1 Distributions

Binominale Distribution mit zurücklegen

⚠⚠ Mit zurücklegen ⚠⚠

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Beispiel: Wir haben 7 Weiße Bälle und 3 Rote Bälle: Wie Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir in n=5 Zügen k=2 rote Bälle ziehen? p ist 7/10

$$P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^3.$$

```
dbinom(x = 2, size = 5, prob = 3/10)
#0.1029193
```

x: Wie viele Rote Bälle wir bekommen wollen,
$size$: Wie Oft wir ziehen,
$prob$: Die prob einen Roten Ball zu ziehen

Hypergemoetric Distribution ohne zurücklegen

⚠⚠ Wie Binomial, aber ohne Zurücklegen ⚠⚠

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N: Gesamtanzahl aller Elemente(z.B alle Kugeln),
M: Anzahl der Roten Kugeln gesamt,
n: Wie oft wir Ziehen,
k: Wie viele Roten wir Ziehen

```
dhyper(x = 2, m = 3,n = 7,k = 5)
#0.4166667
```

x: wie viele von den gezogenen Bällen Rot sein sollen,
M: wie viele Rote Bälle,
n: wie viele nicht Rote,
k: wie viele Bälle wir ziehen

Multinomial Distribution mit zurücklegen

⚠⚠ Wie Binomial aber mit mehr als zwei Optionen.⚠⚠

Beispiel: Angenommen, wir haben $n = 5$ Versuche.
drei mögliche Ergebnisse (z.B. rot, blau, schwarz) mit $Rot = \frac{15}{20}$, $Grün = \frac{4}{20}$, $Blau = \frac{1}{20}$. Wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau Rot=2, $Grün$=2, $Blau$=1 auftritt?

Formel: $$\frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k},$$

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{15}{20}\right)^2\left(\frac{4}{20}\right)^2\left(\frac{1}{20}\right)^1 = 0.3375.$$

```
(factorial(5) / (factorial(2) * factorial(2) *
    factorial(1))) *
  ((15/20)^2 * (4/20)^2 * (1/20)^1)
#0.03375
```

Multivariate Hypergeometric Distribution

OHNE zurücklegen

⚠⚠ Wie Binomial aber mit mehr als zwei Optionen. ⚠⚠

Beispiel:
Angenommen, wir haben $n = 5$ Versuche.
drei mögliche Ergebnisse (z.B. rot, blau, schwarz) mit $Rot = \frac{15}{20}$, $Grün = \frac{4}{20}$, $Blau = \frac{1}{20}$. Wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau Rot=2, $Grün$=2, $Blau$=1 auftritt?

Formel: $$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = \frac{\binom{K_1}{k_1}\binom{K_2}{k_2}\cdots\binom{K_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}$$

$$\frac{\binom{15}{2}\binom{4}{2}\binom{1}{1}}{\binom{20}{5}} \approx 0.04063467.$$

```
(choose(15,2) * choose(4,2) * choose(1,1)) /
    choose(20,5)
#0.04063467
```

Sequentielle Ziehung mit Zurücklegen

⚠⚠ mit Zurücklegen ⚠⚠

Wir haben insgesamt 20 Bälle, davon sind 15 Bälle nicht rot und 5 Bälle sind rot. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit erst 4 nicht rote Bälle zu ziehen und dann ein roten Ball zu ziehen.

P(Keinen roten Ball) = $\frac{15}{20}$
P(Einen roten Ball) = $\frac{5}{20}$

$$P(X=5) = \left(1 - \frac{15}{20}\right)^4 \cdot \frac{4}{15}$$

```
(1 - (5 / 20))^4 * 5 / 20
```

Sequentielle Ziehung Ohne Zurücklegen

⚠⚠ Ohne Zurücklegen ⚠⚠

Wir haben insgesamt 20 Bälle, davon sind 15 Bälle nicht rot und 5 Bälle sind rot. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit erst 4 nicht rote Bälle zu ziehen und dann ein roten Ball zu ziehen.

P(Keinen roten Ball) = $\frac{15}{20}$
P(Einen roten Ball) = $\frac{5}{20}$
P(einen roten Ball nach 4 Zügen) = $\frac{5}{16}$

$$P(X=5) = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{0}}{\binom{20}{5}} \cdot \frac{5}{16}$$

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit 4 nicht rote Bälle zu ziehen Multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit einen roten aus den verbleibenden Bällen zu Ziehen.

```
((choose(15,4)*choose(5,0))/choose(20,4)
    ) * 5/16
```

2 Type I and II Errors

	True state of H_0	
Statistical decision	H_0 True	H_0 False
Reject H_0	Type I Error	Correct
Do not reject H_0	Correct	Type II Error

Definitions:

- α: Probability of rejecting H_0 given that H_0 is true.
- β: Probability of not rejecting H_0 given that H_0 is false.

3 Relevante Übersetzungen

1. Dispersion: Streuung (vermutlich SD gemeint)
2. Scatter: Streuung (vermutlich SD gemeint)

4 P-Value

Hypothese	Test-Typ	p-Wert Berechnung
$H_0 : \mu \geq \mu_0$	Einseitig (links)	$p = \texttt{pnorm}(z)$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	Einseitig (rechts)	$p = 1 - \texttt{pnorm}(z)$
$H_0 : \mu = \mu_0$	Zweiseitig	$p = 2 \cdot \texttt{pnorm}(-\lvert z \rvert)$

5 Library

library(TeachingDemos)

- Der Index 0 z.b. μ_0 bedeutet, dass es sich um einen gegebenen Wert, und nicht um einen geschätzten Wert handelt.

I) Gauß Test:

Hauptziel: Hier wird die Hypothese über den Mittelwert (μ) getestet

Mean μ ist unbekannt, wir kennen SD σ

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_0 : \mu \le \mu_0, \quad H_0 : \mu \ge \mu_0$$

Symbol	Bedeutung
n	Stichprobengröße
σ_0	Standardabweichung der gesamtheit
$\overline{X}_{(n)}$	Sample Mean

Decision Rule R:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \in R \implies \text{reject } H_0$$

Rejection Region R:

H_0	rejection region R
$\mu = \mu_0$	$(-\infty, -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$\mu \le \mu_0$	$(u_{1-\alpha}, \infty)$
$\mu \ge \mu_0$	$(-\infty, -u_{1-\alpha})$

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ = qnorm(1 - (alpha / 2))

Beispiel:

```
n <- 100
sd <- 0.3
sample_mean <- 10.1
alpha <- 0.1
#H0: mu = 10, H1: mu != 10
mu0 <- 10
#Rejection region
ru <- qnorm(1 - (alpha / 2))
rl <- -qnorm(1 - (alpha / 2))
#[-1.644854, 1.644854]
#teststatistic
t <- (sample_mean - mu0) /(sd / sqrt(n))
#3.333333
t > ru
#True
#we reject h0 because we are in the
    rejection region
p_value <- 2* pnorm(-abs(t))
#0.0008581207
p_value < alpha
#True we reject H0
```

hier vielleichtg noch z test einfpgen

II) t-Test:

Hauptziel: Hier wird die Hypothese über den Mittelwert (μ) getestet.

Mean μ und SD σ_0 sind unbekannt

⚠ Mean μ_0 wird durch H_0 gegeben ⚠

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_0 : \mu \le \mu_0, \quad H_0 : \mu \ge \mu_0$$

Symbol	Bedeutung
n	Stichprobengröße
$S_{(n)}$	Sample SD
$\overline{X}_{(n)}$	Sample Mean

Decision Rule:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}} \in R \implies \text{reject } H_0$$

Rejection Region R:

H_0	Rejection Region R
$\mu = \mu_0$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$\mu \le \mu_0$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
$\mu \ge \mu_0$	$(-\infty, -t_{n-1,1-\alpha})$

$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ = qt(1-alpha, n-1)

Beispiel:

```
#H0: mu >= 250, h1: < 250
n <- 82
sample_mu <- 248
sample_sd <- 5
alpha <- 0.05
mu0 <- 250
R <- -qt(1-alpha, n-1)
#[ , -1.663884]
t <- (sample_mu - mu0) / ((sample_sd) /
    sqrt(n))
#-3.622154
t < r
#We reject the H0
p_value <- pt(t,n - 1)
#0.0002540167
p_value < alpha
#True We reject the H0
```

III)Test für Varianz σ_0^2:

Hauptziel: Hier wird die Hypothese über die Varianz (σ_0^2) getestet.

Mean μ und SD σ sind unbekannt

⚠ Kein σ_0 da σ gegeben durch H_0 ⚠

⚠ Also kein Schätzwert ⚠

Gegeben muss sein:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \quad H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

Symbol	Bedeutung
$S^2_{(n)}$	Sample SD
$\overline{X}_{(n)}$	Sample Mean

Decision Rule:

$$T = \frac{(n-1)\, S^2_{(n)}}{\sigma_0^2} \in R \implies \text{reject } H_0.$$

Rejection Region R:

H_0	rejection region R
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$(0, \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}) \cup (\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$(\chi^2_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$(0, \chi^2_{n-1,\alpha})$

Beispiel:

```
#h0: sd >= 7, h1: sd <7
n <- 82
sample_mu <- 248
sample_sd <- 5
alpha <- 0.05
sd0 <- 7
#Rejection region
R <- qchisq(alpha, n-1)
#[ , 61.26148
#Teststatistics
t <- ((n - 1) * sample_sd)/sd0
#57.85714
t < r
#We reject H0, in R area
p_value <- pchisq(t, n-1)
#0.02419782
p_value < alpha
#we reject H0
```

IIII)Bernoulli Test für Probability p_0:

Hauptziel: Zu prüfen, ob die beobachtete Erfolgsrate $\hat{p}$ signifikant von der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p_0 abweicht

Probability p_0 ist unbekannt

$$\text{Number of successes: } X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p), \quad \text{d.h. } \mathbb{E}(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p).$$

Gegeben muss sein:

$$H_0: p = p_0, \quad H_0: p \leq p_0, \quad H_0: p \geq p_0$$

Symbol	Bedeutung
n	Stichprobengröße
X	Number of successes
$\hat{p}$	$\frac{X}{n}$ Example Probabilitz

Teststatistic

$$T = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \quad \text{mit } \hat{p} = \frac{X}{n}.$$

Rejection Region R

H_0	Rejection Area R
$p = p_0$	$(-\infty, -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$p \leq p_0$	$(u_{1-\alpha}, \infty)$
$p \geq p_0$	$(-\infty, -u_{1-\alpha})$

Normal Approximation:

```
#a) 80% immunity rate
#b) H0: p <= 80, H1: p > 80
p0 <- 0.8; n <- 200; x <- 172
alpha <- 0.05
phut <- x / n
#Rejection region
R <- pnorm(1 - alpha)
#r <- [0.8289439, ]
#teststatistic
t <- (phut-p0)/sqrt((p0 * (1 - p0)) / n)
#2.12132
t > R
#We reject H0
p_value <- 1 - pnorm(t)
#0.01694743
p_value < alpha
#We reject H0
```

Exact test:

```
#exact
binom.test(172, p = 0.8, n = n,
    alternative = 'greater', conf.level =
    1-alpha)
#0.01793
```

0) Alle Infos 2-Sample Tests:

I) 2-Sample Gauss Test:

Hauptziel: Hier wird die Hypothese über die Mittelwerte (μ_1, μ_2) getestet

Means sind unbekannt, wir kennen σ_1, σ_2

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, \quad H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

Symbol	**Bedeutung**
n_1, n_2	Stichprobengrößen
σ_1, σ_2	SD der gesamtheiten
$\overline{X}_{(n_1)}, \overline{Y}_{(n_2)}$	Sample Means

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X}_{(n_1)} - \overline{Y}_{(n_2)}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Decision Rule R:

$$T \in R \implies \text{reject } H_0$$

Rejection Region R:

H_0	Rejection Region R
$\mu_1 = \mu_2$	$(-\infty, -u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$(u_{1-\alpha}, \infty)$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$(-\infty, u_\alpha)$

Beispiel:

```r
m1 <- c(5.46, 5.34, ..., 5.82)
m2 <- c(5.45, 5.31, 4.11, ..., 4.09)
sd1 <- 0.5
sd2 <- 0.6
n1 <- length(m1)
n2 <- length(m2)
#test the H0: mu1 >= mu2
alpha <- 0.05
#rejection Region
r <- qnorm(alpha)
#[ , -1.644854]
#teststistic
t <- (mean(m1) - mean(m2)) /
  sqrt((sd1^2 / n1) + (sd2^2 / n2))
#1.027782
p_value <- pnorm(t)
#0.8479739
#we fail to reject H0 since we are
    outside of the rejection area
```

II) 2-Sample t-Test (Varianzen gleich und unbekannt):

Hauptziel: Hier wird die Hypothese über die Mittelwerte (μ_1, μ_2) getestet

Means μ_1, μ_2 sind unbekannt und $\sigma_1 = \sigma_2$

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, \quad H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

⚠ Es muss für x und y ein Sample gegeben sein ⚠

Beispiel:

```
x <- c(7.06, 11.84, ..., 8.54)
y <- c(8.68, 6, 7.82, 4.7, ..., 12.36)
#H0: X >= Y, H1 x < y
###################################
#case: equal variances:

t.test(x, y, alternative = 'less',
   paired = F, var.equal = T, conf.level
   = 0.95)
#p-value = 0.0181
#we can reject the h0 since we are under
   0.05
```

III) Welch test (Varianzen ungleich, aber unbekannt):

Hauptziel: Hier wird die Hypothese über die Mittelwerte (μ_1, μ_2) getestet

Means μ_1, μ_2 sind unbekannt und $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, \quad H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

⚠ Es muss für x und y ein Sample gegeben sein ⚠

Beispiel:

```
x <- c(7.06, 11.84, ..., 8.54)
y <- c(8.68, 6, 7.82, 4.7, ..., 12.36)
#H0: X >= Y, H1 x < y
###################################
#case: unequal variances:
t.test(x, y, alternative = 'less',
   paired = F, var.equal = F, conf.level
   = 0.95)
#p-value = 0.01596
#we can reject the h0 since we are under
   0.05
```

⚠ Das einzige was sich ändert ist: var.equal = F ⚠

IV) Two Paired Sample t-Test

⚠ Wenn Z.B einzelne Partienten vorher nacher ⚠

Hauptziel: Wir berechnen als erstes den Unterschied aller Werte der beiden Samples, und dann schauen ob der Mean signifikant Unterschiedlich von 0 ist.

σ ist unbekannt

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \mu_1 = 0, \quad H_0 : \mu_1 \leq 0, \quad H_0 : \mu_1 \geq 0$$

⚠ Es muss für x und y ein Sample gegeben sein ⚠

Beispiel:

```
#H0: mu = 0, H1: mu != 0
x <- c(16, 15, 11, 20, ..., 15, 14, 16)
y <- c(13, 13, 10,.., 10, 15, 11, 16)
t.test(x = x, y = y, alternative = 'two.
   sided', paired = T, var.equal = T,
   conf.level = 0.95, mu = 0)
#0.0007205
```

⚠ Das einzige was sich ändert ist: paired = T ⚠

V) Testing two Variances - F Test

Hauptziel: Wir vergleichen die beiden sample Varianzen.

σ ist unbekannt

Gegeben muss sein:

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_0 : \sigma_1 \leq \sigma_2, \quad H_0 : \sigma_1 \geq \sigma_2$$

⚠ Es muss für x und y ein Sample gegeben sein ⚠

Beispiel:

```
x <- c(102.4, 101.3, ..., 100.1)
y <- c(98.4, 101.7, ..., 101.0)
#H0: sd_x <= sd_y, H1: sd_x > sd_y
alpha <- 0.05
var.test(x = x, y = y, alternative = '
   greater', conf.level = 1-alpha)
#p-value = 0.03404
```

Beispiel: Erst H0 dass vars gleich sind. Wenn nicht reject, dann müssten wir mein Mean test, var.equal auf True

```
#H0: sigma_x = sigma_y, H1: sigma_x != sigma_y
var.test(x = x, y = y, alternative = 'two.sided
   ', conf.level = 1-alpha)
#p-value = 0.8814
#we fail to reject H0, also Varianz gleich oder
   fast gleich
################################################
#H0: mu_x <= mu_y, H1: mu_x > mu_y
alpha <- 0.025
t.test(x = x, y = y, alternative = 'greater',
   paired = F, var.equal = TRUE, conf.level = 1
   -alpha)
#p-value = 0.02374
#we reject H0
```

Wenn