SLAM和高斯分布

2019年12月10日 17:16

考虑某个状态 ξ，以及一次与该变量相关的观测 r_i。由于噪声的存在，观测服从概率分布 $P(r_i|\xi)$

多次观测时，各个测量值相互独立，则有多次观测：

$$P(r|\xi) = \prod P(r_i|\xi)$$

如果知道机器人状态的先验信息 $P(\xi)$，如GPS等，可根据 Bayes 法则：

似然概率

$$P(\xi|r) = \frac{P(r|\xi)P(\xi)}{P(r)}$$

通过最大后验估计

$$\xi_{MAP} = \arg\max_{\xi} P(\xi|r)$$

分母与 ξ 无关：⇒

$$\xi_{MAP} = \arg\max_{\xi} \prod P(r_i|\xi)P(\xi)$$

即：

$$\xi_{MAP} = \arg\min_{\xi} \left(-\sum_i \log P(r_i|\xi) - \log P(\xi)\right)$$

加log的主要目的是为了解决高斯分布的 exp 底在难以计算的问题

如果假设观测服从多元高斯分布，则有：

$$P(r_i|\xi) = N(\mu_i, \Sigma_i) \qquad P(\xi) \overset{\text{先验}}{=} N(\mu_\xi, \Sigma_\xi)$$

$$= \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_i}} \exp\left(-\frac{(r_i-\mu_i)^2}{2\Sigma_i}\right)} \rightarrow \text{多元高斯分布：} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\Sigma|}} \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}(r_i-\mu_i)^T\Sigma^{-1}(r_i-\mu_i)}_{\|r_i-\mu_i\|^2_{\Sigma_i}}\Big)$$

⇒

$$\xi_{MAP} = \arg\min_{\xi} \sum_i \|r_i-\mu_i\|^2_{\Sigma_i} + \|\xi-\mu_\xi\|^2_{\Sigma_\xi}$$

⇒ 最小二乘形式： ⇒ $J^T\Sigma^{-1}J\,\delta\xi = -J^T\Sigma^{-1}r$

多元高斯分布：

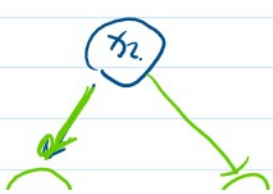
零均值的多元高斯分布有如下概率形式：

$$P(x) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x\right)$$

其中 Σ 为协方差矩阵，$\Lambda = \Sigma^{-1}$ 为信息矩阵。

Toy Example：

设 x_2 为室外的温度，x_1, x_3 分别为房间1和房间3内室内温度。



$$x_2 = \nu_2$$

$x_2 = v_2$

$x_1 = w_1 x_2 + v_1$

$x_3 = w_3 x_2 + v_3$

其中 v_i 独立分布，且各自服从协方差为 σ_i^2 的高斯分布.

$$\Rightarrow \Sigma_{11} = E(x_1 x_1) = E[(w_1 x_2 + v_1)(w_1 v_2 + v_2)]$$
$$= E(w_1^2 v_2^2) + 2 w_1 E(v_1 v_2) + E(v_1^2)$$
$$= w_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2$$

$$\Sigma_{12} = E(x_1 x_2) = E((w_1 x_2 + v_1) x_2)$$
$$= w_1 \sigma_2^2$$

以此类推，则有：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} w_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 & w_1 \sigma_2^2 & w_1 w_3 \sigma_2^2 \\ w_1 \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & w_3 \sigma_2^2 \\ w_1 w_3 \sigma_2^2 & w_3 \sigma_2^2 & w_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

⇒ 如何计算行列协方差矩阵的逆？：

通过计算联合高斯分布从而得到协方差矩阵的逆.

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_2) P(x_1 | x_2) P(x_3 | x_2)$$

$$= \frac{1}{Z_2} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right) \frac{1}{Z_1} \exp\left(-\frac{(x_1 - w_1 x_2)^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{Z_3} \exp\left(-\frac{(x_3 - w_3 x_2)^2}{2\sigma_3^2}\right)$$

利用指数性质：

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{(x_1 - w_1 x_2)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_3 - w_3 x_2)^2}{2\sigma_3^2}\right)$$

$$= \frac{1}{Z} \exp\left(-x_2^2\left[\frac{1}{2\sigma_2^2} + \frac{(x_1 - w_1 x_2)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{w_3^2}{2\sigma_3^2}\right] - x_1^2 \frac{1}{2\sigma_1^2} + 2 x_1 x_2 \frac{w_1}{2\sigma_1^2}\right.$$
$$\left. - x_3^2 \frac{1}{2\sigma_3^2} + 2 x_3 x_2 \frac{w_3}{2\sigma_3^2}\right)$$

$$= \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{2} [x_1 \; x_2 \; x_3] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{w_1}{\sigma_1^2} & 0 \\ -\frac{w_1}{\sigma_1^2} & \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{w_3^2}{\sigma_1^2} & -\frac{w_3}{\sigma_3^2} \\ 0 & -\frac{w_3}{\sigma_3^2} & \frac{1}{\sigma_3^2} \end{bmatrix}}_{\Lambda \text{ 信息矩阵}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

二次型：
$\Leftrightarrow$ $x^T \Sigma^{-1} x$

协方差矩阵 vs 信息矩阵

① 协方差中非对角元素 $\Sigma_{ij}>0$，表示两变量是正相关的

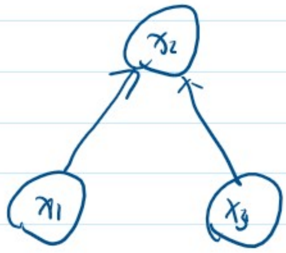
② 信息矩阵中非对角元素为负数，$\Lambda_{12}<0$，表示在变量 x_3 发生的条件下，元素 x_1 和 x_2 正相关

③ x_1 x_3 不相关，但这不说明信息矩阵对应的元素 Λ_{13} 为 0

toy example 2

比如特征三角化，两相机 pose 得到特征三维坐标：

$$x_2 = w_1 x_1 + w_3 x_3 + v_2$$



根据协方差矩阵的定义，有们：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & w_1\sigma_1^2 & 0 \\ w_1\sigma_1^2 & \sigma_2^2 + w_1^2\sigma_1^2 + \sigma_3^2 w_3 & w_3\sigma_3^2 \\ 0 & w_3\sigma_3^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵中非对角元素为 0，表示变量之间没有相关性：

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_3)P(x_2 | x_1, x_3)$$

$$= \frac{1}{z} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{x_3^2}{2\sigma_3^2}\right) \exp\left(-\frac{(x_2 - w_1x_1 - w_3x_3)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{z} \exp\left[-\frac{1}{2} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{w_1^2}{\sigma_2^2} & -\frac{w_1}{\sigma_2} & \frac{w_1w_3}{\sigma_2^2} \\ -\frac{w_1}{\sigma_2^2} & \frac{1}{\sigma_2^2} & -\frac{w_3}{\sigma_2^2} \\ \frac{w_1w_3}{\sigma_2^2} & -\frac{w_3}{\sigma_2^2} & \frac{1}{\sigma_3^2} + \frac{w_3^2}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$$

x_1 x_3 负相关

⇒ x_2 确定，x_1 与 x_3 的关系确定，x_1 ↑ 则 x_3 ↓。

当去掉某个变量时，协方差矩阵只用去掉相应的行列，但信息矩阵却很难更新出。

marginalization (边缘化)

Schur's complement (舒尔补)