Графы, основные понятия

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Графы, основные понятия

О курсе

Понятие графа

Применение графов

Степени вершин и число ребер

Пути и достижимость

Число компонент связности

Преподаватели и контакты

- Владимир Подольский, преподаватель
- Павел Захаров, ассистент
- Павел Соколов, ассистент
- Чат в телеграме: https://t.me/+HFOdHNzBe45lZjAy
- Мой телеграм: @vpodolskii

Цели курса

- Обсудить основные разделы теории графов, связанные с анализом данных
- Потренироваться рассуждать о графах
- Потренироваться работать с графами на практике (Python)

Что будет и чего не будет

Что будет:

- Разберем фундаментальные и базовые аспекты теории графов
- Научимся работать с графами независимо от конкретной прикладной задачи
- Разберем игрушечные примеры и примеры из анализа данных

Чего не будет:

- Не разберем практических задач, непосредственно возникающих в вашей работе (но если будут конкретные вопросы, обсудим)

План курса

1. Неориентированные графы, основные понятия
2. Деревья
3. Поиск в глубину
4. Ориентированные графы
5. Случайные блуждания
6. Поиск в ширину
7. Двудольные графы
8. Эйлеровы и гамильтоновы циклы

Оценивание

Оцениваемые задания и их вклад в оценку:

- Теоретические домашние задания: 3 штуки по $10+5$ баллов каждое, выдаются на неделях 1, 2 и 3
- Практические домашние задания: 2 штуки по 10 баллов каждое, выдаются на неделях 1 и 2
- Проект: $30+15$ баллов, выдается на неделе 3
- Итоговый тест: 20 баллов, пишем на неделе 4
- Цветом выделены бонусные баллы за более сложные задания

Для прохождения курса достаточно набрать 70 баллов

Дедлайны

- Домашние задания выдаются частями, на двух занятиях

Дедлайны

- Домашние задания выдаются частями, на двух занятиях
- Дедлайн по всем заданиям — среда следующей недели перед парой (до 19:00)

Дедлайны

- Домашние задания выдаются частями, на двух занятиях
- Дедлайн по всем заданиям — среда следующей недели перед парой (до 19:00)
- Проверим до 19:00 в четверг

Дедлайны

- Домашние задания выдаются частями, на двух занятиях
- Дедлайн по всем заданиям — среда следующей недели перед парой (до 19:00)
- Проверим до 19:00 в четверг
- Ранний дедлайн — в понедельник до 19:00

Дедлайны

- Домашние задания выдаются частями, на двух занятиях
- Дедлайн по всем заданиям — среда следующей недели перед парой (до 19:00)
- Проверим до 19:00 в четверг
- Ранний дедлайн — в понедельник до 19:00
- Проверим до 19:00 во вторник, дадим фидбек

Дедлайны

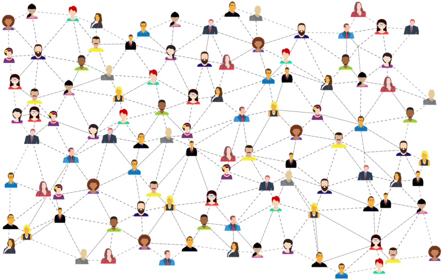
- Домашние задания выдаются частями, на двух занятиях
- Дедлайн по всем заданиям — среда следующей недели перед парой (до 19:00)
- Проверим до 19:00 в четверг
- Ранний дедлайн — в понедельник до 19:00
- Проверим до 19:00 во вторник, дадим фидбек
- Можно успеть что-то поправить до основного дедлайна

Графы, основные понятия

- О курсе
- Понятие графа
- Применение графов
- Степени вершин и число ребер
- Пути и достижимость
- Число компонент связности

Что такое граф?

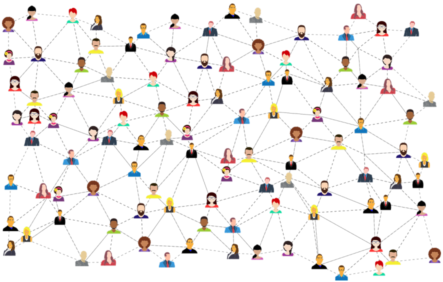
- Частая ситуация: у нас есть объекты, между которыми задано какое-то отношение



pixabay.com

Что такое граф?

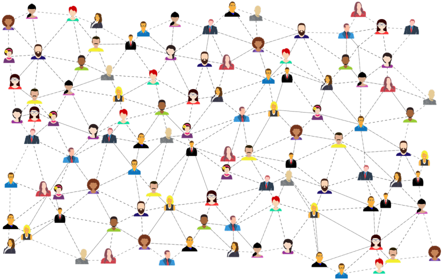
- Частая ситуация: у нас есть объекты, между которыми задано какое-то отношение
- Такая ситуация описывается с помощью графов



pixabay.com

Что такое граф?

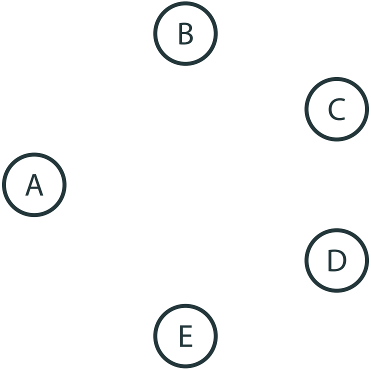
- Частая ситуация: у нас есть объекты, между которыми задано какое-то отношение
- Такая ситуация описывается с помощью графов
- Встречается повсюду, так что графы оказываются очень полезными



pixabay.com

Социальные сети

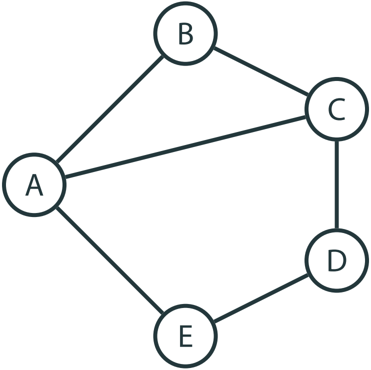
У нас есть 5 человек:
$A, B, C, D, E.$



Социальные сети

У нас есть 5 человек:
A, B, C, D, E.

Некоторые из них друзья:
A и B, A и C, A и E,
B и C, C и D, D и E.



Социальные сети

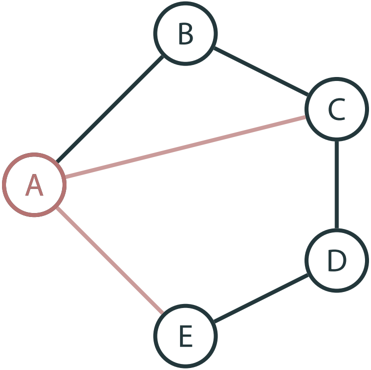
У нас есть 5 человек: A, B, C, D, E.

Некоторые из них друзья:

A и B, A и C, A и E,

B и C, C и D, D и E.

Есть ли общие друзья у C и E?



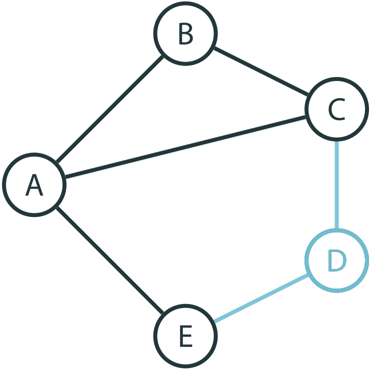
Социальные сети

У нас есть 5 человек: A, B, C, D, E.

Некоторые из них друзья:

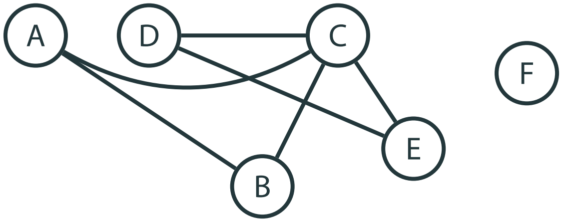
A и B, A и C, A и E, B и C, C и D, D и E.

Есть ли общие друзья у C и E?



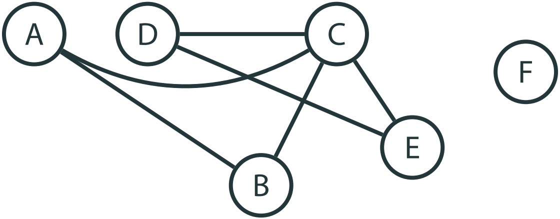
Графы

- Объекты изображаем точками — вершинами



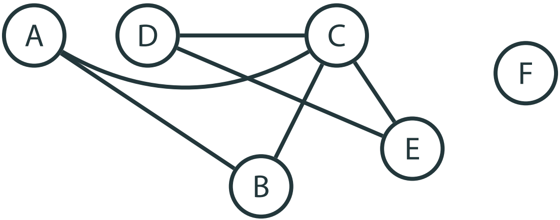
Графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем линиями — ребрами



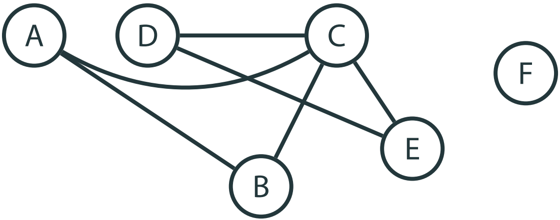
Графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем линиями — ребрами
- Не связанные не соединяем



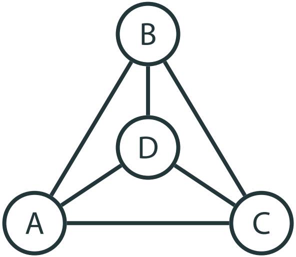
Графы

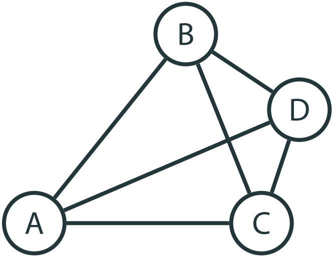
- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем линиями — ребрами
- Не связанные не соединяем
- При изображении ребра могут пересекаться, это не страшно



Графы

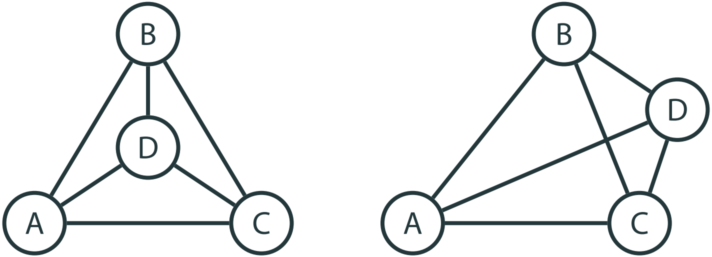
- Граф — это множество вершин, некоторые из которых соединены ребрами





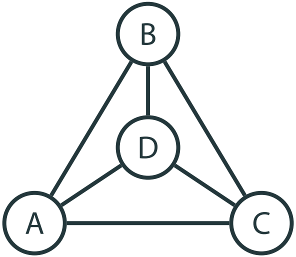
Графы

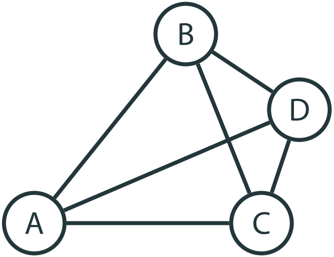
- Граф — это множество вершин, некоторые из которых соединены ребрами
- Важно, какие вершины соединены, а какие нет



Графы

- Граф — это множество вершин, некоторые из которых соединены ребрами
- Важно, какие вершины соединены, а какие нет
- Конкретное изображение может быть разным





Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V

Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u

Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E

Обозначения

- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E
- Отдельные ребра часто обозначают буквой e

Где могут возникать графы

- Карты и маршруты

Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети

Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети
- Структуры данных

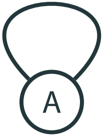
Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети
- Структуры данных
- Расстояния между объектами в пространстве признаков

Где могут возникать графы

- Карты и маршруты
- Социальные сети
- Структуры данных
- Расстояния между объектами в пространстве признаков
- Нейросети, решающие деревья

Что разрешается?

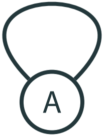


- Допускаются ли петли?

Что разрешается?

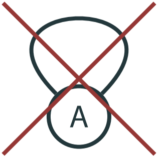
- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?

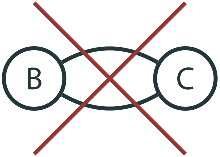
Что разрешается?



- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет

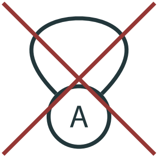
Что разрешается?

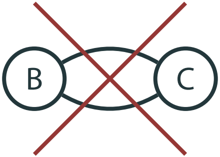




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем

Что разрешается?





- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем
- Но большинство рассуждений переносится и на эти случай

Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние

Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами

Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других

Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других
- Односторонние дороги

Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других
- Односторонние дороги
- Эта ситуация тоже описывается графами

Тоже графы?

- Бывают ситуации, когда связи между объектами односторонние
- Ссылки между сайтами
- Пользователи, следящие за постами других
- Односторонние дороги
- Эта ситуация тоже описывается графами
- Но мы обсудим это позже

Графы, основные понятия

- О курсе
- Понятие графа
- Применение графов
- Степени вершин и число ребер
- Пути и достижимость
- Число компонент связности

Применение графов

- Графы являются универсальной моделью

Применение графов

- Графы являются универсальной моделью
- Позволяют в общем виде изучать ситуации, возникающие в самых разных задачах

Применение графов

- Графы являются универсальной моделью
- Позволяют в общем виде изучать ситуации, возникающие в самых разных задачах
- Мы подробно обсудим разные универсальные факты о графах

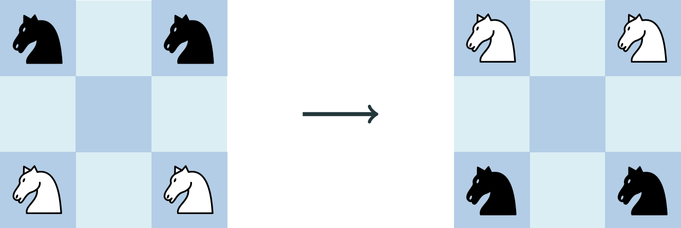
Применение графов

- Графы являются универсальной моделью
- Позволяют в общем виде изучать ситуации, возникающие в самых разных задачах
- Мы подробно обсудим разные универсальные факты о графах
- Но иногда бывает полезно даже просто изобразить задачу в виде графа

Задача о конях

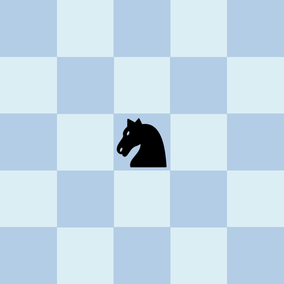
Задача о конях

Можно ли переставить коней на поле 3х3 на картинке так, чтобы белые и черные кони поменялись местами?



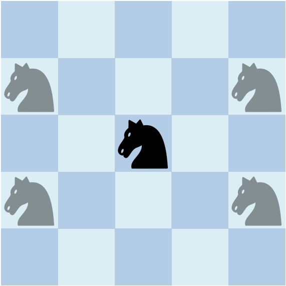
Шахматный конь

Шахматный конь ходит буквой Г в любом направлении. Он может сместиться либо на 2 поля по горизонтали и на одно поле по вертикали, либо на 2 поля по вертикали и на одно поле по горизонтали



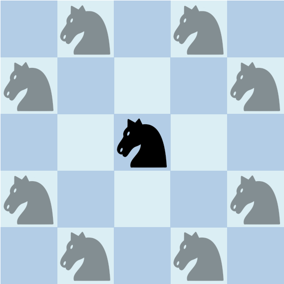
Шахматный конь

Шахматный конь ходит буквой Г в любом направлении. Он может сместиться либо на 2 поля по горизонтали и на одно поле по вертикали, либо на 2 поля по вертикали и на одно поле по горизонтали

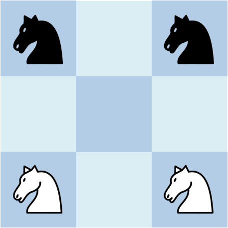


Шахматный конь

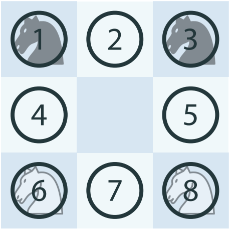
Шахматный конь ходит буквой Г в любом направлении. Он может сместиться либо на 2 поля по горизонтали и на одно поле по вертикали, либо на 2 поля по вертикали и на одно поле по горизонтали

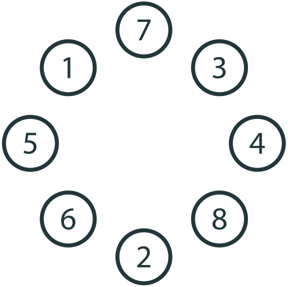


Задача о конях

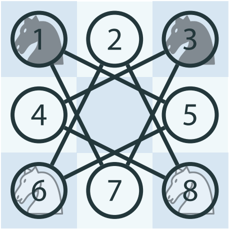


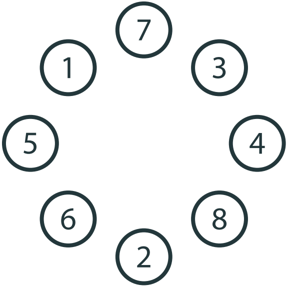
Задача о конях



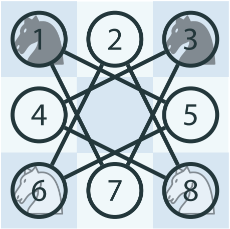


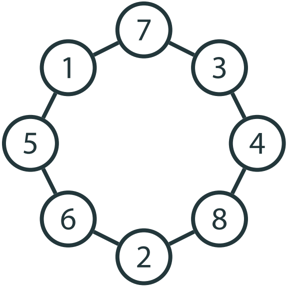
Задача о конях



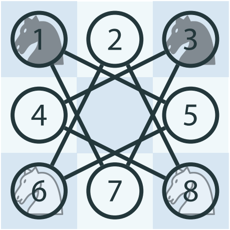


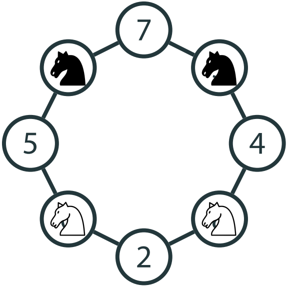
Задача о конях



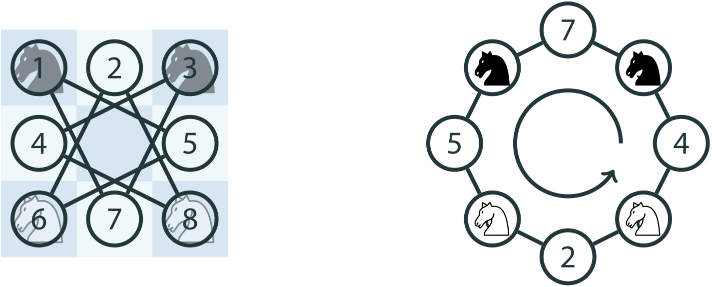


Задача о конях

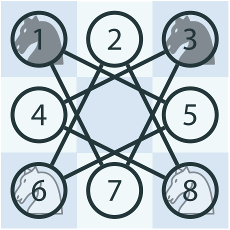


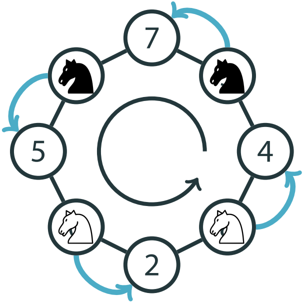


Задача о конях

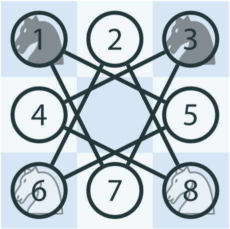


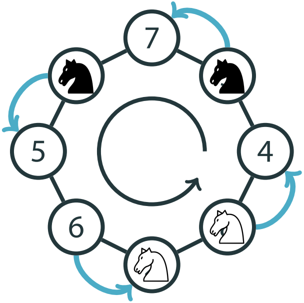
Задача о конях



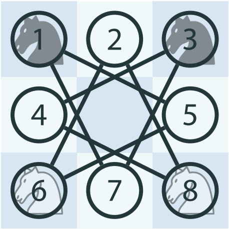


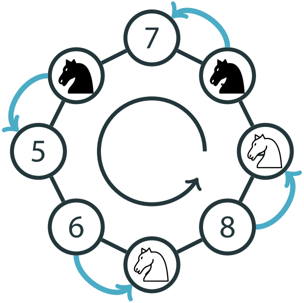
Задача о конях



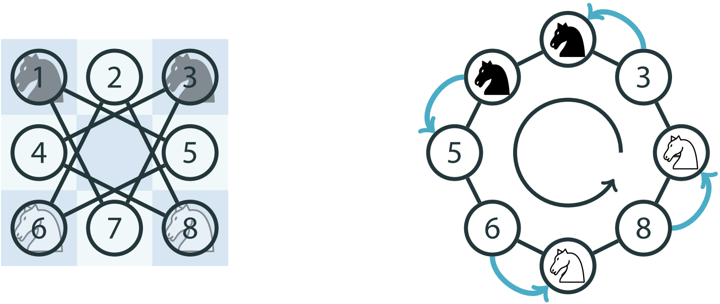


Задача о конях

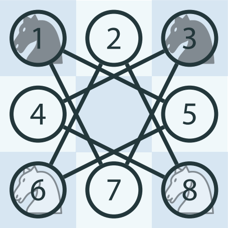


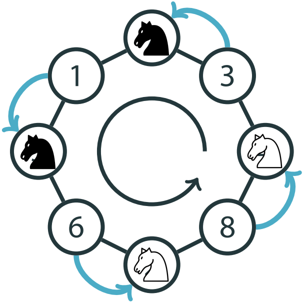


Задача о конях

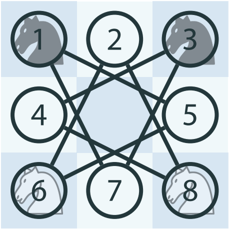


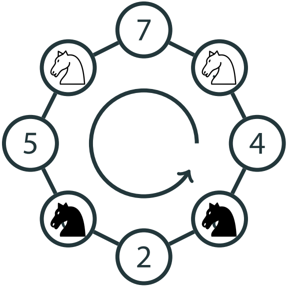
Задача о конях





Задача о конях

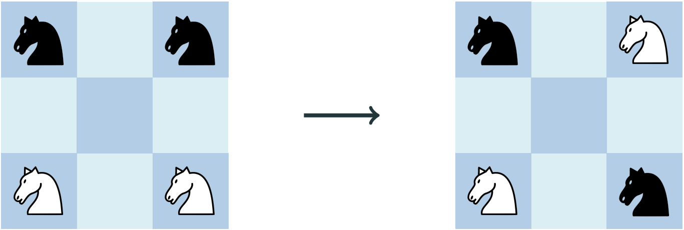




Задача о конях

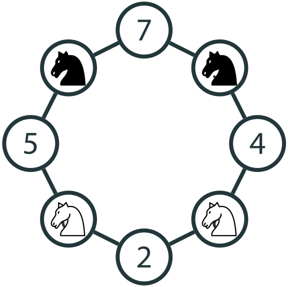
Задача о конях

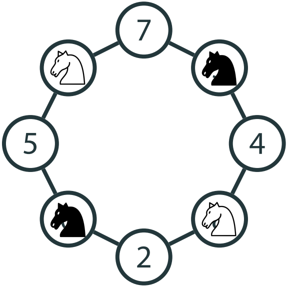
Можно ли переставить коней на поле 3x3 так, как показано на картинке?



Задача о конях

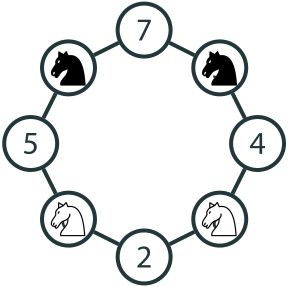
Посмотрим на граф

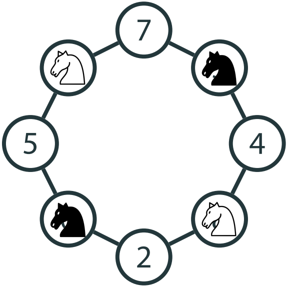




Задача о конях

Посмотрим на граф





Это невозможно, кони не могут поменяться местами

Графы, основные понятия

- О курсе
- Понятие графа
- Применение графов
- Степени вершин и число ребер
- Пути и достижимость
- Число компонент связности

Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы

Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач

Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач
- Мы начнем с самых базовых

Параметры графов

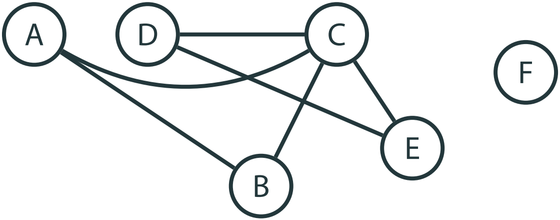
- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач
- Мы начнем с самых базовых
- Есть совсем простые параметры: число вершин $|V|$ и число ребер $|E|$

Параметры графов

- Как только мы свели задачу к графам, мы можем забыть детали постановки и изучать только графы
- У графов есть важные параметры, анализ которых может помочь в решении наших задач
- Мы начнем с самых базовых
- Есть совсем простые параметры: число вершин $|V|$ и число ребер $|E|$
- Они характеризуют размер графа, а соотношение между ними — его плотность

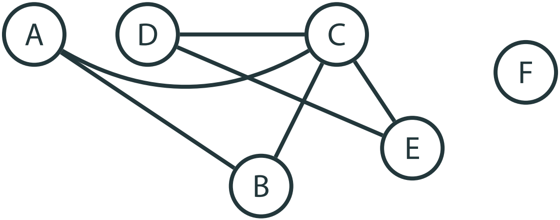
Степень вершины

- Пусть v вершина графа



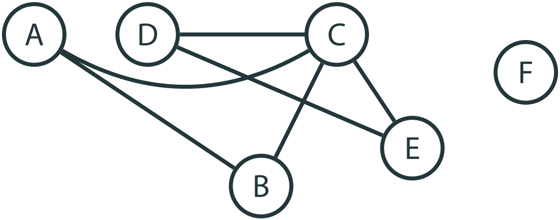
Степень вершины

- Пусть v вершина графа
- Степенью v называется число ребер, входящих в v



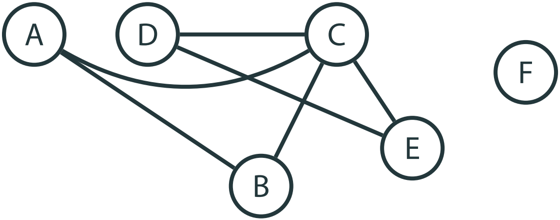
Степень вершины

- Пусть v вершина графа
- **Степенью** v называется число ребер, входящих в v
- Обозначение: $d(v)$



Степень вершины

- Пусть v вершина графа
- Степенью v называется число ребер, входящих в v
- Обозначение: $d(v)$
- На картинке $d(A) = 2, d(C) = 4, d(F) = 0$



Степень вершины

- Степень вершины важный параметр

Степень вершины

- Степень вершины важный параметр
- В социальных сетях он характеризует активность пользователя

Степень вершины

- Степень вершины важный параметр
- В социальных сетях он характеризует активность пользователя
- В транспортных сетях — загруженность узла

Степень вершины

- Степень вершины важный параметр
- В социальных сетях он характеризует активность пользователя
- В транспортных сетях — загруженность узла
- Есть ли связь степеней вершин с другими параметрами графов?

Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма степеней всех вершин в графе равна удвоенному числу ребер

Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма степеней всех вершин в графе равна удвоенному числу ребер

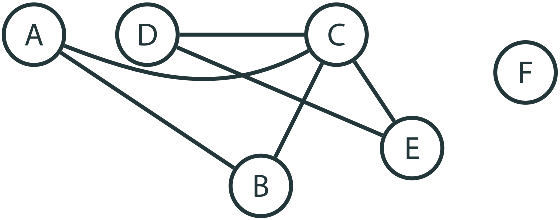
Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Давайте докажем эту лемму

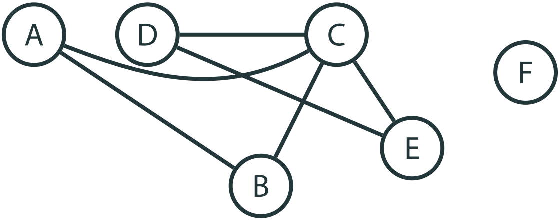
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер



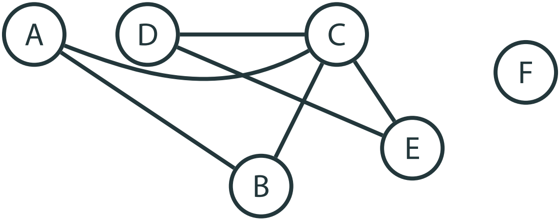
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер
- С одной стороны, у каждого ребра два конца, то есть концов ребер $2|E|$



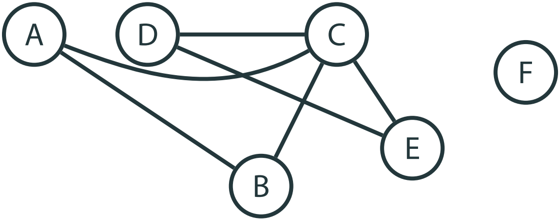
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину



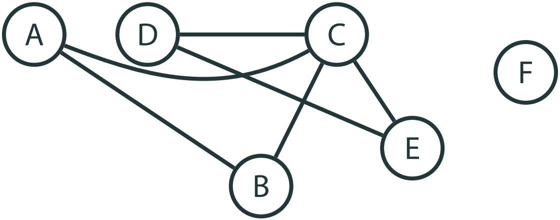
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину
- В вершину v входит $d(v)$ концов, так что всего концов $\sum_{v \in V} d(v)$



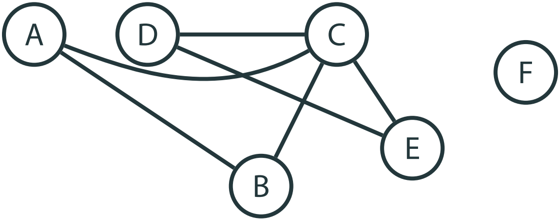
Степени вершин и число ребер

- Мы посчитали одну и ту же величину два раза



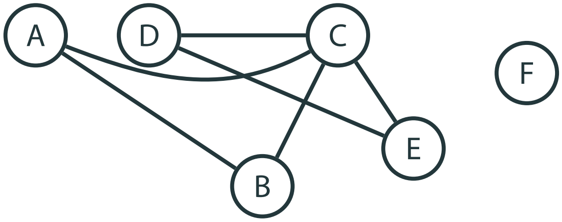
Степени вершин и число ребер

- Мы посчитали одну и ту же величину два раза
- Результаты должны быть равны



Степени вершин и число ребер

- Мы посчитали одну и ту же величину два раза
- Результаты должны быть равны
- Получаем $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$



Степени вершин и число ребер

Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

Степени вершин и число ребер

Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$

Степени вершин и число ребер

Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$
- Это равно удвоенному числу ребер

Степени вершин и число ребер

Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$
- Это равно удвоенному числу ребер
- Но удвоенное число ребер четно!

Степени вершин и число ребер

Задача

Бывает ли граф на 5 вершинах, степени вершин которого равны 1, 2, 2, 3, 3?

- Если такой граф есть, то сумма степеней его вершин равна $1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 11$
- Это равно удвоенному числу ребер
- Но удвоенное число ребер четно!
- Противоречие

Степени вершин и число ребер

В целом, из равенства $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ следует, что левая часть четна

Степени вершин и число ребер

В целом, из равенства $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ следует, что левая часть четна

Следствие

В любом графе число вершин нечетной степени четно

Графы, основные понятия

О курсе

Понятие графа

Применение графов

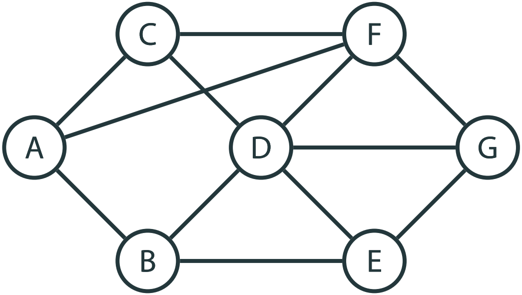
Степени вершин и число ребер

Пути и достижимость

Число компонент связности

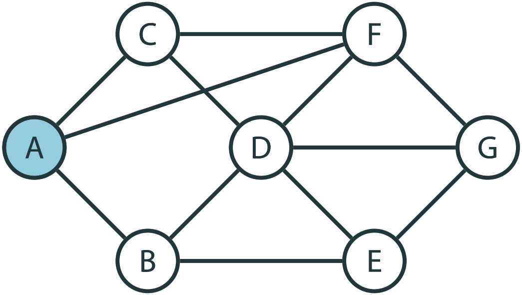
Пути в графах

- Бывает полезно рассматривать пути в графах



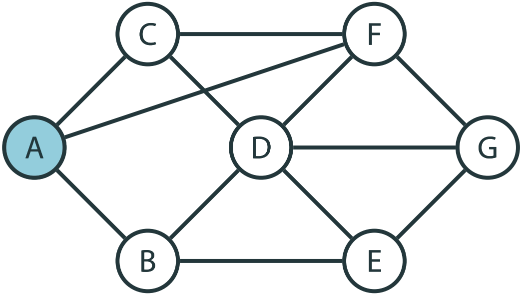
Пути в графах

- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины



Пути в графах

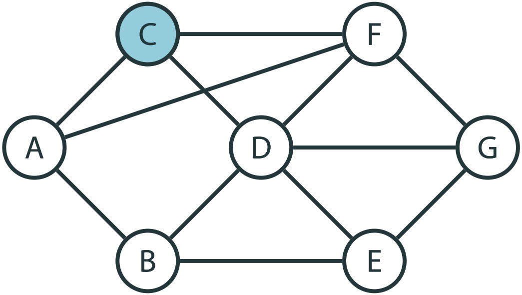
- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины
- На каждом шаге можем перейти по ребру в следующую вершину



Путь: A

Пути в графах

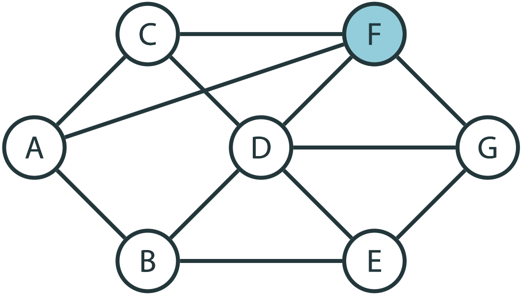
- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины
- На каждом шаге можем перейти по ребру в следующую вершину



Путь: A, C

Пути в графах

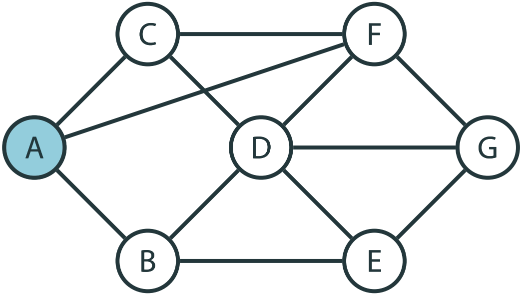
- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины
- На каждом шаге можем перейти по ребру в следующую вершину



Путь: A, C, F

Пути в графах

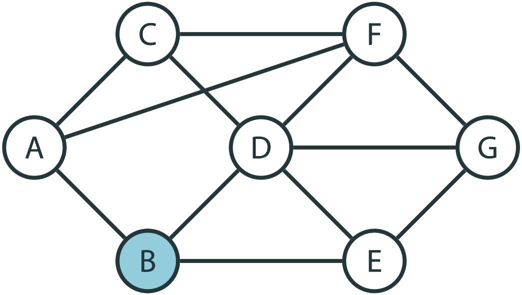
- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины
- На каждом шаге можем перейти по ребру в следующую вершину



Путь: A, C, F, A

Пути в графах

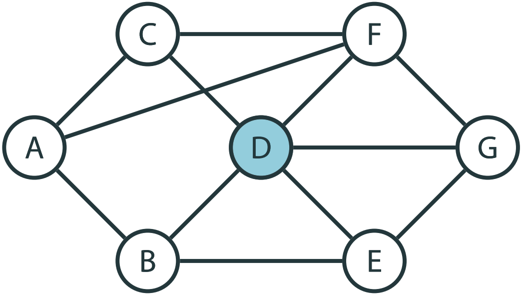
- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины
- На каждом шаге можем перейти по ребру в следующую вершину



Путь: A, C, F, A, B

Пути в графах

- Бывает полезно рассматривать пути в графах
- Начинаем с какой-то вершины
- На каждом шаге можем перейти по ребру в следующую вершину



Путь: A, C, F, A, B, D

Пути в графах

- Бывает, что пути естественно возникают в изначальной задаче

Пути в графах

- Бывает, что пути естественно возникают в изначальной задаче
- Например, в транспортных графах

Пути в графах

- Бывает, что пути естественно возникают в изначальной задаче
- Например, в транспортных графах
- Бывает, что пути полезны для анализа графа

Пути в графах

- Бывает, что пути естественно возникают в изначальной задаче
- Например, в транспортных графах
- Бывает, что пути полезны для анализа графа
- Например, в графах социальных сетей для анализа окружения пользователя

Пути в графах

- Формально путь это последовательность вершин: $v_0, v_1, \ldots, v_k$

Пути в графах

- Формально путь это последовательность вершин: $v_0, v_1, \dots, v_k$
- Из каждой вершины есть ребро в следующую

Пути в графах

- Формально путь это последовательность вершин: $v_0, v_1, \ldots, v_k$
- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем

Пути в графах

- Формально путь это последовательность вершин: $v_0, v_1, \ldots, v_k$
- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем
- В наших обозначениях длина пути k

Пути в графах

- Формально путь это последовательность вершин: $v_0, v_1, \ldots, v_k$
- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем
- В наших обозначениях длина пути k
- Вершины могут повторяться

Пути в графах

- Формально путь это последовательность вершин: $v_0, v_1, \ldots, v_k$
- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем
- В наших обозначениях длина пути k
- Вершины могут повторяться
- Если вершины не повторяются, то это простой путь

Циклы в графах

- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$

Циклы в графах

- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)

Циклы в графах

- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Простой цикл — нет повторов вершин, длина не меньше 3

Циклы в графах

- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Простой цикл — нет повторов вершин, длина не меньше 3
- Естественно возникают в транспортных графах

Циклы в графах

- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Простой цикл — нет повторов вершин, длина не меньше 3
- Естественно возникают в транспортных графах
- Важны при обходах графов

Циклы в графах

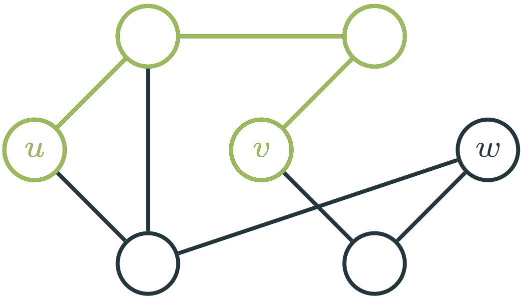
- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Простой цикл — нет повторов вершин, длина не меньше 3
- Естественно возникают в транспортных графах
- Важны при обходах графов
- Про циклы полезно помнить при работе с графами

Циклы в графах

- Если начальная вершина пути совпадает с конечной, то это цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Простой цикл — нет повторов вершин, длина не меньше 3
- Естественно возникают в транспортных графах
- Важны при обходах графов
- Про циклы полезно помнить при работе с графами
- Они могут создавать проблемы для алгоритмов на графах

Достижимость

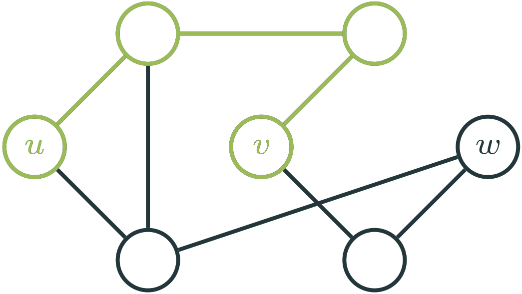
- Вершина v достижима из вершины u, если есть путь из u в v



Достижимость

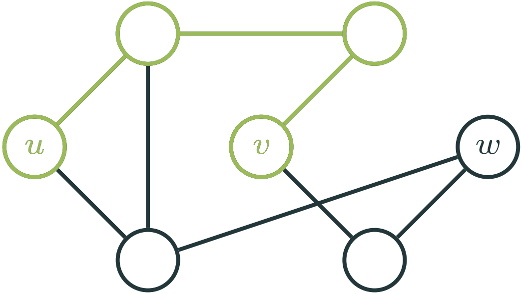
- Вершина v достижима из вершины u, если есть путь из u в v

- Это симметрично, если v достижима из u, то и u достижима из v



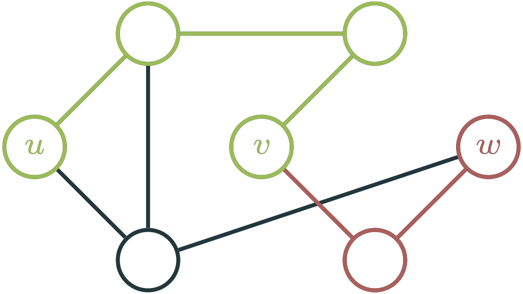
Достижимость

- Также говорим, что вершины u и v связаны



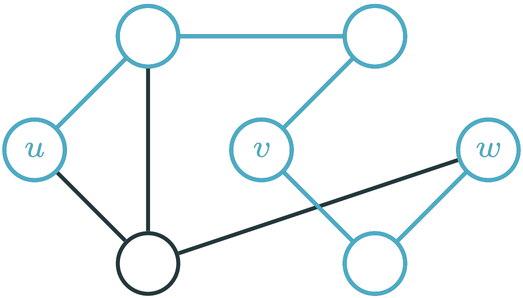
Достижимость

- Также говорим, что вершины u и v связаны
- Это транзитивно: если v достижима из u, а w достижима из v, то w достижима из u



Достижимость

- Также говорим, что вершины u и v связаны
- Это транзитивно: если v достижима из u, а w достижима из v, то w достижима из u



Связность

- Важное свойство графа: можно ли из всякой вершины дойти в любую другую?

Связность

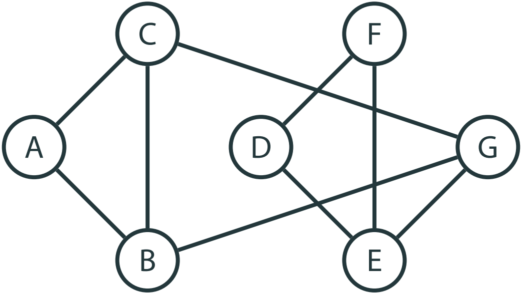
- Важное свойство графа: можно ли из всякой вершины дойти в любую другую?
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости

Связность

- Важное свойство графа: можно ли из всякой вершины дойти в любую другую?
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости
- В целом говорит о наличии связи между частями графа

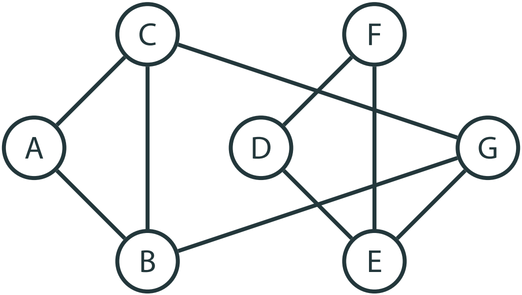
Связность

- Граф называется связным, если любая вершина достижима из любой другой



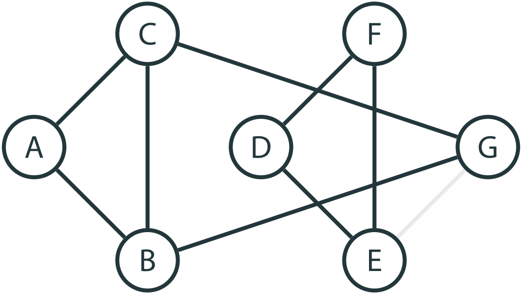
Связность

- Граф называется связным, если любая вершина достижима из любой другой
- Другими словами, есть путь между любыми двумя ее вершинами



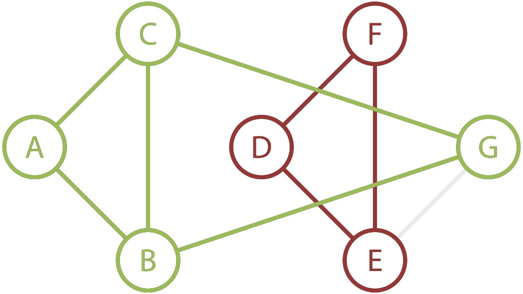
Связность

- Граф называется связным, если любая вершина достижима из любой другой
- Другими словами, есть путь между любыми двумя ее вершинами
- В противном случае граф не связен



Связность

- Граф называется связным, если любая вершина достижима из любой другой
- Другими словами, есть путь между любыми двумя ее вершинами
- В противном случае граф не связен



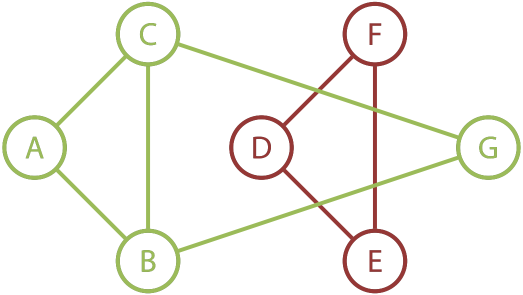
Компоненты связности

Если граф не связен, все его вершины распадаются на компоненты связности:

Компоненты связности

Если граф не связен, все его вершины распадаются на компоненты связности:

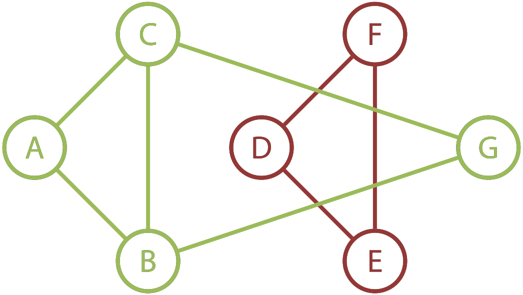
- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте



Компоненты связности

Если граф не связен, все его вершины распадаются на компоненты связности:

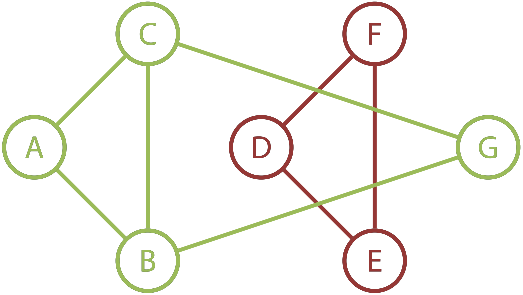
- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте связаны



Компоненты связности

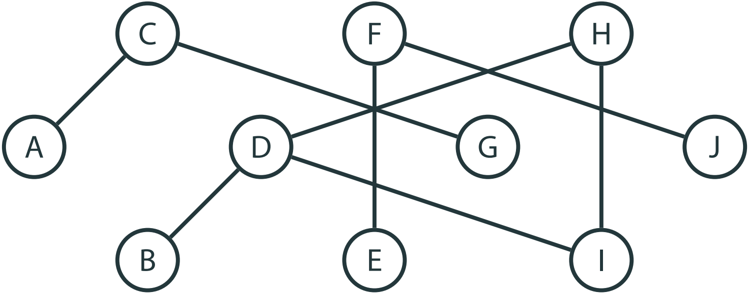
Если граф не связен, все его вершины распадаются на компоненты связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте связаны
- Вершины из разных компонент не связаны



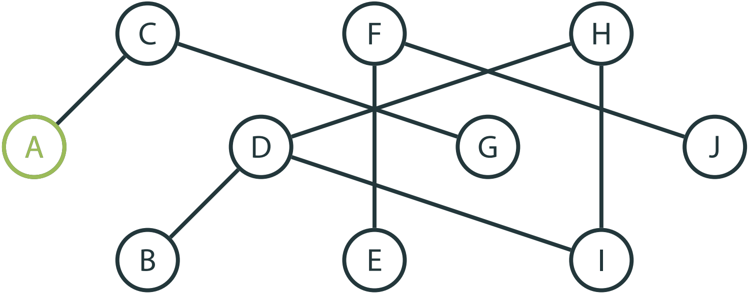
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину



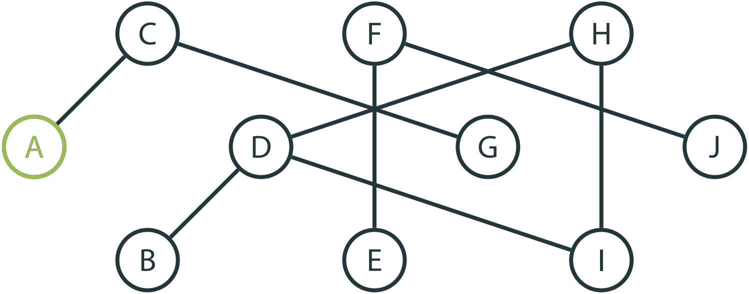
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину



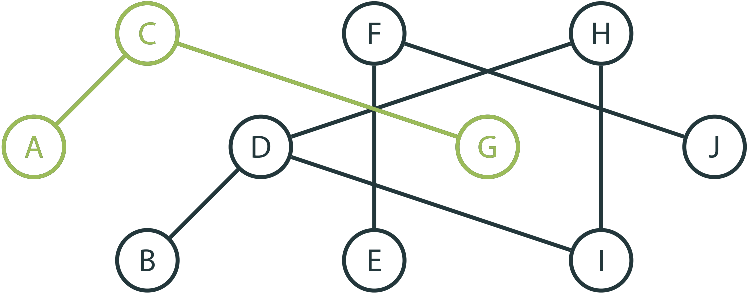
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее



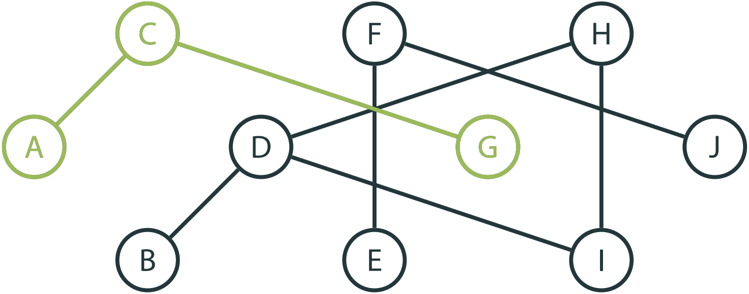
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее



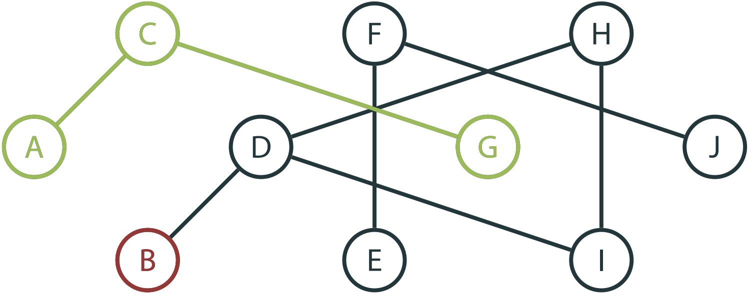
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее
- Повторяем с оставшимися вершинами



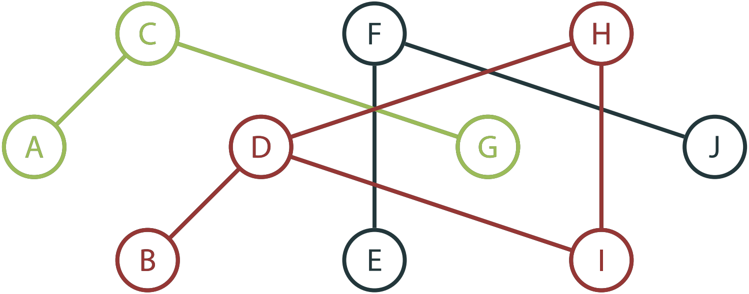
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее
- Повторяем с оставшимися вершинами



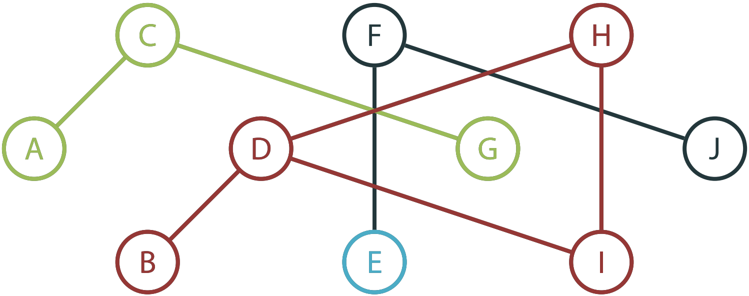
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее
- Повторяем с оставшимися вершинами



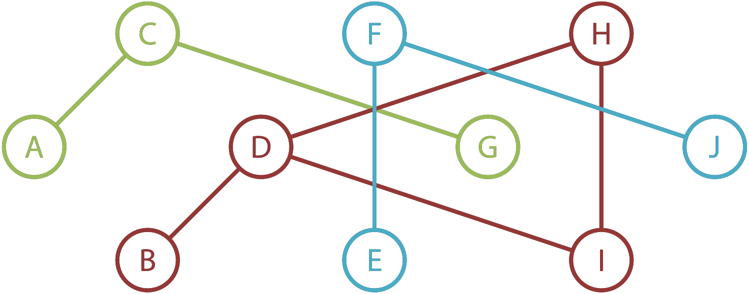
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее
- Повторяем с оставшимися вершинами



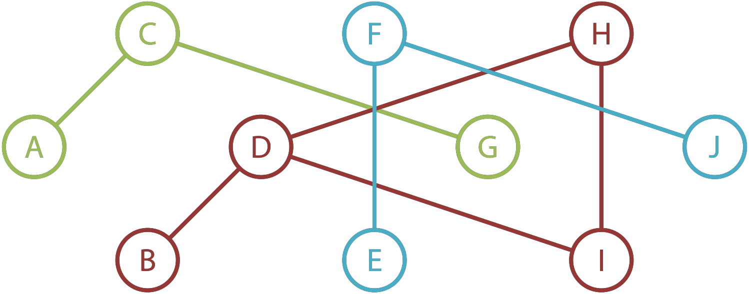
Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее
- Повторяем с оставшимися вершинами



Как искать компоненты связности?

- Берем любую вершину
- Выделяем все вершины, достижимые из нее
- Повторяем с оставшимися вершинами
- Позже обсудим как это делать эффективно



Графы, основные понятия

О курсе

Понятие графа

Применение графов

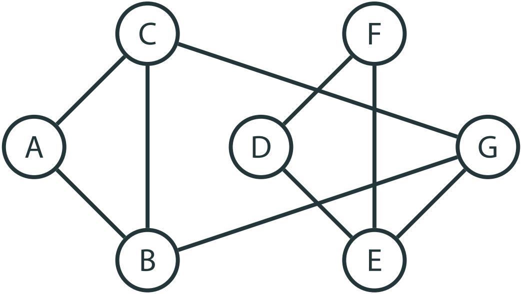
Степени вершин и число ребер

Пути и достижимость

Число компонент связности

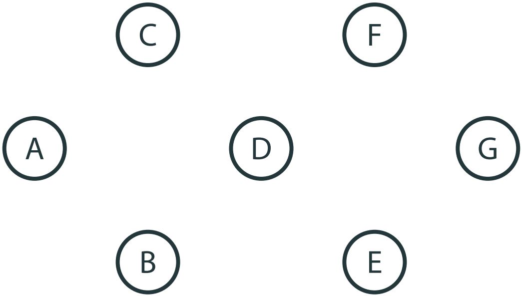
Число компонент связности

- Число компонент связности может быть от 1 до $|V|$



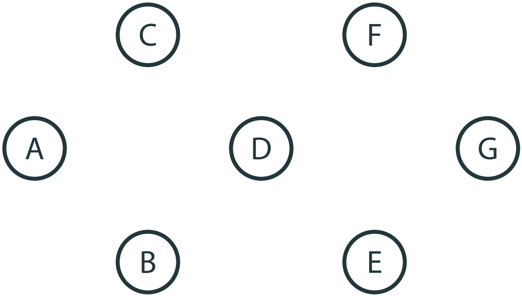
Число компонент связности

- Число компонент связности может быть от 1 до $|V|$



Число компонент связности

- Число компонент связности может быть от 1 до $|V|$
- Можно ли сказать что-то более точное, если знать число вершин и число ребер в графе?



Число компонент связности

Оценка числа компонент связности

Число компонент связности в графе не меньше $|V| - |E|$

Число компонент связности

Оценка числа компонент связности

Число компонент связности в графе не меньше $|V| - |E|$

- Если $|E| \leq |V| - 2$, то граф не связен

Число компонент связности

Оценка числа компонент связности

Число компонент связности в графе не меньше $|V| - |E|$

- Если $|E| \leq |V| - 2$, то граф не связен
- Если граф связен, то $|E| \geq |V| - 1$

Число компонент связности

Оценка числа компонент связности

Число компонент связности в графе не меньше $|V| - |E|$

- Если $|E| \leq |V| - 2$, то граф не связен
- Если граф связен, то $|E| \geq |V| - 1$
- Оценка ничего не говорит, если ребер много ($|E| \geq |V| - 1$)

Число компонент связности

Оценка числа компонент связности

Число компонент связности в графе не меньше $|V| - |E|$

- Если $|E| \leq |V| - 2$, то граф не связен
- Если граф связен, то $|E| \geq |V| - 1$
- Оценка ничего не говорит, если ребер много ($|E| \geq |V| - 1$)
- Но при малом числе ребер она полезна

Число компонент связности

- Докажем оценку

Число компонент связности

- Докажем оценку
- Выкинем из графа все ребра и будем возвращать их по одному

Число компонент связности

- Докажем оценку
- Выкинем из графа все ребра и будем возвращать их по одному
- В начале в графе $|V|$ вершин и нет ребер

Число компонент связности

- Докажем оценку
- Выкинем из графа все ребра и будем возвращать их по одному
- В начале в графе $|V|$ вершин и нет ребер
- Число компонент связности равно $|V|$ и оценка верна: $|V| \geq |V| - 0$

Число компонент связности

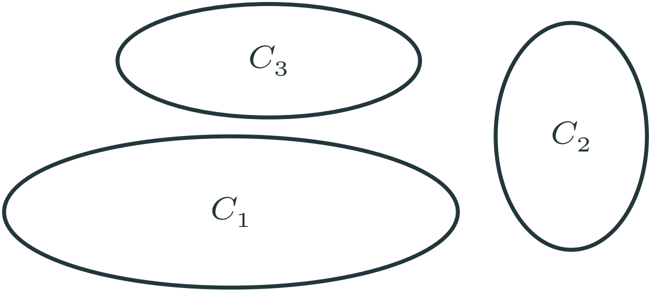
- Докажем оценку
- Выкинем из графа все ребра и будем возвращать их по одному
- В начале в графе $|V|$ вершин и нет ребер
- Число компонент связности равно $|V|$ и оценка верна: $|V| \geq |V| - 0$
- При возвращении одного ребра величина $|V| - |E|$ уменьшается на 1

Число компонент связности

- Докажем оценку
- Выкинем из графа все ребра и будем возвращать их по одному
- В начале в графе $|V|$ вершин и нет ребер
- Число компонент связности равно $|V|$ и оценка верна: $|V| \geq |V| - 0$
- При возвращении одного ребра величина $|V| - |E|$ уменьшается на 1
- Посмотрим, что происходит с числом компонент связности

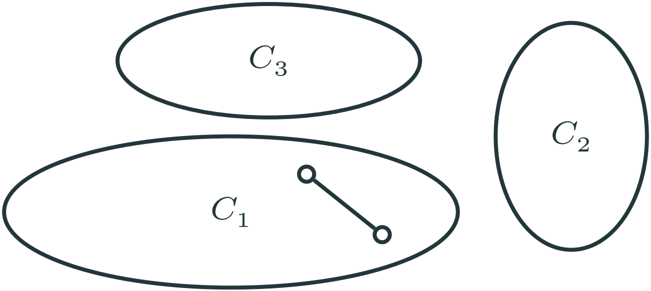
Число компонент связности

- Выделим текущие компоненты связности



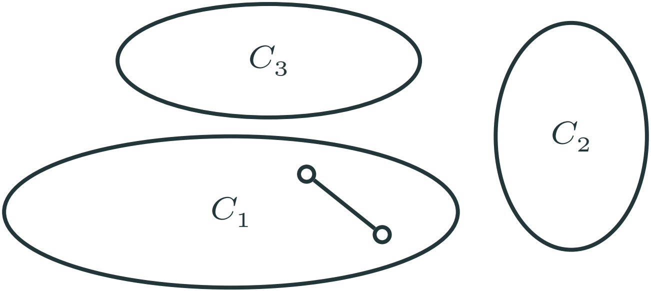
Число компонент связности

- Выделим текущие компоненты связности
- Случай 1: ребро соединяет вершины в одной компоненте



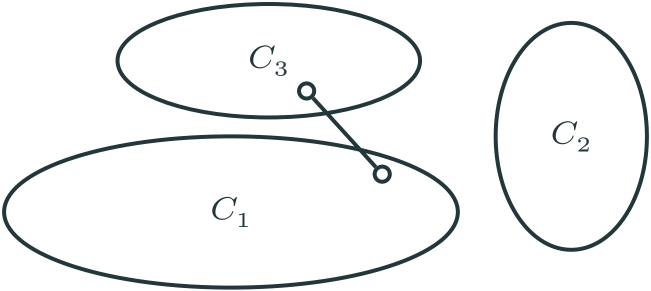
Число компонент связности

- Выделим текущие компоненты связности
- Случай 1: ребро соединяет вершины в одной компоненте
- Тогда компоненты остаются те же



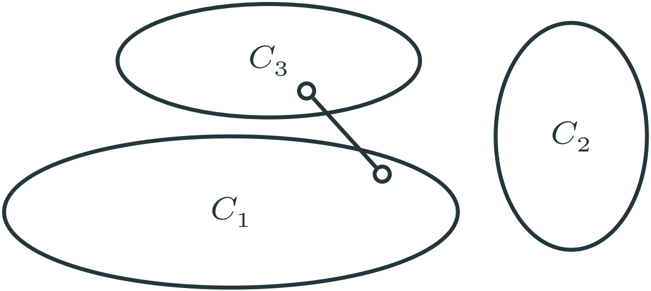
Число компонент связности

- Выделим текущие компоненты связности
- Случай 2: ребро соединяет вершины в разных компонентах



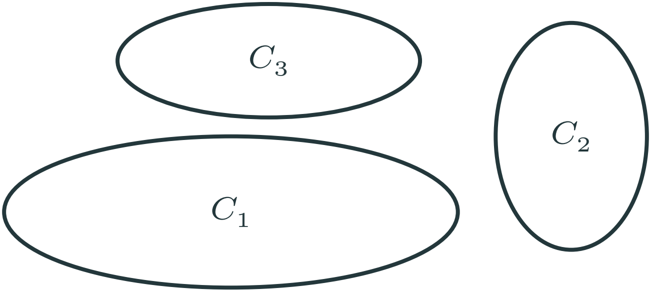
Число компонент связности

- Выделим текущие компоненты связности
- Случай 2: ребро соединяет вершины в разных компонентах
- Тогда две компоненты сливаются в одну



Число компонент связности

- При возвращении одного ребра число компонент связности либо не меняется, либо уменьшается на 1



Число компонент связности

- Итак, в начале число компонент связности не меньше $|V| - |E|$

Число компонент связности

- Итак, в начале число компонент связности не меньше $|V| - |E|$
- При возвращении ребра число компонент связности может не измениться, а может уменьшиться на 1

Число компонент связности

- Итак, в начале число компонент связности не меньше $|V| - |E|$
- При возвращении ребра число компонент связности может не измениться, а может уменьшиться на 1
- Величина $|V| - |E|$ точно уменьшается на один при возвращении ребра

Число компонент связности

- Итак, в начале число компонент связности не меньше $|V| - |E|$
- При возвращении ребра число компонент связности может не измениться, а может уменьшиться на 1
- Величина $|V| - |E|$ точно уменьшается на один при возвращении ребра
- Значит после возвращения ребра неравенство остается верным!

Число компонент связности

- Итак, в начале число компонент связности не меньше $|V| - |E|$
- При возвращении ребра число компонент связности может не измениться, а может уменьшиться на 1
- Величина $|V| - |E|$ точно уменьшается на один при возвращении ребра
- Значит после возвращения ребра неравенство остается верным!
- Значит оно останется верным после возвращения всех ребер!

Самый тяжелый камень

Самый тяжелый камень

У нас есть n камней и чашечные весы. За одно взвешивание мы можем сравнить по весу два камня. Сколько нужно взвешиваний, чтобы гарантировано найти самый тяжелый камень?

Самый тяжелый камень

Самый тяжелый камень

У нас есть n камней и чашечные весы. За одно взвешивание мы можем сравнить по весу два камня. Сколько нужно взвешиваний, чтобы гарантировано найти самый тяжелый камень?

- Сначала не вполне ясно, причем тут графы и компоненты связности

Самый тяжелый камень

Самый тяжелый камень

У нас есть n камней и чашечные весы. За одно взвешивание мы можем сравнить по весу два камня. Сколько нужно взвешиваний, чтобы гарантировано найти самый тяжелый камень?

- Сначала не вполне ясно, причем тут графы и компоненты связности
- Но давайте разбираться

Самый тяжелый камень

- Легко понять, что $n-1$ взвешивания хватит

Самый тяжелый камень

- Легко понять, что $n - 1$ взвешивания хватит
- После каждого взвешивания мы можем отбрасывать более легкий камень

Самый тяжелый камень

- Легко понять, что $n-1$ взвешивания хватит
- После каждого взвешивания мы можем отбрасывать более легкий камень
- После $n-1$ взвешивания у нас останется один камень, он будет самым тяжелым

Самый тяжелый камень

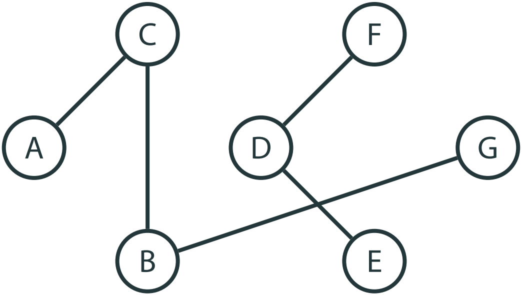
- Легко понять, что $n-1$ взвешивания хватит
- После каждого взвешивания мы можем отбрасывать более легкий камень
- После $n-1$ взвешивания у нас останется один камень, он будет самым тяжелым
- Но можно ли обойтись меньшем числом взвешиваний?

Самый тяжелый камень

- Легко понять, что $n-1$ взвешивания хватит
- После каждого взвешивания мы можем отбрасывать более легкий камень
- После $n-1$ взвешивания у нас останется один камень, он будет самым тяжелым
- Но можно ли обойтись меньшем числом взвешиваний?
- Оказывается, нет!

Самый тяжелый камень

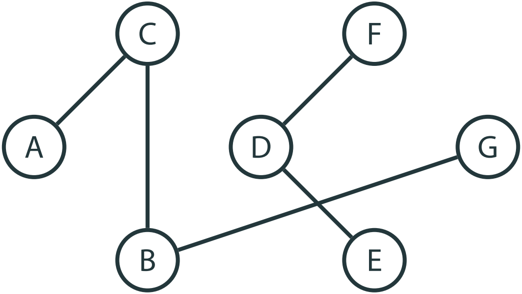
- Давайте рассмотрим такой граф: вершинами являются камни, а ребрами мы соединяем те камни, которые мы сравнивали на весах



Самый тяжелый камень

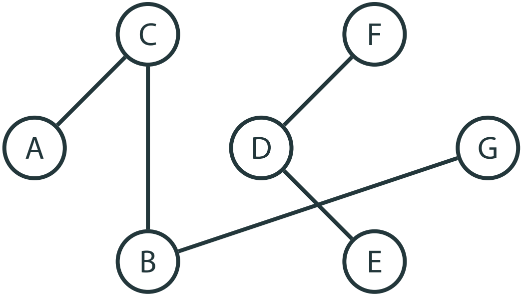
- Давайте рассмотрим такой граф: вершинами являются камни, а ребрами мы соединяем те камни, которые мы сравнивали на весах

- Заметим, что мы даже не интересуемся результатом взвешиваний



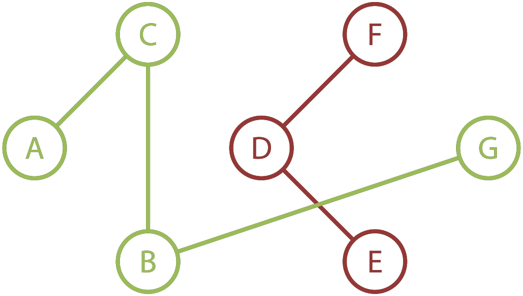
Самый тяжелый камень

- Если мы сделали меньше $n - 1$ взвешивания, то в нашем графе не меньше двух компонент связности!



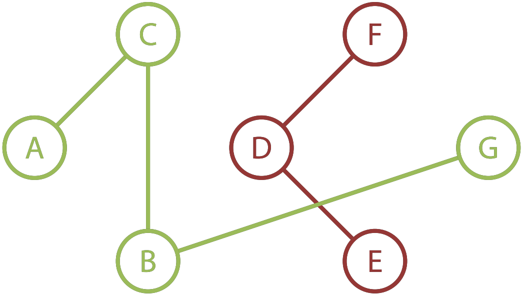
Самый тяжелый камень

- Если мы сделали меньше $n-1$ взвешивания, то в нашем графе не меньше двух компонент связности!



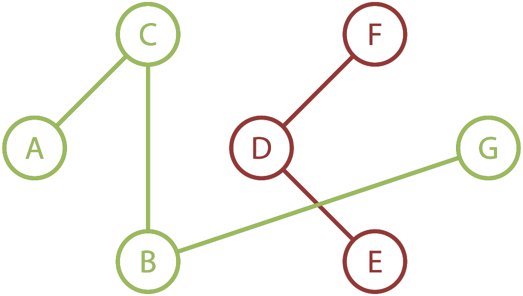
Самый тяжелый камень

- Если мы сделали меньше $n-1$ взвешивания, то в нашем графе не меньше двух компонент связности!
- Значит мы не сравнивали камни двух этих компонент друг с другом



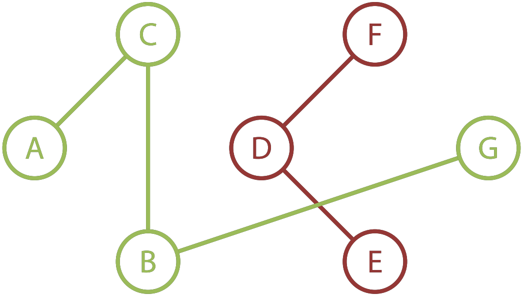
Самый тяжелый камень

- Все камни в одной компоненте могут быть сильно тяжелее всех камней в другой компоненте, или наоборот



Самый тяжелый камень

- Все камни в одной компоненте могут быть сильно тяжелее всех камней в другой компоненте, или наоборот
- Значит, мы не знаем какой камень самый тяжелый



Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями

Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно

Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно
- Уже очень простые наблюдения могут помочь

Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно
- Уже очень простые наблюдения могут помочь
- Важные понятия: пути и связность

Что мы узнали

- Графы полезны в тех ситуациях, когда у нас есть объекты, связанные отношениями
- Даже нарисовать граф бывает полезно
- Уже очень простые наблюдения могут помочь
- Важные понятия: пути и связность
- Даже простые наблюдения про компоненты связности могут быть полезны