Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер.

1.2.1. Каждому дереву сопоставим набор степеней его вершин (чисел в наборе будет столько, сколько вершин есть в графе, некоторые числа могут быть одинаковы). Существуют ли деревья, степени которых равны:
а) 1, 2, 2, 2, 1;
б) 1, 1, 1, 1, 1;
в) 4, 1, 1, 1, 1;
г) 3, 2, 2, 2, 1;
д) 3, 2, 2, 1, 1, 1;
е) 3, 3, 2, 1, 1, 0;
ж) 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1?
з*) Как по последовательности степеней вершин определить, есть ли дерево с такой последовательностью степеней?

1.2.2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

1.2.3. В дереве с не менее чем двумя вершинами нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

1.2.4. Верно ли, что из всякого связного графа можно удалить одну вершину, чтобы он остался связным?

1.2.5. Куб со стороной длины 3 метра собран из квадратных фанерных досок со стороной 1 метр и внутри разбит такими же фанерными перегородками на 27 кубов со стороной 1 метр. Какое минимальное число фанерных перегородок нужно убрать, чтобы из каждого из 27 кубов можно было выбраться наружу?

Замечание. *Если вы решили и сдали все задачи выше во время занятия, вы можете решать и сдавать домашние задачи также во время занятия.*

Граф называется *k-реберно-связным*, если он остается связным даже после удаления k ребер.

1.2.6. Пусть в дереве 20 листьев. Мы хотим добавить в дерево ребер так, чтобы оно стало 1-реберно-связным.
а) Докажите, что нужно добавить не меньше 10 ребер.
б*) Докажите, что 10 ребер всегда достаточно.

1.2.7. Граф называется *минимально связным*, если он связен, но после удаления любого ребра перестает быть связным. Докажите, что минимально связные графы — это в точности деревья.

1.2.8. Докажите, что если в графе есть хотя бы две вершины, то есть две вершины одинаковой степени.

Домашнее задание 1, часть 2 **Дедлайны: 23 мая и 25 мая, 19:00**

Правила сдачи и оценивания. *Это часть 2 домашнего задания 1. Всего в домашнем задании 6 задач, каждая оценивается в 2,5 баллов. Максимальная оценка за домашнее задание составляет 10 баллов. Если вы наберете больше, то баллы сверх 10 пойдут в виде бонуса.*
Дедлайн первого домашнего задания — 25 мая в 19:00. Решения нужно отправить по адресу hw.graphs.sber@gmail.com. Решения будут проверены до 19:00 26 мая.
Также можно отправить решения до 19:00 23 мая. Тогда они будут проверены до 19:00 24 мая и в случае наличия ошибок можно будет успеть их исправить до основного дедлайна.

1.2.9. *Лесом* называется граф, каждая компонента связности которого является деревом. Пусть у нас есть лес на 20 вершинах, в котором три компоненты связности. Сколько в нем ребер?

1.2.10. В связном графе на 10 вершинах есть три вершины степени 4. Может ли этот граф быть деревом?

1.2.11. Граф образует решетку размера 5×6, где вершинами являются узлы решетки, а ребрами, отрезки между узлами (то есть, всего в графе $6 \cdot 7 = 42$ вершин). Мы хотим удалить как можно больше ребер, чтобы при этом граф не распался на несколько компонент связности. Какое максимальное количество ребер можно удалить? Обратите внимание, что для полного решения задачи не достаточно объяснить, как удалить указанное вами в качестве ответа число ребер. Нужно также объяснить, что больше ребер удалить уже не получится.