Описание алгоритма БПФ для составной длины.

Пусть длина ДПФ равна произведению $N = M \cdot L$, где M и L — целые положительные числа.

Выражение для ДПФ сигнала $s(n)$, $n = 0 \dots N-1$ можно записать в виде:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) W_N^{nk}, \quad k = 0 \dots N-1,$$

где $W_N = \exp(-j2\pi/N)$ — основание поворотного коэффициента.

Для составной длины $N = M \cdot L$ можно разделить индексы n и k следующим образом:

$$n = pM + m, \quad m, r = 0 \dots M-1;$$
$$k = rL + q, \qquad p, q = 0 \dots L-1.$$

Тогда относительно индексов m, r, p и q выражение ДПФ (1) разделится на вложенные суммы:

$$S(rL+q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{L-1} s(pM+m) W_N^{(pM+m)(rL+q)}.$$

Раскроем скобки в показателе поворотных коэффициентов:

$$S(rL+q) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{L-1} s(pM+m) W_N^{pMrL} \cdot W_N^{mrL} \cdot W_N^{pqM} \cdot W_N^{mq}.$$

Учтем, что $N = M \cdot L$:

$$W_N^{pMrL} = W_{ML}^{prML} = 1; \quad W_N^{mrL} = W_M^{mr}, \quad W_N^{pqM} = W_L^{pq},$$

тогда получаем выражение для ДПФ составной длины:

$$\underbrace{S(rL+q)}_{V_q(r)} = \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} W_N^{mq} \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{L-1} \overbrace{s(pM+m)}^{x_m(p)} W_L^{pq}\right)}_{y_m(q)} W_M^{mr}}_{z_q(m)}.$$

Разделим входной сигнал длины $M \cdot L$ на сегменты $x_m(p)$, $m = 0 \dots M-1$, $p = 0 \dots L-1$ получим внутреннюю сумму в виде L-точечного ДПФ:

$$y_m(q) = \sum_{p=0}^{L-1} x_m(p) W_L^{pq}, \quad q = 0 \dots L-1.$$

Таких L-точечных ДПФ будет M штук для каждого индекса $m = 0 \dots M-1$.

После этого необходимо каждый из L-точечных ДПФ $y_m(q)$ умножить на соответствующие поворотные коэффициенты W_N^{mq} и сформировать L сигналов $z_q(m)$

$$z_q(m) = W_N^{mq} y_m(q), \quad m = 0 \dots M-1, \quad q = 0 \dots L-1.$$

длительности M отсчетов. Тогда внешняя сумма представляет собой M-точечное ДПФ сигнала $z_q(m)$, которое возвращает один сегмент выходного спектра

$$V_q(r) = \sum_{m=0}^{M-1} z_q(m) W_M^{mr}, \quad r = 0 \dots M-1.$$

Всего таких сегментов будет L для каждого $q = 0 \dots M-1$.

Если один или оба множителя M и L также представляются составным числом, то процедуру можно применять рекуррентно для расчета ДПФ размера M и L точек, до тех пор, пока не достигнем разложения исходного размера N на простые множители.

Можно подвести итог: для расчета ДПФ составной длины $N = M \cdot L$ требуется M ДПФ размера L точек, N умножений на поворотные коэффициенты и L ДПФ размера M точек.

В случае, когда M и L составные, т.е. $N = p_1 * p_2 * p_3 \dots * p_v$ сложность алгоритма равна $N(p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_v - v)$, следовательно лучше производить разложение N на максимально возможное число сомножителей. Использование данного подхода позволяет получить высокоэффективные алгоритмы для ДПФ произвольных составных длин N.Таким образом можно заключить, что для эффективной реализации алгоритма составной длины необходимо иметь процедуры коротких ДПФ простых длин (2, 3, 5), тогда можно будет построить эффективные алгоритмы БПФ для размеров входных векторов, кратных степеням 2, 3, 5.

Для этого воспользуемся алгоритмами Винограда для малоточечных ДПФ:

Алгоритм 3-точечного ДПФ

ДПФ размерности $N = 3$ точки можно записать в виде алгоритма Рейдера как:

$$\begin{bmatrix} S(1) \\ S(2) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_3 & W_3^2 \\ W_3^2 & W_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(1) \\ s(2) \end{bmatrix}}_{\text{Циклическая свертка}} + \begin{bmatrix} s(0) \\ s(0) \end{bmatrix},$$

$$S(0) = s(0) + s(1) + s(2). \quad (1)$$

Матрица поворотных коэффициентов в алгоритме Рейдера при $N = 3$ представляет собой циркулянт, поэтому никаких перестановок не требуется и мы можем применить алгоритм Винограда для двухточечной циклической свертки:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_3 & W_3^2 \\ W_3^2 & W_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s(1) \\ s(2) \end{bmatrix},$$

который имеет вид:

$$t_1 = s(2) + s(1), \qquad t_2 = s(2) - s(1),$$

$$m_1 = \frac{W_3^2 + W_3}{2} \cdot t_1, \quad m_2 = \frac{W_3^2 - W_3}{2} \cdot t_2,$$

$$y_0 = m_1 + m_2, \qquad y_1 = m_1 - m_2. \tag{2}$$

Учтем, что $W_3 = \exp(-j2\pi/3)$, тогда нетрудно показать, что

$$\frac{W_3^2 + W_3}{2} = \frac{\exp(-j2\pi/3) + \exp(-j4\pi/3)}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{W_3^2 - W_3}{2} = \frac{\exp(-j2\pi/3) - \exp(-j4\pi/3)}{2} = j\sin(\pi/3). \tag{3}$$

Объединив алгоритм Рейдера (1) с алгоритмом Винограда циклической свертки (2), с учетом свойств поворотных коэффициентов (3) получим алгоритм для 3-точечного ДПФ вида:

$$\boxed{\begin{array}{cc} t_1 = s(2) + s(1), & t_2 = s(2) - s(1), \\ m_1 = -t_1/2 + s(0), & m_2 = j\sin(\pi/3) \cdot t_2, \\ S(0) = t_1 + s(0), & S(1) = m_1 + m_2, \\ \multicolumn{2}{c}{S(2) = m_1 - m_2.} \end{array}}$$

Заметим, что слагаемое $s(0)$ в алгоритме Рейдера учтено в m_1, а при расчете $S(0)$ использовалась ранее посчитанная сумма t_1. Таким образом 3-точечное ДПФ требует 2 умножения на чисто вещественный множитель $-\frac{1}{2}$ и чисто мнимый $j\sin(\pi/3)$, а также 6 сложений.

Алгоритм 5-точечного ДПФ

Аналогично алгоритм Винограда 5-точечного ДПФ может быть представлен как:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= s(1) + s(4), & \varphi &= 2\pi/5, \\
t_2 &= s(2) + s(3), & & \\
t_3 &= t_1 + t_2, & r_3 &= \quad \big(\cos(\varphi/2) - \cos(\varphi)\big)/2, \\
t_4 &= t_1 - t_2, & r_4 &= -\big(\cos(\varphi/2) + \cos(\varphi)\big)/2, \\
t_5 &= s(1) - s(4), & r_5 &= -j\big(\sin(\varphi) + \sin(\varphi/2)\big), \\
t_6 &= s(2) - s(3), & r_6 &= \quad j\big(\sin(\varphi/2) - \sin(\varphi)\big), \\
t_7 &= t_5 + t_6, & r_7 &= -j\sin(\varphi),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_0 &= t_3 r_3 + s(0), & m_1 &= t_4 r_4, \\
m_2 &= t_5 r_5, & m_3 &= t_6 r_6, \\
m_4 &= t_7 r_7, & &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= m_0 + m_1, & q_1 &= m_0 - m_1, \\
q_2 &= m_4 - m_3, & q_3 &= m_4 - m_2, \\
S(1) &= q_0 + q_2, & S(3) &= q_1 + q_3, \\
S(4) &= q_0 - q_2, & S(2) &= q_1 - q_3, \\
S(0) &= s(0) + t_3. & &
\end{aligned}
$$

Алгоритм требует 17 сложений и 5 умножений на предварительно рассчитанные множители $r_3 \ldots r_7$.

Алгоритм 2-точечного ДПФ

Для 2-точечного ДПФ:

$$
\begin{aligned}
S(0) &= s(0) + s(1), \\
S(1) &= s(0) - s(1).
\end{aligned}
$$

Список литературы

1. *Оппенгейм А., Шаффер Р.* Цифровая обработка сигналов. Москва, Техносфера, 2012. 1048 с.
2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. Москва, Радио и связь, 1985.
3. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Москва, Мир, 1989, 448 с.
4. *Winograd S.* On Computing the Discrete Fourier Transform. MATHEMATICS OF COMPUTATION, 1978, Vol. 32, Num. 141, pp. 175–189
5. *Winograd S.* Some bilinear forms whose multiplicative complexity depends on the field of constants. Mathematical systems theory, 1976, Vol. 10, pp. 169–180.
6. *James W. Cooley and John W. Tukey* An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Mathematics of Computation, Vol. 19, no. 2, April 1965, pp. 297-301.