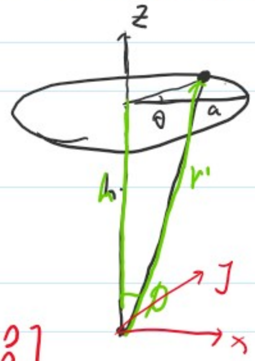
IMU 传感器-旋转运动学

2019年11月19日 12:10

Section 1. 旋转运动学

粒子在坐标系中 $z=h$ 中的平面内做圆周运动，坐标为：$r=(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ h)^T$

对坐标求导得：



$$\dot r = (-a\dot\theta\sin\theta,\ a\dot\theta\cos\theta,\ 0)^T$$

$$= \begin{bmatrix}0 & -\dot\theta & 0\\ \dot\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\\ h\end{bmatrix}$$

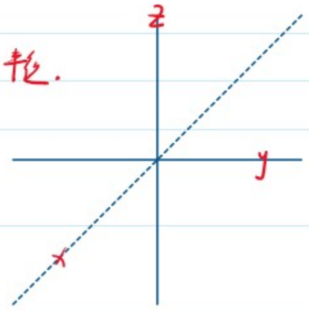
$$= \omega\times r$$

$\omega_\times$：ω 这个矢量对应的反对称矩阵 $\omega=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot\theta\end{bmatrix}$

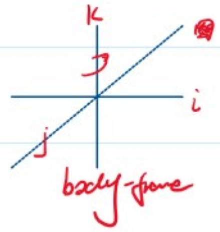
其中 $\vec\omega=\dot\theta\vec z$，$|\dot\theta|$ 是角速度大小

两边求模：$|\dot r| = |\omega||r|\cdot\sin\phi = a\cdot|\dot\theta|$ ⇒ 线速度 = 角速度 · 半径.

$|\omega|\cdot\sin\phi = a$



inertial frame.



body-frame

质量块在 body 坐标系下的坐标为：

$$r_B = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T$$

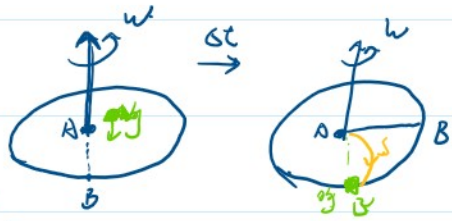
旋转到惯性系下有：

$$r_I(t) = x_1(t)\,\vec i + x_2(t)\,\vec j + x_3(t)\,\vec k = \vec R_{IB}\vec r_B$$

↳ 这里，我们后面解释.

简写为 $\vec r_I = x_i\vec e_i$，对时间求导有：

一个小例子：



$$\dot r_I(t) = \dot{\vec R}_{IB}\cdot\vec r_B + \vec R_{IB}\cdot\dot{\vec r}_B$$

$$= \vec R_{IB}\dot{\vec r}_B + [\vec R_{IB}\cdot\omega_B]_\times\cdot r_I$$

$$= R_{IB}v_B + \omega\times r_I$$

$$\vec v_I = \vec R_{IB}\cdot\vec v_B + \omega\times r_I \iff \vec R_{IB}\cdot\vec v_B = \vec v_I - \omega\times r_I$$

$R_{IB'} = R_{IB}(I+[\omega_{BB'}\delta t]_\times)r_B - R_{IB}r_B$

其中，$\omega = R_{IB}\cdot\omega_B$ 表示 body 坐标系下的角速度在 I 系下的表达.

A为站在圆盘圆心的人，B为随圆盘转动而运动的A的轨迹，其在转动系(A)下的运动轨迹如S所示.

补充：$\dot R_{IB}r_B = \lim_{\delta t\to 0}\dfrac{R_{IB}\cdot\exp([\omega_{BB'}\delta t]^\wedge)\vec r_B - R_{IB}\cdot r_B}{\delta t}$

$$\approx R_{IB}\cdot[\omega_{BB'}]_\times r_B$$

$$\vec R[\vec a]_\times = [Ra]_\times\cdot R$$

$$= [R_{IB}\,\omega_{BB'}]_\times \underbrace{R_{IB}r_B}_{r_I} = \omega\times r_I$$

对速度求导得：$\ddot r = R_{IB}\dot v_B + \dot R_{IB}v_B + \omega\times\dot r_I + [\dot R_{IB}\omega_B + R_{IB}\dot\omega_B]_\times\vec r_I$

$$a_I = R_{IB}\dot v_B + \dot R_{IB}v_B + \omega\times(v + \omega\times r_I) + [R_{IB}\dot\omega_B]_\times r_I$$

$$a_I = \underbrace{R_{IB}\cdot a_B}_{a} + 2\omega\times v + \omega\times(\omega\times r_I) + \dot\omega\times r_I$$

$$\Rightarrow \underbrace{a}_{\text{在body系下的加速度}} = a_I - \underbrace{2\omega\times v}_{\text{科氏力}} - \underbrace{\dot\omega\times r_I}_{\text{欧拉力}} - \underbrace{\omega\times(\omega\times r_I)}_{\text{离心力}}$$

$$a' = \left(a - \underbrace{2\omega \times v'}_{\text{科氏力}} - \underbrace{\dot{\omega} \times r_2}_{\text{欧拉力}} - \underbrace{\omega \times (\omega \times r_2)}_{\text{离心力}}\right).$$

在body系下的加速度

在旋转参考系中，运动的物体（运动方向和旋转轴不同一个轴向）会受到科氏力的作用.