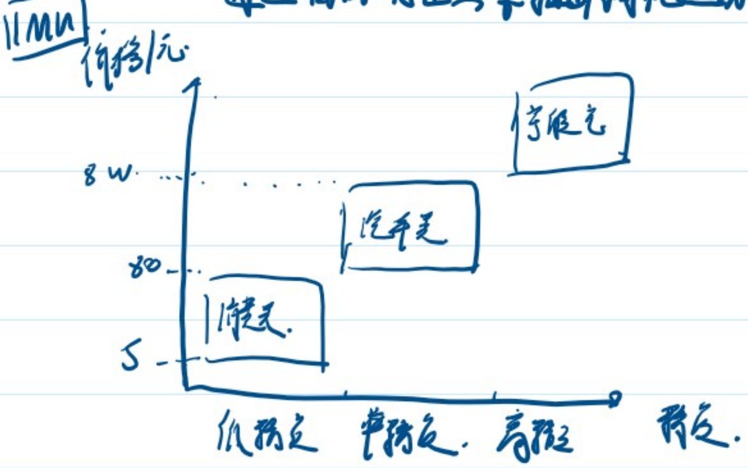
VIO概述与预备知识

2019年11月16日 14:06

IMU: Inertial Measurement Unit.

- 6轴IMU以较高频率(>100 Hz)返回被测物体的角速度与角加速度. 相对稳定. 不受其他因素影响.
- 受自身温度零偏，振动等因素干扰，积分得到的平移和旋转容易漂移.

视觉:
- 频率较低(15-60Hz 居多).
- 通过图像特征点来推断相机运动



IMU 与 VO 对比:

	IMU	VO.
优势:	快速响应 不受成像质量影响 角速度普遍比较准确 可估计绝对尺度.	(静止物体) 不产生漂移. 直接测量旋转与平移. (不通过ω, a 积分)
劣势:	存在零偏 低精度IMU积分位姿发散. (几s后发散). 高精度价格昂贵　中精度: 几十s后发散	受图像遮挡，运动物体干扰 单目视觉无尺度. 单目纯旋转运动无法估计. 快速运动时易丢失 (图像容易模糊)

⇒ IMU 与 VO 存在互补性质:

⇒ IMU适合计算短时间，快速的运动
视觉适合计算长时间，慢速的运动

可利用视觉定位信息来估计IMU的零偏，减少IMU由零偏导致的发散和累积误差.

IMU可以为视觉提供快速运动时的定位.

数学符号约定：

· 普通变量：a, b, c.

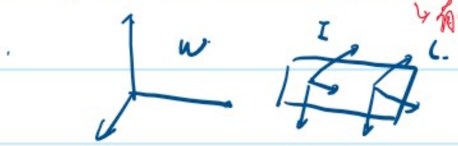
· 矩阵和向量：$\mathbf{A}. \mathbf{B}. \mathbf{C}.$

· 集合：$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$

三维刚体运动：

· 世界坐标系：W · IMU坐标系 I. · 相机坐标系：C.

↳有时称为Body系



坐标系之间的转换由一个SE(3)给出. 如I到W系的变换矩阵为 T_{WI}：

$$T_{WI} = \begin{bmatrix} R_{WI} & t_{WI} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

R_{WI}：为3×3旋转矩阵. t_{WI}：平移向量.

T_{WI} 右乘一个I系下的齐次坐标，得到该点W系下的坐标

$\boxed{\text{约定：}}$

约定：

- 当某个量表达坐标系的转换关系时，写在右下脚标，例如 $\mathbf{T}_{WB}$。
- 当表达矢量在某坐标系中取的坐标时，写在右上角标，如 $\mathbf{v}^W$ 表达速度矢量在 World 系坐标。
- I 系也称为 Body 系。
- 定义明确时，有时会省略该脚标，我们会直接谈论 $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ 这样的量。
- 不刻意区分齐次和非齐次坐标，因为在程序中可以自动完成转换，且无歧义。
- 默认以 $\mathbf{T}_{WI}$ 表达并存储 IMU 的定位信息，而不是 $\mathbf{T}_{IW}$。二者实际互为逆，存储哪一类区别不大，视习惯而定。
- 同理，$\mathbf{T}_{WI}$ 的平移部分可直接视作 IMU 在世界中的坐标，从而进行绘图或可视化操作。

四元数：

旋转矩阵R可以用单位四元数来表达.

四元数有一个实部和三个虚部. 实部通常写在前面.

小旋转矩阵R 则用单位四元数来表达.

四元数有一个实部和三个虚部. 实部通常写在前面.

$$\underline{q}=[q_0,\ \overset{i}{q_1},\ \overset{j}{q_2},\ \overset{k}{q_3}]^T \text{ 或 } \underline{q}=[w,\ x,\ y,\ z]^T$$

或: $\underline{q}=[s,\ \underline{v}]^T$

$$\boxed{\begin{aligned} &i^2=j^2=k^2=-1 \\ &i\cdot j=k \\ &j\cdot i=-k \end{aligned}}$$

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = \left[s_a s_b - \mathbf{v}_a^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_b,\ s_a\mathbf{v}_b + s_b\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b\right]^{\mathrm{T}}.$$

$\underline{q}_a \otimes \underline{q}_b$ (O. cross) 四元数乘法.

$\|w\|=1$.

单位四元数可表达任意三维旋转且无奇异性.

四元数和角轴之间转换关系，设角轴为ω和θ，则其对应的四元数为:

$$\underline{q}=[\cos\tfrac{\theta}{2},\ \underline{\omega}\cdot\sin\tfrac{\theta}{2}]^T$$

四元数时间导数:

设初始旋转为$q=[s,\underline{v}]$，之后发生了角轴为$\underline{\omega},\theta$的旋转.(乘对应的四元数为$\Delta q$).

那么q相对于这旋转的导数为:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{q\otimes\Delta q-q}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{[s\cdot\cos\frac{\theta}{2}-v^Tw\cdot\sin\frac{\theta}{2},\ sw\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}v+v\times w\sin\frac{\theta}{2}]^T-q}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{[s(\cos\frac{\theta}{2}-1)-v^Tw\sin\frac{\theta}{2},\ sw\sin\frac{\theta}{2}+v(\cos\frac{\theta}{2}-1)+v\times w\cdot\sin\frac{\theta}{2}]^T}{\theta}$$

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots$

$$=\left[s(0)-v^Tw\cdot\tfrac{1}{2},\ sw\cdot\tfrac{1}{2}+v\times w\cdot\tfrac{1}{2}\right]^T$$

$$=[-\tfrac{1}{2}v^Tw,\ \tfrac{1}{2}sw+\tfrac{1}{2}v\times w]^T.$$

$$\Rightarrow\ \dot{q}=q\otimes[0,\ \tfrac{1}{2}w]$$

除了利用四元数求导，亦可利用李代数.

使用旋转矩阵R时，角速度为w，那么R相对于时间导数为:

$$\dot{R}=R\cdot\omega^\wedge.$$

这式被称为泊松公式，其中$\wedge$为反对称矩阵算子.

$$w^\wedge=\begin{bmatrix}0 & -w_3 & w_2\\ w_3 & 0 & -w_1\\ -w_2 & w_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$-w_2 \quad w_1 \quad 0 \Big]$$

$\Leftrightarrow w_\times$

T_{WB}

R_{WB}

SO(3) 导数:

在优化带有旋转的函数时，通常计算一个增量 $\phi \in so(3)$，然后用它更新

当前估计值: $R \leftarrow R \cdot \exp(\phi^\wedge)$ 右乘更新.

其中 exp 为 so(3) 到 SO(3) 上的指数映射

旋转点的右扰动雅克比:

$$\frac{\partial (Rp)}{\partial \phi} = \lim_{\phi \to 0} \frac{R \cdot \exp(\phi^\wedge) p - Rp}{\phi}$$

$$= \lim_{\phi \to 0} \frac{R(I + \phi^\wedge) p - Rp}{\phi}$$

$$= \lim_{\phi \to 0} \frac{R\phi^\wedge p}{\phi} = \frac{-Rp^\wedge \phi}{\phi} = -Rp^\wedge$$

旋转连乘的雅克比:

$$\frac{d(\ln(R_1 R_2))}{dR_2} = \lim_{\phi \to 0} \frac{\ln(R_1 R_2 \exp(\phi^\wedge)) - \ln(R_1 R_2)}{\phi}$$

$$\underline{\ln(R\exp(\phi^\wedge)) = \ln(R) + J_r^{-1}\phi} \; \lim_{\phi \to 0} \frac{\ln(R_1 R_2) + J_r^{-1}\phi - \ln(R_1 R_2)}{\phi}$$

$$= J_r^{-1}(\ln(R_1 R_2)^\vee)$$

其中 J_r^{-1} 为 SO(3) 上的右雅克比:

$$J_r^{-1}(\theta w) = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2} I + \left(1 - \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right) w w^T + \frac{\theta}{2} w^\wedge$$

类似于:

(二)

$$\frac{d\ln(R_1 R_2)}{dR_1} = \lim_{\phi \to 0} \frac{\ln(R_1 \exp(\phi^\wedge) R_2) - \ln(R_1 R_2)}{\phi}$$

$$= \lim_{\phi \to 0} \frac{\ln(R_1 R_2 \exp((R_2^T \phi)^\wedge)) - \ln(R_1 R_2)}{\phi}$$

$$= J_r^{-1}(\ln(R_1 R_2)^\vee) R_2^T$$

这里用到了 SO(3) 的伴随性质:

$$R^T \exp(\phi^\wedge) R = \exp((R^T\phi)^\wedge)$$

由于 SE(3) 李代数性质复杂，在 VIO 中，我们通常使用 SO(3)+t 的形式

由于 SE(3) 的雅可比较复杂，在 VIO 中，我们通常使用 SO(3)+t 的形式来表示旋转和平移。

SO(3)+t ⇒

	R	t
	ϕ	δt
→	$R\exp(\phi^\wedge)$	$t+\delta t$

SE(3)

T

$\xi=(\rho,\phi)$

$T \leftarrow T\cdot\exp(\xi^\wedge)$