Escuela Superior de Cómputo

Reporte

Series alternantes

por:

Ángel López Manríquez

profesora

Lic. Claudia Jisela Dorantes Villa

18 de junio de 2019

1. Introducción

El concepto de serie se refiere a sumar sucesiones que siguen una determinada regla y se denota como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ o $\sum a_i$ que es otra forma de decir $a_1 + a_2 + \ldots$, en el presente reporte se abordaran a las series alternantes, que tienen la forma $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(-1)^k$ o , $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(-1)^{k+1}$ con sus respectivos criterios de convergencia.

2. Desarrollo

Una serie alternante es una serie en la que los terminos consecutivos alternan de signo, por ejemplo:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k = \cos x$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

Donde la primera es una serie de McLaurin para el coseno de x y la segunda es la serie de Grandi.

2.1. Teorema de convergencia para series alternantes

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(-1)^{n+1}$$

cumple con

$$1)\ b_{n+1} \leq b_n \qquad\qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces la serie es convergente.

2.2. Demostración

Por 1), tenemos

$$b_n - b_{n+1} \geq 0$$

Ahora, consideremos las sumas parciales como:

$$\begin{aligned}
S_2 &= b_1 - b_2 \geq 0 \\
S_4 &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 = S_2 + b_3 - b_4 \geq S_2 && \text{Puesto que } b_3 - b_4 \geq 0 \\
S_6 &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 = S_4 + b_5 - b_6 \geq S_4 && \text{puesto que } b_5 - b_6 \geq -0 \\
&\vdots \\
S_{2n} &= S_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geq S_{2n-2} && \text{puesto que } b_{2n-1} - b_{2n} \geq 0
\end{aligned}$$

Asi, vemos que S_{2n} esta creciendo y esta siendo acotada por abajo por S_{2n-2}.

Notemos que tambien podemos escribir la serie como:

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 + \cdots - b_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \\
&= b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) + \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}
\end{aligned}$$

Donde cada diferencia indicada entre los parentesis es mayor o igual a cero y por la condicion 1) tambien sabemos que a_{2n} es un termino positivo. Por lo que, podemos decir que $S_{2n} \leq b_1$ $\forall n$.

Asi, vemos que la serie esta acotada tanto por arriba como por abajo, por lo que la serie debe converger. Asumamos que su es L, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$$

Tambien sabemos, por la condicion 2) que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, por lo que, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + b_{2n+1}) = L + 0 = L$$

Vemos que S_{2n} y S_{2n+1} convergen al mismo limite L y sabemos que son secuencias de S_n, Por lo que la serie converge. □

2.3. error en la aproximación

Algo que nos puede resultar util es aproximar una serie alternante (convergente, claro esta) si se cumplen los casos anteriores, sigamos asumiendo que $L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k(-1)^{k+1}$, podemos decir que $L \approx \sum_{k=1}^{m} b_k(-1)^{k+1}$ o $L \approx S_m$ y

$$S_m \leq L \leq S_{m+1}$$

Lamentablemente no se recurre mucho a esto, a menos que se estime la aproximacion de la suma total, El error involucrado al usar $L \approx S_m$ es el residuo $R_n = L - S_m$.

2.4. Teorema de estimación para series alternantes

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(-1)^{n+1}$$

cumple con

$$1)\ b_{n+1} \leq b_n \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

$$\text{entonces} \qquad |R_n| = |L - S_n| \leq b_{n+1}$$

2.5. demostración

Sabemos de la demostracion para la prueba de series alternantes que L queda entre dos sumas parciales, por lo que se infiere que:

$$|L - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = b_{n+1}$$

□

2.6. residuos en la aproximación de series alternantes

ejemplos

3. Conclusión

3.1. Ángel

El estudio de las series resulta de gran importancia para las ciencias y la ingenieria, puesto que con las mismas es posible hacer integrales que con los metodos tradicionales es imposibles resolverlas ($\int e^{x^2} dx$, $\int \sin(t^2) dt$, por mencionar algunos ejemplos). Asi como las calculadoras, que mediante series de Taylor y McLaurin es posible la implementacion de las funciones trigonometricas y logaritmos.