

Деревья

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Деревья

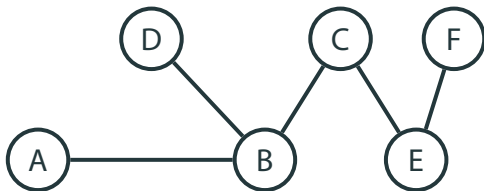
Понятие дерева, примеры

Свойства деревьев

Корневые деревья

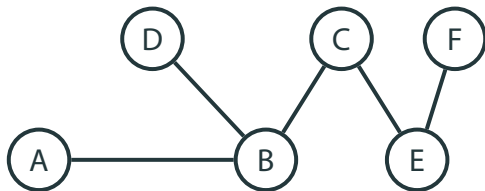
Деревья

- **Деревом** называется связный граф без простых циклов



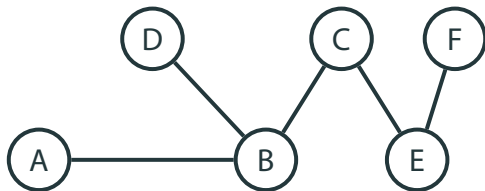
Деревья

- **Деревом** называется связный граф без простых циклов
- Деревья часто встречаются на практике



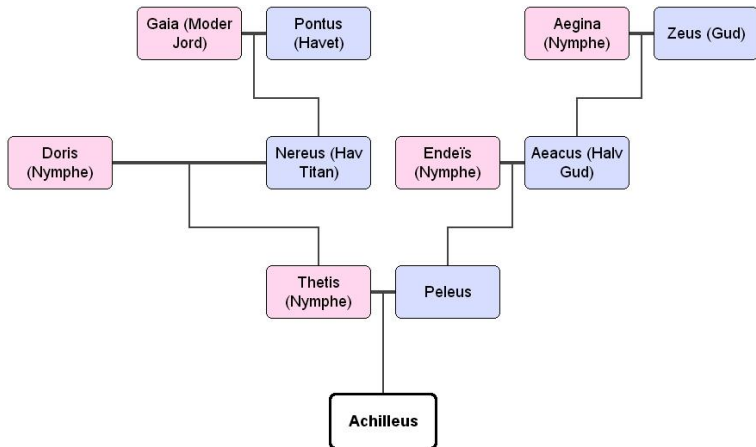
Деревья

- **Деревом** называется связный граф без простых циклов
- Деревья часто встречаются на практике
- И обладают важными свойствами



Деревья

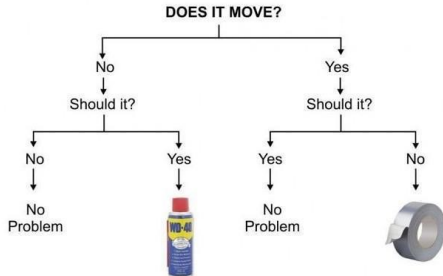
Пример: генеалогическое дерево



Деревья

Пример: дерево принятия решений

Engineering Flowchart



flickr.com

Определения дерева

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов

Определения дерева

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром

Определения дерева

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Определения дерева

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Мы докажем цепочку следствий $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$

Эквивалентность определений

- Вспомним рассуждение про число вершин, ребер и компонент связности

Эквивалентность определений

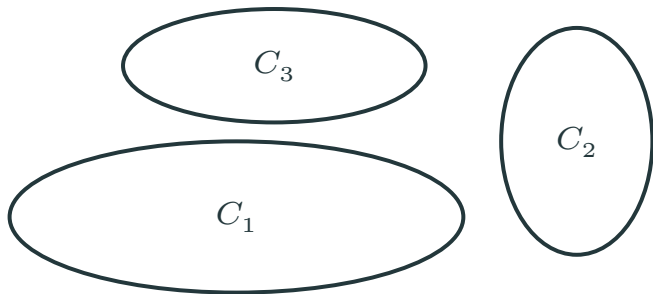
- Вспомним рассуждение про число вершин, ребер и компонент связности
- Мы выкидывали из графа все ребра и возвращали их по одному

Эквивалентность определений

- Вспомним рассуждение про число вершин, ребер и компонент связности
- Мы выкидывали из графа все ребра и возвращали их по одному
- При возвращении одного ребра число компонент связности либо не меняется, либо уменьшается на 1

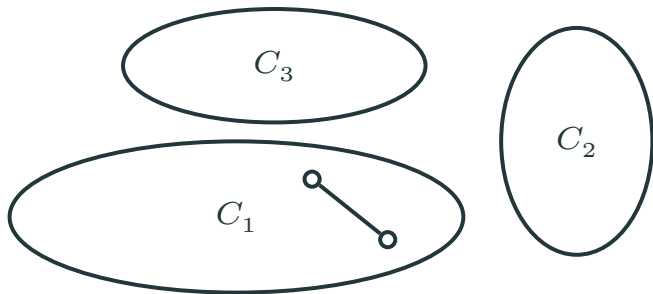
Эквивалентность определений

- Посмотрим на текущие компоненты связности



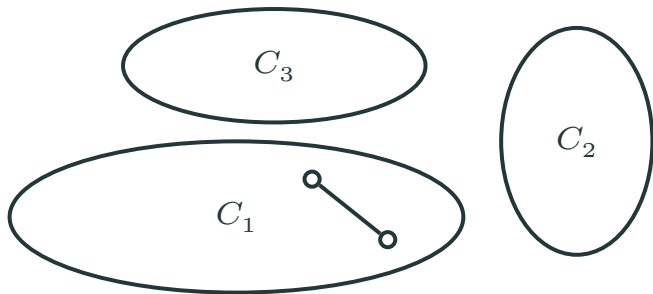
Эквивалентность определений

- Посмотрим на текущие компоненты связности
- Пусть новое ребро соединяет вершины в одной компоненте



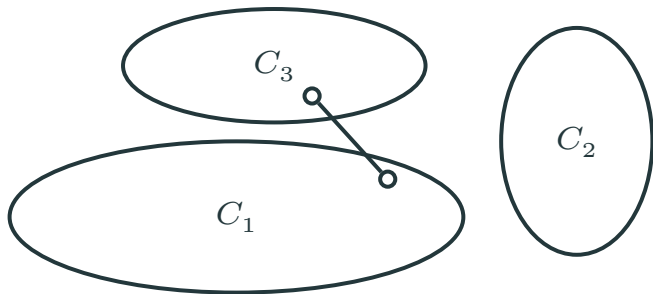
Эквивалентность определений

- Посмотрим на текущие компоненты связности
- Пусть новое ребро соединяет вершины в одной компоненте
- Тогда появляется цикл!



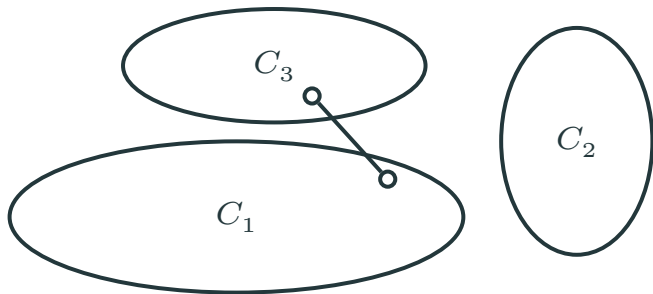
Эквивалентность определений

- Пусть новое ребро соединяет вершины в разных компонентах



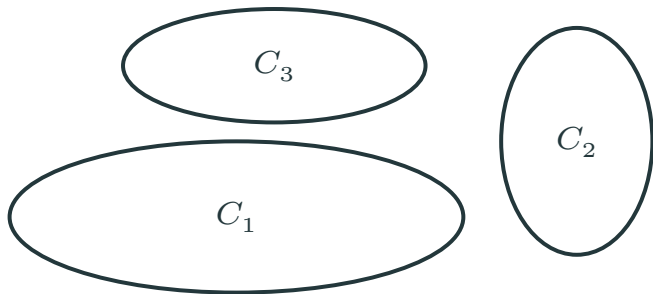
Эквивалентность определений

- Пусть новое ребро соединяет вершины в разных компонентах
- Тогда цикла не появляется



Эквивалентность определений

- Итак, цикл в графе появляется тогда и только тогда, когда возвращаемое ребро соединяет вершины одной компоненты



Эквивалентность определений

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Мы докажем цепочку следствий $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$

Эквивалентность определений

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Мы докажем цепочку следствий $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$

Перейдем к доказательству

(1) \rightarrow (2)

(1) \rightarrow (2)

В связном графе без циклов на n вершинах ровно $n - 1$ ребро

- Пусть у нас связный граф без циклов

(1) \rightarrow (2)

(1) \rightarrow (2)

В связном графе без циклов на n вершинах ровно $n - 1$ ребро

- Пусть у нас связный граф без циклов
- Удалим все ребра и будем возвращать их по одному

(1) \rightarrow (2)

(1) \rightarrow (2)

В связном графе без циклов на n вершинах ровно $n - 1$ ребро

- Пусть у нас связный граф без циклов
- Удалим все ребра и будем возвращать их по одному
- Поскольку в графе нет циклов, каждое ребро соединяет разные компоненты

(1) \rightarrow (2)

(1) \rightarrow (2)

В связном графе без циклов на n вершинах ровно $n - 1$ ребро

- Пусть у нас связный граф без циклов
- Удалим все ребра и будем возвращать их по одному
- Поскольку в графе нет циклов, каждое ребро соединяет разные компоненты
- Каждый раз компонент становится на одну меньше

(1) \rightarrow (2)

(1) \rightarrow (2)

В связном графе без циклов на n вершинах ровно $n - 1$ ребро

- Пусть у нас связный граф без циклов
- Удалим все ребра и будем возвращать их по одному
- Поскольку в графе нет циклов, каждое ребро соединяет разные компоненты
- Каждый раз компонент становится на одну меньше
- В начале компонент n , в конце — 1

(1) \rightarrow (2)

(1) \rightarrow (2)

В связном графе без циклов на n вершинах ровно $n - 1$ ребро

- Пусть у нас связный граф без циклов
- Удалим все ребра и будем возвращать их по одному
- Поскольку в графе нет циклов, каждое ребро соединяет разные компоненты
- Каждый раз компонент становится на одну меньше
- В начале компонент n , в конце — 1
- Значит мы добавили ровно $n - 1$ ребро!

Эквивалентность определений

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Мы докажем цепочку следствий $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

(2) → (3)

(2) → (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- Пусть между какими-то вершинами есть два пути

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- Пусть между какими-то вершинами есть два пути
- Тогда в графе есть и цикл, в нем k вершин и k ребер

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- Пусть между какими-то вершинами есть два пути
- Тогда в графе есть и цикл, в нем k вершин и k ребер
- Удалим все ребра кроме этого цикла и будем возвращать по одному

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- До возвращения у нас $n - k + 1$ компонента связности

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- До возвращения у нас $n - k + 1$ компонента связности
- Чтобы получить одну компоненту, нужно добавить хотя бы $n - k$ ребер

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- До возвращения у нас $n - k + 1$ компонента связности
- Чтобы получить одну компоненту, нужно добавить хотя бы $n - k$ ребер
- Но тогда всего у нас будет $k + (n - k) = n$ ребер!

(2) \rightarrow (3)

(2) \rightarrow (3)

В связном графе с n вершинами и $n - 1$ ребром между любыми двум вершинами есть ровно один простой путь

- До возвращения у нас $n - k + 1$ компонента связности
- Чтобы получить одну компоненту, нужно добавить хотя бы $n - k$ ребер
- Но тогда всего у нас будет $k + (n - k) = n$ ребер!
- Противоречие

Эквивалентность определений

Следующие три определения эквивалентны:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Мы докажем цепочку следствий $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (1)$

(3) \rightarrow (1)

(3) \rightarrow (1)

Если в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь, то это связный граф без циклов

(3) \rightarrow (1)

(3) \rightarrow (1)

Если в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь, то это связный граф без циклов

- Пусть в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

(3) \rightarrow (1)

(3) \rightarrow (1)

Если в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь, то это связный граф без циклов

- Пусть в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь
- Очевидно, он связан

(3) \rightarrow (1)

(3) \rightarrow (1)

Если в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь, то это связный граф без циклов

- Пусть в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь
- Очевидно, он связан
- Если бы в графе был цикл, то между двумя вершинами цикла было бы два пути

(3) \rightarrow (1)

(3) \rightarrow (1)

Если в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь, то это связный граф без циклов

- Пусть в графе между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь
- Очевидно, он связан
- Если бы в графе был цикл, то между двумя вершинами цикла было бы два пути
- Значит циклов нет

Эквивалентность определений

Итак, мы доказали эквивалентность трех определений:

- (1) **Дерево** — это связный граф без циклов
- (2) **Дерево** — это связный граф на n вершинах с $n - 1$ ребром
- (3) **Дерево** — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно один простой путь

Деревья

Понятие дерева, примеры

Свойства деревьев

Корневые деревья

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- Такая вершина называется **листом** или **висячей вершиной**

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- Такая вершина называется **листом** или **висячей вершиной**
- Пусть в дереве n вершин, тогда в нем $n - 1$ ребро

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- Такая вершина называется **листом** или **висячей вершиной**
- Пусть в дереве n вершин, тогда в нем $n - 1$ ребро
- Вспомним соотношение между степенями вершин и числом ребер: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- Такая вершина называется **листом** или **висячей вершиной**
- Пусть в дереве n вершин, тогда в нем $n - 1$ ребро
- Вспомним соотношение между степенями вершин и числом ребер: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$
- Значит $\sum_{v \in V} d(v) = 2n - 2$

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- В дереве нет вершин степени 0

Листья

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- В дереве нет вершин степени 0
- Если нет вершин степени 1, то все вершины степени не меньше 2

Утверждение

Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- В дереве нет вершин степени 0
- Если нет вершин степени 1, то все вершины степени не меньше 2
- Тогда сумма степеней вершин не меньше $2n$

Утверждение

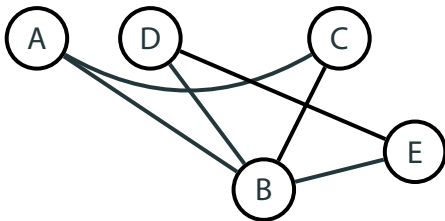
Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть вершина степени 1

- В дереве нет вершин степени 0
- Если нет вершин степени 1, то все вершины степени не меньше 2
- Тогда сумма степеней вершин не меньше $2n$
- Но она равна $2n - 2$, противоречие

Остовное дерево

Утверждение

Из всякого связного графа G можно удалить часть ребер так, что останется дерево

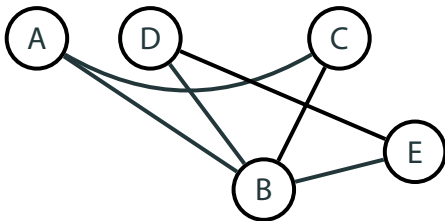


Остовное дерево

Утверждение

Из всякого связного графа G можно удалить часть ребер так, что останется дерево

- Такое дерево называется **остовным деревом** графа G

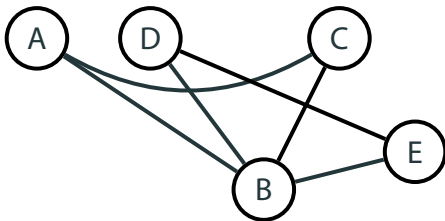


Остовное дерево

Утверждение

Из всякого связного графа G можно удалить часть ребер так, что останется дерево

- Такое дерево называется **остовным деревом** графа G
- Остовное дерево не единственно

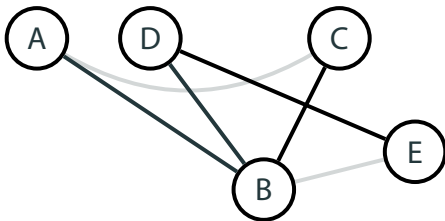


Остовное дерево

Утверждение

Из всякого связного графа G можно удалить часть ребер так, что останется дерево

- Такое дерево называется **остовным деревом** графа G
- Остовное дерево не единственно

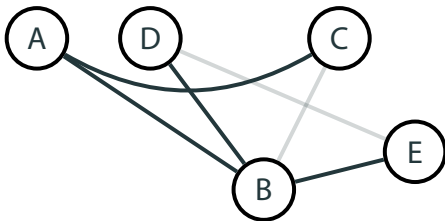


Остовное дерево

Утверждение

Из всякого связного графа G можно удалить часть ребер так, что останется дерево

- Такое дерево называется **остовным деревом** графа G
- Остовное дерево не единственно

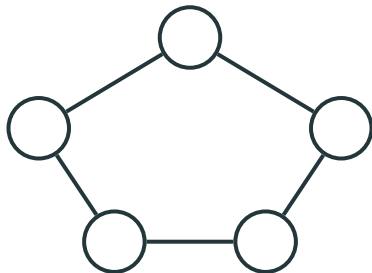


Остовное дерево

- Почему это верно?

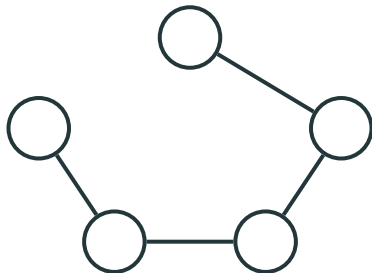
Остовное дерево

- Почему это верно?
- Если в графе есть цикл, удалим любое ребро этого цикла



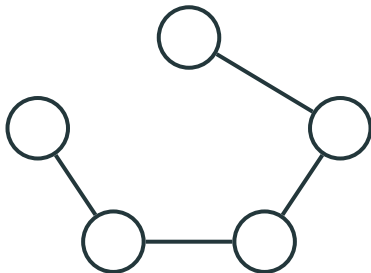
Остовное дерево

- Почему это верно?
- Если в графе есть цикл, удалим любое ребро этого цикла



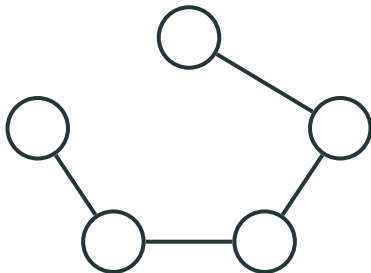
Остовное дерево

- Почему это верно?
- Если в графе есть цикл, удалим любое ребро этого цикла
- Граф останется связным: проход по удаленному ребру можно заменить на обход по оставшемуся циклу



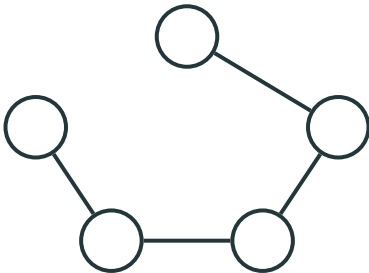
Остовное дерево

- Будем повторять пока в графе есть циклы



Остовное дерево

- Будем повторять пока в графе есть циклы
- В конце получим связный граф без циклов, то есть дерево



Деревья

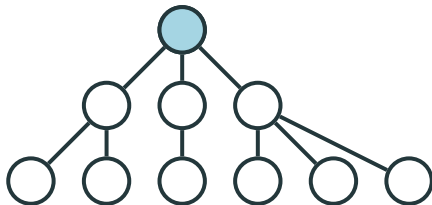
Понятие дерева, примеры

Свойства деревьев

Корневые деревья

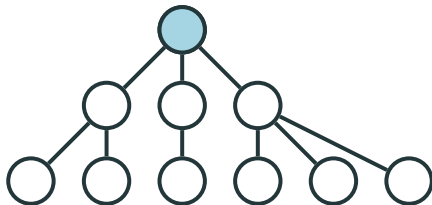
Корневое дерево

- **Корневое дерево** — дерево с выделенной вершиной



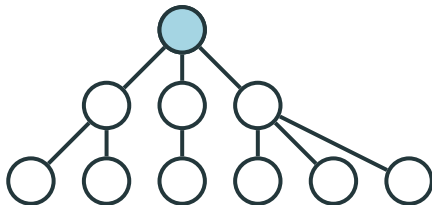
Корневое дерево

- **Корневое дерево** — дерево с выделенной вершиной
- Выделенную вершину называют корнем



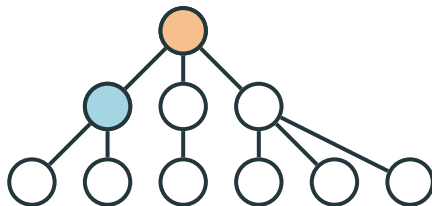
Корневое дерево

- **Корневое дерево** — дерево с выделенной вершиной
- Выделенную вершину называют корнем
- Обычно корень рисуют вверху, его соседей ниже, их соседей еще ниже и так далее



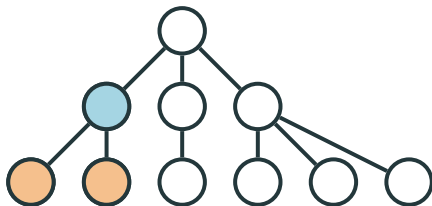
Корневое дерево

- **Предком** вершины называется ее сосед, лежащий на пути от вершины к корню



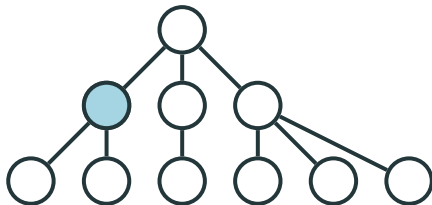
Корневое дерево

- **Предком** вершины называется ее сосед, лежащий на пути от вершины к корню
- **Потомками** вершины называются все остальные ее соседи



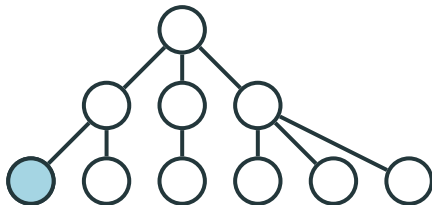
Корневое дерево

- **Глубина вершины** — длина простого пути из корня в эту вершину



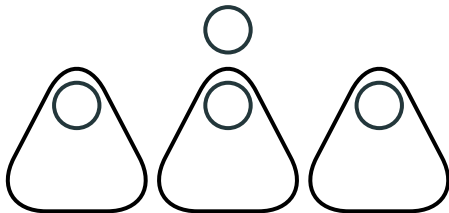
Корневое дерево

- **Глубина вершины** — длина простого пути из корня в эту вершину
- **Глубина дерева** — наибольшая глубина его вершин



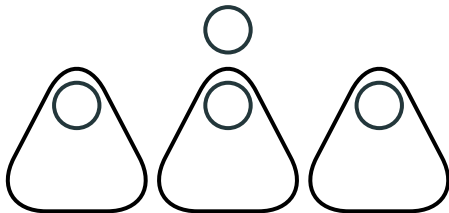
Корневое дерево

- Корневые деревья можно также определять рекурсивно



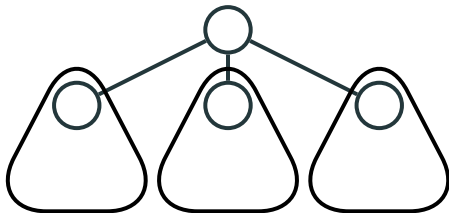
Корневое дерево

- Корневые деревья можно также определять рекурсивно
- Пусть у нас есть вершина v и корневые деревья T_1, \dots, T_k



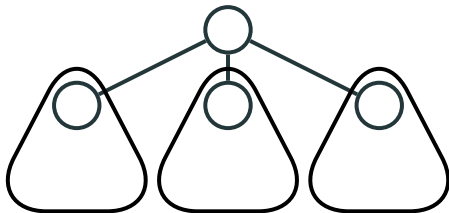
Корневое дерево

- Тогда мы можем определить новое корневое дерево T : соединим v с корнями всех деревьев T_1, \dots, T_k , объявим v корнем



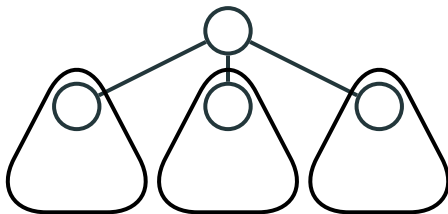
Корневое дерево

- Тогда мы можем определить новое корневое дерево T : соединим v с корнями всех деревьев T_1, \dots, T_k , объявим v корнем
- Предком корней деревьев T_1, \dots, T_k объявим v



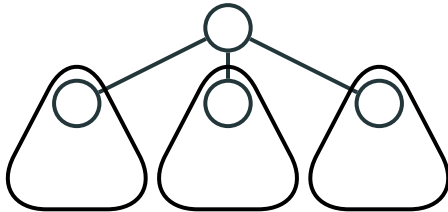
Корневое дерево

- Тогда мы можем определить новое корневое дерево T : соединим v с корнями всех деревьев T_1, \dots, T_k , объявим v корнем
- Предком корней деревьев T_1, \dots, T_k объявим v
- Потомками v объявим корни деревьев T_1, \dots, T_k



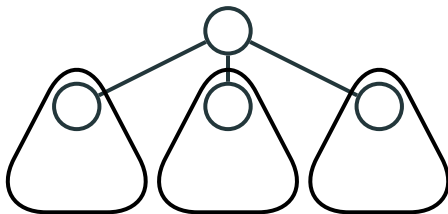
Корневое дерево

- Глубину вершины v объявляем равной 0



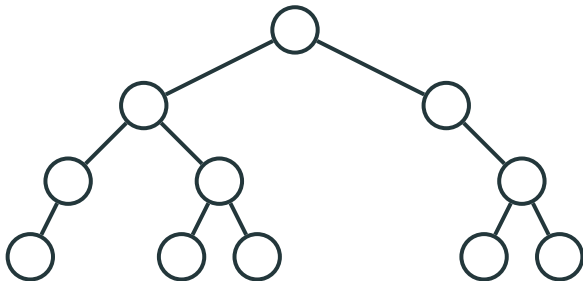
Корневое дерево

- Глубину вершины v объявляем равной 0
- Глубину всех вершин в T_1, \dots, T_k увеличиваем на 1



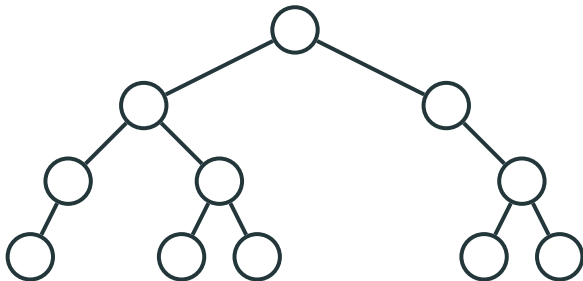
Двоичное дерево

- Корневое дерево называется **двоичным**, если у каждой вершины не более двух потомков



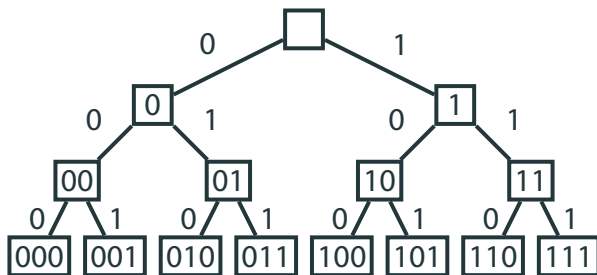
Двоичное дерево

- Корневое дерево называется **двоичным**, если у каждой вершины не более двух потомков
- В деревьях принятия решений это соответствует вопросам с двумя возможными ответами



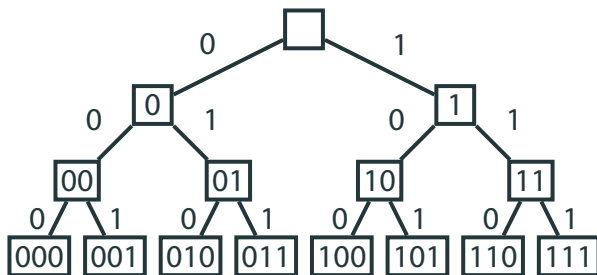
Полное двоичное дерево

- Полное двоичное дерево глубины n — двоичное дерево, в котором присутствуют все возможные вершины глубины n



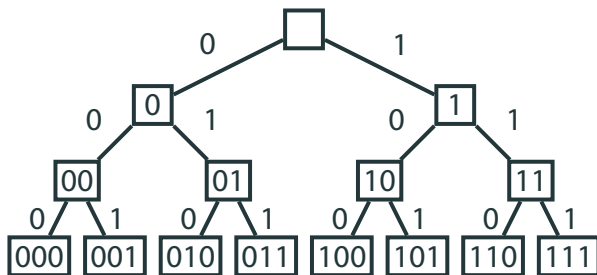
Полное двоичное дерево

- Полное двоичное дерево глубины n — двоичное дерево, в котором присутствуют все возможные вершины глубины n
- У всех не листьев два потомка



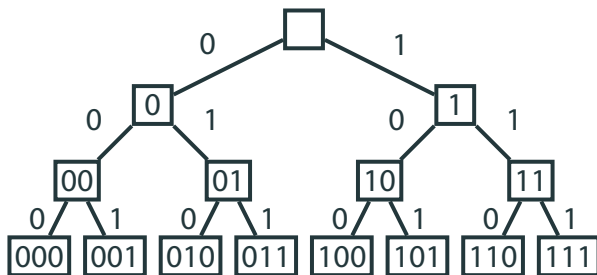
Полное двоичное дерево

- Удобно пометить ребра из каждой вершины к потомкам метками 0 и 1



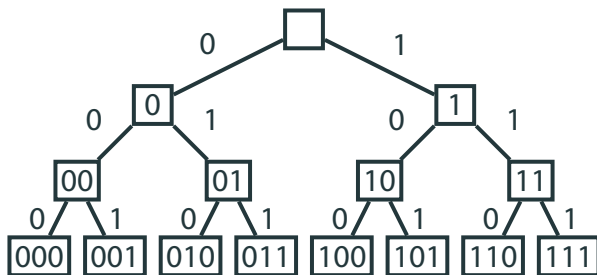
Полное двоичное дерево

- Удобно пометить ребра из каждой вершины к потомкам метками 0 и 1
- Тогда каждая вершина полного двоичного дерева кодируется последовательностью нулей и единиц



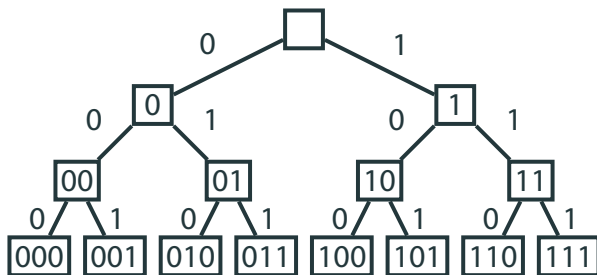
Полное двоичное дерево

- Корень кодируется пустой последовательностью



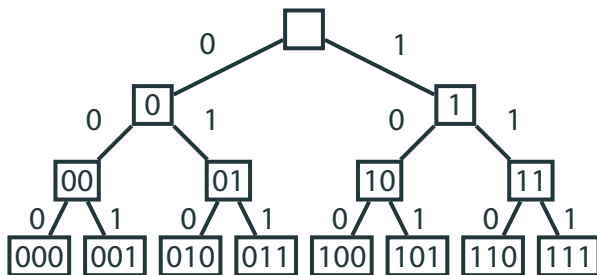
Полное двоичное дерево

- Корень кодируется пустой последовательностью
- Каждая вершина кодируется кодом своего предка с приписанной меткой ребра



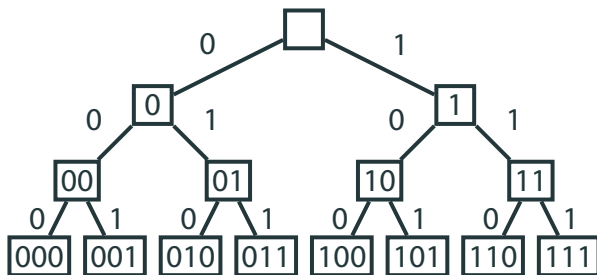
Полное двоичное дерево

- Длина последовательности равна глубине вершины



Полное двоичное дерево

- Длина последовательности равна глубине вершины
- Листья кодируются последовательностями из $\{0, 1\}^n$



Полное двоичное дерево

В полном двоичном дереве глубины n есть:

- 2^k вершин глубины k : столько элементов в $\{0, 1\}^k$

Полное двоичное дерево

В полном двоичном дереве глубины n есть:

- 2^k вершин глубины k : столько элементов в $\{0, 1\}^k$
- 2^n листьев: это вершины глубины n

Полное двоичное дерево

В полном двоичном дереве глубины n есть:

- 2^k вершин глубины k : столько элементов в $\{0, 1\}^k$
- 2^n листьев: это вершины глубины n
- $2^{n+1} - 1$ вершин: суммируем по всем глубинам, получаем $1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Полное двоичное дерево

В полном двоичном дереве глубины n есть:

- 2^k вершин глубины k : столько элементов в $\{0, 1\}^k$
- 2^n листьев: это вершины глубины n
- $2^{n+1} - 1$ вершин: суммируем по всем глубинам, получаем $1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- $2^{n+1} - 2$ ребер: на одно меньше, чем вершин

Что мы узнали

- Деревья — связные графы без циклов

Что мы узнали

- Деревья — связные графы без циклов
- Встречаются на практике

Что мы узнали

- Деревья — связные графы без циклов
- Встречаются на практике
- Обладают важными свойствами

Что мы узнали

- Деревья — связные графы без циклов
- Встречаются на практике
- Обладают важными свойствами
- Содержатся в каждом связном графе