Lista nr 12. Drzewa.

Drzewem nazywamy graf spójny i acykliczny.

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2$$

Drzewem spinającym (lub rozpinającym) grafu G nazywamy dowolny podgraf będący drzewem i zawierający wszystkie wierzchołki grafu.

Twierdzenie Cayleya. Graf pełny K_n $(n \geqslant 2)$ ma n^{n-2} różnych drzew rozpinających.

Zadania na ćwiczenia nr 12 - drzewa

Zad. 1. Drzewo ma 6 wierzchołków stopnia 2, 4 wierzchołki stopnia 3 i 5 stopnia 4. Ile jest wierzchołków stopnia 1?

Zad. 2. Wykazać, że jeżeli każdy wierzchołek drzewa niebędący liściem jest 3-go stopnia, to liczba wierzchołków drzewa jest parzysta.

Zad. 3. Drzewo ma $3k$ wierzchołków stopnia 1, $4k$ wierzchołków stopnia 2 i $2k$ wierzchołków stopnia 3. Dla jakich k istnieje takie drzewo?

Zad. 4. Czy istnieje drzewo T, które ma tyle samo wierzchołków stopnia 1, stopnia 2 i stopnia 3 i nie ma wierzchołków $d > 3$?

Zad. 5. Sprawdzić, które z poniższych ciągów mogą być ciągami stopni drzewa:

a) (4,3,3,2,2,1,1,1,1,1)

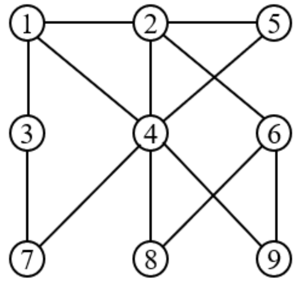
b) (4,3,2,2,2,1,1,1,1,1)

c) (4,2,2,2,2,1,1,1,1,1)

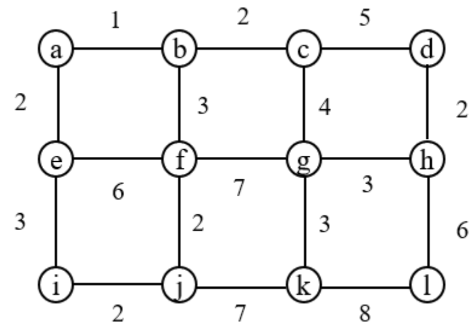
d) (4,3,3,3,2,1,1,1,1,1,1,1,1)

e) (4,4,3,3,2,1,1,1,1,1,1,1,1)

f) (4,3,3,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1)?



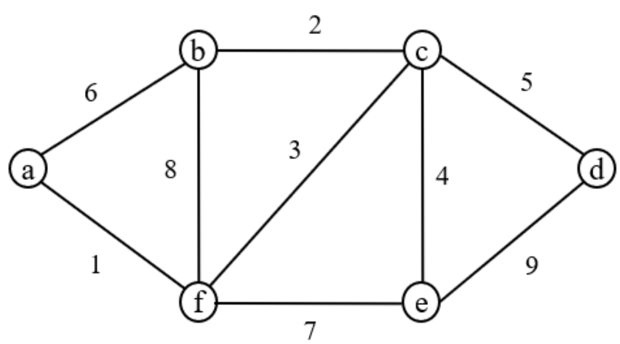
G



H

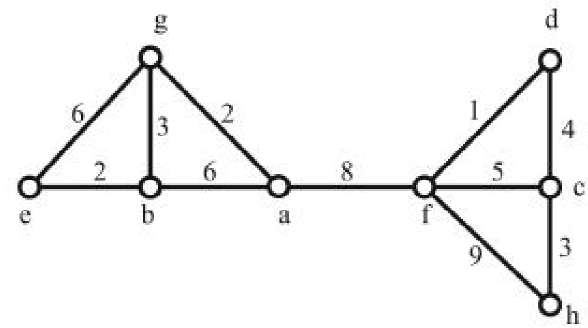
Zad. 6. Dla grafów G i H znaleźć najtańsze drzewo rozpinające stosując algorytm Kruskala. Przyjąć dla grafu a), że koszt krawędzi łączącej wierzchołki i-ty i j-ty jest równy $i + j$.

Zad. 7. Rozpatrzyć graf ważony przedstawiony na rysunku. Zastosować algorytm Kruskala do znalezienia najtańszego drzewa, zakładając, że stopień wierzchołka drzewa nie może być większy niż 3.



Zad. 8. Ile ma graf K_4 różnych drzew rozpinających. Podać przykłady.

Zad. 3. W podanym niżej grafie wyznaczyć za pomocą algorytmu Kruskala optymalne drzewo rozpięte (o minimalnej wadze).



Zad. 4. Dla podanego poniżej grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ wyznacz minimalne drzewo rozpinające stosując algorytm Kruskala. Wypisz krawędzie tego drzewa w kolejności zgodnej z kolejnością ich akceptowania (przyłączania). Podaj łączną wagę krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego. W przypadku możliwości jednoczesnego wyboru kilku rozwiązań, kieruj się porządkiem alfabetycznym etykiet wierzchołków rozważanego grafu $G = (V, E)$.