

Índice

1. Integración en el plano complejo	1
2. Series y el teorema del residuo	2
3. Series de Fourier	3
4. La transformada integral de Fourier	5
4.1. Tabla de transformadas	5
5. Anexos	5
5.1. Producto a suma	5
5.2. senos y cosenos como exponenciales	6

1. Integración en el plano complejo

Definición 1.1. La integral compleja La integral compleja f sobre C es

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k^*) \Delta z_k$$

Teorema 1.1 (Evaluación de una integral de contorno). Si f es continua sobre una curva C dada por la parametrización $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)dt$$

Teorema 1.2 (Teorema del acotamiento). Si f es continua sobre una curva suave C y $|f(z)| \leq M \forall z$ en C , entonces

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$$

donde L es la longitud de C .

Teorema 1.3 (Teorema de Cauchy-Goursat). Suponga que f es analítica en un dominio simplemente conexo D . Entonces para cada contorno simplemente cerrado C en D

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema 1.4 (Singularidad). Sea C un contorno simplemente cerrado que contiene a un solo punto singular z_0 , entonces $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy-Goursat para dominios simplemente conexos). Sean C, C_1, C_2, \dots, C_n contornos simplemente cerrados con una orientación positiva tales que $C_k, k = 1, 2, \dots, n$ están contenidos en C donde C_i, C_j con $i \neq j$ no tienen puntos en común y f es analítica en el interior de C y fuera de $C_k, k = 1, 2, \dots, n$. Entonces

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz$$

Teorema 1.6 (Analiticidad implica independencia de la trayectoria). *Suponga que D es un dominio simplemente conexo y C una trayectoria en D , entonces $\int_C f(z)dz$ es independiente de la trayectoria.*

Teorema 1.7 (Teorema fundamental de las integrales de contorno). *Sea f una función continua en D , sea F la antiderivada de f en D , Sea C una camino con un punto inicial z_0 y un punto final z_1 , entonces*

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Teorema 1.8 (Existencia de la antiderivada). *Suponga que f es analítica en un dominio simplemente conexo D , entonces $\exists F$ para f en D .*

Teorema 1.9 (Formula de la integral de Cauchy). *Suponga que f es analítica en un dominio simplemente conexo D y C una curva simplemente cerrada, donde cada punto de C esta en D , entonces para un punto z_0 encerrado por C*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Teorema 1.10 (Formula de la integral de Cauchy para derivadas). *Suponga que f es analítica en un dominio simplemente conexo D y C una curva simplemente cerrada situada enteramente en D , entonces para un punto z_0 dentro de C*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

2. Series y el teorema del residuo

Teorema 2.1 (Criterio de convergencia de una sucesión). *una secuencia $\{z_n\}$ converge a un valor L tanto $Re(z_n)$ como $Im(z_n)$ convergen.*

Lema 2.2 (Reordenación de una serie de potencias). *Una serie de potencias converge absolutamente dentro de su radio de convergencia. Como consecuencia, se pueden reordenar los sumandos sin el problema de afectar su valor de convergencia.*

Teorema 2.3 (Continuidad). *Una serie de potencias dentro de su radio de convergencia representa una función continua.*

Teorema 2.4 (Diferenciación e integración de una serie de potencias). *Cualquier serie de potencias es diferenciable en su radio de convergencia R e integrable bajo una curva simple cerrada C , donde C esta situada en el R .*

Teorema 2.5 (El teorema de Taylor). *Sea f una función analítica en un dominio D y z_0 un punto en D , entonces f tiene una representación en series de la forma*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Si el círculo de convergencia de la serie esta en D .

Teorema 2.6 (El teorema de Laurent). *Suponga f analítica en un dominio D definido por $r \leq |z - z_0| \leq R$. Así, f tiene una representación en D de la forma*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

donde los coeficientes a_k estan dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s) ds}{(s - z_0)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

con C un contorno simple cerrado en D y z_0 esta en su interior.

3. Series de Fourier

Definición 3.1. Producto interno Se dice que una funcion $(,): V \rightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno si para $u, v, w \in V$, con V un espacio vectorial, $\alpha \in \mathbb{K}$ si se cumple que

1. $(u, v) = (v, u)$
2. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$
3. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$
4. $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$
5. $(u, u) = 0$ si $u = 0$

Definición 3.2. La norma de un vector La norma de un vector bajo un producto interno definido de un vector $v \in V$ es $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$

Definición 3.3. Vector ortogonal Se dice que un vector u es ortogonal a v si $(u, v) = 0$.

Definición 3.4. Conjunto ortogonal Se dice que un conjunto $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ es ortogonal si $(u_i, u_j) = 0 \quad i \neq j$.

Definición 3.5. El producto interno de funciones El producto interno de dos funciones f y g en el intervalo $[a, b]$ es

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Teorema 3.1 (Expansion ortogonal en series). Suponga que $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal en $[a, b]$, entonces una funcion puede ser escrita como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2} \phi_k$$

Teorema 3.2 (Conjunto ortogonal y funcion peso). Un conjunto $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto a una funcion peso $w(x)$ en $[a, b]$ si

$$\int_a^b w(x) \phi_m \phi_n dx = 0, \quad m \neq n$$

Definición 3.6. Las series de Fourier Una funcion f definida en un un intervalo $(-T/2, T/2)$ esta dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)]$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t) dt,$$

Teorema 3.3 (Convergencia de las series de Fourier). Sea f una funcion continua a trozos. La serie de fourier convergera en los tramos continuos a f y convergera a los puntos discontinuos a la semisuma

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Definición 3.7. Paridad de funciones Se dice que una funcion f es par si $f(-x) = f(x)$ (simetrica respecto al eje y) e impar si $f(-x) = -f(x)$ (simetrica respecto al origen).

Teorema 3.4. *Propiedades de funciones pares e impares*

1. El producto de dos funciones, ya sean ambas pares o impares, es par.
2. El producto de una funcion par con una impar es impar.
3. La suma de dos funciones pares da una funcion par.
4. La suma de dos funciones impares da una funcion impar.
5. Si f es par, entonces $\int_{-p}^p f(x)dx = 2 \int_0^p f(x)dx$
6. Si f es impar, entonces $\int_{-p}^p f(x)dx = 0$

Teorema 3.5 (Serie de cosenos). *La series de Fourier para una funcion par en $(-p, p)$ es*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0 t)$$

donde

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)dx, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t)dt$$

Teorema 3.6 (Serie de senos). *La series de Fourier para una funcion impar en $(-p, p)$ es*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nw_0 t)$$

donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(nw_0 t)dt$$

Definición 3.8. Serie compleja de Fourier Suponga f continua a trozos en un intervalo $(-p, p)$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\pi n x i / p}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\pi n x i / p} dx$$

Definición 3.9. Frecuencia angular fundamental y espectro de frecuencia $\omega = 2\pi/T = \pi/p$ es la frecuencia angular de la serie de Fourier. Los espectros de frecuencia son es la grafica $(nw, |c_n|)$.

Teorema 3.7. *La ecuacion del calor en una dimension $\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{c^2} u_t(x, t)$*

4. La transformada integral de Fourier

Definición 4.1. Las transformadas de integrales La transformada de una integral es una transformación lineal $T : t \rightarrow s$ para una función f tal que

$$F(s) = \int_a^b f(t)k(t, s)dt$$

donde $k(t, s)$ es el kernel integral y $F(s)$ es la transformada de la función f .

Definición 4.2. La integral de Fourier para una función f definida en $(-\infty, \infty)$ es

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x) dx$$

donde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx, \quad B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

Definición 4.3. La transformada de Fourier se define como

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

4.1. Tabla de transformadas

$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\}$
$k[H(t + d/2) - H(t - d/2)]$	$(2k/\omega) \sin(\omega d/2)$
$H(t)e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha + i\omega}$
$f(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\}$
$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$\delta(t)$	1
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{ a } F(\omega/a)$
$f(-t)$	$F(-\omega)$
$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$(F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))/2$
$t^n f(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\pi/a} \exp(-\omega^2/(4a))$
$1/(a^2 + t^2)$	$(\pi/a) \exp(-a \omega)$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$

5. Anexos

5.1. Producto a suma

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\tan x \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$

$$\tan x \cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}$$

5.2. senos y cosenos como exponenciales

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$