РАЗДЕЛ 2

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Вар.13

Задание 1

Пусть перестановки элементов множества $\overline{1,n}$ задают нижние строки канонических записей подстановок g,$h \in S_n$.

а) Записать подстановки gи hв каноническом виде. Выписать элементы множеств Mob gи Mob h, Fix gи Fix h.

б) Найти подстановки gh, hg, g^{-1} , h^{-1} .

в) Разложить подстановки gи hна независимые циклы, указать их цикловые структуры и найти ord gи ord h.

г) Разложить подстановки gи hв произведение транспозиций и определить их чётность.

Дано:

Перестановка для g= (18, 6, 5, 3, 1, 7, 17, 4, 13, 12, 2, 16, 15, 8, 14, 11, 10, 9), n=18

Перестановка для h= (3, 11, 13, 10, 14, 2, 18, 16, 8, 6, 9, 12, 4, 7, 17, 15, 1, 5), n=18

Решение:

а)

$$g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 18 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 17 & 4 & 13 & 12 & 2 & 16 & 15 & 8 & 14 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$h=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 3 & 11 & 13 & 10 & 14 & 2 & 18 & 16 & 8 & 6 & 9 & 12 & 4 & 7 & 17 & 15 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Mob g= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18}

Mob h= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18}

Fix g= $\{\oslash\}$

Fix h= {12}

б)

$$gh= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 5 & 2 & 14 & 13 & 3 & 18 & 1 & 10 & 4 & 12 & 11 & 15 & 17 & 16 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$hg= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 5 & 2 & 15 & 12 & 8 & 6 & 1 & 11 & 4 & 7 & 13 & 16 & 3 & 17 & 10 & 14 & 18 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 5 & 11 & 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 14 & 18 & 17 & 16 & 10 & 9 & 15 & 13 & 12 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 17 & 6 & 1 & 13 & 18 & 10 & 14 & 9 & 11 & 4 & 2 & 12 & 3 & 5 & 16 & 8 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

в)

g= (1,18,9,13,15,14,8,4,3,5)(2,6,7,17,10,12,16,11)

h= (1,3,13,4,10,6,2,11,9,8,16,15,17)(5,14,7,18)(12)

$[g] = [8^1, 10^1]$

$[h] = [1^1, 4^1, 13^1]$

ord g= [8,10] $= 40$

ord h= [1,4,13] $= 52$

г)

g= (1,18) (1,9) (1,13) (1,15) (1,14) (1,8) (1,4) (1,3) (1,5) (2,6) (2,7) (2,17) (2,10) (2,12) (2,16) (2,11) - 16 транспозиций сл-но подстановка чётная

h= (1,3) (1,13) (1,4) (1,10) (1,6) (1,2) (1,11) (1,9) (1,8) (1,16) (1,15) (1,17) (5,14) (5,7) (5,18) - 15 транспозиций сл-но подстановка нечётная

Задание 2

Пусть перестановки элементов множества $\overline{1,n}$ задают нижние строки канонических записей подстановок g,$h \in S_n$.

а) Доказать, что подстановки gи hсопряжены в S_n.

б) Определить число решений уравнений $x^{-1}gx = h$ и $y^{-1}hy = g$.

в) Составить таблицы, описывающие множества всех решений каждого из уравнений.

г) Выписать по два произвольных решения каждого из уравнений и осуществить их проверку.

Дано:

Перестановка для g= (7, 8, 4, 3, 1, 5, 6, 2), n=8

Перестановка для h= (6, 8, 5, 7, 3, 2, 4, 1), n=8

Решение:

а)

Подстановки gи hсопряжены, если совпадают их цикловые структуры.

g= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ = (1,7,6,5)(2,8)(3,4)

$[g] = [2^2, 4^1]$

h= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ = (1,6,2,8)(3,5)(4,7)

$[h] = [2^2, 4^1]$

$[g]$=$[h]$ сл-но их цикловые структуры сопряжены.

б)

Так как gи hимеют одинаковые цикловые структуры, число решений уравнений сопряжённости для них одинаково и равно:

$\prod_{i=1}^{n}(k_i)! \cdot l_i^{k_i} = (1! \cdot 4^1) \cdot (2! \cdot 2^2) = 32$ решения.

в)

Таблица 1.1: Решения для $x^{-1}gx = h$

№	3 4	2 8	1 7 6 5
1	3 5	4 7	1 6 2 8
2	3 5	4 7	6 2 8 1
3	3 5	4 7	6 2 8 1
4	3 5	4 7	8 1 6 2
5	3 5	7 4	1 6 2 8
6	3 5	7 4	6 2 8 1
7	3 5	7 4	2 8 1 6
8	3 5	7 4	8 1 6 2
9	5 3	4 7	1 6 2 8
10	5 3	4 7	6 2 8 1
11	5 3	4 7	6 2 8 1
12	5 3	4 7	8 1 6 2
13	5 3	7 4	1 6 2 8
14	5 3	7 4	6 2 8 1
15	5 3	7 4	2 8 1 6
16	5 3	7 4	8 1 6 2
17	4 7	3 5	1 6 2 8
18	4 7	3 5	6 2 8 1
19	4 7	3 5	2 8 1 6
20	4 7	3 5	8 1 6 2
21	4 7	5 3	1 6 2 8
22	4 7	5 3	6 2 8 1
23	4 7	5 3	2 8 1 6
24	4 7	5 3	8 1 6 2
25	7 4	3 5	1 6 2 8
26	7 4	3 5	6 2 8 1
27	7 4	3 5	2 8 1 6
28	7 4	3 5	8 1 6 2
29	7 4	5 3	1 6 2 8
30	7 4	5 3	6 2 8 1
31	7 4	5 3	2 8 1 6
32	7 4	5 3	8 1 6 2

Таблица 1.2: Решения для $y^{-1}hy = g$

№	3 5	4 7	1 6 2 8
1	3 4	2 8	1 7 6 5
2	3 4	2 8	7 6 5 1
3	3 4	2 8	6 5 1 7
4	3 4	2 8	5 1 7 6
5	3 4	8 2	1 7 6 5
6	3 4	8 2	7 6 5 1
7	3 4	8 2	6 5 1 7
8	3 4	8 2	5 1 7 6
9	4 3	2 8	1 7 6 5
10	4 3	2 8	7 6 5 1
11	4 3	2 8	6 5 1 7
12	4 3	2 8	5 1 7 6
13	4 3	8 2	1 7 6 5
14	4 3	8 2	7 6 5 1
15	4 3	8 2	6 5 1 7
16	4 3	8 2	5 1 7 6
17	2 8	3 4	1 7 6 5
18	2 8	3 4	7 6 5 1
19	2 8	3 4	6 5 1 7
20	2 8	3 4	5 1 7 6
21	2 8	4 3	1 7 6 5
22	2 8	4 3	7 6 5 1
23	2 8	4 3	6 5 1 7
24	2 8	4 3	5 1 7 6
25	8 2	3 4	1 7 6 5
26	8 2	3 4	7 6 5 1
27	8 2	3 4	6 5 1 7
28	8 2	3 4	5 1 7 6
29	8 2	4 3	1 7 6 5
30	8 2	4 3	7 6 5 1
31	8 2	4 3	6 5 1 7
32	8 2	4 3	5 1 7 6

г)

Для осуществления проверки $x^{-1}gx = h$ возьмём решения №8 и №30, а для $y^{-1}hy = g$ выберем решения №17 и №28.

Из разложений на независимые циклы подстановок gи h, можем сделать вывод, что решением уравнения $x^{-1}gx = h$ будет подстановка, где элементы g, исходя из их цикловой структуры, переходят в элементы h. Наглядный пример представлен ниже.

Для решений $x^{-1}gx = h$:

№	3 4	2 8	1 7 6 5
...	...	...	...
8	3 5	7 4	8 1 6 2

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 8 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_8 = (1\ 8\ 4\ 5\ 2\ 7)(3)(6)$

$x_8^{-1} = (7\ 2\ 5\ 4\ 8\ 1)(3)(6)$

$x^{-1}gx = (7\ 2\ 5\ 4\ 8\ 1)(3)(6)\cdot(3\ 4)(2\ 8)(1\ 7\ 6\ 5)\cdot(1\ 8\ 4\ 5\ 2\ 7)(3)(6) =$
$(8\ 2\ 6\ 1)(7\ 4)(5\ 3) = h$

№	3 4	2 8	1 7 6 5
...	...	...	...
30	7 4	5 3	6 2 8 1

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_{30} = (1\ 6\ 8\ 3\ 7\ 2\ 5)(4)$

$x_{30}^{-1} = (5\ 2\ 7\ 3\ 8\ 6\ 1)(4)$

$x^{-1}gx = (5\ 2\ 7\ 3\ 8\ 6\ 1)(4)\cdot(3\ 4)(2\ 8)(1\ 7\ 6\ 5)\cdot(1\ 6\ 8\ 3\ 7\ 2\ 5)(4) =$
$(8\ 2\ 6\ 1)(7\ 4)(5\ 3) = h$

Для решений $y^{-1}hy = g$:

№	3 5	4 7	1 6 2 8
...	...	...	...
17	2 8	3 4	1 7 6 5

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 & 1 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$y_{17} = (1)(2\ 6\ 7\ 4\ 3)(5\ 8)$

$y_{17}^{-1} = (8\ 5)(3\ 4\ 7\ 6\ 2)(1)$

$y^{-1}hy = g = (8\ 5)(3\ 4\ 7\ 6\ 2)(1)\cdot(3\ 5)(4\ 7)(1\ 6\ 2\ 8)\cdot(1)(2\ 6\ 7\ 4\ 3)(5\ 8) = (5\ 6\ 7\ 1)(8\ 2)(4\ 3) = g$

№	3 5	4 7	1 6 2 8
...	...	...	...
28	8 2	3 4	5 1 7 6

$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 & 1 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$y_{28} = (1\ 5\ 2\ 7\ 4\ 3\ 8\ 6)$
$y_{28}^{-1} = (6\ 8\ 3\ 4\ 7\ 2\ 5\ 1)$
$y^{-1}hy = g = (6\ 8\ 3\ 4\ 7\ 2\ 5\ 1) \cdot (3\ 5)(4\ 7)(1\ 6\ 2\ 8) \cdot (1\ 5\ 2\ 7\ 4\ 3\ 8\ 6) = (5\ 6\ 7\ 1)(8\ 2)(4\ 3) = g$

Задание 3

Определить, какую цикловую структуру и чётность могут иметь подстановки порядка k в группе S_n . Найти количество подстановок каждого из описанных типов.

Дано:

$n = 20$, $k = 28$

Решение:

Выписав все возможные варианты, получаем, что если g- подстановка $\in S_{20}$ порядка k, то её возможные чётные цикловые структуры:
$[14^1, 4^1, 1^2], [7^1, 4^2, 2^1, 1^7], [7^1, 4^1, 2^3, 1^3], [7^1, 2^2, 1^5], [7^1, 4^2, 2^2, 1^1], [7^2, 4^1, 2^1]$
И нечётные:
$[14^1, 4^1, 2^1], [7^1, 4^1, 1^9], [7^1, 4^1, 2^2, 1^5], [7^1, 4^1, 2^4, 1^1], [7^1, 4^2, 2^1, 1^3], [7^1, 4^3, 1^1]$
$[7^2, 4^1, 1^2]$
Соответственно цикловым структурам подстановок выше, найдём колличество каждого типа, с помощью формулы:

$$\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (k_i)! \cdot l_i^{k_i}}$$

для $[14^1, 4^1, 1^2] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 14^1) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (2! \cdot 1^2)} = 21722339358720000$

для $[7^1, 4^2, 2^1, 1^7] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (2! \cdot 4^2) \cdot (1! \cdot 2^1) \cdot (7! \cdot 1^7)} = 1077496992000$

для $[7^1, 4^1, 2^3, 1^3] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (3! \cdot 2^3) \cdot (3! \cdot 1^3)} = 301699157760000$

для $[7^1, 2^2, 1^5] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (2! \cdot 2^2) \cdot (5! \cdot 1^5)} = 362038989312000$

для $[7^1, 4^2, 2^2, 1^1] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (2! \cdot 4^2) \cdot (2! \cdot 2^2) \cdot (1! \cdot 1^1)} = 1357646209920000$

для $[7^2, 4^1, 2^1] = \dfrac{20!}{(2! \cdot 7^2) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (1! \cdot 2^1)} = 3103191336960000$

для $[14^1, 4^1, 2^1] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 14^1) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (1! \cdot 2^1)} = 21722339358720000$

для $[7^1, 4^1, 1^9] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (9! \cdot 1^9)} = 239443776000$

для $[7^1, 4^1, 2^2, 1^5] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (2! \cdot 2^2) \cdot (5! \cdot 1^5)} = 90509747328000$

для $[7^1, 4^1, 2^4, 1^1] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (4! \cdot 2^4) \cdot (1! \cdot 1^1)} = 226274368320000$

для $[7^1, 4^2, 2^1, 1^3] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (2! \cdot 4^2) \cdot (1! \cdot 2^1) \cdot (3! \cdot 1^3)} = 905097473280000$

для $[7^1, 4^3, 1^1] = \dfrac{20!}{(1! \cdot 7^1) \cdot (3! \cdot 4^3) \cdot (1! \cdot 1^1)} = 905097473280000$

для $[7^2, 4^1, 1^2] = \dfrac{20!}{(2! \cdot 7^2) \cdot (1! \cdot 4^1) \cdot (2! \cdot 1^2)} = 3103191336960000$

Задание 4

Доказать, что отображение $\varphi : G \to G$ является гомоморфизмом групп. Найти его образ и ядро. Вычислить порядок факторгруппы $G/Ker(\varphi)$ и определить, какой группе она изоморфна.

Дано:

$G : Z_{12} \bigoplus Z_{15} \bigoplus Z_{22}$

$\varphi : (g_1, g_2, g_3) \mapsto (7g_1, 10g_2, 16g_3)$

Решение:

$\varphi((a, b, c) + (d, g, f)) = \varphi(a + d, b + g, c + f) = (7(a + d), 10(b + g), 16(c + f))$

$\varphi(a, b, c) + \varphi(d, g, f) = \varphi(a + d, b + g, c + f) = (7(a + d), 10(b + g), 16(c + f))$

$\Rightarrow \varphi : G \to G$ - гомоморфизм.

$Im\varphi = \{(7g_1, 10g_2, 16g_3) | g_1 \in Z_{12} \bigwedge g_2 \in Z_{15}, g_3 \in Z_{22}\} = 7Z_{12} \bigoplus 10Z_{15} \bigoplus 16Z_{22}$

$Ker\varphi = \{g \in G | \varphi(g) = e_H\} = \varphi(e_H)^{-1}, e_H$ - единица группы H.

Найдём НОД соответствующих модулей:

$(7, 12) = 1 \Rightarrow Z_{12} \mapsto Z_{12}$ для g_1

$(10, 15) = 5 \Rightarrow Z_{15} \mapsto 5 \cdot Z_{15}$ для g_2
$(16, 22) = 2 \Rightarrow Z_{22} \mapsto 2 \cdot Z_{22}$ для g_3
Для $\varphi(G) = Im(\varphi) = Z_{12} \bigoplus 5 \cdot Z_{15} \bigoplus 2 \cdot Z_{22}$
$Ker(\varphi) = \forall g \in G : \varphi(G) = l0$

$$7 \cdot x \equiv 0(mod(12))x \in \overline{0, 11}$$
$$x \in \{0\}$$
$$10 \cdot x \equiv 0(mod(15))x \in \overline{0, 14}$$
$$x \in \overline{0, 3}$$
$$16 \cdot x \equiv 0(mod(22))x \in \overline{0, 21}$$
$$x \in \overline{0, 11}$$

Следовательно, $Ker\varphi = \{(0; 0; 0), (3; 0; 0), (0; 11; 0), (3; 11; 0)\}$
$|G/Ker\varphi| = \dfrac{|G|}{|Ker\varphi|} = \dfrac{|Z_{12}| \cdot |Z_{15}| \cdot |Z_{22}|}{Ker\varphi} = \dfrac{12 \cdot 15 \cdot 22}{1 \cdot 5 \cdot 2} = 396$

Задание 5

Пусть G и H – конечные абелевы группы.

а) Вычислить порядки групп G и H.
б) Выписать канонические разложения групп G и H.
в) Найти $typG$ и $typH$ и определить, изоморфны ли группы G и H.

Дано:

$$G : Z_{95} \bigoplus Z_{13} \bigoplus Z_{17} \bigoplus Z_{23}$$
$$H : Z_5 \bigoplus Z_{23} \bigoplus Z_{247} \bigoplus Z_{17}$$

Решение:

а)

$$|G| = |Z_{95}| \cdot |Z_{13}| \cdot |Z_{17}| \cdot |Z_{23}| = 482885$$
$$|H| = |Z_5| \cdot |Z_{23}| \cdot |Z_{247}| \cdot |Z_{17}| = 482885$$

б)

$|Z_{95}| = 95 = 5^1 \cdot 19^1$
Соответствующие примарные подгруппы:
$H_5 = \dfrac{Z_{95}}{5} = 19Z_{95}$

$H_{19} = \dfrac{Z_{95}}{19} = 5Z_{95}$
$\Rightarrow Z_{95} = 19Z_{95} + 5Z_{95}$

$|Z_{13}| = 13$ - простое число$\Rightarrow Z_{13}$ - примарная,неразложимая группа

$|Z_{17}| = 17$ - простое число$\Rightarrow Z_{17}$ - примарная,неразложимая группа

$|Z_{23}| = 23$ - простое число$\Rightarrow Z_{23}$ - примарная,неразложимая группа

Повторим для H:

$|Z_{5}| = 5$ - простое число$\Rightarrow Z_{5}$ - примарная,неразложимая группа

$|Z_{23}| = 23$ - простое число$\Rightarrow Z_{23}$ - примарная,неразложимая группа

$|Z_{247}| = 247 = 13^1 \cdot 19^1$

Соответствующие примарные подгруппы:

$H_{13} = \dfrac{Z_{247}}{13} = 19Z_{247}$
$H_{19} = \dfrac{Z_{247}}{19} = 13Z_{247}$
$\Rightarrow Z_{247} = 19Z_{247} + 13Z_{247}$

$|Z_{17}| = 17$ - простое число$\Rightarrow Z_{17}$ - примарная,неразложимая группа

Из описанного выше следуют канонические разложения:

$G = Z_{95} \bigoplus Z_{13} \bigoplus Z_{17} \bigoplus Z_{23} = (Z_5 \bigoplus Z_{19}) \bigoplus Z_{13} \bigoplus Z_{17} \bigoplus Z_{23} = 19Z_{95} \dot{+} 5Z_{95} \dot{+} Z_{13} \dot{+} Z_{17} \dot{+} Z_{23}$

$H = Z_5 \bigoplus Z_{23} \bigoplus Z_{247} \bigoplus Z_{17} = Z_5 \bigoplus Z_{23} \bigoplus (Z_{13} \bigoplus Z_{19}) \bigoplus Z_{17} = Z_5 \dot{+} Z_{23} \dot{+} 13Z_{247} \dot{+} 19Z_{247} \dot{+} Z_{17}$

в)

$typG = [5^1, 13^1, 17^1, 19^1, 23^1]$

$typH = [5^1, 13^1, 17^1, 19^1, 23^1]$

$\Rightarrow$ из-за идентичности канонических разложений делаем вывод о том, что $G \cong H$

Задание 6

Пусть $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ - группа подстановок степени не выше $n \in N$ порождённая элементами $g_1, g_2 \in S_n$.

а) Определить, является ли группа G абелевой, и выписать все её элементы.

б) Выписать орбиты и стабилизаторы для каждой из точек $a \in \overline{a, n}$.

в) Определить, является ли группа G транзитивной (k-транзитивной) или регулярной (k-регулярной). группе G.

г) Определить, является ли группа G примитивной или импримитивной.

Дано:

$n = 5$

Подстановка $g_1 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)$

Подстановка $g_2 = (1\ 5)(3\ 4)$

Решение:

а)

$g_1 g_2 = (1\ 4)(3)(5\ 2)$

$g_2 g_1 = (1\ 2)(5\ 3)(4)$

$g_1 g_2 \neq g_2 g_1 \Rightarrow G$- не абелева группа.

Построим таблицу Кэли, описывающую все возможные элементы группы G, одновременно производя поиск элементов:

$g_1^2 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 4\ 2\ 3\ 5) = g_3$

$g_1^3 = (1\ 4\ 2\ 3\ 5)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 5\ 3\ 2\ 4) = g_4$

$g_1^4 = (1\ 5\ 3\ 2\ 4)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 2\ 5\ 4\ 3) = g_5$

$g_1^5 = (1\ 2\ 5\ 4\ 3)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1)(2)(3)(4)(5) = \text{e}$

$g_2^2 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1)(2)(3)(4) = \text{e}$

$g_1 g_2 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 4)(2\ 5)(3) = g_6$

$g_1 g_3 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 4\ 2\ 3\ 5) = (1\ 5\ 3\ 2\ 4) = g_4$

$g_1 g_4 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 5\ 3\ 2\ 4) = (1\ 2\ 5\ 4\ 3) = g_5$

$g_1 g_5 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 2\ 5\ 4\ 3) = (1)(2)(3)(4)(5) = \text{e}$

$g_1 g_6 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 4)(2\ 5)(3) = (1\ 3)(2\ 4)(5) = g_7$

$g_1 g_7 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 3)(2\ 4)(5) = (1)(2\ 3)(4\ 5) = g_8$

$g_1 g_8 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1)(2\ 3)(4\ 5) = (1\ 2)(3\ 5)(4) = g_9$

$g_1 g_9 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)\cdot(1\ 2)(3\ 5)(4) = (1\ 5)(2)(3\ 4) = g_2$

$g_2g_1 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 2)(3\ 5)(4) = g_9$

$g_3g_1 = (1\ 4\ 2\ 3\ 5)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 5\ 3\ 2\ 4) = g_4$

$g_4g_1 = (1\ 5\ 3\ 2\ 4)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 2\ 5\ 4\ 3) = g_5$

$g_5g_1 = (1\ 2\ 5\ 4\ 3)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1)(2)(3)(4)(5) = \mathrm{e}$

$g_6g_1 = (1\ 4)(2\ 5)(3)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 5)(2)(3\ 4) = g_2$

$g_7g_1 = (1\ 3)(2\ 4)(5)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 4)(2\ 5)(3) = g_6$

$g_8g_1 = (1)(2\ 3)(4\ 5)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1\ 3)(2\ 4)(5) = g_7$

$g_9g_1 = (1\ 2)(3\ 5)(4)\cdot(1\ 3\ 4\ 5\ 2) = (1)(2\ 3)(4\ 5) = g_8$

$g_2g_3 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 4\ 2\ 3\ 5) = (1)(2\ 3)(4\ 5) = g_8$

$g_2g_4 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 5\ 3\ 2\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)(5) = g_7$

$g_2g_5 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 2\ 5\ 4\ 3) = (1\ 4)(2\ 5)(3) = g_6$

$g_2g_6 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 4)(2\ 5)(3) = (1\ 2\ 5\ 4\ 3) = g_5$

$g_2g_7 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 3)(2\ 4)(5) = (1\ 5\ 3\ 2\ 4) = g_4$

$g_2g_8 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1)(2\ 3)(4\ 5) = (1\ 4\ 2\ 3\ 5) = g_3$

$g_2g_9 = (1\ 5)(3\ 4)\cdot(1\ 2)(3\ 5)(4) = (1\ 3\ 4\ 5\ 2) = g_1$

$g_3g_2 = (1\ 4\ 2\ 3\ 5)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)(5) = g_7$

$g_4g_2 = (1\ 5\ 3\ 2\ 4)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1)(2\ 3)(4\ 5) = g_8$

$g_5g_2 = (1\ 2\ 5\ 4\ 3)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 2)(3\ 5)(4) = g_9$

$g_6g_2 = (1\ 4)(2\ 5)(3)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 3\ 4\ 5\ 2) = g_1$

$g_7g_2 = (1\ 3)(2\ 4)(5)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 4\ 2\ 3\ 5) = g_3$

$g_8g_2 = (1)(2\ 3)(4\ 5)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 5\ 3\ 2\ 4) = g_4$

$g_9g_2 = (1\ 2)(3\ 5)(4)\cdot(1\ 5)(3\ 4) = (1\ 2\ 5\ 4\ 3) = g_5$

	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
e	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
g_1	g_1	g_3	g_6	g_4	g_5	e	g_7	g_8	g_9	g_2
g_2	g_2	g_9	e	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_1
g_3	g_3	g_4	g_7							
g_4	g_4	g_5	g_8							
g_5	g_5	e	g_9							
g_6	g_6	g_2	g_1							
g_7	g_7	g_5	g_3							
g_8	g_8	g_7	g_4							
g_9	g_9	g_8	g_5							

$G = \langle g_1, g_2 \rangle = \{\xi$, (1 3 4 5 2), (1 5)(2)(3 4), (1 4 2 3 5), (1 5 3 2 4), (1 2 5 4 3), (1 4)(2 5)(3), (1 3)(2 4)(5), (1)(2 3)(4 5), (1 2)(3 5)(4)$\}$.

б)

$G(1) = G(2) = G(3) = G(4) = G(5) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$St_G(2) = \{\xi\}$, (1)(2 3)(4 5);

$St_G(2) = \{\xi\}$, (1 5)(2)(3 4);

$St_G(3) = \{\xi\}$, (1 4)(2 5)(3);

$St_G(4) = \{\xi\}$, (1 2)(3 5)(4);

$St_G(5) = \{\xi\}$, (1 3)(2 4)(5).

в)

Орбита множества G одинакова и единственная для всех точек, следовательно, группа G является транзитивной.

Степень $S_5 = 5$, а элементов в $G - 10 \Rightarrow$ не регулярная группа.

G не является 2-транзитивной группой, так как для упорядоченных наборов (1,3);(2,4) не существует подстановки, в которой бы $G(1) = 2$ и $G(3) = 4$, из этого мы можем сделать вывод об отсутствии $k \geqslant 2$-транзитивности. Ибо, при увеличении размера упорядоченного набора, несоответствие в наборе порядком ниже, не позволит более крупным упорядоченным наборам соответствовать заданным условиям.

Группа не является k-регулярной, так как ни один из стабилизаторов не является транзитивной группой, в силу того, что порядки стабилизаторов меньше колличества точек в $S_5 \backslash \{a\}$.

г)

Группа G является импримитивной, так как порядок $G = 10$, а 10, в свою очередь, - составное число, что говорит о наличии у G собственных подгрупп, в каждой из которых существует стабилизатор (по первой т. Силова), а данный факт противоречит критерию примитивности.