Lista nr 3. Elementy kombinatoryki.

Zasada szufladkowa - wersja podstawowa:

Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w m szufladach, przy czym $n > m$, to w przynajmniej jednej szufladzie znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Zasada szufladkowa - wersja ogólna:

Jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w m szufladach, przy czym $n > m \cdot k$ (k-liczba naturalna), to w przynajmniej jednej szufladzie znajdzie się więcej niż k przedmiotów.

PERMUTACJE

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Liczba permutacji zbioru złożonego z elementów jest właśnie równa $\mathbf{n}!$.

KOMBINACJE

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leqslant n$) nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru. Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia. Dwa podzbiory złożone z tych samych elementów, a różniące się tylko ich kolejnością, stanowią tę samą kombinację. Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego:

$$\mathbf{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leqslant n$) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru. Z k-wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru, przy czym ma znaczenie kolejność wyboru elementów. Oczywiście n-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego to po prostu permutacje tego zbioru. Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\mathbf{V}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n-elementowego nazywa się każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru (dowolny element może wystąpić wielokrotnie w ciągu). Z k-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy ze zwracaniem po jednym elemencie z danego zbioru, przy czym ma znaczenie kolejność wyboru elementów. Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$\mathbf{W}_n^k = n^k$$

PERMUTACJA Z POWTÓRZENIAMI (zbiór ma n elementów przy czym niektóre się powtarzają).

Niech w zbiorze tym będzie k elementów, które powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy. Liczba permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\mathbf{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

KOMBINACJE Z POWTÓRZENIAMI (k-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego z możliwością powtarzania się elementów)

Liczba kombinacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\overline{\mathbf{C}}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Wzór dwumianowy:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Wygodnie także liczyć z **Trójkąta Pascala**:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Zadania

Zad. 1. W sali znajduje się 47 osób. Wykaż, że wśród nich znajdzie się 7 osób urodzonych tego samego dnia tygodnia.

Zad. 2. Danych jest 1001 liczb naturalnych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 501 liczb parzystych lub 501 liczb nieparzystych.

Zad. 3. W sklepie dostępne są 3 rodzaje cukierków: krówki, toffi i raczki. Każde z 24 dzieci z klasy IA wybrało 3 cukierki. Pokaż, że pewne trzy z nich mają ten sam "zestaw" cukierków.

Zad. 4. Ile istnieje różnych liczb czterocyfrowych zakładając, że cyfry nie powtarzają się a liczby zaczynają się od $2, 5$ lub 6.

Zad. 5. Ile jest permutacji liczb $1, 2, \ldots, 6$ w których:

a) liczby $3, 4$ sąsiadują ze sobą w kolejności wzrastania

b) liczby $3, 4$ sąsiadują ze sobą w dowolnej kolejności

c) liczby $3, 4$ nie sąsiadują ze sobą

d) liczby $3, 4, 5$ sąsiadują ze sobą w kolejności wzrastania

e) liczby $3, 4, 5$ nie sąsiadują ze sobą.

Zad. 6. Ile można utworzyć sześciocyfrowych liczb parzystych z cyfr $1, 2, 3, 4$ przy założeniu, że cyfra 2 powtarza się trzy razy.

Zad. 7. Ile różnych liczb 5-cyfrowych można utworzyć z cyfr $0, 1, 2, 3, 4$ tak aby:

a) żadna cyfra się nie powtarzała

b) cyfry mogą się powtarzać

c) tak aby na miejscu dziesiątek stała cyfra 3 lub 4; cyfry nie mogą się powtarzać.

Zad. 8. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 13\}$ wybieramy jednocześnie dwie. Na ile sposobów można to zrobić aby:

a) ich iloczyn był liczbą nieparzystą

b) ich iloczyn był liczbą parzystą

c) ich iloczyn był podzielny przez 7

d) ich iloczyn był podzielny przez 15

e) ich iloczyn był podzielny przez 10

f) ich suma była liczbą nieparzystą.

Zad. 9. Obliczyć ile jest możliwości otrzymania wśród 13 kart: 4 asów, 4 króli, 4 dam.

Zad. 10. Na ile sposobów 5 osób może wysiąść z tramwaju, który składa się z dwóch ponumerowanych wagonów.

Zad. 11. Ile jest 6-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zad. 12. Ile jest rozwiązań całkowitych równania $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 15$, gdzie $t_i \geqslant 0$.

Zad. 13. W klasie mamy 16 dziewcząt i 15 chłopców. Ile mamy możliwych wyborów 5-osobowej delegacji, w skład której wejdzie co najmniej 3 chłopców.

Zad. 14. Na ile sposobów można rozmieścić 20 identycznych kul w 5 różnych szufladkach tak, aby w każdej szufladce były przynajmniej dwie kule.

Zad. 15. Na ile sposobów można rozmieścić 25 identycznych cukierków w 7 rozróżnialnych pudełkach, jeżeli pierwsze pudełko może zawierać co najwyżej 10 cukierków, a pozostałe mogą zawierać dowolną liczbę cukierków.

Zad. 16. Ile ciągów binarnych długości 16:

a) zawiera dokładnie 8 zer

b) zawiera więcej jedynek niż zer.

Zad. 17. Na przyjęcie przyszło 5 małżeństw. Ile będzie powitań. Zakładamy, że witają się pary nie z rodziny.

Zad. 18. Ile przekątnych ma 7-kąt wypukły.

Zad. 19. Pamiętamy 3 pierwsze cyfry z 7 cyfrowego numeru. Ile jest możliwych numerów:

a) jeśli następne cyfry są dowolne

b) wśród pozostałych nie ma 4 i 5

c) wśród pozostałych nie ma żadnych na pierwszych miejscach.

Zad. 20. Ile istnieje funkcji różnowartościowych określonych na zbiorze $X = \{1, 2\}$ o wartościach w zbiorze $Y = \{a, b, c, d\}$.

Zad. 21. Ile różnych liczb 6-cyfrowych takich, że żadna cyfra się nie powtarza i tak by 3 lub 4 była cyfrą jedności ($Y = \{0, \ldots, 5\}$).