Modele Liniowe. Lista 1

Fakty:

- Dla wektora losowego $X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ definiujemy wektor wartości oczekiwanych $\mu^X = (EX_1, \ldots, EX_p)^T$ i macierz kowariancji $\Sigma^X_{p\times p}$, gdzie $\Sigma^X(i,j) = Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - EX_iEX_j$.
- Dla dowolnej ustalonej macierzy $A_{k\times p}$ i wektora $B \in R^k$ definiujemy wektor losowy $Y = AX + B$. Zachodzi $\mu^Y = A\mu^X + B$ i $\Sigma^Y = A\Sigma^X A^T$.
- Niech X ma rozkład wielowymiarowy normalny $N(\mu, \Sigma)$. Wtedy jego gęstość wyraża się wzorem
$$f(x) = det(2\pi\Sigma)^{-1/2}exp\left((x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)/2\right) \; .$$
- Operacje liniowe zachowują normalność rozkładu.

Zadania:

1) Korzystając z funkcji *rnorm* w R wygeneruj 100 wektorów losowych z rozkładu dwuwymiarowego normalnego $N(0, I)$ i zaznacz je na płaszczyźnie.
2) Wyznacz przekształcenia liniowe, które przekształcą wyżej otrzymaną chmurę punktów w chmurę z rozkładu $N(\mu, \Sigma)$, gdzie
   - $\mu = (4, 2)$,
   $$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{pmatrix} \; .$$
   - $\mu = (4, 2)$,
   $$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{pmatrix} \; .$$
   - $\mu = (4, 2)$,
   $$\Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

   Narysuj chmury punktów po takich przekształceniach.
3) Korzystając z funkcji *rnorm* w R wygeneruj 200 wektorów losowych z rozkładu wielowymiarowego normalnego $N(0, I_{100\times 100})$. Uzyskane dane zapisz w macierzy $X_{200\times 100}$, której wiersze zawierają kolejne wygenerowane wektory losowe. Następnie wyznacz macierz A tak, aby macierz $\tilde{X} = AX$ zawierała 200 wektorów z rozkładu wielowymiarowego normalnego $N(0, \Sigma_{100\times 100})$, gdzie $\Sigma(i,i) = 1$ i $\Sigma(i,j) = 0.9$ dla $i \neq j$. Zweryfikuj wyniki wyliczając średnią i rysując histogram próbkowych wariancji współrzędnych wektora $\tilde{X}$ a także próbkowych kowariancji między różnymi współrzędnymi tego wektora.

Małgorzata Bogdan