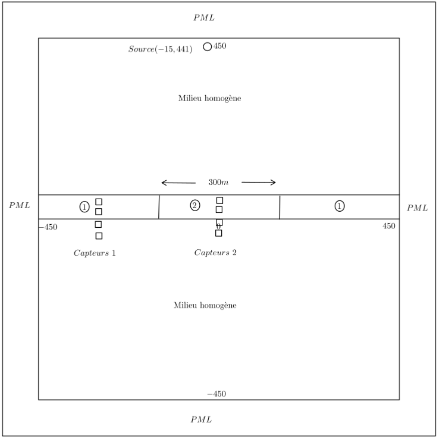
$$\int_\Omega \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} w = \int_\Omega -\xi_1 \phi_1^n w + \int_\Omega c^2 \left(\xi_2 - \xi_1\right) \frac{\partial u}{\partial x_1} w dx, \quad w \in V^h(\Omega) \tag{3}$$

$$\int_\Omega \frac{\phi_2^{n+1} - \phi_2^n}{\Delta t} w = \int_\Omega -\xi_2 \phi_2^n w + \int_\Omega c^2 \left(\xi_1 - \xi_2\right) \frac{\partial u}{\partial x_2} w dx, w \in V^h(\Omega) \tag{4}$$

On est amené à résoudre 4 problèmes variationnels pour chaque pas de temps.

Table des matières

Figure: Schéma de l'expérience



Dans un premier temps on reprend les valeurs données dans l'article de Zhao et Gao.

Table: Paramètres physiques du modèle

Milieu	$\gamma(Hz)$	$\eta(m^2 \cdot s^{-1})$	$c(m \cdot s^{-1})$
Milieu homogène	0.0	0.0	1600
Milieu saturé en eau	90.0	0.02	1470
Milieu saturé en huile	65.4	0.0147	1015

On effectue les simulations avec un maillage comprenant 217800 éléments pour 600 pas de temps.

Reproduction des résultats

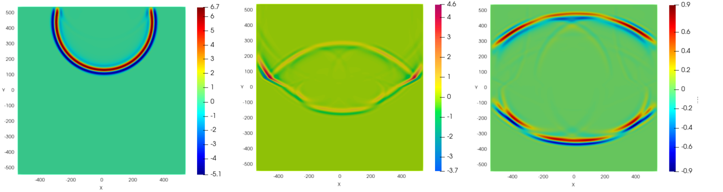


Figure: Champs de pression pour le modèle diffus

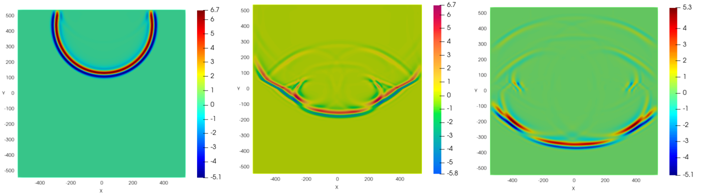


Figure: Champs de pression pour le modèle acoustique

Reproduction des résultats

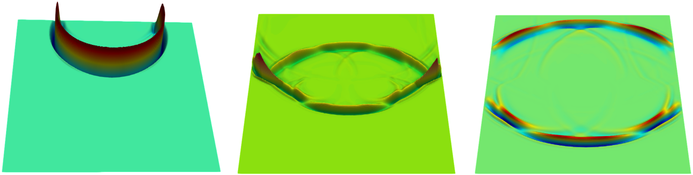


Figure: Champs de pression 3D pour le modèle diffus

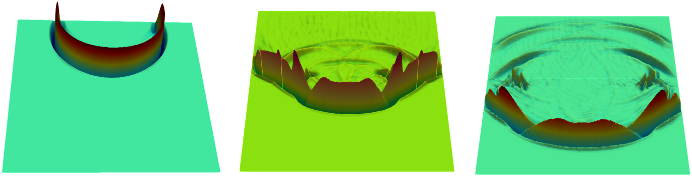
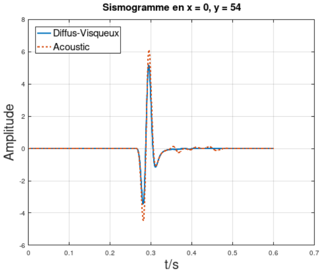
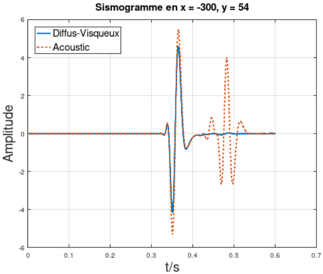
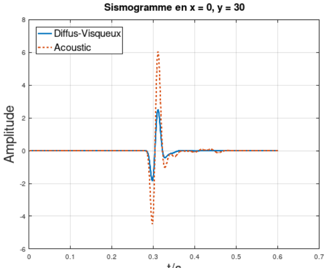


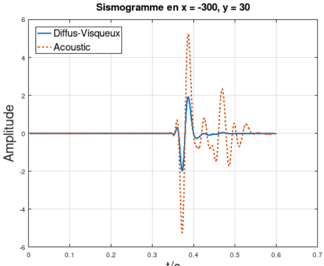
Figure: Champs de pression 3D pour le modèle acoustique

Reproduction des résultats









On souhaiterait maintenant observer l'effet de chaque paramètre d'atténuation de manière indépendante. Pour cela, on fixe d'abord γ à 0 et on reproduit les figures précédentes.

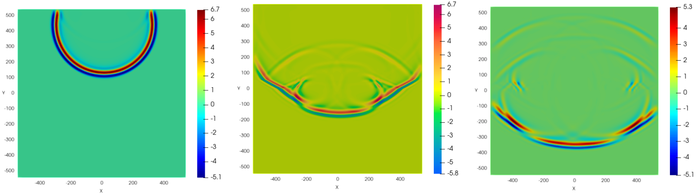
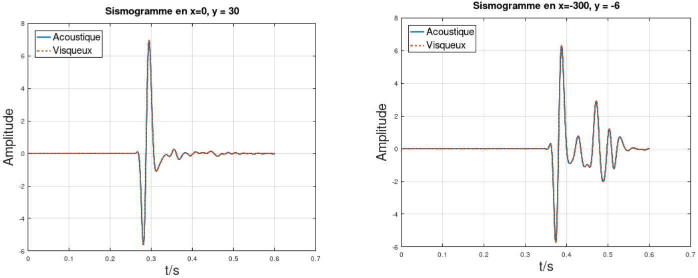


Figure: Champs de pression pour le modèle visqueux

Il ne semble pas avoir de différences avec le modèle acoustique. On regarde les sismographes synthétiques pour le confirmer.

Figure: Sismographes pour les modèles acoustiques et visqueux



Les courbes sont confondues, on cherche à l'expliquer.

En reprennant l'analyse par ondes planes complexes faite par Korneev. On cherche u solution du problème comme étant une onde harmonique d'expression :

$$u = \exp(i\tilde{k}x)\exp\left(-i\omega t\right), \qquad \tilde{k} = k + i\alpha$$

α représente alors le coefficient d'atténuation. En remplaçant dans l'équation des ondes, on peut obtenir l' expression suivante :

$$\alpha = k_0\sqrt{\frac{\sqrt{(1-dg)^2+(d+g)^2}-1+dg}{2\left(1+g^2\right)}}$$

avec

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad d = \frac{\gamma}{\omega}, \quad g = \frac{\omega\eta}{c^2}$$

- On obtient pour $\eta = 0.02$ avec $\gamma = 0 \longrightarrow \alpha = 2.8 \cdot 10^{-9}$
- On obtient pour $\gamma = 90$ avec $\eta = 0 \longrightarrow \alpha = 2.1 \cdot 10^{-2}$

Ces deux valeurs pour le coefficient d'atténuation rendent compte de l'effet observé. Le paramètre η a un effet négligeable devant celui de γ.

On propose alors de nouvelles valeurs pour η et γ pour voir leur rôle respectif.

Table: Amortissement γ

Milieu	$\gamma(Hz)$	$\eta(m^2 \cdot s^{-1})$	$c(m \cdot s^{-1})$
Milieu homogène	0.0	0.0	1600
Milieu saturé en eau	30	0.0	1470
Milieu saturé en huile	21.6	0.0	1015

Table: Amortissement η

Milieu	$\gamma(Hz)$	$\eta(m^2 \cdot s^{-1})$	$c(m \cdot s^{-1})$
Milieu homogène	0.0	0.0	1600
Milieu saturé en eau	0.0	$1.58 \cdot 10^5$	1470
Milieu saturé en huile	0.0	$1.16 \cdot 10^5$	1015

Différentes valeurs de η et γ

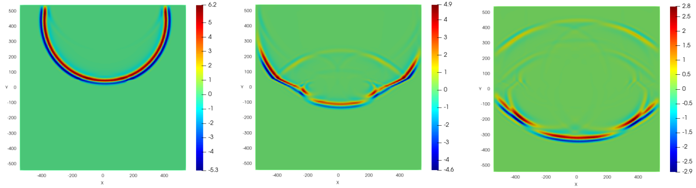


Figure: Champs de pression avec amortissement $\frac{\partial}{\partial t} u$

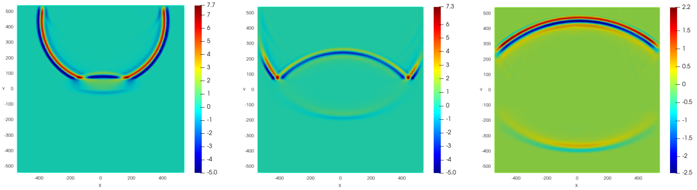
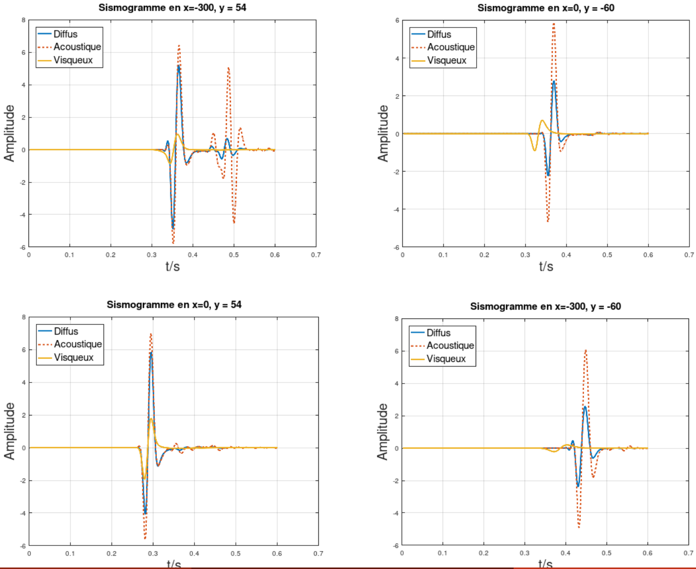


Figure: Champs de pression avec amortissement $\frac{\partial}{\partial t} \Delta u$

Différentes valeurs de η et γ



Conclusion

Conclusions :

- Mise en oeuvre d'un code d'éléments finis pour l'équation des ondes avec amortissement.
- Validation partielle sur un exemple analytique.
- Prise en compte des conditions/couches absorbantes.
- Mise en évidence de l'influence séparée des nouveaux paramètres.

Perspectives :

- Étude théorique des coefficients de transmission.
- Schémas adaptatifs "espace temps".