Lista nr 1. Elementy logiki matematycznej. Dowodzenie.

Rachunek zdań jest jednym ze sposobów zapisu wiedzy. Jest on systemem wyrażeń będących formułami prawdziwymi, w którym nie stosuje się konkretnych zdań, lecz posługuje się tzw. zmiennymi zdaniowymi reprezentującymi zdania. Cała teoria opiera się na klasycznej logice dwuwartościowej, zgodnie z którą, za zmienne zdaniowe można podstawiać takie zdania, którym odpowiada wartość logiczna TRUE (prawda) lub FALSE (fałsz), tzn. takie, które uznane są odpowiednio za prawdziwe lub fałszywe. Oprócz wyrażeń prostych, w rachunku zdań tworzone są również wyrażenia złożone. Powstają one z wyrażeń prostych przy wykorzystaniu funktorów zdaniotwórczych (spójników). Klasyczny rachunek zdań stosuje następujące spójniki:

a) negacja $\neg$ (nieprawda, ze)

b) koniunkcja $\wedge$ (i)

c) alternatywa $\vee$ (lub)

d) implikacja $\Rightarrow$ (jeżeli to)

e) równoważność implikacja $\Leftrightarrow$ (wtedy i tylko wtedy gdy)

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \to q$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

gdzie: 1 – zdanie prawdziwe; 0 – zdanie fałszywe

Ważniejsze prawa rachunku zdań:

- prawo tożsamości (każde zdanie implikuje siebie): $p \Rightarrow p$
- prawo podwójnego przeczenia (dowolne zdanie równoważne jest podwójnej negacji tego zdania): $p \Leftrightarrow \neg\neg p$
- prawo przemienności koniunkcji: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- prawo przemienności alternatywy: $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

- prawo łączności koniunkcji: $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
- prawo łączności alternatywy: $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
- prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy: $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji: $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
- prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$
- prawo sprzeczności (nie może być jednocześnie prawdziwe zdanie i jego zaprzeczenie): $\neg(p \wedge \neg p)$
- prawo pochłaniania : $p \Rightarrow (p \vee q)$
- prawo pochłaniania: $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- pierwsze prawo De Morgana (prawo zaprzeczenia koniunkcji): $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- drugie prawo De Morgana (prawo zaprzeczenia alternatywy): $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- prawo przechodniości implikacji (jeżeli z jednego zdania wynika drugie i z drugiego trzecie, to z pierwszego wynika trzecie): $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- prawo transpozycji: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- prawo eliminacji implikacji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- prawo zaprzeczenia implikacji: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Zadania

Zad. 1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami logicznymi?

a) Wczoraj była ładna pogoda

b) 6 jest liczbą pierwszą

c) Czy lubisz wątróbkę?

d) Idź do domu!

Zad. 2. Oceń wartość logiczną poniższych zdań:

a) liczba $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ jest większa od 3

b) 1 jest liczba pierwszą

c) długość wysokości trójkąta równobocznego o boku $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną

Zad. 3. Sprawdź czy następujące zdania są tautologiami

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p)] \Rightarrow p$

b) $[p \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))] \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

Zad. 4. Zapisać w formie symbolicznej następujące zdania

a) Jeśli liczba rzeczywista x jest $\geqslant 5$, to $x^2 \geqslant 5x$

b) x jest liczbą, której kwadrat pomniejszony o 3 jest mniejszy od -1

c) Istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x < 5$ i $x^2 > 3x$

Zad. 5. Wykorzystując spójniki logiczne zapisać następujące zdania

a) Nieprawda, że jeśli dopadnę drania, to od razu się z nim policzę

b) Nie jest prawdą, że jeśli skończę studia i prestiżowy kurs językowy to znajdę dobrze płatną pracę

c) Jeśli Tadeusz zdąży na autobus, to przyjdzie, lub gdyby nie zdążył na autobus, to przełożymy nasze spotkanie

Zad. 6. Oceń wartość logiczną poniższych zdań i znajdź ich zaprzeczenie:

a) $\forall x \in R \quad (x+1)^2 > 0$

b) $\exists x \in Z \quad (x \geqslant 5 \wedge x \leqslant 5)$

Zad. 7. Uzupełnić zdania odpowiednim kwantyfikatorem tak, aby powstało zdanie prawdziwe:

a) $(x+1)^2 = x^2 + 1$

b) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

Zad. 8. Udowodnić, że systemy $\{\wedge, \neg\}$ i $\{\vee, \neg\}$ są funkcjonalnie pełne.

Zad. 9. Udowodnić, że system $\{\Rightarrow, \neg\}$ jest funkcjonalnie pełny.

Zad. 10. Udowodnij, że iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

Zad. 11. Niech $m, n \in N$. Chcemy dowieść, że jeśli $m + n \geqslant 73$ to $m \geqslant 37$ lub $n \geqslant 37$.

Zad. 12. Udowodnić prawdziwość następującego zdania:

$$Jeli\ \overbrace{\text{jutro będzie ładna pogoda}}^{p}\text{, to }\overbrace{\text{pójdziemy na grzyby}}^{q}$$