

## Confidence Interval for $\mu$ (Known Population $\sigma$ )

Wir suchen den  $\mu$ , und wissen die Standardabweichung der Population  $\sigma$

$$\left[ \bar{X}_{(n)} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{(n)} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Falls wir ein Sample haben, können wir den z Test nutzen.  
Wenn nicht, müssen wir die Formel so schreiben

```
1 library(TeachingDemos)
2 sample <- c(8, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 20, 21)
3 sample_mean <- mean(sample)
4 pop_sd <- 2.8
5 alpha <- 0.05
6 q <- qnorm(1 - (alpha / 2))
7 n <- length(sample)
8 L <- sample_mean - q * (pop_sd / sqrt(n))
9 U <- sample_mean + q * (pop_sd / sqrt(n))
10 z.test(x = sample, stdev = pop_sd, alternative =
    "two.sided",
11       conf.level = 1-alpha)$conf.int
```

nur Upper oder Lower

Wir müssen alpha nicht mehr teilen, da sich die Prozente auf eine Seite konzentrieren

```
1 L_alleine <- sample_mean - qnorm(1 - alpha) * (
    sample_sd/sqrt(n))
2 U_alleine <- sample_mean + qnorm(1 - alpha) * (
    sample_sd/sqrt(n))
```

## Umformungen

$\bar{X}_{(n)}$ : Für den Sample Mean  $\bar{X}_{(n)}$  Umstellen

$$\bar{X}_{(n)} = \frac{\text{obere Grenze} + \text{untere Grenze}}{2}$$

```
1 sample_mean_umgestellt <- (L + U) / 2
```

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ : Für Quantile der Normalverteilung Umformen Aus  
der Intervalllänge:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{Intervalllänge} \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot \sigma}$$

Aus der oberen Grenze:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{obere Grenze} - \bar{X}_{(n)}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Aus der unteren Grenze:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\bar{X}_{(n)} - \text{untere Grenze}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

```
1 z <- (leange * sqrt(n)) / 2 * sampel_sd
2 q_umgestellt <- (U + sample_mean) / (pop_sd /
    sqrt(n))
3 q_umgestellt <- (sample_mean - L) / (pop_sd /
    sqrt(n))
```

$\sigma$ : Für die Standardabweichung  $\sigma$

Aus der oberen Grenze:

$$\sigma = \frac{(\text{obere Grenze} - \bar{X}_{(n)}) \cdot \sqrt{n}}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Aus der unteren Grenze:

$$\sigma = \frac{(\bar{X}_{(n)} - \text{untere Grenze}) \cdot \sqrt{n}}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

```
1 pop_sd_umgestellt <- ((U - sample_mean) * sqrt(n)
    ) / qnorm(1 - (alpha / 2))
2 pop_sd_umgestellt <- ((sample_mean - L) * sqrt(n)
    ) / qnorm(1 - (alpha / 2))
```

$n$ : Für die Stichprobengröße  $n$

Aus der oberen Grenze:

$$n = \left( \frac{\sigma \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\text{obere Grenze} - \bar{X}_{(n)}} \right)^2$$

Aus der unteren Grenze:

$$n = \left( \frac{\sigma \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\bar{X}_{(n)} - \text{untere Grenze}} \right)^2$$

```
1 n_umgestellt <- round(((pop_sd * q) / (U -
    sample_mean))^2)
2 n_umgestellt <- round(((pop_sd * q) / (
    sample_mean - L))^2)
```

(MOE): Mit Margin of Error

$$MOE = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left( \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{MOE} \right)^2$$

```
1 moe <- qnorm(1 - alpha / 2) * (pop_sd / sqrt(n))
2 n_aus_moe <- round(((q * pop_sd) / moe)^2)
```

$\alpha$ : Für das Signifikanzniveau  $\alpha$

$$\alpha = 2 \cdot (1 - \Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}))$$

```
1 alpha_umgestellt <- 2 * (1 - pnorm(qnorm(1 - (
    alpha / 2))))
```

Intervalllänge: Formel für die Intervalllänge

MOE = U - L

$$\text{Intervalllänge} = 2 \cdot E = 2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

```
1 intervallleange <- 2 * qnorm(1 - (alpha / 2)) *
    (sample_sd / sqrt(n))
```

MOE mit Intervalllänge

$$E = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## Confidence Interval for $\mu$ (Unknown Population $\sigma$ )

Wir suchen den  $\mu$ , und wissen die Standardabweichung des Samples  $S_{(n)}$

$$\left[ \bar{X}_{(n)} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{(n)} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Falls wir ein Sample haben, können wir den  $t$ -Test nutzen:

```
1 library(TeachingDemos)
2 sample <- c(8, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 20, 21)
3 n <- length(sample)
4 sample_mean <- mean(sample)
5 sample_sd <- sd(sample)
6 alpha <- 0.05
7 t <- qt(1 - (alpha / 2), n - 1)
8 L <- sample_mean - t * (sample_sd / sqrt(n))
9 U <- sample_mean + t * (sample_sd / sqrt(n))
10 t.test(x = sample, conf.level = 1 - alpha,
        alternative = 'two.sided')
```

nur Upper oder Lower

Wir müssen alpha nicht mehr teilen, da sich die Prozente auf eine Seite konzentrieren

```
1 L_alleine <- sample_mean - qt(1 - alpha, n - 1)
  * (sample_sd / sqrt(n))
2 U_alleine <- sample_mean + qt(1 - alpha, n - 1)
  * (sample_sd / sqrt(n))
```

## Umformungen

$\bar{X}_{(n)}$ : Für den Sample Mean  $\bar{X}_{(n)}$  Umstellen

$$\bar{X}_{(n)} = \frac{\text{obere Grenze} + \text{untere Grenze}}{2}$$

```
1 sample_mean_umgestellt <- (L + U) / 2
```

$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ : Für Quantile der  $t$ -Verteilung  $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$

Aus der Intervalllänge:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \frac{\text{Intervalllänge} \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot s}$$

Aus der oberen Grenze:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \frac{\text{obere Grenze} - \bar{X}_{(n)}}{\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}}$$

Aus der unteren Grenze:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \frac{\bar{X}_{(n)} - \text{untere Grenze}}{\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}}$$

```
1 t_umgestellt_1 <- (U - L) * sqrt(n) / (2 *
  sample_sd)
2 t_umgestellt_2 <- (U - sample_mean) / (sample_sd
  / sqrt(n))
3 t_umgestellt_3 <- (sample_mean - L) / (sample_sd
  / sqrt(n))
```

$S_{(n)}$ : Für die Sample Standardabweichung  $S_{(n)}$

Aus der oberen Grenze:

$$S_{(n)} = \frac{(\text{obere Grenze} - \bar{X}_{(n)}) \cdot \sqrt{n}}{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

Aus der unteren Grenze:

$$S_{(n)} = \frac{(\bar{X}_{(n)} - \text{untere Grenze}) \cdot \sqrt{n}}{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

```
1 sample_sd_umgestellt_1 <- (U - sample_mean) * (
  sqrt(n)) / t
2 sample_sd_umgestellt_2 <- (sample_mean - L) * (
  sqrt(n)) / t
```

$n$ : Für die Stichprobengröße  $n$

Aus der oberen Grenze:

$$n = \left( \frac{S_{(n)} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}{\text{obere Grenze} - \bar{X}_{(n)}} \right)^2$$

Aus der unteren Grenze:

$$n = \left( \frac{S_{(n)} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}{\bar{X}_{(n)} - \text{untere Grenze}} \right)^2$$

```
1 n_umgestellt_1 <- round(((sample_sd * t_value) /
  (U - sample_mean))^2)
2 n_umgestellt_2 <- round(((sample_sd * t_value) /
  (sample_mean - L))^2)
```

(MOE): Mit Margin of Error

$$MOE = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left( \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot S_{(n)}}{MOE} \right)^2$$

```
1 moe <- t_value * (sample_sd / sqrt(n))
2 n_aus_moe <- round(((t_value * sample_sd) / moe)
  ^2)
```

$\alpha$ : Für das Signifikanzniveau  $\alpha$

$$\alpha = 2 \cdot (1 - \Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}))$$

```
1 alpha_umgestellt <- 2 * (1 - pt(qt(1 - (alpha /
  2), df = n - 1), df = n-1))
```

Intervalllänge: Formel für die Intervalllänge

Intervalllänge = U - L

$$\text{Intervalllänge} = 2 \cdot MOE = 2 \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}$$

```
1 intervalllaenge <- 2 * qt(1 - (alpha / 2), df =
  n - 1) * (sample_sd / sqrt(n))
```

MOE mit Intervalllänge

$$MOE = \frac{\text{Intervalllänge}}{2} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}$$

```
1 moe_aus_intervalllaenge <- intervalllaenge / 2
```

Confidence interval for  $\sigma^2$ , mean  $\mu_0$   
known:

Wir suchen die Variance  $\sigma^2$ , und kennen  
den mean des Samples  $\mu$

$$\left[ \frac{Q_{(n)}}{\chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{Q_{(n)}}{\chi_{n-1; \frac{\alpha}{2}}^2} \right] \quad \text{with} \quad Q_{(n)} = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

Wir brauchen ein Sample oder einen Wert für  $Q_{(n)}$ .

```
1 sample <- c(247.4, 249.0, 248.5, ..., 249.4)
2 mean <- 250
3 alpha <- 0.05
4 n <- length(sample) #20
5 qn <- sum((sample - mean)^2)
6 L_var <- qn / (qchisq(1 - (alpha / 2), n))
7 U_var <- qn / qchisq(alpha / 2, n)
```

Confidence interval for  $\sigma^2$ , mean  $\mu_0$   
**UNKNOWN:**

Wir suchen die Variance  $\sigma^2$ , und kennen  
den mean des Samples  $\mu$  **NICHT**

$$\left[ \frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\chi_{n-1; \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

Wir brauchen N und Sample sd. Geht auch ohne Sample.

```
1 sample <- c(247.4, 249.0, 248.5, ..., 249.4)
2 alpha <- 0.05
3 sample_sd <- sd(sample)
4 n <- length(sample) #20
5 b <- (n - 1) * sample_sd^2
6 L_var <- b / qchisq(1 - (alpha / 2), n-1)
7 U_var <- b / qchisq(alpha / 2, n - 1)
8 sigma.test(x = sample, conf.level = 1 - alpha,
             alternative = 'two.sided')
```

## Confidence Interval for $\hat{p}$ (Proportion)(Stichprobenanteil)

We are estimating  $\hat{p}$ , the sample proportion

$$\left[ \hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$$\hat{p} = \frac{\text{probability} \cdot n}{n}$$

```
1 prob <- 0.7
2 alpha <- 0.05
3 n <- 250
4 p_hut <- (prob*n)/n
5 q <- qnorm(1-(alpha/2))
6 L <- p_hut - q * sqrt((p_hut * (1-p_hut))/n)
7 U <- p_hut + q * sqrt((p_hut * (1-p_hut))/n)
8 binom.test(x=0.7 * n, n=n, conf.level = 1-alpha,
  alternative = "two.sided")$conf.int
9 #[0.6431948, 0.7568052]
```

wir sind uns zu 95% sicher, dass zwischen 64% und 75% der Wähler ja gestimmt haben.

Nur obere oder untere Grenze berechnen:

Hier teilen wir  $\alpha$  nicht mehr, da sich die Prozente auf eine Seite konzentrieren:

```
1 q <- qnorm(1 - alpha)
2 L_alleine <- p_hut - q * sqrt((p_hut * (1 -
  p_hut))/n)
3 L_exact <- binom.test(x=0.7*n, n=n, conf.level =
  1-alpha, alternative = 'greater')$conf.int
4 U_alleine <- p_hut + q * sqrt((p_hut * (1 -
  p_hut))/n)
5 U_exact <- binom.test(x=0.7*n, n=n, conf.level =
  1-alpha, alternative = 'less')$conf.int
```

```
1 #nach q umstellen
2 leange <- U - L
3 q_umgestellt_1 <- (leange * sqrt(n)) / (2 * sqrt
  (p_hut * (1 - p_hut)))
4 q_umgestellt_2 <- (U - p_hut) / (sqrt(p_hut * (1
  - p_hut) / n))
5 q_umgestellt_3 <- (p_hut - L) / (sqrt(p_hut * (1
  - p_hut) / n))
```

MOE (Margin of Error):

$$MOE = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$MOE = \frac{\text{Intervalllänge}}{2}$$

```
1 moe <- q * (sqrt(p_hut * (1 - p_hut) / n))
2 moe_2 <- leange / 2
```

Intervalllänge:

$$\text{Intervalllänge} = 2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{Intervalllänge} = U - L$$

```
1 intervalllaenge <- 2 * q * (sqrt(p_hut * (1 -
  p_hut) / n))
2 intervalllaenge <- U - L
```

## Umformungen

$\hat{p}$ : Solving for  $\hat{p}$

$$\hat{p} = \frac{\text{upper limit} + \text{lower limit}}{2}$$

```
1 p_hut <- (L + U) / 2
```

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ : Für Quantile der Normalverteilung Umformen

Aus der Intervalllänge:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{Intervalllänge} \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}$$

Aus der oberen Grenze:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{obere Grenze} - \hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

Aus der unteren Grenze:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\hat{p} - \text{untere Grenze}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$