Pontificia Universidad Javeriana

Análisis Numérico

Método de Punto Fijo

Docente: Eddy Herrera Daza

Andrés Giraldo Malágon, Camilo García Silva, David Ramírez Monroy

2021

Método de Punto Fijo

Andrés Malagón, Camilo García, David Ramírez

August 23, 2021

1 Introducción al método

El metodo del punto fijo se puede definir como uno de los tanto metodos iterativos aplicables para la determinacion de raizes de la forma f(x), cabe decir que estas deben cumplir con ciertos criterios de convergencia. Inicialmente se plantea la ecuacion x = g(x) , que sera iterada tantas veces como sea necesario hasta alcanzar el valor aproximado mas cercano a la raiz.

2 Análisis

2.1 Cuales son condiciones para aplicar el método

El método de punto fijo requiere de ciertas condiciones para que este pueda ser aplicado, estas son: Dada una función continua y derivable, debe existir un intervalo [a,b] donde la imagen de la función cambie de signo. Después de haber comprobado lo mencionado anteriormente, se reemplaza la ecuación f(x) = 0 por otra equivalente, de la forma x = g(x).

2.2 Explicación geométrica del algoritmo

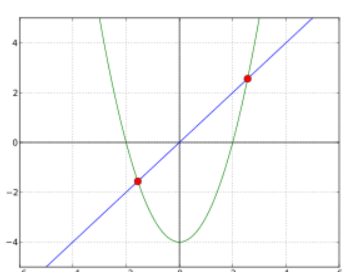

Figure 1: Los dos puntos fijos, marcados en rojo, de la función $f(x) = x^2 - 4$

Los puntos fijos de una función g(x), son los puntos de intersección de la curva y = g(x) con la recta y = x. La iteración $p_{n+1} = g(p_n)$ para n= 0,1... es llamada iteración de punto fijo. Teniendo esto en cuenta, se repite el proceso hasta que se compruebe el error permitido. Entonces pn+1 es una aproximación a una raíz de f(x).

2.3 Diagrama de flujo operación del Algoritmo

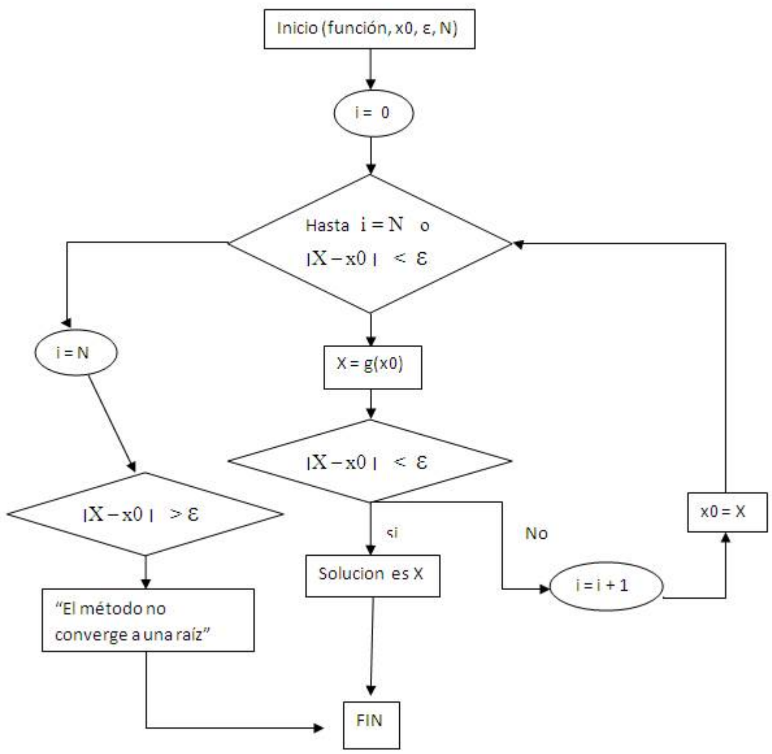

Figure 2: Diagrama de flujo

2.4 Cuáles son las raíces.

Para la realización del taller se hallaron las raices de las siguientes funciones:

- a.$f(x) = cos^2(x) - x^2$
- b.$f(x) = xsin(x) - 1$ en [1,2]
- c.$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

- d. Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s

- e. $x^3 - 2x - 5 = 0$

Raíces halladas		
Funcion	Algoritmo punto fijo	Wolfram
$f(x) = cos^2(x) - x^2$	±0.73908513	±0.739085
$f(x) = xsin(x) - 1$ en [1,2]	±1.11415714	±1.114157
$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$	0.6875	0.66667
$f(x) = \frac{gm}{x}(e^{-\frac{x}{m}}t - v$	±14.7802038	±14.780203
$x^3 - 2x - 5 = 0$	2.094551	2.0946

Tabla 1. Tabla de las raices halladas en cada función.

2.5 Comportamiento del método

Dentro de los resultados obtenidos se identificó que el número de iteraciones varía notablemente según la tolerancia aplicada a cada función, siendo estos más altos conforme la tolerancia aumentaba. Aún así después de cierto numero de iteraciones no era posible continuar con la ejecucion del programa , pues el error disminuia a valores muy cercanos a cero y tenian una variación indetectable para el equipo de computo, en ciertas funciones se obtenia el mismo número de iteraciones puesto que estas se detenian por la razón antes explicada. Afortunadamente todas las funciones evaluadas convergen de manera adecuada en los intervalos descritos para cada una de ellas,permitiendo un analisis mas claro y focalizado a una region conveniente.

Comportamiento $f(x) = cos^2(x) - x^2$	
Tolerancia	numero iteraciones
$10e^{-8}$	47
$10e^{-16}$	24
$10e^{-32}$	24
$10e^{-56}$	24

Tabla 2. comportamiento función 1.

Comportamiento $f(x) = xsin(x) - 1$ en [1,2]	
Tolerancia	numero iteraciones
$10e^{-8}$	31
$10e^{-16}$	1000
$10e^{-32}$	1000
$10e^{-56}$	1000

Tabla 3. comportamiento función 2.

Comportamiento $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$	
Tolerancia	numero iteraciones
$10e^{-8}$	1000
$10e^{-16}$	1000
$10e^{-32}$	1000
$10e^{-56}$	1000

Tabla 3. comportamiento función 3.

Comportamiento $f(x) = \frac{gm}{x}(e^{-\frac{x}{m}}t - v$	
Tolerancia	numero iteraciones
$10e^{-8}$	2
$10e^{-16}$	2
$10e^{-32}$	2
$10e^{-56}$	2

Tabla 4. comportamiento función 4.

Comportamiento $x^3 - 2x - 5 = 0$	
Tolerancia	numero iteraciones
$10e^{-8}$	11
$10e^{-16}$	21
$10e^{-32}$	21
$10e^{-56}$	21

Tabla 5. comportamiento función 5.

2.6 Problema de significancia

2.7 ¿Qué pasa con el método cuando hay más de dos raíces?

Para cada funcion, en el momento de la parametrizacion del algoritmo se definen intervalos optimos para la solucion del problema, siendo estos los responsables de evitar la aparicion de mas de 2 raices.

2.8 ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Al momento de obtener una función periódica, el método va a perder mucha precisión en sus resultados a medida que aumenta el valor de la tolerancia, eso dependiendo del epsilon de la maquina donde se ejecute el método, tomaremos como ejemplo la función 3 (Ver punto 2.3), la cual tiene 2/3 como resultado de la raiz según el software Wolfram, a diferencia del algoritmo creado, el cual altero los valores para lograr alcanzar el valor mínimo de error (Ver punto 2.3). Además, para algunas funciones de orden superior a dos el método pierde precisión con respecto al número de tolerancia y el epsilon de la máquina.

2.9 Comportamiento del método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

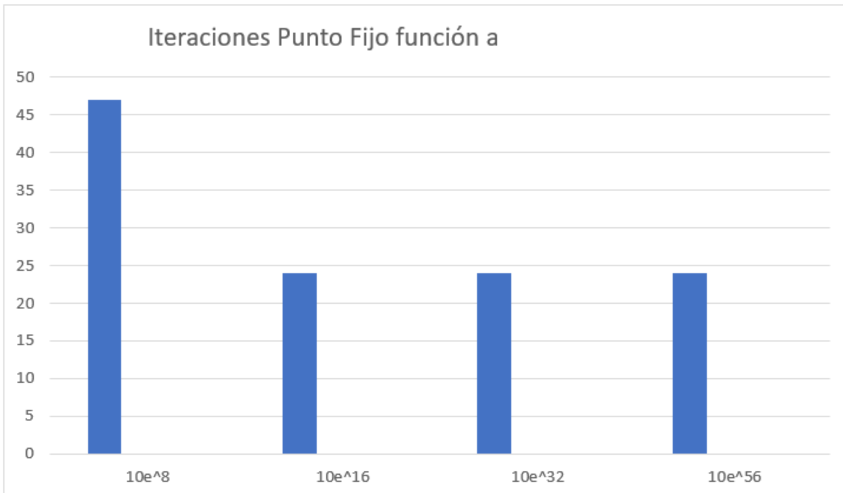

Figure 3: Iteraciones para la función $f(x) = cos^2(x) - x^2$

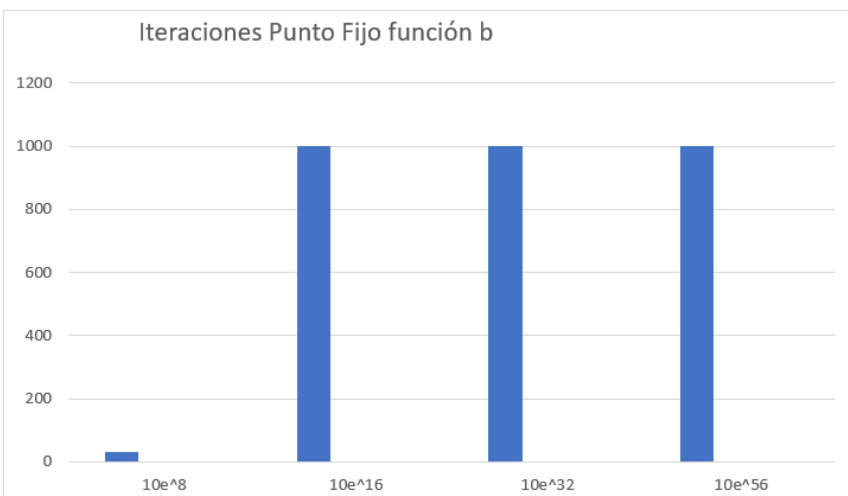

Figure 4: Iteraciones para la función b.$f(x) = xsin(x) - 1$ en [1,2].

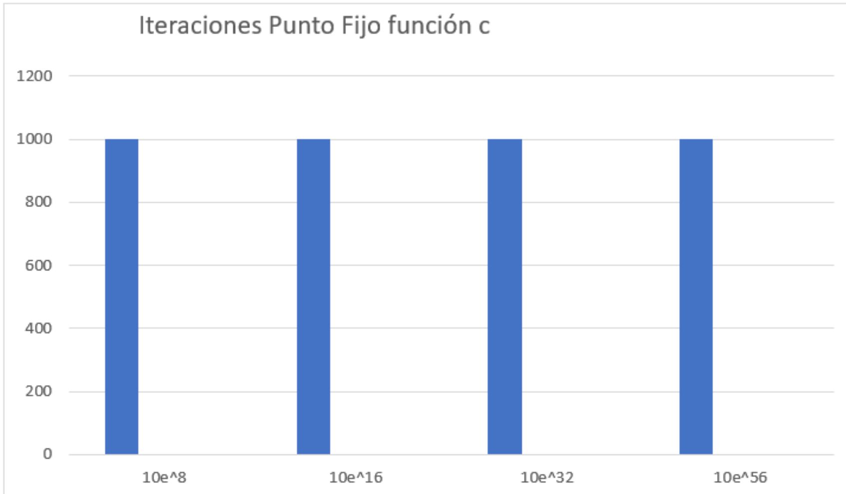

Figure 5: Iteraciones para la función c.$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

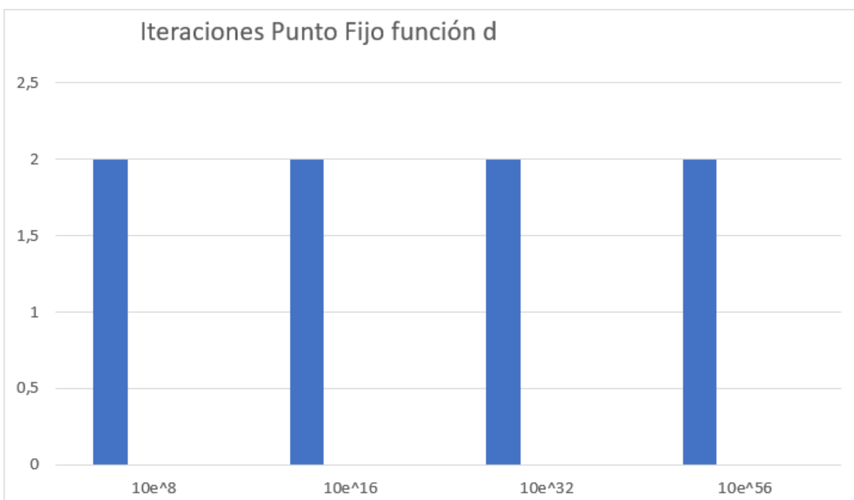

Figure 6: Iteraciones para la función d.$f(x) = \frac{gm}{x}(e^{-\frac{x}{m}}t) - v$

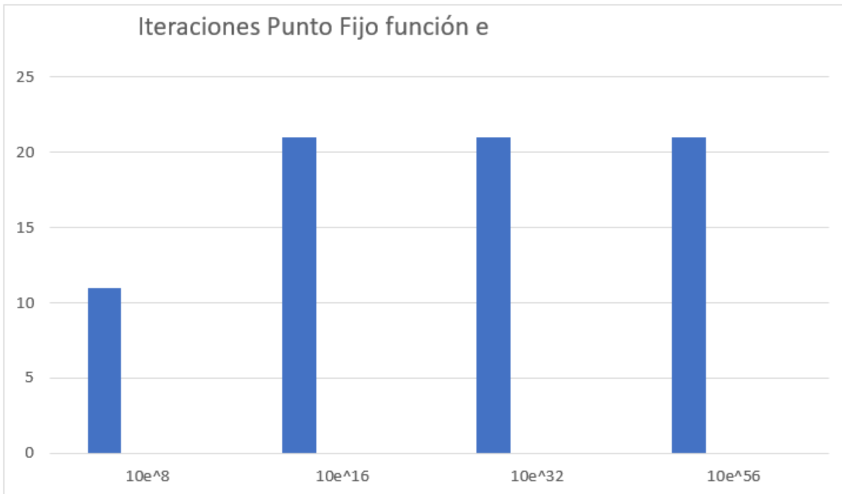

Figure 7: Iteraciones para la función e.$x^3 - 2x - 5 = 0$

2.10 Como se comporta el método con respecto al de bisección

En el método de bisección observamos una gran diferencia respecto al rendimiento pues las iteraciones son notablemente menores en funciones con intervalos de evaluacion bastante amplios, esto debido a su metodo de implementacion, que itera en su intervalo en busca de un punto medio.

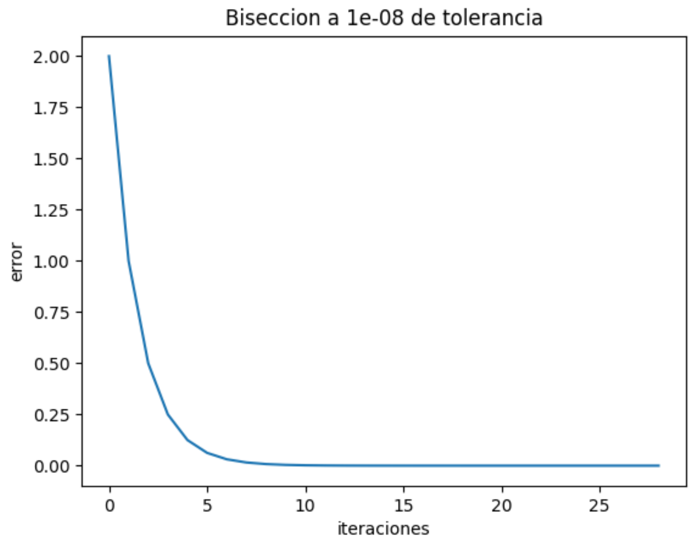

Figure 8: Comportamiento Bisección con respecto a la tolerancia $*10^{-8}$.

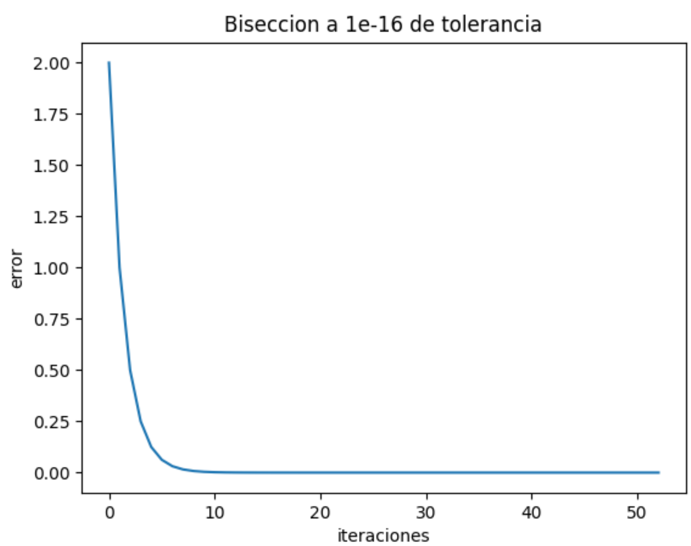

Figure 9: Comportamiento Bisección con respecto a la tolerancia $*10^{-16}$.

2.11 Como se comporta el método con respecto a la solución con Aitken

Respecto al metodo de Aitken es evidente una gran diferencia en terminos de iteraciones necesarias para dar con el valor de la raíz mas próximo, este es de los pocos metodos que nos permite observar una variacion concisa entre las 4 diferentes tolerancias con valores exactos, ademas cabe recalcar que toma significativamente menos tiempo en evaluar cada una de las funciones, todo lo anterior debido a la forma en que se debe implementar dicho algoritmo, acelerando la evaluacion de Xi segun sus tres valores anteriores.

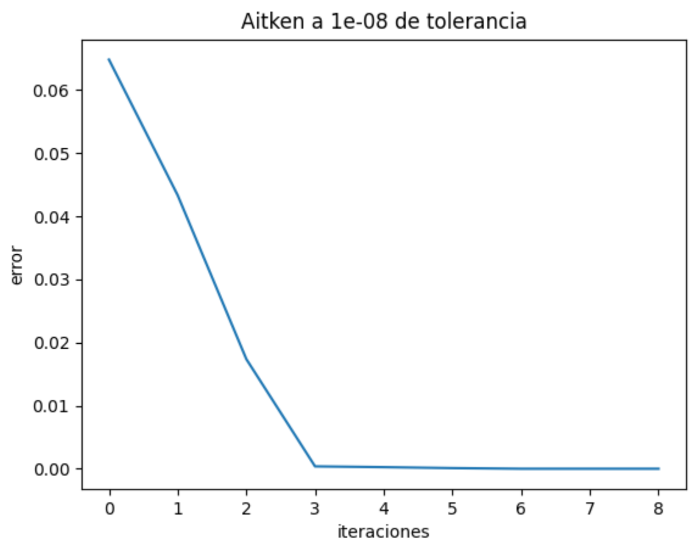

Figure 10: Comportamiento Aitken con respecto a la tolerancia $*10^{-8}$.

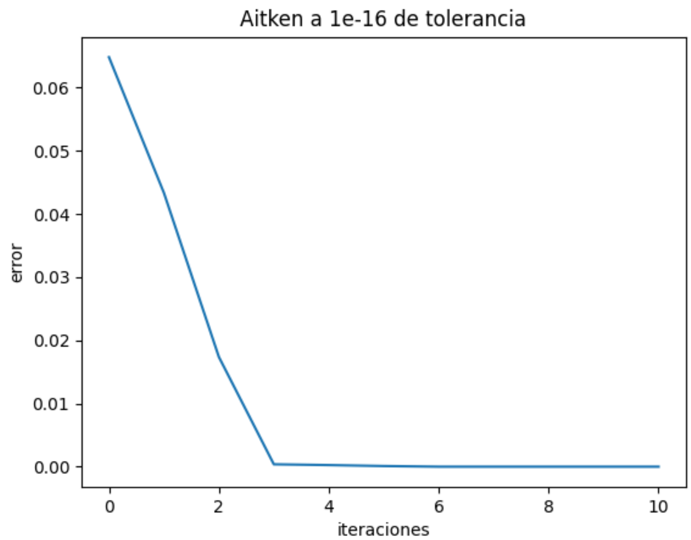

Figure 11: Comportamiento Aitken con respecto a la tolerancia $*10^{-16}$.

3 Bibliografía

References

[1] Mathews, J., Fink, K. (2003). Numerical Methods Using MATLAB (4th Revised ed.). Pearson.