

分类号: O241.82-533(1)
U.D.C.: 519.6

密级: 公开
编号:

中国工程物理研究院

学位论文

基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律

两步四阶有限体积格式

李昂

指导教师姓名 成娟 研究员

李杰权 教授

申请学位级别 博士 专业名称 计算数学

论文提交日期 2024年4月26日 论文答辩日期 2024年5月23日

授予学位单位 中国工程物理研究院

答辩委员会主席 李若 教授

2024年5月24日

Two-stage fourth order finite volume scheme based on compact Hermite reconstruction for hyperbolic conservation laws

Dissertation Submitted to
China Academy of Engineering Physics
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Science

in
Computational Mathematics

by
Ang Li

Dissertation Supervisor: Profs. Juan Cheng & Jiequan Li

May 24th, 2024

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的科研成果。据我所知，除文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国工程物理研究院或其他教育机构的学位或证书使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：

签字日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解并接受中国工程物理研究院研究生院有关保存、使用学位论文的规定，允许论文被查阅、借阅和送交国家有关部门或机构，同时授权中国工程物理研究院研究生院可以将学位论文全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

学位论文作者签名：

导师签名：

签字日期： 年 月 日

签字日期： 年 月 日

摘 要

流体力学是研究流体流动规律的科学，它在航空航天工程、天气预报、激光聚变和武器物理等领域有着重要的应用。计算流体力学用数值方法模拟流体流动，其精度和效率是当前学术界关注的热点问题。紧致的数值格式在间断附近的分辨率高，同时由于其模板小，能减少虚拟单元层数，降低计算节点间的通信开销，从而可提高并行计算的效率。高精度高效的数值格式能在较低的计算资源和内存消耗下，得到可靠的计算结果。因此，设计一个紧致的高精度数值格式具有重要的学术意义与应用价值，也是一个极具挑战性的课题。

针对双曲守恒律方程，文[1]中提出了一种基于五阶的埃尔米特加权基本无振荡（HWENO）和加权基本无振荡（WENO）重构与广义黎曼问题解法器的两步四阶数值格式。为了提高数值格式的紧致性和效率，本文旨在研究求解双曲守恒律的基于紧致埃尔米特重构的时空四阶精度显式两步四阶有限体积格式。我们提出了改进的两步四阶时间推进框架，克服了原始推进框架的紧致性和高精度不可兼得的困难。然后在一维和二维情形下，我们分别设计了两种基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式，即加权型和杂交选择型的紧致两步四阶格式。这两种格式基于我们新构造的紧致的基本无振荡的埃尔米特重构和广义黎曼问题解法器，并且为了避免振荡，采用了WENO和杂交选择技术。作为这项工作的推广，我们还设计了基于紧致埃尔米特重构的空间八阶精度基本无振荡的两步四阶数值格式。这些两步四阶数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效和基本无振荡的特点。最后，我们给出大量数值算例验证了所设计数值格式的优良特性。

关键词：双曲守恒律，两步四阶时间推进框架，紧致埃尔米特重构，高阶精度，广义黎曼问题解法器

Abstract

Fluid dynamics is the science that studies the laws of fluid flow, and it has important applications in aerospace engineering, weather forecasting, laser fusion, weapons physics, and other fields. Computational fluid dynamics simulates fluid flow using numerical methods, and its accuracy and efficiency are hot topics in the academic community. Compact numerical schemes have high resolution near discontinuities, and because their stencils are narrow, they can reduce the number of ghost cell layers, reduce the communication overhead between computing nodes, and thus they can improve the efficiency of parallel computing. High order and efficient numerical schemes can obtain reliable calculation results with lower computational resources and memory consumption. Therefore, designing compact and high order numerical schemes has important academic significance and application value, and is also a challenging issue.

In the work [1], a two-stage fourth order numerical scheme for hyperbolic conservation laws is proposed, which is based on fifth-order weighted essentially non-oscillatory (WENO) and Hermite WENO (HWENO) reconstructions and generalized Riemann problem solver. In order to further improve the compactness and efficiency of the numerical scheme, we aim to design explicit two-stage fourth order finite volume schemes based on compact Hermite reconstruction for solving hyperbolic conservation laws in this thesis, which are fourth-order in both spatial and temporal directions. We propose an improved two-stage fourth order time-stepping framework, which solves the difficulty of not having both compactness and high accuracy in the original time-stepping framework. Then in one-dimensional and two-dimensional cases, we design two essentially non-oscillatory two-stage fourth order numerical schemes based on compact Hermite reconstruction, respectively, i.e., the weighted and hybrid chosen of compact two-stage fourth order schemes. They are based on our newly designed compact essentially non-oscillatory Hermite reconstructions and generalized Riemann problem solver. In order to avoid oscillations, we use WENO and hybrid choice techniques. As an extension of this work, the essentially non-oscillatory two-stage fourth order numerical schemes based on compact Hermite reconstruction are extended to eighth-order accuracy in space. These two-stage fourth order numerical schemes are high-order, stable, compact, efficient and essentially non-oscillatory. Finally, we present a large number of numerical examples to verify the excellent performance of the designed numerical schemes.

Keywords: Hyperbolic conservation laws, Two-stage fourth order time-stepping framework, Compact Hermite reconstruction, High order, GRP solver

目 录

摘 要	I
Abstract	III
第一章 绪论	1
1.1 研究背景.....	1
1.1.1 计算流体力学	1
1.1.2 双曲守恒律及其数值格式	2
1.2 研究现状.....	5
1.2.1 时间推进框架	6
1.2.2 重构算法	7
1.2.3 解法器.....	9
1.3 本文的研究目的和主要工作	12
第二章 改进的双曲守恒律两步四阶时间推进框架	15
2.1 原始的两步四阶时间推进框架	15
2.1.1 原始两步四阶时间推进框架的算法流程	15
2.1.2 原始两步四阶时间推进框架的局限	16
2.1.3 原始两步四阶时间推进框架的精度分析	18
2.2 改进的一维两步四阶时间推进框架.....	20
2.2.1 一维两步四阶时间推进框架的算法流程	21
2.2.2 一维两步四阶时间推进框架的组件：重构	22
2.2.3 一维两步四阶时间推进框架的组件：解法器	22
2.2.4 一维两步四阶时间推进框架的精度分析	24
2.3 改进的二维两步四阶时间推进框架.....	25
2.3.1 二维两步四阶时间推进框架的算法流程	25
2.3.2 二维两步四阶时间推进框架的组件：重构	27
2.3.3 二维两步四阶时间推进框架的组件：解法器	27
2.3.4 二维两步四阶时间推进框架的精度分析	29
2.4 一种新的三步四阶时间推进框架.....	31
2.5 边界处理：虚拟单元技术	32
2.6 小结	32
第三章 一维基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律两步四阶数值格式	33
3.1 广义黎曼问题解法器.....	33
3.1.1 黎曼问题解法器：Godunov 解法器.....	33

3.1.2 线性声波近似的广义黎曼问题解法器	35
3.1.3 非线性广义黎曼问题解法器: t 轴不位于稀疏波内部	35
3.1.4 非线性广义黎曼问题解法器: t 轴位于稀疏波内部	37
3.2 线性紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式	37
3.2.1 线性紧致埃尔米特重构的推导	38
3.2.2 线性紧致埃尔米特重构的例子	40
3.2.3 基于线性紧致埃尔米特重构的两步四阶格式及其稳定性分析	41
3.3 基本无振荡的紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式	49
3.3.1 加权型紧致埃尔米特重构	49
3.3.2 杂交选择型紧致埃尔米特重构	51
3.3.3 基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶格式	54
3.3.4 数值格式的紧致性	54
3.4 数值实验	56
3.4.1 空间四阶精度的两步四阶格式	56
3.4.2 空间六阶和八阶精度的两步四阶格式	63
3.4.3 数值格式的时间效率	69
3.5 小结	71
第四章 二维基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律两步四阶数值格式	73
4.1 广义黎曼问题解法器	73
4.2 线性紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式	73
4.2.1 线性紧致埃尔米特重构模板的选择策略	74
4.2.2 线性紧致埃尔米特重构的具体形式	74
4.2.3 基于线性紧致埃尔米特重构的两步四阶格式	75
4.3 基本无振荡的紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式	77
4.3.1 加权型紧致埃尔米特重构	77
4.3.2 杂交选择型紧致埃尔米特重构	80
4.3.3 基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的紧致两步四阶格式	82
4.3.4 数值格式的紧致性	82
4.4 数值实验	83
4.4.1 空间四阶精度的两步四阶格式	84
4.4.2 空间八阶精度的两步四阶格式	91
4.4.3 数值格式的时间效率	100
4.5 小结	100
第五章 总结与展望	101
参考文献	103

目 录

攻读博士学位期间完成的论文及其他成果	109
致 谢	111

第一章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 计算流体力学

流体力学是物理学的一个分支，是涉及流体（液体、气体和等离子体）及其作用力的学科。如同诺贝尔奖获得者威尔逊曾说过的“现代科学研究的三大支柱是科学实验、理论研究、科学计算”，流体力学分别在这三个方面都有所发展。在 17 世纪，法国和德国开始了实验流体力学的研究。随后，在 18 和 19 世纪，欧洲发展起来了理论流体力学。然后，随着现代计算机的出现，第三种重要的方法——计算流体力学（computational fluid dynamics, CFD）诞生了，它与纯理论和纯实验研究方法同等重要^[2]。

与实验手段依靠风洞等实验设施不同的是，CFD 依靠计算机程序，更加方便、快捷也更加经济。更重要的是，CFD 可以模拟真实实验室不能揭示的流动现象，捕捉在特定瞬间的流场状态，例如观察层流分离流动的不稳定现象；CFD 可以在模拟高超音速流动的同时模拟高温流场，这是目前的风洞实验做不到的。但在另一方面，我们应该也注意到 CFD 依然需要理论流体力学提供理论和模型的支撑，依然需要实验流体力学提供数据以检验结果，互相印证。

CFD 在预测流体流动方面发挥着重要的作用，它有许多应用领域，例如航空航天航海工程、大气科学、环境工程、制造工业等。当提到 CFD 使用的数学模型，不得不提及纳维-斯托克斯方程组和欧拉方程组两个经典模型。其中，纳维-斯托克斯方程组是

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \otimes (\rho \mathbf{v}) - \mathbf{\Pi} \\ \rho E \mathbf{v} - \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{v} - \kappa \nabla T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{F} \\ \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \rho \dot{q} \end{bmatrix}, \quad (1-1)$$

其中， ρ 是密度， \mathbf{v} 是速度， E 是比能量，比能量满足 $E = e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ ， e 是比内能， \otimes 是张量积， $\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ 是应力张量， p 是压强， \mathbf{I} 是单位向量， $\boldsymbol{\tau}$ 是粘性应力张量， κ 是热导率， T 是温度， \mathbf{F} 是比体积力（例如重力、静电力和洛伦兹力）， \dot{q} 是单位时间的比体加热（例如热辐射、电流热效应）。 ρ 、 e 、 p 和 T 等热力学变量之间满足状态方程，并且在“热力学平衡”假设下所有热力学变量只有两个自由度，即所有其他变量均可由这两个自由度表示。粘性应力张量往往是变形速度张量的函数，具体关系需要根据具体的流体性质确定。如果考虑无粘性应力、无热传导的近似情况，就得

到了欧拉方程组

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \otimes (\rho \mathbf{v}) + p \mathbf{I} \\ \mathbf{v}(\rho E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{F} \\ \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \rho \dot{q} \end{bmatrix}. \quad (1-2)$$

如果进一步的考虑没有体积力和体加热的情形，我们有无源的双曲守恒律形式的欧拉方程组

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \otimes (\rho \mathbf{v}) + p \mathbf{I} \\ \mathbf{v}(\rho E + p) \end{bmatrix} = 0. \quad (1-3)$$

1.1.2 双曲守恒律及其数值格式

双曲守恒律是形如

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad (1-4)$$

的方程组，并且其（在连续意义下等价的）非守恒形式

$$\partial_t \mathbf{u} + \sum_i \mathbf{A}_i(\mathbf{u}) \partial_{x_i} \mathbf{u} = 0, \quad (1-5)$$

中的系数 $\mathbf{A}_i(\mathbf{u})$ 的特征值都是实数，这里的 x_i 代表第 i 个空间变量，例如三维空间中的 x 、 y 和 z 。对双曲守恒律数值格式的研究工作有很多，常见的数值格式可以按照网格运动方式、空间离散方法和时间离散方法来分类。

1.1.2.1 按照网格运动方式分类

从网格运动方式上看，有基于欧拉方法的格式、基于拉格朗日方法的格式和基于任意拉格朗日-欧拉方法的格式。

1. 欧拉方法^[3-5] 的网格固定不动，它比较简单，适合处理固定区域和流体变形大的问题，例如稳态问题、台阶问题和双马赫反射问题等；但是不能追踪质点运动，同时在接触间断和物质界面处的耗散大。

2. 拉格朗日方法^[6-8] 的网格节点跟随流体一起运动，这种方法在接触间断和物质界面处几乎没有数值耗散，能敏锐地捕捉接触间断，精确地识别和跟踪物质界面，追踪流体运动，因此适合处理多介质问题和运动边界问题，例如气-水相互作用问题、爆炸问题和活塞问题等。但是一般计算比较复杂，网格容易变形，甚至可能致使计算中止。在使用直线网格时，拉格朗日方法至多有二阶精度。

3. 任意拉格朗日-欧拉方法分为直接任意拉格朗日-欧拉方法和间接任意拉格朗日-欧拉方法两种。

直接任意拉格朗日-欧拉方法最早是在文 [9-12] 中分别提出的^[13]，并在近十年也有许多相关的工作，例如文 [14-16] 中的工作。这种方法依靠网格移动算法给出网格

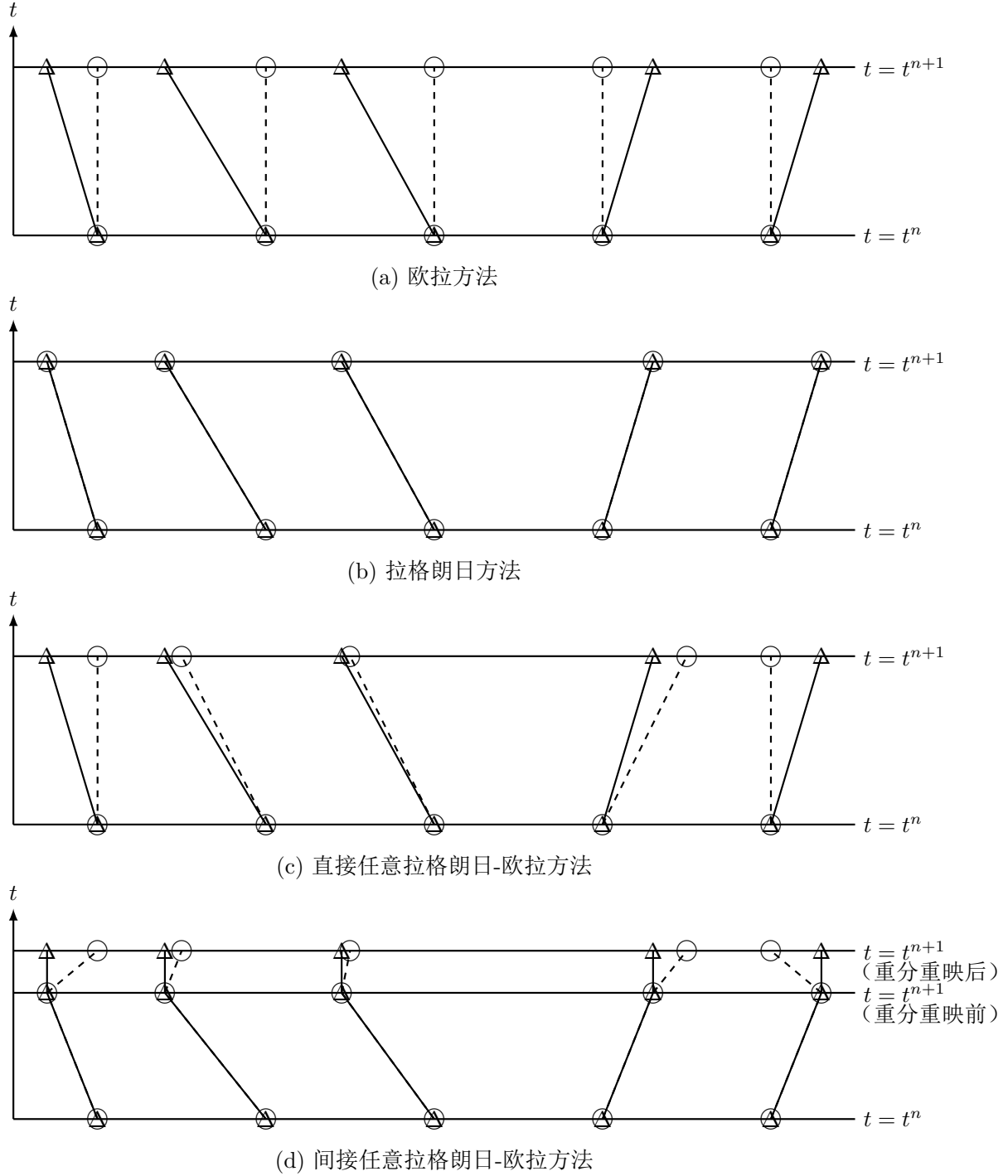


图 1.1 四种网格运动方式的示意图。○ 和虚线代表网格及其运动，△ 和实线代表物质及其运动。

移动速度，并且网格移动速度包含在通量的计算中。直接任意拉格朗日-欧拉方法能够保持拉格朗日方法的优势，并在处理网格变形大的问题时，能够减少计算误差以及避免计算中止；不过这种方法需要额外的网格移动算法和网格质量控制算法，计算较为复杂。前面介绍的欧拉方法可以视为网格移动速度始终为零的特殊情况，而拉格朗日方法可以视为网格移动速度与流体速度一致的特殊情况。

间接任意拉格朗日-欧拉方法^[17, 18]有三步，分别是拉格朗日步、网格重分步和物理量重映步。在拉格朗日步，类似拉格朗日方法更新网格和其上的物理量信息。然后在网格重分步，根据旧网格和物理量信息，计算得到网格质量更好的新网格。最后在物理量重映步，将旧网格上的物理量信息转移到新网格上。这种方法也能够保持拉格朗日方法的优势，并在处理网格变形大的问题时，能够减少计算误差以及避免计算中止。与直接任意拉格朗日-欧拉方法不同的是，间接任意拉格朗日-欧拉方法不需要设计复杂的网格移动算法；但是需要设计网格重分和物理量重映算法。

1.1.2.2 按照空间离散方法分类

从空间离散方法上看，可以归类为有限差分、有限体积和间断有限元格式。

1. 有限差分格式^[19, 20]在一系列离散点上储存和更新变量，相对易于实现，简单高效，特别适用于均匀和光滑的结构网格；但是难以处理复杂的几何区域，对网格的光滑性要求较高。

2. 有限体积格式^[21, 22]是将计算区域分割为一系列控制体，在这些控制体上储存和更新变量，相对而言它更灵活，可以更方便地处理非结构网格以及非规则区域，并且很容易满足守恒性；然而计算成本相对较高。

3. 间断有限元格式^[23, 24]也同样在控制体上储存变量，不过储存的是多项式。它的显式格式在一次推进中，除了需要相邻单元提供每个边界外侧流入的通量之外，不使用其他控制体的信息。间断有限元格式可以方便的处理非结构网格和复杂的几何形状，很容易满足守恒性，得到的格式一般更加紧致；不过一般时间步长较小，导致计算成本很高。

1.1.2.3 按照时间离散方法分类

从时间离散方法上看，分为显式、隐式和显隐式格式。

1. 显式格式^[1, 4, 5]的空间离散只使用本时间层以及更早的时间层的已知量，因而可以直接将下一层的变量由已知量直接表示出来，不需要迭代求解，简单高效，易于实现；但是数值稳定性受限，时间步长的选取过大可能导致数值不稳定，甚至计算中止。时间步长往往要根据 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件选取，并随着网格尺度的减小而减小，同时也会随着问题的刚性强度增大而减小。所以，显式格式不太适合计算强刚性问题。

2. 隐式格式^[25, 26]的空间离散使用待求时间层的未知量，这导致未知量耦合在

一起, 需要求解方程组, 方程组的规模随着网格加密而增加, 这给计算和存储都带来了很大的困难。如果涉及非线性问题还需要迭代求解非线性方程组, 求解比较复杂, 导致单个时间步的计算开销较大。不过有数值稳定性好、能够处理强刚性问题和较大的时间步长带来的整体开销可能较小等优点。

3. 显隐式格式^[27, 28] 将前两者结合在一起, 通过对方程适当的分解, 显式离散非刚性项, 隐式离散强刚性项, 得到一个结合了显式和隐式优点的显隐式格式。显隐式格式可以扬长避短, 隐式离散强刚性项可以选择较大的时间步长, 从而降低计算开销。当刚性项是线性的时候, 显式离散非线性非刚性项可以避免求解非线性代数方程组, 降低了求解方程组的难度, 并进一步的降低了计算开销。当刚性项是非线性的时候, 可以使用 explicit-implicit-null (EIN) 技术^[28-30] 将刚性项 $\partial_x f(u)$ 分解为一个非线性弱刚性项和一个线性强刚性项, 即

$$\partial_x f(u) = \partial_x (f(u) - Au) + \partial_x (Au), \quad (1-6)$$

其中, Au 是 $f(u)$ 的局部线性化近似。然后分别用显式和隐式格式求解两项。但是显隐式格式的设计成本略高于显式和隐式格式。

1.2 研究现状

近些年, CFD 应用对精确模拟流体流动状态的需求, 推动了对高精度格式的需求。然而, 对高精度的追求必须与计算成本相权衡, 这使得设计一个高精度高效的数值格式成为一个有趣且具有挑战性的问题。此外, 为了更准确地捕捉流场中的细节, 例如湍流和激波, 我们需要开发高分辨率的格式, 这可以通过构造更加紧致的格式来实现。同时, 使用更加紧致的格式可以有效地减少计算节点之间的通信开销, 在并行计算中更加高效。

因此, 本文将致力于研究求解双曲守恒律的高精度紧致数值格式, 具体地说, 本文将致力于研究基于欧拉框架的显式有限体积格式。这个数值格式通常可以分成三个部分: 时间推进框架、重构算法和解法器。对于一维情形下的双曲守恒律 (1-4), 我们定义计算单元 I_i 上的单元平均值为

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{h} \int_{I_i} u(x, t) dx, \quad (1-7)$$

则有

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} = \mathcal{L}(u_i) \triangleq -\frac{1}{h} (f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))), \quad (1-8)$$

接着我们得到了近似的半离散形式

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} = \hat{\mathcal{L}}(u_i) \triangleq -\frac{1}{h} (\hat{f}(u_{i+\frac{1}{2},-}, u_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{f}(u_{i-\frac{1}{2},-}, u_{i-\frac{1}{2},+})). \quad (1-9)$$

一般地, 为了得到数值通量 $\hat{f}(u_{i+\frac{1}{2},-}, u_{i+\frac{1}{2},+})$, 需要使用重构算法和解法器。在某个时间层, 重构算法根据单元平均值 \bar{u}_i 等信息重构出一个多项式, 再由多项式给出在单

元边界处空间中某个方向上的近似值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}$ 。然后解法器根据重构的结果，给出在单元边界处的数值通量 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ 。时间推进框架则是利用重构算法和解法器给出的数值通量，从初始时刻依次得到每个时间层的单元平均值，直到时间终点。下面将分别从时间推进框架、重构算法和解法器这三部分，介绍求解双曲守恒律的基于欧拉框架的显式有限体积格式的研究现状。

1.2.1 时间推进框架

可以根据文 [31] 中的分类方法，将常见的时间推进框架分为四类。

1. 单步单导数 (single-stage single-derivative, SSSD) 方法，也就是欧拉向前方法^[32]，这是出现最早的时间推进框架。单步方法是指只使用一次时间推进就可以得到下一个时间层的单元平均值。单导数方法最初是指求解常微分方程时，只使用函数的一阶导数的数值方法；相对应的有多导数方法，不只使用函数的一阶导数，还使用高阶导数来提高计算的精度和效率。在处理偏微分方程时，可以将相应的概念推广到时间推进中，单导数方法是采用如下的时间离散：

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n + \tau \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i(t^n)}{dt} = \bar{\mathbf{u}}_i^n + \tau \mathcal{L}(\mathbf{u}_i^n), \quad (1-10)$$

其中， $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ 是时间层 t^n 的单元平均值， $\tau = t^{n+1} - t^n$ 是时间步长。采用适当的重构算法和解法器可以得到 $\mathcal{L}(\mathbf{u}_i^n)$ 的数值近似 $\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{u}_i^n)$ ，并得到如下推进形式：

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\mathbf{u}_i^n), \quad (1-11)$$

这是一个一阶精度的时间推进框架，以此为基础发展出来了下面许多种高精度时间推进框架。

2. 多步单导数 (multi-stage single-derivative, MSSD) 方法，例如：龙格库塔 (Runge-Kutta, RK) 方法，最早由 Carl Runge 和 Wilhelm Kutta 于 1900 年左右提出，并用于求解常微分方程。后来有许多将之用于偏微分方程求解的工作^[33]。然后，文 [34] 中提出了强稳定保持的龙格库塔 (strong-stability preserving Runge-Kutta, SSP-RK) 方法，这是一系列方法，其中一个广泛使用的是三阶精度的 SSP-RK 方法，它通过三个时间层（包括两个中间时间层 $\mathbf{u}^{(1)}$ 和 $\mathbf{u}^{(2)}$ ）可以得到时间方向上三阶精度的近似：

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{(1)} = \bar{\mathbf{u}}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{u}}_i^n) \quad (1-12)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{(2)} = \frac{3}{4}\bar{\mathbf{u}}_i^n + \frac{1}{4}(\bar{\mathbf{u}}_i^{(1)} + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{u}}_i^{(1)})) \quad (1-13)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \frac{1}{3}\bar{\mathbf{u}}_i^n + \frac{2}{3}(\bar{\mathbf{u}}_i^{(2)} + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\mathbf{u}}_i^{(2)})). \quad (1-14)$$

这种方法还是一种单导数方法，因为只用到了 $\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{u})$ 来近似一阶导数 $d\bar{\mathbf{u}}_i(t)/dt$ ，即 $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ 。不过由于引入了中间时间层，这是一个多步方法。SSP-RK 方法可以表达为欧拉向前方法 (1-11) 的凸组合，并因此可以较为容易的推导出包括保正^[6]在内的许多良好性

质；不过由于数个中间时间层的存在，最终得到的数值格式往往不太紧致。

3. 单步多导数（single-stage multi-derivative, SSMD）方法，例如：拉克斯-温德洛夫（Lax-Wendroff, LW）方法^[35]及其三阶和四阶的拓展^[36]，这类方法不需要多个中间时间层来达到高阶精度，而是引入了高阶导数项，例如一步三阶的 LW 方法采用如下的时间离散

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \tau \frac{d\bar{u}_i(t^n)}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\bar{u}_i(t^n)}{dt^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{d^3\bar{u}_i(t^n)}{dt^3} = \bar{u}^n + \tau \mathcal{L}(\bar{u}^n) + \frac{\tau^2}{2} \partial_t \mathcal{L}(\bar{u}^n) + \frac{\tau^3}{6} \partial_t^2 \mathcal{L}(\bar{u}^n), \quad (1-15)$$

采用适当的重构算法和解法器可以得到 $\mathcal{L}(\bar{u}_i^n)$ 、 $\partial_t \mathcal{L}(\bar{u}_i^n)$ 和 $\partial_t^2 \mathcal{L}(\bar{u}_i^n)$ 的数值近似 $\hat{\mathcal{L}}(\bar{u}_i^n)$ 、 $\widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n)$ 和 $\widehat{\partial_t^2 \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n)$ ，并得到如下推进形式：

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{u}_i^n) + \frac{\tau^2}{2} \widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n) + \frac{\tau^3}{6} \widehat{\partial_t^2 \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n). \quad (1-16)$$

其中 $\widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n)$ 和 $\widehat{\partial_t^2 \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n)$ 需要通过类似文 [37–39] 中的三阶 LW 型解法器获得。这样的时间推进方法是多导数方法，因为不只使用一阶导数，还使用高阶导数。SSMD 方法得到的格式更加紧致；但是高阶导数的引入导致了算法很复杂，使得公式和编程都变得复杂，尤其当求解高维方程组的时候，需要求解相应的 Jacobi 矩阵。

4. 多步多导数（multi-stage multi-derivative, MSMD）方法^[31, 40]。MSSD 方法中过多的中间时间层会使得数值格式不紧致，SSMD 方法中高阶导数会使得数值格式很复杂，MSMD 方法结合了这两种方法，是数值格式的紧致性和复杂性之间的一种权衡。MSMD 方法往往只使用一阶和二阶导数，同时加入一到两个中间时间层，常见的有两步四阶方法和三步五阶方法。近十年有许多与两步四阶方法相关的工作，例如文 [41–43]。两步四阶方法的推进形式为

$$\bar{u}_i^* = \bar{u}_i^n + \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{L}}(\bar{u}_i^n) + \frac{\tau^2}{8} \widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n) \quad (1-17)$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{u}_i^n) + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{1}{3} \widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{u}_i^n) + \frac{2}{3} \widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{u}_i^*) \right). \quad (1-18)$$

MSMD 方法权衡了数值格式的紧致性和复杂性，得到的数值格式的紧致性和复杂性均介于 MSSD 和 SSMD 两个方法之间。由于两步四阶方法不能表示为一步两阶方法的凸组合，一步两阶方法的良好性质的无法直接推广到两步四阶方法上。

1.2.2 重构算法

根据文 [44] 中的分类方法，可以将常见的有限体积重构算法归类到 $P_N P_M$ 方法中，其中， N 是指每个单元内的数据所表示的多项式次数， M 是边界点值重构时所用的多项式次数。这样的重构算法往往有 M 阶精度。

1.2.2.1 $P_0 P_k$ 方法

$P_0 P_k$ 方法有基本无振荡（essentially non-oscillatory, ENO）重构^[45]、加权基本无振荡（weighted ENO, WENO）重构^[46–50]、WENO-Z 重构^[51]、中心型 WENO（central WENO,

CWENO) 重构^[52, 53] 以及阶数自适应 WENO (WENO with adaptive order, WENO-AO) 重构^[54] 等。

这些重构在每个单元内只有一个数据——单元平均值, 然后结合相邻单元中的数据可以得到多项式函数空间 \mathcal{P}^k 中的重构多项式。ENO 重构通过选择附近所有大小为 k 的候选模板中最光滑的模板来尽可能避免振荡; 然而, 这种方法忽略了来自其他模板的有价值的数据。作为其改进版本, WENO 重构在光滑区域内接受所有模板以获得更高阶精度, 同时通过合理地选取光滑因子和非线性权, 保留了尽可能避免振荡的能力。在五阶精度的 WENO 重构中, 光滑因子选取为

$$\beta_r = \sum_{d=1}^3 \int_{I_i} h^{2\ell-1} \left(\partial_x^d p_i^{(r)}(x) \right)^2 dx, \quad r = 0, 1, 2, \quad (1-19)$$

其中, β_r 是光滑因子, h 是单元 I_i 的大小, 以及 $p_i^{(r)}(x)$ 是第 r 个模板的重构多项式。非线性权选取为

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s}, \quad \alpha_r = \frac{\gamma_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, \quad r = 0, 1, 2, \quad (1-20)$$

其中, ω_r 是非线性权, γ_r 是线性权, 以及 ε 是一个小量。WENO-Z、CWENO 和 WENO-AO 重构通过进一步的改进模板和非线性权的选择策略, 分别取得了一些在特定情形下的良好性能。例如五阶的 WENO-Z 重构不再使用原始五阶 WENO 重构中的非线性权, 而是采用了如下的非线性权

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^2 \alpha_s}, \quad \alpha_r = \gamma_r \left(1 + \left(\frac{\theta}{\beta_r + \varepsilon} \right)^q \right), \quad r = 0, 1, 2, \quad (1-21)$$

其中, $\theta = |\beta_0 - \beta_2|$ 。这样的改动能够改善原始 WENO 重构对应的数值格式在极值点处的掉阶问题; 不过 θ 的构造方式可能难以推广。CWENO 和 WENO-AO 重构不再选择附近所有大小为 k 的模板作为模板组份, 而是选择了一系列不同大小的模板。例如, 文 [53] 中选择了大小为 1、3、5、7 和 9 的模板作为模板组份, 并得到了一阶、三阶、五阶、七阶和九阶的 CWENO 格式。这样的选择使得不能按照原始 WENO 重构的方法找到线性权, 在文 [54] 中给出了这个困难的解决方法。

1.2.2.2 P_1P_k 方法

作为 P_1P_k 方法的代表, 埃尔米特加权基本无振荡 (Hermite WENO, HWENO) 重构^[55, 56] 的每个单元不止含有单元平均值, 还有导数平均值, 这使得相同精度阶数的情况下, HWENO 重构有相比于 WENO 重构更窄的模板, 因而得到的数值格式会更加紧致。例如, 同样是一维情形下的五阶重构, 一个 WENO 重构多项式总计使用了附近 5 个单元的信息, 而一个 HWENO 重构多项式仅使用附近 3 个单元的信息, 如图 1.2 所示。 P_1P_k 方法也是两步四阶时间推进框架中所要求的两值格式。

另外, \mathcal{P}^1 间断有限元 (discontinuous Galerkin, DG) 方法^[57-59] 的空间离散, 也是 P_1P_k 方法, 其中, $k = 1$ 。

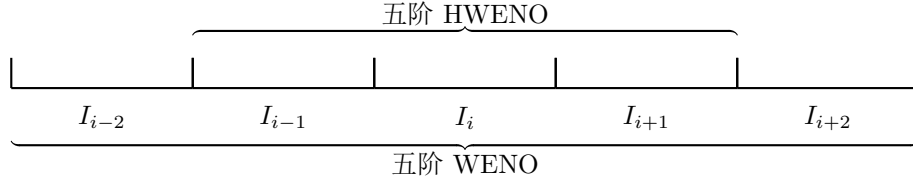


图 1.2 一维情形下的五阶 WENO 重构和五阶 HWENO 重构模板大小的示意图。

1.2.2.3 $P_k P_k$ 方法

经典的 DG 方法^[57-59]的空间离散也可以视作重构算法，属于 $P_k P_k$ 方法，其重构多项式就是每个单元内部储存的多项式，因而实际上无需做重构运算。

1.2.2.4 $P_N P_M$ 方法

除了上述这些重构之外，还有一系列被称为埃尔米特 DG 或者 $P_N P_M$ DG 的格式使用了 $P_N P_M$ 方法。例如文 [44] 中使用了至多三维的并且 N 和 M 满足 $0 \leq N \leq M \leq 6$ 的所有 $P_N P_M$ 方法。在文 [60, 61] 中使用 $P_1 P_2$ 方法。以 $P_1 P_2$ 方法为例，它在每个单元内储存的自由度可以表示 \mathcal{P}^1 空间中的一个多项式，然而在自由度的时间推进中使用了二次多项式 (\mathcal{P}^2 空间)，这是借助相邻单元中的自由度重构得到的。

1.2.3 解法器

1959 年，Godunov 在文 [62] 中提出了利用黎曼问题的解近似单元边界处的通量，这种方法被称为 Godunov 解法器。具体地，如果重构算法给出了单元边界两侧的近似值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}$ ，那么在这个单元边界处对应了一个黎曼问题

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, & x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}, & x > x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \end{cases} \quad (1-22)$$

欧拉方程组黎曼问题的一个典型的波系结构如图 1.3 所示。如果这个黎曼问题的精确解是 $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{R}(x/t; \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ ，那么 Godunov 解法器给出的数值通量可以表示为：

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}) = \mathbf{R}(0; \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}). \quad (1-23)$$

除了精确求解黎曼问题外，还可以使用一些数值近似的方法，例如 Lax-Friedrichs (LF) 数值通量是

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \alpha (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-} - \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}) \right), \quad \alpha = \max_u \|f'(u)\|. \quad (1-24)$$

局部线性化的 Roe 解法器^[63]则是使用一个局部线性化的矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ 近似双曲守恒律中的非线性对流项，得到双曲守恒律的线性近似

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad (1-25)$$

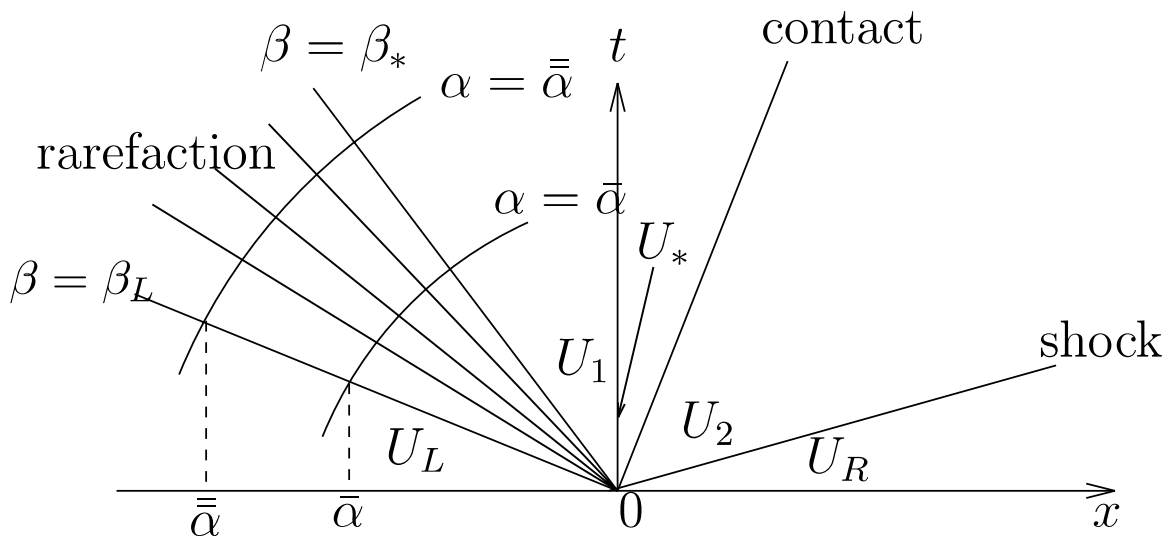


图 1.3 欧拉方程组黎曼问题的一个典型的波系结构示意图。

然后很容易得到这个线性近似方程组的黎曼问题精确解以及相应的数值通量，进而可以作为原双曲守恒律的一个近似数值通量。线性近似方程组的黎曼问题的解仅由接触间断和激波构成，使得这种对稀疏波的近似是非常错误的，在实际计算中音速点附近会出现非物理的间断^[64]，这需要被称为熵修正的技术^[65]来处理。

双激波近似的 **HLL** 解法器^[66] 不用考虑双曲守恒律的黎曼问题的实际波系结构情况, 均利用双激波结构近似。通过适当的波速估计算法直接给出两个激波的速度, 就可以很容易得到近似波系结构下的黎曼问题精确解以及相应的数值通量, 进而可以作为原双曲守恒律的一个近似数值通量。**HLL** 通量在只有两个方程的情况下, 是稳健的近似黎曼问题解法器, 不过对于欧拉方程组等有更多变量的方程组而言, 这种假设是不对的, 会导致接触间断和物质界面的分辨率低下。

针对 HLL 解法器存在的问题, 通过在近似波系结构中添加一个接触间断, 得到了双激波单接触间断近似的 HLLC 解法器^[67], 这种解法器可以较好的近似欧拉方程组等多变量方程组。除了上述这些解法器, 还有许多近似黎曼问题解法器, 这里不再一一列出。

在 1984 年, Ben-Artzi 等人在文 [68] 中提出了广义黎曼问题解法器, 用于一个基于拉格朗日框架的二阶精度数值格式。随后文 [3] 的作者推广了该解法器, 使其可以直接用于基于欧拉框架的数值格式。然后, 该解法器又被进一步推广, 使其可以应用于任意气体状态方程^[69]。这种解法器要求重构不只要提供函数近似值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}, \pm}$, 还

需要提供导数近似值 $(\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}$ ，那么在这个单元边界处对应了一个广义黎曼问题

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-} + (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-} x, & x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+} + (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},+} x, & x > x_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases} \end{cases} \quad (1-26)$$

而不再是原来的黎曼问题 (1-22)。

欧拉方程组广义黎曼问题的一个典型的波系结构如图 1.4 所示。在广义黎曼问题解法器求解这个广义黎曼问题时，由于方程组的非线性，我们往往难以得到 (1-26) 的解 $\mathbf{u}(x, t)$ 的全部信息，而是得到两个近似值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ ，它们满足（或近似地满足）

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \lim_{t \rightarrow t^n, +} \mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t), \quad (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \lim_{t \rightarrow t^n, +} \partial_t \mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t). \quad (1-27)$$

注意，这里的 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 是通过一个黎曼问题解法器得到的，如果是近似的黎曼问题解法器，那么 (1-27) 中的两个关系都是近似满足的。对于 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ ，广义黎曼问题解法器有精确求解的非线性版本和声波近似的版本，如果采用的是声波近似的版本，那么 (1-27) 中的第二个关系就是近似满足的。如果采用的是精确的黎曼问题解法器和非线性版本的广义黎曼问题解法器，那么 (1-27) 中的两个关系就都是精确满足的。接下来，广义黎曼问题解法器给出的数值通量可以表示为：

$$\hat{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}, (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-}, (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},+}) = f(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}. \quad (1-28)$$

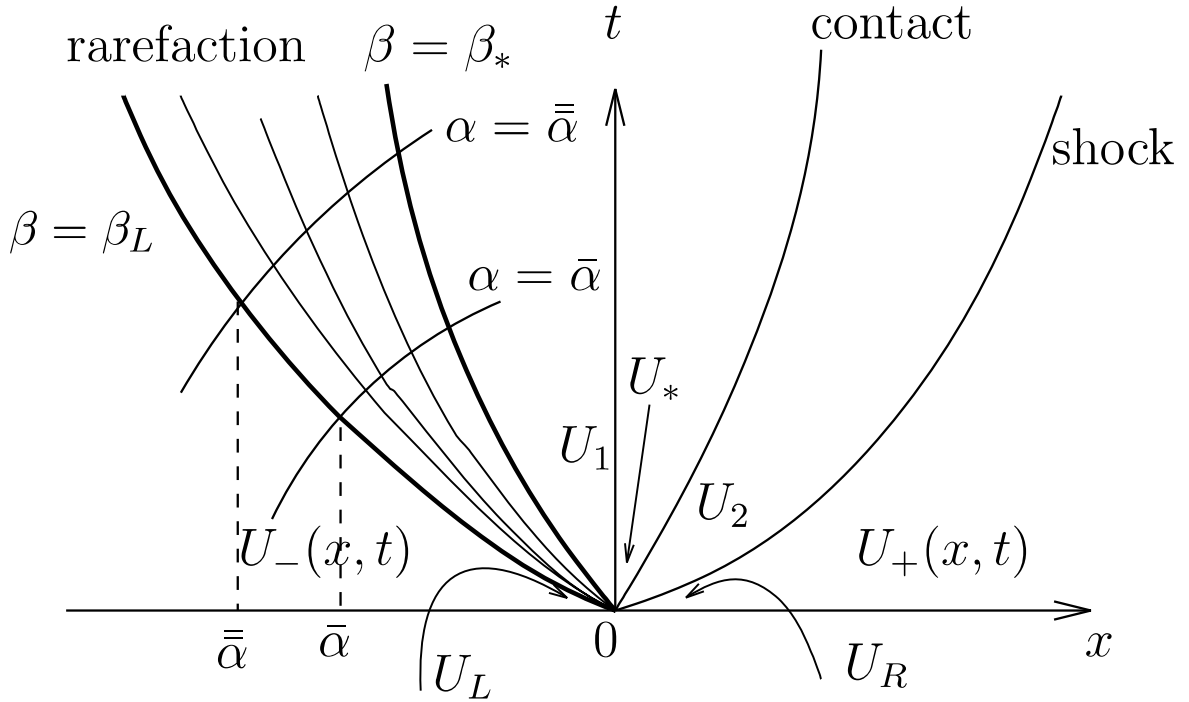


图 1.4 欧拉方程组广义黎曼问题的一个典型的波系结构示意图。

二维情形下的广义黎曼问题解法器可以参考文 [70] 中的二维弱耦合的广义黎曼问题解法器。

采用了埃尔米特重构的两步四阶时间推进框架往往有两种做法，一种是文 [43, 55] 使用的做法，对双曲守恒律 (1-4) 求导得到

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v}(x) = \partial_x \mathbf{u}(x), \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \mathbf{v}. \quad (1-29)$$

然后分别对 (1-4) 和 (1-29) 采取两步四阶离散。

另一种做法是文 [41] 中提出的时间推进框架，利用了牛顿-莱布尼茨公式直接得到了一个与双曲守恒律 (1-4) 无关的，关于导数 $\mathbf{v}(x) = \partial_x \mathbf{u}(x)$ 在单元 $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ 上平均值 $\bar{\mathbf{v}}_i$ 的恒等式

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{v}(x) dx = \frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad (1-30)$$

然后可以基于此式与 LW 型解法器推进导数平均值，具体的细节可以参考第二章。在本文，我们约定下文再次提及的两步四阶时间推进框架将会是特指文 [41] 中提出的时间推进框架，它是一个使用了埃尔米特重构和 LW 型解法器的时间推进框架，这与文 [43, 55] 中的做法是不同的。

1.3 本文的研究目的和主要工作

文 [1] 中作者针对双曲守恒律，基于五阶精度 HWENO (HWENO5) 和五阶精度 WENO (WENO5) 重构以及广义黎曼问题解法器，设计了一种两步四阶数值格式。这种数值格式有一维和二维两个版本，其中二维采用的重构是逐维的。具体来说，在一维情形下，该格式使用 HWENO5 重构来获得单元边界上的函数值，并使用 WENO5 重构来获得导数值。在二维情形下，逐维地使用 HWENO5 重构来获得单元边界上的函数值，并在两个空间方向上分别使用 WENO5 和 HWENO5 重构来获得导数值。

为了进一步提高数值格式的紧致性，本文致力于研究求解双曲守恒律的基于紧致埃尔米特重构的显式两步四阶有限体积格式，即函数值和导数值均使用埃尔米特重构获得。同时希望时空均是四阶精度的。此外在二维情形下，逐维重构方法不能保证对称性，内存需求较高，因为需要两次扫描网格并存储中间变量，并且很难推广到非结构网格。所以，我们要构造一个真正的二维重构，并设计相应的两步四阶格式。

我们首先提出了改进的两步四阶时间推进框架。在本文我们旨在分别设计一维与二维时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。具体的，在一维情形下，我们先构造一种四阶埃尔米特重构，其比 WENO5 和 HWENO5 重构更加紧致，计算开销更小。然后在原始的两步四阶时间推进框架中采用这种新构造的重构，并希望能够得到时

空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。然而我们发现原始的两步四阶时间推进框架的紧致性和高精度不可兼得。如果导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构，那么所得格式在光滑区域的精度只有三阶精度。随后，我们分析了其原因，并分别在一维和二维两种情形下提出了改进的两步四阶时间推进框架。在改进的框架中导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构时，获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。

接着，我们设计了一维基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律基本无振荡的两步四阶数值格式。具体地说，在一维情形下，我们先构造了一种线性紧致埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式。再对这些线性格式做了线性稳定性分析，得到了四阶线性稳定的两步四阶数值格式。然后，为了避免在间断附近出现振荡，用这个稳定的线性格式对应的重构作为组成成分，采用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种基本无振荡的非线性重构。接着，利用我们改进的两步四阶时间推进框架，我们设计了两种基本无振荡的两步四阶格式。过后，我们讨论了数值格式的紧致性，得出了我们的两步四阶格式更加紧致的结论。作为这项工作的推广，我们还得到了空间六阶和八阶的线性稳定的两步四阶数值格式，以及空间八阶的基本无振荡的两步四阶格式。最后我们给了许多算例，验证了我们的数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

最后，我们设计了二维基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律基本无振荡的两步四阶数值格式。在二维情形下，我们首先经过对模板的精心挑选，得到真正的二维线性紧致埃尔米特重构。这些二维重构在一维问题中可以退化到我们先前构造的一维重构，从而这些二维重构可以取得类似一维重构的良好性能。然后类似一维的做法，采用 WENO 和杂交选择技术，在改进的两步四阶时间推进框架下，设计了两种时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。接着，我们讨论了数值格式的紧致性，得出了我们的两步四阶格式更加紧致的结论。作为这项工作的推广，我们还得到了空间八阶的基本无振荡的两步四阶格式。最后我们给了许多算例，验证了我们的数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

本文的组织结构如下。在第二章中，我们提出了改进两步四阶时间推进框架，克服了原始推进框架的紧致性和高精度不可兼得的困难。在第三章中，我们在一维情形下设计了基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的双曲守恒律两步四阶数值格式。在第四章中，我们在二维情形下设计了基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的双曲守恒律两步四阶数值格式。最后在第五章中，给出了总结，并对未来的工作做出展望。

第二章 改进的双曲守恒律两步四阶时间推进框架

由于我们希望设计一种紧致的两步四阶数值格式，所以本章我们先回顾文 [41] 中的两步四阶时间推进框架。

2.1 原始的两步四阶时间推进框架

2.1.1 原始两步四阶时间推进框架的算法流程

在文献 [41] 中，作者提出了一种有限体积时间推进框架，称为两步四阶时间推进框架。下面以流速 a 恒为 1 的线性对流方程

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad f(u) = au, \quad a = 1, \quad (2-1)$$

为例，介绍原始的两步四阶时间推进框架。其中， $u(x, t)$ 是守恒变量， $f(u)$ 是相应的通量。计算单元是 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ ，其大小为 $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ ， $i = 1, \dots, N$ 。为了简单起见，采用均匀网格，即 $h_i \equiv h$ 。 $u(x, t)$ 和其导数 $v(x, t)$ 的单元平均值，分别表示为 $\bar{u}_i(t)$ 和 $\bar{v}_i(t)$ ，它们分别定义在每个单元 I_i 上，并可以表示为

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{h} \int_{I_i} u(x, t) dx, \quad \bar{v}_i(t) = \frac{1}{h} \int_{I_i} v(x, t) dx. \quad (2-2)$$

假设时间层为 t^n ， $n = 0, 1, \dots$ ；时间步长定义为 $\tau^n = t^{n+1} - t^n$ ，如果没有引起歧义，简记为 τ 。在时间层 t^n 的单元平均值和其导数平均值分别表示为 \bar{u}_i^n 和 \bar{v}_i^n 。

一维情形下，原始的两步四阶时间推进框架按照如下两步完成一次时间推进。

第一步：在时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ ，单元平均值 $\bar{u}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 和导数平均值 $\bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 通过下面的公式可以得到：

$$\bar{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{2h} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^* \right), \quad \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (2-3)$$

其中，数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 和单元边界的点值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 定义为：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* = f\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}\right) + \frac{\tau}{4} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{4} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, \quad (2-4)$$

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}. \quad (2-5)$$

其中， $u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 可以由求解线性对流方程的广义黎曼问题解法器得到

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = u_{i+\frac{1}{2},-}^n, \quad (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = -(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^n. \quad (2-6)$$

其中， $u_{i+\frac{1}{2},-}^n$ 和 $(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^n$ 是由重构算法根据 $t = t^n$ 层的平均值给出的，满足

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^n - u(x_{i+\frac{1}{2},-}, t^n) = C_1(x_{i+\frac{1}{2}})h^4 + O(h^5), \quad (2-7)$$

$$(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^n - (\partial_x u)(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) = C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4), \quad (2-8)$$

其中, $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$ 是利普希茨连续的。

第二步: 在下一个时间层 $t = t^{n+1}$, 单元平均值 \bar{u}_i^{n+1} 和导数平均值 \bar{v}_i^{n+1} 可以通过下面的公式得到:

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{h} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^{4th} \right), \quad \bar{v}_i^{n+1} = \frac{1}{h} \left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right), \quad (2-9)$$

其中, 数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 和单元边界的点值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 定义为:

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = f \left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \right) + \frac{\tau}{6} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{3} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{6} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{3} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad (2-10)$$

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \tau (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad (2-11)$$

其中, $u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ 和 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ 可以由求解线性对流方程的广义黎曼问题解法器得到

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} = u_{i+\frac{1}{2},-}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} = -(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (2-12)$$

其中, $u_{i+\frac{1}{2},-}^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{n+\frac{1}{2}}$ 是由重构算法根据 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ 层的平均值给出的, 满足类似 (2-7) 和 (2-8) 的要求。

二维情形下, 也有类似的时间推进框架, 详见文 [41]。

2.1.2 原始两步四阶时间推进框架的局限

在一维情形下, 文献 [41] 中提出的数值格式, 使用了原始的两步四阶时间推进算法, 采用了五阶的 HWENO 重构函数值, 同时采用了五阶的 WENO 重构导数值。我们认为 WENO5 重构不够紧致, 希望设计一种紧致的两步四阶数值格式。所以我们采取了原始的两步四阶时间推进框架, 并且函数值和导数值的重构均采用更加紧致的埃尔米特重构。然而, 在实际数值算例中, 我们观察到了所得格式的精度阶数将从四阶降至三阶。

在实际数值算例中, 我们在原始的两步四阶时间推进框架的重构采用了第 3.2 节中的一维四阶精度线性紧致埃尔米特重构, 并得到了相应的数值格式。在二维情形下, 采用了第 4.2 节中的二维四阶精度线性紧致埃尔米特重构, 并得到了相应的数值格式。我们将得到的数值格式记作 S2O4-origin-HC4 格式, 并计算了下面两个数值算例。

算例 2.1 (一维线性对流方程的精度测试) 这个算例选择线性对流方程 (2-1) 作为模型, 初值为

$$u(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x). \quad (2-13)$$

计算区域是 $[-1, 1]$, 采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, t) = u(x - t, 0)$ 。

对应于时间 $t^{tem} = 1$, S2O4-origin-HC4 格式计算得到的变量 u 的单元平均值的误差见表 2.1, 其中的 “Nstep” 代表时间推进的次数。我们观察到了所得格式的精度阶

数将从四阶降至三阶。

表 2.1 S2O4-origin-HC4 格式在算例 2.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。
展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	34	1.38401e-05		2.17751e-05	
0.6	2/80	67	1.73251e-06	2.99791	2.72250e-06	2.99967
0.6	2/160	134	2.17508e-07	2.99372	3.41695e-07	2.99415
0.6	2/320	267	2.72043e-08	2.99916	4.27335e-08	2.99927
0.6	2/640	534	3.40442e-09	2.99835	5.34770e-09	2.99838
0.6	2/1280	1067	4.25620e-10	2.99977	6.68734e-10	2.99942

算例 2.2 (二维线性对流方程的精度测试) 这个算例选择线性对流方程作为模型,

$$\partial_t u + \partial_x f(u) + \partial_y g(u) = 0, \quad f(u) = au, \quad g(u) = bu, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad (2-14)$$

初值为

$$u(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)). \quad (2-15)$$

计算区域是 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, y, t) = u(x - t, y - t, 0)$ 。

对应于时间 $t^{tem} = 1$, S2O4-origin-HC4 格式计算得到的变量 u 的单元平均值的误差见表 2.2, 其中的“Nstep”代表时间推进的次数。我们也观察到了所得格式的精度阶数将从四阶降至三阶。

表 2.2 S2O4-origin-HC4 格式在算例 2.2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。
展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	5.16537e-03		7.98093e-03	
0.6	2/20	34	3.55913e-04	3.85927	5.55537e-04	3.84460
0.6	2/40	67	2.46982e-05	3.84905	3.87174e-05	3.84283
0.6	2/80	134	2.02337e-06	3.60957	3.17864e-06	3.60650
0.6	2/160	267	2.06546e-07	3.29223	3.24415e-07	3.29250
0.6	2/320	534	2.41704e-08	3.09515	3.79904e-08	3.09414

2.1.3 原始两步四阶时间推进框架的精度分析

在上一小节，我们观察到了如果在原始两步四阶框架中函数值和导数值的重构均使用四阶精度紧致埃尔米特重构，所得数值格式的精度阶数将从四阶降至三阶。在这一小节，我们将分析其原因。我们以线性对流方程

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \quad (2-16)$$

为例，采用均匀网格，并假设 CFL 数是 $O(1)$ 的，即 $O(\tau) = O(h)$ ，假设整个计算区域都是无穷阶光滑的。由对重构的要求 (2-7) 和 (2-8)，我们可以得到时间层 $t = t^0$ 上有

$$\mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},\pm}^0 = C_1(x_{i+\frac{1}{2}})h^4 + O(h^5), \quad \mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},\pm}^0 = C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4), \quad (2-17)$$

其中， \mathbb{T} 代表截断误差， $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 和 $C_3(x)$ 是利普希茨连续的。那么在第一个时间步的推进中有

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* = u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{4}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0, \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{2}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0, \quad (2-18)$$

满足

$$\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* = \mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{4}\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau^2}{24}\partial_t^2 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\tau^3), \quad (2-19)$$

$$\mathbb{T}\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{2}\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau^2}{8}\partial_t^2 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\tau^3). \quad (2-20)$$

注意，这里的 $\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 代表了数值通量与物理通量之间的误差，物理通量 $f_{i+\frac{1}{2}}^*$ 通过下面的公式可以得到

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (2-21)$$

因此，对于在第一个时间步 $t = \frac{\tau}{2}$ ，单元平均值和导数平均值的推进

$$\bar{u}_i^{\frac{1}{2}} = \bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{2h} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^* \right), \quad \bar{v}_i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right), \quad (2-22)$$

我们有估计

$$\mathbb{T}\bar{u}_i^{\frac{1}{2}} = \mathbb{T}\bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{2h} \left(O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^2 h) + O(\tau^4) \right) = O(\tau^3), \quad (2-23)$$

$$\mathbb{T}\bar{v}_i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \left(O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^2 h) + O(\tau^4) \right) = O(\tau^2). \quad (2-24)$$

这里的估计需要注意下列关系式的成立，

$$\mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \mathbb{T}u_{i-\frac{1}{2},-}^0 = \left(C_1(x_{i+\frac{1}{2}}) - C_1(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) h^4 + O(h^5) = O(h^5), \quad (2-25)$$

$$\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \mathbb{T}(\partial_x u)_{i-\frac{1}{2},-}^0 = \left(C_2(x_{i+\frac{1}{2}}) - C_2(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) h^3 + O(h^4) = O(h^4), \quad (2-26)$$

和

$$\frac{\tau^2}{24} \partial_t^2 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) - \frac{\tau^2}{24} \partial_t^2 u(x_{i-\frac{1}{2}}, 0) = \frac{\tau^2}{24} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) \left(\partial_t^2 \partial_x u(x_i, 0) + O(h) \right) = O(\tau^2 h). \quad (2-27)$$

注意, (2-27) 利用了拉格朗日中值定理。接着, 在时间层 $t = \frac{\tau}{2}$, 我们将一般形式的重构表示为

$$u_{i+\frac{1}{2},\pm}^{\frac{1}{2}} = \sum_m \phi_m^0 \bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} + h \sum_m \psi_m^0 \bar{v}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}}, \quad (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},\pm}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \sum_m \phi_m^1 \bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} + \sum_m \psi_m^1 \bar{v}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}}, \quad (2-28)$$

其系数满足

$$\sum_m \phi_m^0 = 1, \quad \sum_m \phi_m^1 = 0. \quad (2-29)$$

这时, 有估计

$$\mathbb{T} u_{i+\frac{1}{2},\pm}^{\frac{1}{2}} = C_1(x_{i+\frac{1}{2}})h^4 + O(h^5) + \sum_m \phi_m^0 \mathbb{T} \bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} + h \sum_m \psi_m^0 \mathbb{T} \bar{v}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^3 + \tau^2 h), \quad (2-30)$$

$$\mathbb{T} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},\pm}^{\frac{1}{2}} = C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4) + \frac{1}{h} \sum_m \phi_m^1 \mathbb{T} \bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} + \sum_m \psi_m^1 \mathbb{T} \bar{v}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^2). \quad (2-31)$$

这里的估计需要注意到 $\mathbb{T} \bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}}$ 的首项系数关于 x 是利普希茨连续的。从 (2-19)、(2-23) 和 (2-27) 得到可以得到, $\bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}}$ 的误差首项是 $\frac{1}{48} \tau^3 \partial_i^2 \partial_x u(x_i, 0)$, 进而可知 $\mathbb{T} \bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}}$ 的首项系数是利普希茨连续的。

那么第二个时间步的推进中有

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{6} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{3} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^1 = u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \tau (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{\frac{1}{2}}, \quad (2-32)$$

满足

$$\mathbb{T} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = \mathbb{T} u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{6} \mathbb{T} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{3} \mathbb{T} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau^4}{720} \partial_i^4 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\tau^5), \quad (2-33)$$

$$\mathbb{T} \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^1 = \mathbb{T} u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \tau \mathbb{T} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau^3}{24} \partial_i^3 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\tau^4). \quad (2-34)$$

注意, 这里的 $\mathbb{T} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 仍然代表了数值通量与物理通量之间的误差, 物理通量 $f_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 通过下面的公式可以得到

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (2-35)$$

因此, 对于在第二个时间步 $t = \tau$, 单元平均值和导数平均值的推进

$$\bar{u}_i^1 = \bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{h} \left(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^{4th} \right), \quad \bar{v}_i^1 = \frac{1}{h} \left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^1 - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^1 \right), \quad (2-36)$$

我们有类似 (2-23) 和 (2-24) 的估计

$$\mathbb{T} \bar{u}_i^1 = \mathbb{T} \bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{h} \left(O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^3 h) + O(\tau^4 h) + O(\tau^6) \right) = O(\tau^4), \quad (2-37)$$

$$\mathbb{T} \bar{v}_i^1 = \frac{1}{h} \left(O(h^5) + O(\tau^3 h) + O(\tau^3 h) + O(\tau^5) \right) = O(\tau^3). \quad (2-38)$$

到这里, 我们完成了对一次时间推进的误差估计。接下来, 我们很容易得到, 在任意终止时刻 $t^{tem} = O(1)$ 的误差估计

$$\mathbb{T} \bar{u}_i^{tem} = O(\tau^4) \cdot N = O(\tau^4/h) = O(h^3), \quad (2-39)$$

其中, N 代表了时间推进次数, 并且满足 $N = t^{tem}/\tau = O(h^{-1})$ 。由此可见, 我们的基于两步四阶时间推进框架的数值格式, 在光滑区域只有三阶精度, 在上一小节得到数

值结果符合精度分析的结论。并且由于 (2-37) 中的误差主项是 τ^3 ，我们可以得出结论，无论选择多么高精度的埃尔米特重构，所得数值格式的精度只会有三阶精度。

在文 [1, 41] 中提出的数值格式的导数重构采取了如下 WENO 型重构：

$$(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},\pm} = \frac{1}{12h} (\bar{u}_{i-1} - 15\bar{u}_i + 15\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+2}) \quad (2-40)$$

在这样的不含导数平均值的模板上做导数重构，可以达到正确的四阶精度，此时 (2-31) 中的估计会变成

$$\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},\pm}^{\frac{1}{2}} = C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4) + \frac{1}{h} \sum \phi_m^1 \mathbb{T}\bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^3). \quad (2-41)$$

这里的导数重构变为三阶精度。接着 (2-37) 关于单元平均值 \bar{u}_i^1 的估计变成了

$$\mathbb{T}\bar{u}_i^1 = \mathbb{T}\bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{h} (O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^4 h) + O(\tau^4 h) + O(\tau^6)) = O(\tau^5 + \tau^2 h^3 + \tau h^4), \quad (2-42)$$

其中， $\bar{u}_i^1 = \bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{h} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^{4th})$ 。 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 的估计还是 (2-33) 中的

$$\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = \mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{6} \mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{3} \mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau^4}{720} \partial_t^4 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\tau^5). \quad (2-43)$$

所以框架的整体精度恢复到了四阶精度。

在二维情形下，也有类似的结论。

在本节中，我们回顾了原始的两步四阶时间推进框架，并发现其局限在于紧致性和高精度不可兼得。如果为了紧致性，采用埃尔米特重构用于导数重构，那么所得格式在光滑区域的精度不超过三阶精度。如果要保持四阶精度，导数重构就只能采用 WENO 型的重构。然后，我们从理论上分析了其中的原因，并基于此在一维和二维两种情形下，提出了改进的两步四阶时间推进框架，下面我们将分别介绍这两个框架。

2.2 改进的一维两步四阶时间推进框架

我们仔细观察第 2.1.3 小节中的精度分析，发现若导数重构选择埃尔米特重构，同时希望获得的格式在光滑区域保持四阶精度，则需要提高 (2-31) 中 $\bar{v}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}}$ 的精度至 $O(\tau^3)$ ，进而我们需要提高 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 的精度。自然的，我们可以通过将泰勒展开增加一项来达到这个目标，即

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}. \quad (2-44)$$

我们在此基础上得到了改进的两步四阶时间推进框架，下面介绍一维情形下改进的两步四阶时间推进框架。

2.2.1 一维两步四阶时间推进框架的算法流程

一维双曲守恒律可以表示为:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2-45)$$

其中, $\mathbf{u}(x, t)$ 是守恒变量向量, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 是相应的通量向量。计算单元是 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, 其大小为 $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, N$ 。为了简单起见, 本文采用均匀网格, 即 $h_i \equiv h$ 。需要强调的是, 本文中的框架也适用于非均匀网格。 $\mathbf{u}(x, t)$ 和其导数 $\mathbf{v}(x, t)$ 的单元平均值, 分别表示为 $\bar{\mathbf{u}}_i(t)$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_i(t)$, 它们分别定义在每个单元 I_i 上, 并可以表示为

$$\bar{\mathbf{u}}_i(t) = \frac{1}{h} \int_{I_i} \mathbf{u}(x, t) dx, \quad \bar{\mathbf{v}}_i(t) = \frac{1}{h} \int_{I_i} \mathbf{v}(x, t) dx. \quad (2-46)$$

假设时间层为 t^n , $n = 0, 1, \dots$; 时间步长定义为 $\tau^n = t^{n+1} - t^n$, 如果没有引起歧义, 简记为 τ 。在时间层 t^n 的单元平均值和其导数平均值分别表示为 $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_i^n$ 。

由 (2-45) 和 (2-46), 我们有

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left(\mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) \right), \quad \bar{\mathbf{v}}_i(t) = \frac{1}{h} \left(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - \mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \right), \quad (2-47)$$

接着我们得到了近似的半离散形式

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left(\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{f}}_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad \bar{\mathbf{v}}_i(t) = \frac{1}{h} \left(\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{u}}_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad (2-48)$$

其中, $\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}(t^n) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+})$ 是数值通量, $\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}(t^n) = \hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^n$ 是单元边界点值的数值解, 并且 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^n$ 均可通过重构算法和广义黎曼问题解法器得到。然后对 (2-48) 应用两步四阶时间离散^[40], 可以得到如下时间推进框架。

第一步: 在时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$, 单元平均值 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 和导数平均值 $\bar{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 通过下面的公式可以得到:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\tau}{2h} \left(\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^* - \hat{\mathbf{f}}_{i-\frac{1}{2}}^* \right), \quad \bar{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \left(\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{u}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (2-49)$$

其中, 数值通量 $\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 和单元边界的点值 $\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 定义为:

$$\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^* = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) + \frac{\tau}{4} (\partial_t \mathbf{f})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, \quad \hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2} (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, \quad (2-50)$$

其中, $(\partial_t \mathbf{f})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$, 并且广义黎曼解 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 、 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 可以由适当的重构算法和解法器得到。

第二步: 在下一个时间层 $t = t^{n+1}$, 单元平均值 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}$ 和导数平均值 $\bar{\mathbf{v}}_i^{n+1}$ 可以通过下面的公式得到:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{\mathbf{f}}_{i-\frac{1}{2}}^{4th} \right), \quad \bar{\mathbf{v}}_i^{n+1} = \frac{1}{h} \left(\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right), \quad (2-51)$$

其中, 数值通量 $\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 和单元边界的点值 $\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 定义为:

$$\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) + \frac{\tau}{6} (\partial_t \mathbf{f})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{3} (\partial_t \mathbf{f})_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad \hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \tau (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad (2-52)$$

其中, $(\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} \right) (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$, 并且广义黎曼解 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ 和 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ 也可以由同样的重构算法和解法器得到。

为了确保这个时间推进框架的完整性, 我们还需要介绍其中的两个组件——重构算法和解法器。在某个时间层, 重构算法根据单元平均值 $\bar{\mathbf{u}}_i$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_i$ 重构出一个多项式, 再由多项式给出在单元边界处空间中某个方向上的近似值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 、 $(\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 和 $(\partial_x^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 。然后解法器根据重构的结果, 给出 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 、 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 的值。其中二阶导数的计算仅在第一步中需要。

2.2.2 一维两步四阶时间推进框架的组件: 重构

接下来, 我们要介绍改进的框架中的重构。以时间层 $t = t^n$ 和单元边界点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 左侧为例, 给定单元平均值 $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ 和导数平均值 $\bar{\mathbf{v}}_i^n$ 。重构是指从单元平均值和导数平均值得到单元边界处解的单侧近似值的过程, 我们用符号 \mathcal{R} 代表这个过程, 这个重构过程可以表示为:

$$\left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}^n, (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-}^n, (\partial_x^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-}^n \right) = \mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}_i^n, \bar{\mathbf{v}}_i^n, \bar{\mathbf{u}}_{i+1}^n, \bar{\mathbf{v}}_{i+1}^n, \dots), \quad (2-53)$$

在光滑区域, 对重构的精度要求为:

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-} &= C_1(x_{i+\frac{1}{2}})h^4 + O(h^5), & \mathbb{T} (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-} &= C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4), \\ \mathbb{T} (\partial_x^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-} &= C_3(x_{i+\frac{1}{2}})h^2 + O(h^3), \end{aligned} \quad (2-54)$$

其中, $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 和 $C_3(x)$ 是利普希茨连续的, \mathbb{T} 仍然代表了截断误差, 是数值解与解析解的差, 例如

$$\mathbb{T} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-} = \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-} - \mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}). \quad (2-55)$$

这里对精度的要求, 可以在第 2.2.4 小节找到原因。对于单元边界点右侧的近似值 $\left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}^n, (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},+}^n, (\partial_x^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},+}^n \right)$ 也是类似的。

我们简单地罗列一些现有的满足要求的一维重构:

- 5 阶精度及以上的 WENO 重构^[48, 49] 和 WENO-Z 重构^[51];
- 5 阶精度及以上的 CWENO 重构^[52, 53] 和 WENO-AO 重构^[54];
- 5 阶精度及以上的 HWENO 重构^[55]。

至此, 我们简单介绍了改进的一维两步四阶时间推进框架中的重构。

2.2.3 一维两步四阶时间推进框架的组件: 解法器

在这一小节, 我们要介绍改进的框架中的解法器。这里以时间层 $t = t^n$ 和单元边界点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 左侧为例, 已知重构的结果 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 、 $(\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 和 $(\partial_x^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$, 可以由解法器获得广义黎曼解 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 、 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 。该框架中的解法器分为两个部分, 第一部分是一个标准一阶 LW 型解法器, 第二部分是一个线性二阶 LW 型解法器。

2.2.3.1 标准一阶 LW 型解法器

这个标准一阶 LW 型解法器，用符号 \mathcal{G} 代表，可以根据重构的结果给出广义黎曼解 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ ，即

$$\left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \right) = \mathcal{G} \left(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}^n, (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n \right), \quad (2-56)$$

它们满足（或近似地满足）

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \lim_{t \rightarrow t^n, +} \mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t), \quad (\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \lim_{t \rightarrow t^n, +} \partial_t \mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t). \quad (2-57)$$

LW 型解法器可以使用一维的广义黎曼问题解法器^[69]，这类解法器通过解一个与这个单元边界点处相关联的广义黎曼问题，获得广义黎曼解。这个问题的初值定义在 $t = t^n$ 时间层：

$$\mathbf{u}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}^n + (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-}^n (x - x_{i+\frac{1}{2}}), & x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}^n + (\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},+}^n (x - x_{i+\frac{1}{2}}), & x > x_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (2-58)$$

为了求解这个问题，往往需要一维黎曼问题解法器求解 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ ，以及一维广义黎曼问题解法器求解一阶导数 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 。黎曼问题解法器可以采用精确的 Godunov 解法器^[62]，或者近似黎曼问题解法器，例如：Roe 解法器^[63]、HLL 解法器^[66] 和 HLLC 解法器^[67]。本文中的工作采用一维的 Godunov 解法器和文 [69] 中的广义黎曼问题解法器。

2.2.3.2 线性二阶 LW 型解法器

对于时间推进的第二步，只有标准一阶 LW 型解法器已经足够了。然后在第一步中，我们还需要一个线性二阶 LW 型解法器，来求解广义黎曼解的第三个值 $(\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 。我们可以通过对偏微分方程组微分，得到这个二阶时间导数。我们将在这里讨论计算二阶导数的具体细节。这一部分是原始的两步四阶框架所没有的。

我们现在已经知道一个单元边界点 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 上的下列值

$$\mathbf{u}_{\pm}, \mathbf{u}^+, (\partial_x \mathbf{u})_{\pm}, (\partial_t \mathbf{u})^+, (\partial_x^2 \mathbf{u})_{\pm}, \quad (2-59)$$

其中上标和下标是简化过的，例如 \mathbf{u}_{\pm} 代表 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ ， \mathbf{u}^+ 代表 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 。当处于间断附近时，我们希望改进的两步四阶时间推进框架接近原始的两步四阶时间推进框架，从而保持相似的性能，也就是希望额外添加的项 $\frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 \mathbf{u})^+$ 是一个小量。幸运的是，基本无振荡的埃尔米特重构可以通过在间断附近主要采用应用了 minmod 限制器的至多一次的重构多项式（例如，(3-60) 中的重构多项式）来自动实现这个条件。具体地，重构得到的二阶空间导数的值是零，一阶空间导数的值是有界的。然后通过应用以下公式，即 (2-61)~(2-63)，我们可以确认 $(\partial_t^2 \mathbf{u})^+$ 的值确实是有界的，从而有 $\frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 \mathbf{u})^+ = O(\tau^2)$ 。下面我们仅讨论光滑区域内的情形。首先，利用偏微分方程组，我们有

$$\partial_t^2 \mathbf{u} = -\partial_t \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = -\partial_x \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \partial_t \mathbf{u} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} \partial_t \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \partial_x \partial_t \mathbf{u}. \quad (2-60)$$

所以,

$$(\partial_t^2 \mathbf{u})^+ = -\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}^+) (\partial_x \mathbf{u})^+ (\partial_t \mathbf{u})^+ - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^+) (\partial_x \partial_t \mathbf{u})^+. \quad (2-61)$$

这里仅有时空混合导数 $(\partial_x \partial_t \mathbf{u})^+$ 是未知的, 并且可以再次通过偏微分方程组进行时空对换得到

$$(\partial_x \partial_t \mathbf{u})^+ = -\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}^+) (\partial_x \mathbf{u})^+ (\partial_x \mathbf{u})^+ - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^+) (\partial_x^2 \mathbf{u})^+, \quad (2-62)$$

然后这里我们可以发现, 只剩下二阶空间导数是未知的, 它们可以通过简单的算术平均近似

$$(\partial_x^2 \mathbf{u})^+ = \frac{1}{2} (\partial_x^2 \mathbf{u})_+ + \frac{1}{2} (\partial_x^2 \mathbf{u})_-, \quad (2-63)$$

到这里, 我们就得到了 $(\partial_t^2 \mathbf{u})^+$, 也就是 $(\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 。

在这两个小节中, 我们已经简单介绍了两步四阶时间推进框架中的两个组件——重构和解法器。一旦选定重构和解法器, 我们就可以得到一个基于改进的两步四阶时间推进框架的格式。需要注意的是, 只有选择适当的重构和解法器, 才可以得到一个稳定的格式; 不同的选择得到的格式可能有截然不同的时间步长限制。

2.2.4 一维两步四阶时间推进框架的精度分析

这一小节, 我们将从理论上验证改进的两步四阶时间推进框架在导数重构采用埃尔米特重构时, 获得的数值格式能否在光滑区域保持四阶精度。与第 2.1.3 小节中原始的框架相比, 我们的改进的框架计算了二阶空间导数和二阶时间导数并且在第一步的边界点值的推进 (2-50) 中引入了二阶导数项。所以由对重构的要求 (2-54), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{T} u_{i+\frac{1}{2}, \pm}^0 &= C_1(x_{i+\frac{1}{2}})h^4 + O(h^5), & \mathbb{T} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2}, \pm}^0 &= C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4), \\ \mathbb{T} (\partial_x^2 u)_{i+\frac{1}{2}, \pm}^0 &= C_3(x_{i+\frac{1}{2}})h^2 + O(h^3), \end{aligned} \quad (2-64)$$

其中, \mathbb{T} 仍然代表截断误差, $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 和 $C_3(x)$ 是利普希茨连续的。然后 (2-18) 和 (2-20) 关于 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 的部分就变成了

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}, -}^0 - \frac{\tau}{2} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2}, -}^0 + \frac{\tau^2}{8} (\partial_x^2 u)_{i+\frac{1}{2}, -}^0, \quad (2-65)$$

$$\mathbb{T} \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \mathbb{T} u_{i+\frac{1}{2}, -}^0 - \frac{\tau}{2} \mathbb{T} (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2}, -}^0 + \frac{\tau^2}{8} \mathbb{T} (\partial_x^2 u)_{i+\frac{1}{2}, -}^0 - \frac{\tau^3}{48} \partial_t^3 u(x_{i+\frac{1}{2}, -}, 0) + O(\tau^4). \quad (2-66)$$

接下来, 第一个时间步得到的导数平均值的精度与 (2-24) 相比提高到了三阶精度:

$$\mathbb{T} \bar{v}_i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^2 h^3) + O(\tau^3 h) + O(\tau^5)) = O(\tau^3). \quad (2-67)$$

这里的估计需要注意下列关系式的成立,

$$\bar{v}_i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}), \quad (2-68)$$

$$\mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \mathbb{T}u_{i-\frac{1}{2},-}^0 = (C_1(x_{i+\frac{1}{2}}) - C_1(x_{i-\frac{1}{2}}))h^4 + O(h^5) = O(h^5), \quad (2-69)$$

$$\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \mathbb{T}(\partial_x u)_{i-\frac{1}{2},-}^0 = (C_2(x_{i+\frac{1}{2}}) - C_2(x_{i-\frac{1}{2}}))h^3 + O(h^4) = O(h^4), \quad (2-70)$$

$$\mathbb{T}(\partial_x^2 u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \mathbb{T}(\partial_x^2 u)_{i-\frac{1}{2},-}^0 = (C_3(x_{i+\frac{1}{2}}) - C_3(x_{i-\frac{1}{2}}))h^2 + O(h^3) = O(h^3), \quad (2-71)$$

和

$$\frac{\tau^3}{48}\partial_t^3 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) - \frac{\tau^3}{48}\partial_t^3 u(x_{i-\frac{1}{2}}, 0) = \frac{\tau^3}{48}(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}})(\partial_t^3 \partial_x u(x_i, 0) + O(h)) = O(\tau^3 h). \quad (2-72)$$

随后, 中间时间层的重构的误差估计 (2-31) 就变成了

$$\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},\pm}^{\frac{1}{2}} = C_2(x_{i+\frac{1}{2}})h^3 + O(h^4) + \frac{1}{h} \sum \phi_m^1 \mathbb{T}\bar{u}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} + \sum \psi_m^1 \mathbb{T}\bar{v}_{i-r+m}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^3). \quad (2-73)$$

注意, 这里的导数重构从二阶精度变成了三阶精度。接着就如同 (2-42) 和 (2-43) 一样, (2-37) 中关于单元平均值 \bar{u}_i^1 的估计变成了

$$\mathbb{T}\bar{u}_i^1 = \mathbb{T}\bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{h}(O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^4 h) + O(\tau^4 h) + O(\tau^6)) = O(\tau^5 + \tau^2 h^3 + \tau h^4), \quad (2-74)$$

其中, $\bar{u}_i^1 = \bar{u}_i^0 + \frac{\tau}{h}(\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^{4th})$ 。 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 的估计还是 (2-33) 中的

$$\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = \mathbb{T}u_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{6}\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^0 - \frac{\tau}{3}\mathbb{T}(\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau^4}{720}\partial_t^4 u(x_{i+\frac{1}{2}}, 0) + O(\tau^5). \quad (2-75)$$

所以在改进的两步四阶时间推进框架中导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构时, 获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。在第 3.4 节中, 我们将用数值算例验证这一结果。

2.3 改进的二维两步四阶时间推进框架

我们已经得到了一维情形下的改进的两步四阶时间推进框架, 下面将其推广到二维情形下。

2.3.1 二维两步四阶时间推进框架的算法流程

不失一般性, 以二维双曲守恒律为例,

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2-76)$$

其中, \mathbf{u} 是守恒变量向量, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ 是相应的通量向量。计算单元是 $I_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$, 其大小为 $h_x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, N_x$ 和 $h_y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$, $j = 1, \dots, N_y$ 。为了简单起见, 这里仍然采用均匀网格。 $\mathbf{u}(x, y)$ 的单元平均值和其导数 $\nabla \mathbf{u}$, 分别表示为 $\bar{\mathbf{u}}_{ij}$ 和 $(\bar{\mathbf{v}}_{ij}, \bar{\mathbf{w}}_{ij})$, 它们分别定义在每个单元上, 并可以表示为

$$\bar{\mathbf{u}}_{ij} = \frac{1}{h_x h_y} \iint_{I_{ij}} \mathbf{u}(x, y) dx dy, \quad (\bar{\mathbf{v}}_{ij}, \bar{\mathbf{w}}_{ij}) = \frac{1}{h_x h_y} \iint_{I_{ij}} \nabla \mathbf{u}(x, y) dx dy. \quad (2-77)$$

假设时间层为 t^n , $n = 0, 1, \dots$, 时间步长定义为 $\tau^n = t^{n+1} - t^n$, 如果没有引起歧义, 简记为 τ 。随后, 我们将介绍二维情形下改进的两步四阶时间推进框架。

第一步：在时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ ，单元平均值 $\bar{u}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 和导数平均值 $(\bar{v}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}})$ 通过下面的公式可以得到：

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} &= \bar{u}_{ij}^n - \frac{\tau}{2h_x} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^* - \hat{f}_{i-\frac{1}{2},j}^*) - \frac{\tau}{2h_y} (\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \hat{g}_{i,j-\frac{1}{2}}^*), \\ \bar{v}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{h_x} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}), \quad \bar{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_y} (\hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}),\end{aligned}\quad (2-78)$$

其中，数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^*$ 和单元边界的线平均值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$ 通过高斯数值积分得到：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^* = \frac{1}{2} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j+G}^* + \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j-G}^*), \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n+\frac{1}{2}} + \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-G}^{n+\frac{1}{2}}). \quad (2-79)$$

其中， $G = \sqrt{3}/6$ 。然后，高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j\pm G})$ 处的数值通量和单元边界点值定义为：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^* = f(u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}) + \frac{\tau}{4} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}, \quad (2-80)$$

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+} + \frac{\tau}{2} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}, \quad (2-81)$$

其中， $(\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}) (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}$ ，并且广义黎曼解 $u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}$ 、 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}$ 和 $(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}$ 可以由适当的重构算法和解法器得到。

在 y 方向， $\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^*$ 和 $\hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 也是类似的。

第二步：在下一个时间层 $t = t^{n+1}$ ，单元平均值 \bar{u}_{ij}^{n+1} 和导数平均值 $(\bar{v}_{ij}^{n+1}, \bar{w}_{ij}^{n+1})$ 可以通过下面的公式得到：

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ij}^{n+1} &= \bar{u}_{ij}^n - \frac{\tau}{h_x} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^{4th} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2},j}^{4th}) - \frac{\tau}{h_y} (\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{g}_{i,j-\frac{1}{2}}^{4th}), \\ \bar{v}_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{h_x} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}), \quad \bar{w}_{ij}^{n+1} = \frac{1}{h_y} (\hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \hat{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}),\end{aligned}\quad (2-82)$$

其中，数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^{4th}$ 和单元边界的线平均值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 还是通过和 (2-79) 一样的高斯数值积分得到，然后高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j\pm G})$ 处的数值通量和单元边界点值定义为：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{4th} = f(u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+}) + \frac{\tau}{6} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+} + \frac{\tau}{3} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad (2-83)$$

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n,+} + \tau (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad (2-84)$$

其中， $(\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+}) (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+}$ ，并且广义黎曼解 $u_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+}$ 和 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j\pm G}^{n+\frac{1}{2},+}$ 也可以由同样的重构算法和解法器得到。

在 y 方向， $\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^{4th}$ 和 $\hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 也是类似的。

为了确保这个时间推进框架的完整性，我们还需要介绍其中的两个组件——重构算法和解法器。在某个时间层，重构算法根据单元平均值 \bar{u}_{ij} 、 \bar{v}_{ij} 和 \bar{w}_{ij} 重构出一个多项式，再由多项式给出在单元边界处空间中某个方向上的近似值 $u_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_x^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_x \partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 和 $(\partial_y^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 。然后解法器根据重构的结果，给出 $u_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 、 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 和 $(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 的值。其中二阶导数的计

算仅在第一步中需要。对于其他高斯点也是类似的。

2.3.2 二维两步四阶时间推进框架的组件：重构

接下来，我们要介绍二维情形下的重构，以及对其的要求和一些现有的选项。

以时间层 $t = t^n$ 和高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 左侧为例，给定单元平均值 \bar{u}_{ij}^n 和导数平均值 $(\bar{v}_{ij}^n, \bar{w}_{ij}^n)$ ，重构是指从单元平均值和导数平均值得到单元边界处解的单侧近似值的过程，我们用符号 \mathcal{R} 代表这个过程，这个重构过程可以表示为：

$$\begin{aligned} & \left(u_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n, (\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n, (\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n, \right. \\ & \left. (\partial_x^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n, (\partial_x \partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n, (\partial_y^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n \right) = \mathcal{R}(\bar{u}_{ij}^n, \bar{v}_{ij}^n, \bar{w}_{ij}^n, \dots). \end{aligned} \quad (2-85)$$

在光滑区域，两步四阶时间推进框架对重构的精度要求为：

$$\begin{aligned} \mathbb{T}u_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} &= C_1(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})h^4 + O(h^5), \\ \mathbb{T}(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} &= C_2^{d_1, d_2}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})h^{4-d_1-d_2} + O(h^{5-d_1-d_2}), \quad d_1 + d_2 = 1, 2, \end{aligned} \quad (2-86)$$

其中， $C_1(x)$ 和 $C_2^{d_1, d_2}(x)$ 是利普希茨连续的。高斯点右侧以及其他高斯点的重构也是类似的，不再赘述。

我们简单地罗列一些现有的满足要求的二维重构：

- 5 阶精度及以上的 WENO 重构^[48, 49] 和 WENO-Z 重构^[51];
- 5 阶精度及以上的 CWENO 重构^[53] 和 WENO-AO 重构^[54];
- 4 阶精度及以上的 HWENO 重构^[56]。

至此，我们介绍了改进的二维两步四阶时间推进框架中的重构算法。

2.3.3 二维两步四阶时间推进框架的组件：解法器

在这一小节，我们要介绍改进的框架中的解法器。这里以时间层 $t = t^n$ 和高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 左侧为例，已知重构的结果 $u_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_x^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 、 $(\partial_x \partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ 和 $(\partial_y^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^n$ ，可以由解法器获得广义黎曼解 $u_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 、 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 和 $(\partial_x^2 u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 。二维框架中的解法器仍然分为两个部分，第一部分是一个标准一阶 LW 型解法器，第二部分是一个线性二阶 LW 型解法器。

2.3.3.1 标准一阶 LW 型解法器

这个标准一阶 LW 型解法器，用符号 \mathcal{G} 代表，可以根据重构的结果给出广义黎曼解 $u_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 和 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ ，即

$$\left(u_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}, (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+} \right) = \mathcal{G} \left(u_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n, (\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n, (\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n \right), \quad (2-87)$$

它们满足（或近似地满足）

$$u_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+} = \lim_{t \rightarrow t^{n,+}} u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}, t), \quad (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+} = \lim_{t \rightarrow t^{n,+}} \partial_t u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}, t). \quad (2-88)$$

LW 型解法器可以使用二维的广义黎曼问题解法器^[69], 这个解法器通过解一个与这个高斯点处相关联的广义黎曼问题, 获得广义黎曼解。这个问题的初值定义在 $t = t^n$ 时间层:

$$\mathbf{u}(x, y, t^n) = \begin{cases} \mathbf{p}_L(x, y), & x < x_{i+\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{p}_R(x, y), & x > x_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2-89)$$

其中,

$$\mathbf{p}_L(x, y) = \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^n + (\partial_x \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^n (x - x_{i+\frac{1}{2}}) + (\partial_y \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^n (y - y_{j+G}), \quad (2-90)$$

$$\mathbf{p}_R(x, y) = \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, +), j+G}^n + (\partial_x \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, +), j+G}^n (x - x_{i+\frac{1}{2}}) + (\partial_y \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, +), j+G}^n (y - y_{j+G}). \quad (2-91)$$

对于这个二维广义黎曼问题, 需要二维黎曼问题解法器求解 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}, j+G}^{n,+}$, 以及二维广义黎曼问题解法器求解一阶导数 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}, j+G}^{n,+}$ 。本文中的二维部分工作采用二维的 Godunov 解法器和二维弱耦合的广义黎曼问题解法器^[70]。

2.3.3.2 线性二阶 LW 型解法器

在时间推进的第一步中, 我们不只需要一个标准一阶 LW 型解法器, 我们还需要一个线性二阶 LW 型解法器, 来求解广义黎曼解的第三个值 $(\partial_t^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}, j+G}^{n,+}$ 。我们可以通过对偏微分方程组微分, 得到这个二阶时间导数。我们将在这里讨论计算二阶导数的具体细节。

我们现在已经知道一个高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 上的下列值

$$\mathbf{u}_{\pm}, \mathbf{u}^+, (\partial_x \mathbf{u})_{\pm}, (\partial_y \mathbf{u})_{\pm}, (\partial_t \mathbf{u})^+, (\partial_x^2 \mathbf{u})_{\pm}, (\partial_x \partial_y \mathbf{u})_{\pm}, (\partial_y^2 \mathbf{u})_{\pm}, \quad (2-92)$$

其中上标和下标经过了简化, 例如 \mathbf{u}_{\pm} 代表 $\mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, \pm), j+G}^n$, \mathbf{u}^+ 代表 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}, j+G}^{n,+}$ 。当处于间断附近时, 我们希望改进的两步四阶时间推进框架接近原始的两步四阶时间推进框架, 从而保持相似的性能, 也就是希望额外添加的项 $\frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 \mathbf{u})^+$ 是一个小量。幸运的是, 基本无振荡的埃尔米特重构可以通过在间断附近主要采用应用了 minmod 限制器的至多一次的重构多项式 (例如, (4-8) 中的重构多项式) 来自动实现这个条件。具体地, 重构得到的二阶空间导数的值是零, 一阶空间导数的值是有界的。然后通过应用以下公式, 即 (2-94)~(2-96), 我们可以确认 $(\partial_t^2 \mathbf{u})^+$ 的值确实是有界的, 从而有 $\frac{\tau^2}{8} (\partial_t^2 \mathbf{u})^+ = O(\tau^2)$ 。下面我们仅讨论光滑区域内的情形。首先, 利用偏微分方程组, 我们有

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathbf{u} &= -\partial_t \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \partial_t \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{u}) = -\partial_x \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \partial_t \mathbf{u} \right) - \partial_y \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \partial_t \mathbf{u} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} \partial_t \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \partial_x \partial_t \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}) \partial_y \mathbf{u} \partial_t \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \partial_y \partial_t \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2-93)$$

所以,

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 \mathbf{u})^+ &= -\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}^+) (\partial_x \mathbf{u})^+ (\partial_t \mathbf{u})^+ - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^+) (\partial_x \partial_t \mathbf{u})^+ \\ &\quad - \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}^2}(\mathbf{u}^+) (\partial_y \mathbf{u})^+ (\partial_t \mathbf{u})^+ - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^+) (\partial_y \partial_t \mathbf{u})^+. \end{aligned} \quad (2-94)$$

这里仅有两个时空混合导数 $(\partial_x \partial_t u)^+$ 和 $(\partial_y \partial_t u)^+$ 是未知的，并且它们可以再次通过偏微分方程组进行时空对换得到

$$\begin{aligned} (\partial_x \partial_t u)^+ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u^+) (\partial_x u)^+ (\partial_x u)^+ - \frac{\partial f}{\partial u}(u^+) (\partial_x^2 u)^+ \\ &\quad - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u^+) (\partial_y u)^+ (\partial_x u)^+ - \frac{\partial g}{\partial u}(u^+) (\partial_x \partial_y u)^+, \end{aligned} \quad (2-95)$$

对于 $(\partial_y \partial_t u)^+$ 也有类似的结果。然后这里我们可以发现，仅剩下几个二阶空间导数是未知的，它们可以通过简单的算术平均近似

$$(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u)^+ = \frac{1}{2} (\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u)_+ + \frac{1}{2} (\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u)_-, \quad d_1 + d_2 = 1, 2, \quad (2-96)$$

到这里，我们就得到了 $(\partial_t^2 u)^+$ ，也就是 $(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n,+}$ 。 $(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j-G}^{n,+}$ 的值也是类似的。

在这两个小节中，我们已经简单介绍了二维情形下的两步四阶时间推进框架中的重构和解法器。当我们选定了适当的重构和解法器，就可以得到一个基于改进的两步四阶时间推进框架的二维的数值格式，其稳定性和时间步长限制取决于具体的重构和解法器选择。

2.3.4 二维两步四阶时间推进框架的精度分析

这一小节，我们将分析二维情形下改进的两步四阶时间推进框架的精度，验证在导数重构采用埃尔米特重构时，获得的数值格式能否在光滑区域保持四阶精度。为了简便起见，我们以二维线性对流方程

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_y u = 0, \quad (2-97)$$

为例，采用均匀的正方形网格 $h_x = h_y = h$ ，并假设 CFL 数是 $O(1)$ 的，即 $O(\tau) = O(h)$ ，假设整个计算区域都是无穷阶光滑的。由对重构的要求 (2-86)，我们可以得到在时间层 $t = t^0$ 上有

$$\begin{aligned} \mathbb{T} u_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^0 &= O(h^4), & \mathbb{T} (\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^0 &= O(h^3), \\ \mathbb{T} (\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^0 &= O(h^3), & \mathbb{T} (\partial_x^2 u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^0 &= O(h^2), \\ \mathbb{T} (\partial_x \partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^0 &= O(h^2), & \mathbb{T} (\partial_y^2 u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^0 &= O(h^2), \end{aligned} \quad (2-98)$$

其中， \mathbb{T} 仍然代表截断误差，并且这里每个重构的误差首项系数关于坐标 x 和 y 都是利普希茨连续的。那么第一个时间步的推进中有如下估计

$$\mathbb{T} \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j+G}^* = \mathbb{T} u_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0 + \frac{\tau}{4} \mathbb{T} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{0,+} - \frac{\tau^2}{24} \partial_t^2 u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}, 0) + O(\tau^3), \quad (2-99)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+G}^{\frac{1}{2}} &= \mathbb{T} u_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0 + \frac{\tau}{2} \mathbb{T} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{0,+} + \frac{\tau^2}{8} \mathbb{T} (\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{0,+} \\ &\quad - \frac{\tau^3}{48} \partial_t^3 u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}, 0) + O(\tau^4), \end{aligned} \quad (2-100)$$

其中

$$\mathbb{T}(\partial_t f)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{0,+} = \mathbb{T}(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{0,+} = -\mathbb{T}(\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0 - \mathbb{T}(\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0, \quad (2-101)$$

$$\mathbb{T}(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2},j+G}^{0,+} = \mathbb{T}(\partial_x^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0 + 2\mathbb{T}(\partial_x \partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0 + \mathbb{T}(\partial_y^2 u)_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}^0. \quad (2-102)$$

注意，这里的 $\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j+G}^*$ 代表了数值通量与物理通量之间的误差，物理通量 $f_{i+\frac{1}{2},j+G}^*$ 通过下面的公式可以得到

$$f_{i+\frac{1}{2},j+G}^* = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}, t)) dt. \quad (2-103)$$

接下来，由于两点高斯积分有四阶精度，我们可以得到

$$\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^* = \frac{1}{2}\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j-G}^* + \frac{1}{2}\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j+G}^* + O(h^4), \quad (2-104)$$

$$\mathbb{T}\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathbb{T}\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-G}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mathbb{T}\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+G}^{\frac{1}{2}} + O(h^4). \quad (2-105)$$

注意，这里的 $\mathbb{T}\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j}^*$ 代表了数值通量与物理通量之间的误差，物理通量 $f_{i+\frac{1}{2},j}^*$ 通过下面的公式可以得到

$$f_{i+\frac{1}{2},j}^* = \frac{2}{\tau h_y} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t)) dy dt, \quad (2-106)$$

以及 $\mathbb{T}\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{\frac{1}{2}}$ 代表单元边界上的线平均值的数值解与真实值之间的误差，真实值是

$$\frac{1}{h} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u(x_{i+\frac{1}{2}}, y, \frac{\tau}{2}) dy. \quad (2-107)$$

在 y 方向，我们对 $\hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^*$ 和 $\hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 也有类似的分析结果。因此，对于在第一个时间步 $t = \frac{\tau}{2}$ ，我们有估计

$$\mathbb{T}\hat{u}_{ij}^{\frac{1}{2}} = \mathbb{T}\hat{u}_{ij}^0 - \frac{\tau}{2h} (O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^2 h) + O(\tau^4)) = O(\tau^3), \quad (2-108)$$

$$\mathbb{T}\hat{v}_{ij}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^2 h^3) + O(\tau^3 h) + O(\tau^5)) = O(\tau^3), \quad (2-109)$$

$$\mathbb{T}\hat{w}_{ij}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (O(h^5) + O(\tau h^4) + O(\tau^2 h^3) + O(\tau^3 h) + O(\tau^5)) = O(\tau^3). \quad (2-110)$$

接着，在时间层 $t = \frac{\tau}{2}$ ，类似第一步的分析，对重构有误差估计

$$\mathbb{T}\hat{u}_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^3), \quad \mathbb{T}(\partial_x u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^3), \quad \mathbb{T}(\partial_y u)_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^{\frac{1}{2}} = O(\tau^3). \quad (2-111)$$

因此，对于在第二个时间步 $t = \tau$ ，我们有估计

$$\mathbb{T}\hat{u}_{ij}^1 = O(\tau^5 + \tau^2 h^3 + \tau h^4), \quad \mathbb{T}\hat{v}_{ij}^1 = O(\tau^3), \quad \mathbb{T}\hat{w}_{ij}^1 = O(\tau^3). \quad (2-112)$$

到这里，我们完成了对一次时间推进的误差估计。接下来，我们很容易得到，在任意终止时刻 $t^{tem} = O(1)$ 的误差估计

$$\mathbb{T}\hat{u}_{ij}^{tem} = O(\tau^5 + \tau^2 h^3 + \tau h^4) \cdot N = O(\tau^5/h + \tau^2 h^2 + \tau h^3) = O(h^4), \quad (2-113)$$

其中， N 代表了时间推进次数，并且满足 $N = t^{tem}/\tau = O(h^{-1})$ 。

由此可见，二维情形下，基于改进的两步四阶时间推进框架的数值格式，可以

在导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构的同时，在光滑区域保持四阶精度。在 4.4 节中，我们将用数值算例验证这一结果。

2.4 一种新的三步四阶时间推进框架

如果不想加入略显复杂的二阶时间导数，我们可以采用一种三步四阶时间推进框架。相比两步四阶框架，三步四阶框架会使得所得格式更加简单，但不够紧致。具体的，以一维情形为例，我们在第一步之前添加一步，并修改原有的第一步。

第一步（新增）：在时间层 $t = t^{n+\frac{1}{4}}$ ，单元平均值 $\bar{u}_i^{n+\frac{1}{4}}$ 和导数平均值 $\bar{v}_i^{n+\frac{1}{4}}$ 通过下面的公式可以得到：

$$\bar{u}_i^{n+\frac{1}{4}} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{4h} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^\circ - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^\circ), \quad \bar{v}_i^{n+\frac{1}{4}} = \frac{1}{h} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{4}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{4}}), \quad (2-114)$$

其中，数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^\circ$ 和单元边界上的点值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{4}}$ 定义为：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^\circ = f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) + \frac{\tau}{8} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{4}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{4} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, \quad (2-115)$$

其中， $(\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+})(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ ，并且广义黎曼解 $u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 可以由适当的重构算法和解法器得到。

第二步（原第一步，有修改）：在时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ ，单元平均值 $\bar{u}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 和导数平均值 $\bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 通过下面的公式可以得到：

$$\bar{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{2h} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^*), \quad \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (2-116)$$

其中，数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 和单元边界的点值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 定义为：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^* = f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) + \frac{\tau}{4} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2} (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{4},+}, \quad (2-117)$$

其中，广义黎曼解 $(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{4},+}$ 可以由适当的重构算法和解法器得到。

第三步（原第二步，无修改）：在下一个时间层 $t = t^{n+1}$ ，单元平均值 \bar{u}_i^{n+1} 和导数平均值 \bar{v}_i^{n+1} 可以通过下面的公式得到：

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{h} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}^{4th}), \quad \bar{v}_i^{n+1} = \frac{1}{h} (\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}), \quad (2-118)$$

其中，数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th}$ 和单元边界的点值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 定义为：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^{4th} = f(u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}) + \frac{\tau}{6} (\partial_t f)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{3} (\partial_t^2 f)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \tau (\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}, \quad (2-119)$$

其中， $(\partial_t^2 f)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+})(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ ，并且广义黎曼解 $u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ 和 $(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2},+}$ 也可以由同样的重构算法和解法器得到。

二维情形下，也有类似的推进框架。

由于三步四阶时间推进框架不够紧致，与本文的目标不一致，故本文采用改进

的两步四阶时间推进框架。

2.5 边界处理：虚拟单元技术

在本章还需要讨论两步四阶时间推进框架所得格式中的边界处理。由于本文研究固定的结构网格，故采用虚拟单元技术，也就是在计算区域之外划分若干层虚拟单元，例如在单元 I_0, I_1, \dots, I_{N-1} 之外划分两层单元 I_{-2}, I_{-1} 以及 I_N, I_{N+1} ，如图 2.1 所示。

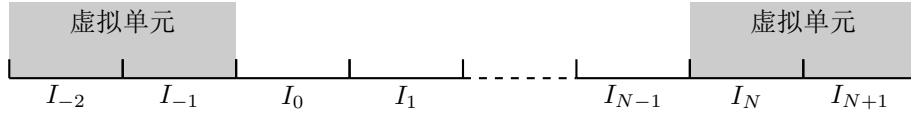


图 2.1 虚拟单元示意图。

虚拟单元要根据边界条件赋值，例如对于周期边界，我们有

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_{N-m}, \quad m < 0, \quad \mathbf{u}_{N+m} = \mathbf{u}_m, \quad m \geq 0. \quad (2-120)$$

对于狄利克雷边界，有

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_L, \quad m < 0, \quad \mathbf{u}_{N+m} = \mathbf{u}_R, \quad m \geq 0. \quad (2-121)$$

对于欧拉方程组的反射边界，满足

$$\begin{aligned} \rho_m &= \rho_{-1-m}, \quad u_m = -u_{-1-m}, \quad p_m = p_{-1-m}, & m < 0, \\ \rho_{N+m} &= \rho_{N-1-m}, \quad u_{N+m} = -u_{N-1-m}, \quad p_{N+m} = p_{N-1-m}, & m \geq 0. \end{aligned} \quad (2-122)$$

在二维情形下，也有类似的结论。

2.6 小结

在本章，我们发现原始的两步四阶时间推进框架的紧致性和高精度不可兼得。如果导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构，那么所得格式在光滑区域的精度不超过三阶精度。随后，我们分析了其原因，并提出了改进的两步四阶时间推进框架。在改进的框架中导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构时，获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。最后，我们简单介绍了三步四阶时间推进框架和虚拟单元边界处理技术。

接下来，我们将基于改进的两步四阶时间推进框架，设计一种求解双曲守恒律的紧致两步四阶数值格式。

第三章 一维基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

在第二章中，我们为了使用紧致的埃尔米特重构，提出了改进的两步四阶时间推进框架。接下来，我们将基于此框架设计一维的基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。为此，我们要选择适当的重构算法和解法器。

3.1 广义黎曼问题解法器

在一维情形下，本文采用 Godunov 解法器和文 [69] 中的广义黎曼问题解法器作为标准一阶 LW 型解法器，然后使用第 2.2.3 小节中的线性二阶 LW 型解法器。下面我们以前述方程组为例，简单介绍一下 Godunov 解法器和广义黎曼问题解法器。为了方便表述，本小节将 $(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)$ 平移到原点，用符号 \mathbf{u}_L 、 \mathbf{u}_R 、 \mathbf{u}'_L 和 \mathbf{u}'_R 代替输入四个值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},-}^n$ 、 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},+}^n$ 、 $(\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},-}^n$ 和 $(\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},+}^n$ ，用符号 \mathbf{u}_* 和 $(\partial_t \mathbf{u})_*$ 代替需要输出的两个值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 和 $(\partial_t \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$ 。

3.1.1 黎曼问题解法器：Godunov 解法器

两步四阶时间推进框架提供给解法器的输入是一个广义黎曼问题，

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x f(\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L + \mathbf{u}'_L x, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R + \mathbf{u}'_R x, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3-1)$$

这个广义黎曼问题关联着一个黎曼问题：

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^A + \partial_x f(\mathbf{u}^A) = 0, \\ \mathbf{u}^A(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3-2)$$

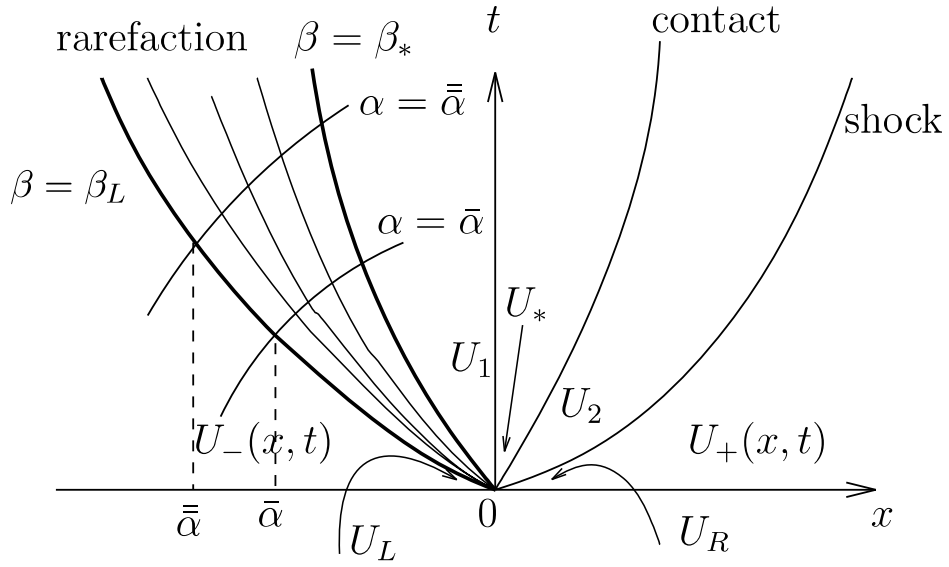
两者的一个典型的波系结构配置如图 3.1。假设 $\mathbf{u}(x, t)$ 是 (3-1) 的解， $\mathbf{R}^A(x/t; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ 是 (3-2) 的解，那么有时间渐近性定理^[70]

$$\lim_{t \rightarrow 0, +} \mathbf{u}(\alpha t, t) = \mathbf{R}^A(\alpha; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3-3)$$

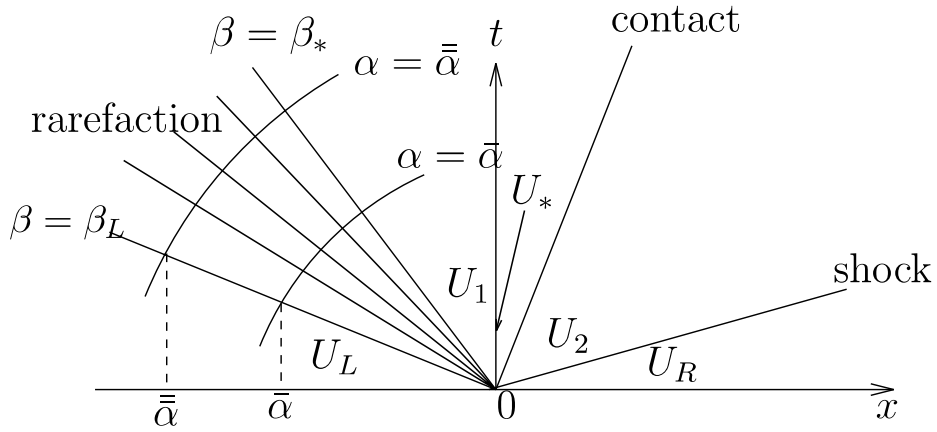
特别需要注意的是，我们有

$$\mathbf{u}_* = \lim_{t \rightarrow 0, +} \mathbf{u}(0, t) = \mathbf{R}^A(0; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R). \quad (3-4)$$

至此，我们就可以通过 Godunov 解法器确定 $\mathbf{R}^A(x/t; \mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ ，进而得到 \mathbf{u}_* 。



(a) 广义黎曼问题的波系结构



(b) 相关联的黎曼问题的波系结构

图 3.1 一个典型的波系结构配置示意图。其中，1-波是稀疏波 (rarefaction)，2-波是接触间断 (contact)，以及 3-波是激波 (shock)。

3.1.2 线性声波近似的广义黎曼问题解法器

文 [69] 中介绍了两种广义黎曼问题解法器，一种是精确求解的非线性解法器，一种是线性声波近似的解法器。在光滑处，流场满足线性近似的声波方程，采用声波近似的广义黎曼问题解法器；在间断附近则采用非线性的广义黎曼问题解法器。

接下来，先介绍声波近似的广义黎曼问题解法器。这种情形建立在流场光滑处，即 $\|u_L - u_R\| \ll 1$ ，这一假设之上。如果 t 轴位于 x 轴与 1-波或 3-波之间，那么根据偏微分方程和解的连续性很容易求解 $(\partial_t u)_*$ 。这是一个平凡的情形，故不再讨论。其他情况，可以通过下面的公式得到一阶导数

$$(\partial_t u)_* = -\frac{1}{2} \left((u_* + c_*) \left(u'_L + \frac{p'_L}{\rho_* c_*} \right) + (u_* - c_*) \left(u'_R - \frac{p'_R}{\rho_* c_*} \right) \right), \quad (3-5)$$

$$(\partial_t p)_* = -\frac{\rho_* c_*}{2} \left((u_* + c_*) \left(u'_L + \frac{p'_L}{\rho_* c_*} \right) - (u_* - c_*) \left(u'_R - \frac{p'_R}{\rho_* c_*} \right) \right), \quad (3-6)$$

$$(\partial_t \rho)_* = \begin{cases} \frac{1}{c_*^2} \left((\partial_t p)_* + u_* (p'_L - c_*^2 \rho'_L) \right), & u_* > 0, \\ \frac{1}{c_*^2} \left((\partial_t p)_* + u_* (p'_R - c_*^2 \rho'_R) \right), & u_* < 0, \end{cases} \quad (3-7)$$

这里的公式仅针对欧拉方程组，其中的 ρ 是密度， u 是速度， p 是压力， c 是声速。

3.1.3 非线性广义黎曼问题解法器： t 轴不位于稀疏波内部

下面我们简单介绍非线性的广义黎曼问题解法器。出于同样的原因，这里也不再讨论 t 轴位于 x 轴与 1-波或 3-波之间的平凡情形。为了简便起见，这里只介绍完全气体状态方程的结果，一般状态方程的结果请参考文献 [69]。这里先讨论 t 轴不位于稀疏波内部的情况。一个关键点是跨越接触间断时， $\left(\frac{Du}{Dt}\right)_*$ 和 $\left(\frac{Dp}{Dt}\right)_*$ 的值是连续的，其中 $\frac{D}{Dt} = \partial_t + u_* \partial_x$ 是物质导数。

第一步：建立非线性波两侧的关系。在 1-稀疏波两侧有

$$\begin{aligned} a_L \left(\frac{Du}{Dt} \right)_* + b_L \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_* &= d_L, \quad a_L = 1, \quad b_L = \frac{1}{\rho_{2*} c_{2*}}, \\ d_L &= \frac{T_L s'_L}{1 + 2\mu^2} \left((1 + \mu^2) \left(\frac{c_{2*}}{c_L} \right)^{1/(2\mu^2)} + \mu^2 \left(\frac{c_{2*}}{c_L} \right)^{(1+\mu^2)/\mu^2} \right) - c_L \left(\frac{c_{2*}}{c_L} \right)^{1/(2\mu^2)} \psi'_L, \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中，下标 2^* 代表 1-波和接触间断之间的状态，可以通过黎曼问题解法器得到， T 是温度， s 是熵， μ 是一个与多方指数 γ 有关的指数， ψ 是黎曼不变量之一，以及它们可以由下式求得

$$T_L s'_L = \frac{p'_L - \rho'_L c_L^2}{(\gamma - 1)\rho_L}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}, \quad \psi'_L = u'_L + \left(\frac{\gamma p'_L}{c_L} - c_L \rho'_L \right) \frac{1}{(\gamma - 1)\rho_L}. \quad (3-9)$$

在 3-稀疏波两侧也有类似的结果。在 3-激波两侧有

$$\begin{aligned} a_R \left(\frac{Du}{Dt} \right)_* + b_R \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_* &= d_R, \quad a_R = 1 + \rho_{3*}(\sigma - u_*)\mathcal{H}_1, \quad b_R = - \left(\frac{\sigma - u_*}{\rho_{3*}c_{3*}^2} + \mathcal{H}_1 \right), \\ d_R &= \left(-\frac{1}{\rho_R} + (\sigma - u_R)\mathcal{H}_2 \right) p'_R + \left((\sigma - u_R) - \rho_R c_R^2 \mathcal{H}_2 - \rho_R \mathcal{H}_3 \right) u'_R + ((\sigma - u_R)\mathcal{H}_3) \rho'_R, \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中，下标 3^* 代表 3-波和接触间断之间的状态，也可以通过黎曼问题解法器得到， σ 代表间断速度，以及

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{\mathcal{H}(p_* + (1 + 2\mu^2)p_R)}{2(p_* + \mu^2 p_R)}, \quad \mathcal{H}_2 = -\frac{\mathcal{H}((2 + \mu^2)p_* + \mu^2 p_R)}{2(p_* + \mu^2 p_R)}, \\ \mathcal{H}_3 &= -\frac{\mathcal{H}(p_* - p_R)}{2\rho_R}, \quad \mathcal{H} = \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\rho_R(p_* + \mu^2 p_R)}}. \end{aligned} \quad (3-11)$$

在 1-激波两侧也有类似的结果。总之，无论 1-波和 3-波的组合情况如何，我们都有

$$\begin{cases} a_L \left(\frac{Du}{Dt} \right)_* + b_L \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_* = d_L, \\ a_R \left(\frac{Du}{Dt} \right)_* + b_R \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_* = d_R. \end{cases} \quad (3-12)$$

想了解更多有关建立欧拉方程组的非线性波两侧关系的详细细节，请参考文献 [3]。

第二步：确定广义黎曼解。根据物质导数的定义，我们有

$$\left(\frac{Du}{Dt} \right)_* = (\partial_t u)_* - \frac{u_*}{\rho_* c_*^2} \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_*, \quad \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_* = (\partial_t p)_* - \rho_* u_* \left(\frac{Du}{Dt} \right)_*. \quad (3-13)$$

联立 (3-12) 和 (3-13)，我们可以得到 $(\partial_t u)_*$ 和 $(\partial_t p)_*$ 。然后根据 t 轴的位置分类讨论，如果 t 轴位于接触间断和 1-稀疏波之间，根据热力学关系式 $dp = c^2 d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds$ ，有

$$(\partial_t p)_* = \frac{1}{c_{2*}^2} \left((\partial_t p)_* + \rho_{2*} u_* \left(\frac{c_{2*}}{c_L} \right)^{\frac{1+\mu^2}{\mu^2}} \frac{p'_L - c_{2*}^2 \rho'_L}{\rho_L} \right). \quad (3-14)$$

如果 t 轴位于接触间断和 3-激波之间，根据兰金-雨贡纽 (Rankine-Hugoniot, R-H) 条件有如下关系式成立

$$g_\rho^R (\partial_t \rho)_* + g_p^R (\partial_t p)_* + g_u^R (\partial_t u)_* = u_* h_R, \quad (3-15)$$

其中，

$$g_\rho^R = u_* - \sigma, \quad g_p^R = \frac{\sigma}{c_{3*}^2} - u_* \mathcal{J}_1, \quad g_u^R = u_* \rho_{3*} (\sigma - u_*) \mathcal{J}_1, \quad (3-16)$$

$$h_R = (\sigma - u_R) \mathcal{J}_2 p'_R + (\sigma - u_R) \mathcal{J}_3 \rho'_R - \rho_R (\mathcal{J}_2 c_R^2 + \mathcal{J}_3) u'_R,$$

以及 \mathcal{J}_1 、 \mathcal{J}_2 和 \mathcal{J}_3 是

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\rho_R p_R (1 - \mu^4)}{(p_R + \mu^2 p_*)^2}, \quad \mathcal{J}_2 = \frac{\rho_R p_* (\mu^4 - 1)}{(p_R + \mu^2 p_*)^2}, \quad \mathcal{J}_3 = \frac{p_* + \mu^2 p_R}{p_R + \mu^2 p_*}. \quad (3-17)$$

由 (3-14) 或者 (3-15) 很容易就可以得到 $(\partial_t \rho)_*$ 。

3.1.4 非线性广义黎曼问题解法器： t 轴位于稀疏波内部

我们还有一种情形没有讨论，就是 t 轴位于稀疏波内部。假设是 1-稀疏波内部，类似 (3-8)，我们可以得到

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)_* + \frac{1}{\rho_* c_*} \left(\frac{Dp}{Dt}\right)_* = d_L, \quad (3-18)$$

其中， d_L 和之前一样，是已知的。同时我们有

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho c} \frac{Dp}{Dt} = \partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho c} \partial_t p + \frac{u}{\rho c} \partial_x p = \left(\partial_t u + \frac{1}{\rho c} \partial_t p\right) - \frac{u}{c} \left(\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho c} \frac{Dp}{Dt}\right). \quad (3-19)$$

由于黎曼解 u_* 所在的那条稀疏波内的特征线在 origin 的方向就是 t 轴，即满足 $u_* - c_* = 0$ ，所以从上式可以得到，

$$(\partial_t u)_* + \frac{1}{\rho_* c_*} (\partial_t p)_* = \frac{u_* + c_*}{c_*} \left(\left(\frac{Du}{Dt}\right)_* + \frac{1}{\rho_* c_*} \left(\frac{Dp}{Dt}\right)_* \right) = 2d_L. \quad (3-20)$$

另外由于对 t 的导数就是沿着 t 轴的方向导数，对于黎曼不变量 ϕ ，有

$$(\partial_t \phi)_* = (\partial_t \phi)_* + (u_* - c_*) (\partial_x \phi)_* = T_* (\partial_x s)_* = -\frac{T_*}{c_*} (\partial_t s)_*, \quad (3-21)$$

其中， T 是温度。所以有，

$$(\partial_t u)_* - \frac{1}{\rho_* c_*} (\partial_t p)_* = (\partial_t \phi)_* + \frac{T_*}{c_*} (\partial_t s)_* = 0. \quad (3-22)$$

联立 (3-20) 和 (3-22)，我们就可以得到 $(\partial_t u)_*$ 和 $(\partial_t p)_*$ ，然后类似 (3-14) 的做法，可以得到

$$(\partial_t \rho)_* = \frac{1}{c_*^2} \left((\partial_t p)_* + \rho_* u_* \left(\frac{c_*}{c_L} \right)^{\frac{1+\mu^2}{\mu^2}} \frac{p'_L - c_*^2 \rho'_L}{\rho_L} \right). \quad (3-23)$$

本节中，我们介绍了一维情形下的 Godunov 解法器 and 广义黎曼问题解法器。接下来为了设计一个两步四阶格式，我们还需要选择适当的重构算法。

3.2 线性紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式

我们注意到，如果如同文 [1] 中的两步四阶格式一样，使用五阶的 HWENO 重构^[55]，所得格式的只有四阶精度，并且相比四阶重构，计算开销更大、更不紧致。为此我们拟设计一个更加紧致的四阶重构用于两步四阶格式。本节将首先设计一维线性紧致埃尔米特重构。为了设计出更加紧致的重构，我们将使用 k 个单元构成的模板内所有单元内的两个信息——单元平均值和导数平均值。这导致只能设计出偶数阶精度重构，即 $2k$ 阶重构。当 $k = 2$ 时，就是我们所期望构造的四阶重构。

给定一个函数 $u(x)$ ，定义函数 $u(x)$ 及其导数 $v(x)$ 在计算单元 I_i 上的平均值为

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h} \int_{I_i} u(x) dx, \quad \bar{v}_i = \frac{1}{h} \int_{I_i} v(x) dx = \frac{1}{h} (u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_{i-\frac{1}{2}})), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3-24)$$

其中, $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 是大小为 $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ 的计算单元。我们要在模板

$$S_r^k(i) = \bigcup_{m=0}^{k-1} I_{i-r+m}, \quad r = 0, 1, \dots, k-1, k \geq 1, \quad (3-25)$$

上, 寻找埃尔米特重构多项式 $p_i^r(x)$, 其中上标 r 表示依赖于模板 $S_r^k(i)$, 是模板的偏移量。为了简便起见, 采用均匀网格, 即 $h_i \equiv h$ 。值得强调的是, 本章的重构也适用于非均匀网格。我们要得到的埃尔米特重构多项式应该在单元 I_i 内, 是对 $u(x)$ 的 $2k$ 阶精度的近似, 即

$$\partial_x^d p_i^r(x) = \partial_x^d u(x) + O(h^{2k-d}), \quad d = 0, 1, 2. \quad (3-26)$$

因此, 在单元边界处 $x = x_{i\pm\frac{1}{2}}$, 重构值满足

$$(\partial_x^d u)_{i\pm\frac{1}{2},\mp}^r = \partial_x^d p_i^r(x_{i\pm\frac{1}{2}}) = \partial_x^d u(x_{i\pm\frac{1}{2}}) + O(h^{2k-d}), \quad d = 0, 1, 2. \quad (3-27)$$

3.2.1 线性紧致埃尔米特重构的推导

在文 [46] 中给出了函数的重构与其原函数在单元边界上的插值之间的关系。为了给出函数的埃尔米特重构插值与其原函数在单元边界上的埃尔米特插值的关系, 我们引入 $u(x)$ 的原函数

$$U(x) = \int_a^x u(\xi) d\xi, \quad (3-28)$$

其中, a 是一个足够小的下界。那么对 $m = 0, 1, \dots, k-1$, 我们有

$$U(x_{i+\frac{1}{2}-r+m}) = U(x_{i-\frac{1}{2}-r}) + h \sum_{\ell=i-r}^{i-r+m} \bar{u}_\ell, \quad \partial_x U(x_{i+\frac{1}{2}-r+m}) = \partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r}) + h \sum_{\ell=i-r}^{i-r+m} \bar{v}_\ell. \quad (3-29)$$

此时, 我们可以对这一系列点值 $(U(x_{i-\frac{1}{2}-r+m}), \partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r+m}))$, $m = 0, 1, \dots, k-1$, 用埃尔米特插值得到多项式 $P_i^r(x)$ 来近似 $U(x)$ 。然后就得到了我们要找的重构多项式 $p_i^r(x) = \partial_x P_i^r(x)$ 。注意 $U(x_{i-\frac{1}{2}-r})$ 的值在求导数的时候消失了, 但这里还有一个未知的值 $\partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r})$ 等待确定。

为了确定未知的值 $\partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r})$, 我们引入差商来表示插值多项式 $P_i^r(x)$, 差商的定义可以参考数值分析教科书 [71]。对于重节点的集合

$$N_r(i) = \{x_{i-\frac{1}{2}-r}, x_{i-\frac{1}{2}-r}, \dots, x_{i-\frac{1}{2}-r+k}, x_{i-\frac{1}{2}-r+k}\}, \quad r = 0, \dots, k-1, \quad (3-30)$$

我们有差商

$$U[x_{\ell-\frac{1}{2}}] = U(x_{\ell-\frac{1}{2}}), \quad U[x_{\ell-\frac{1}{2}}, x_{\ell-\frac{1}{2}}] = \partial_x U(x_{\ell-\frac{1}{2}}), \quad U[x_{\ell-\frac{1}{2}}, x_{\ell+\frac{1}{2}}] = \bar{u}_\ell, \quad \dots, \quad (3-31)$$

其中, $\ell = i - r + m$ 。此时, 埃尔米特插值多项式 $P_i^r(x)$ 可以表示为:

$$P_i^r(x) = \sum_{\ell=0}^k U[x_{i-\frac{1}{2}-r}, \dots, x_{i-\frac{1}{2}-r+\ell}] \prod_{m=0}^{\ell} (x - x_{i-\frac{1}{2}-r+m}), \quad (3-32)$$

其中, $\widehat{\sum}$ 代表重节点求和, $\widehat{\prod}$ 代表重节点求积。例如, 当 $k = 1$, $r = 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} P_i^0(x) = & U[x_{i-\frac{1}{2}}] + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}}) + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 \\ & + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}})^2(x - x_{i+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (3-33)$$

如同之前指出的, $2k + 1$ 次多项式 $P_i^r(x)$ 有一个多余的自由度 $\partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r})$ 需要确定。由于 $p_i^r(x)$ 应该有 $2k$ 个自由度 $(\bar{u}_{i-r+m}, \bar{v}_{i-r+m})$, $m = 0, \dots, k-1$, 故 $p_i^r(x)$ 应该是 $2k-1$ 次多项式, 所以它的原函数 $P_i^r(x)$ 应该是一个 $2k$ 次多项式, 即 $P_i^r(x)$ 的首项系数应该是零。根据 (3-29) 以及差商的定义, 多项式 $P_i^r(x)$ 的首项系数是

$$U[x_{i-\frac{1}{2}-r}, x_{i-\frac{1}{2}-r}, \dots, x_{i-\frac{1}{2}-r+k}, x_{i-\frac{1}{2}-r+k}] = \sigma \partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r}) + \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \bar{u}_{i-r+m} + h \sum_{m=0}^{k-1} \psi_m \bar{v}_{i-r+m}, \quad (3-34)$$

当网格固定不变时, 其中的系数 σ , ϕ_m 和 ψ_m 是常数。由于 $P_i^r(x)$ 的首项系数应该是零, 即

$$\sigma \partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r}) + \sum_{m=0}^{k-1} \phi_m \bar{u}_{i-r+m} + h \sum_{m=0}^{k-1} \psi_m \bar{v}_{i-r+m} = 0. \quad (3-35)$$

也就是说, 唯一待定的 $\partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r})$ 可以从上式中解出。一旦我们获得 $\partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}-r})$, 我们就得到了插值多项式 $P_i^r(x)$ 以及重构多项式 $p_i^r(x)$ 。需要指出的是, 我们还需要验证 $\sigma \neq 0$ 。

定理 3.1 插值多项式 $P_i^r(x)$ 的首项系数 (3-34) 中的系数 σ 满足 $\sigma \neq 0$ 。

证明 由于 σ 与函数 $U(x)$ 的取法无关, 我们只需验证 σ 在一种特定的 $U(x)$ 下满足条件即可。我们假设 $U(x)$ 在节点集合 $\{x_{j-r-\frac{1}{2}}, x_{j-r+\frac{1}{2}}, \dots, x_{j-r+k-\frac{1}{2}}\}$ 上满足 $U(x) = 0$, $\partial_x U(x) = 1$ 。此时, 有

$$\bar{u}_{i-r+m} = \frac{1}{h} (U(x_{i-r+m+\frac{1}{2}}) - U(x_{i-r+m-\frac{1}{2}})) = 0, \quad m = 0, \dots, k-1, \quad (3-36)$$

$$\bar{v}_{i-r+m} = \frac{1}{h} (\partial_x U(x_{i-r+m+\frac{1}{2}}) - \partial_x U(x_{i-r+m-\frac{1}{2}})) = 0, \quad m = 0, \dots, k-1. \quad (3-37)$$

所以, 此时埃尔米特插值多项式 $P(x)$ 的首项系数 (3-34) 就是 σ 。

接下来, 我们考察 $P(x)$ 的零点。首先, 所有节点都是 $P(x)$ 的零点, 有 $k+1$ 个。其次, 由于 $\partial_x P(x_{j-r-\frac{1}{2}}) = 1 > 0$, 存在 $\xi_1 > x_{j-r-\frac{1}{2}}$, 使得对于 $x \in [x_{j-r-\frac{1}{2}}, \xi_1]$, 有 $\partial_x P(x) > 0$, 进而有 $P(\xi_1) > P(x_{j-r-\frac{1}{2}}) = 0$ 。类似地, 因为 $\partial_x P(x_{j-r+\frac{1}{2}}) = 1 > 0$, 所以存在 $\xi_2 \in (\xi_1, x_{j-r+\frac{1}{2}})$, 使得对于 $x \in [\xi_2, x_{j-r+\frac{1}{2}}]$, 有 $\partial_x P(x) > 0$, 进而有 $P(\xi_2) < P(x_{j-r+\frac{1}{2}}) = 0$ 。根据介值定理, 存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, 使得 $P(\xi) = 0$ 。因此, 在这 $k+1$ 个节点之间有 k 个零点。所以, $P(x)$ 总共有至少 $2k+1$ 个零点。

最后, 因为 $P(x) \in \mathcal{P}^{2k+1}$ 有至少 $2k+1$ 个零点, 并且存在一个点 ξ_1 使得 $P(\xi_1) \neq 0$, 所以 $P(x)$ 的首项系数 σ 是非零的。 ■

最后, 我们要说明一点, 如果不是为了建立埃尔米特插值和埃尔米特重构之间的关系, 我们也可以通过解方程组得到同样的结果。例如, 在模板 $S_r^k(i)$ 上, 重构多

项式 $p_i^r(x)$ 应该满足

$$p_i^r(x) = \sum_{\ell=0}^{2k-1} C_\ell x^\ell, \quad C_\ell \in \mathcal{R}, \quad x \in I_i, \quad (3-38)$$

$$\frac{1}{h} \int_{I_{i-r+m}} p_i^r(x) dx = \bar{u}_{i-r+m}, \quad m = 0, \dots, k-1, \quad (3-39)$$

$$\frac{1}{h} \left(p_i^r(x_{i-r+m+\frac{1}{2}}) - p_i^r(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) \right) = \bar{v}_{i-r+m}, \quad m = 0, \dots, k-1. \quad (3-40)$$

将 (3-38) 带入 (3-39) 和 (3-40)，并求解得到的方程组，可以得到系数 C_ℓ ，我们就可以得到重构多项式 $p_i^r(x)$ 。经过验证，这种方法得到的重构多项式和利用埃尔米特插值得到的多项式是相同的。

3.2.2 线性紧致埃尔米特重构的例子

上一小节中，我们对一般的含有 k 个单元的模板给出了线性埃尔米特重构多项式的推导。本小节我们将具体讨论 $k = 1, 2, 3, 4$ 的情形。虽然我们只需要四阶重构，但是为了工作的系统性，在这里给出了从二阶到八阶精度的例子。

3.2.2.1 $k = 1$ 情形下的线性紧致埃尔米特重构

当 $k = 1$ 且 $r = 0$ 时，我们有

$$p_i^0(x) = p_i(x) = \bar{u}_i + \bar{v}_i(x - x_i), \quad \partial_x p_i(x) = \bar{v}_i, \quad x \in I_i. \quad (3-41)$$

然后在单元 I_i 的边界处，我们有

$$u_{i+\frac{1}{2},-} = \bar{u}_i + \frac{h}{2} \bar{v}_i, \quad u_{i-\frac{1}{2},+} = \bar{u}_i - \frac{h}{2} \bar{v}_i, \quad (\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},-} = \bar{v}_i, \quad (\partial_x u)_{i-\frac{1}{2},+} = \bar{v}_i. \quad (3-42)$$

特别地，我们规定

$$(\partial_x^2 u)_{i+\frac{1}{2},-} = 0, \quad (\partial_x^2 u)_{i-\frac{1}{2},+} = 0. \quad (3-43)$$

这种重构方法恰好是 van Leer 在文 [72] 中提出的二阶格式采用的重构。

3.2.2.2 $k = 2$ 情形下的线性紧致埃尔米特重构

当 $k = 2$ 时，有两个模板 $S_0^2(i)$ （对应 $r = 0$ ）以及 $S_1^2(i)$ （对应 $r = 1$ ）。在 $S_0^2(i)$ 上，我们可以写出多项式 $P_i^0(x)$ ：

$$\begin{aligned} P_i^0(x) = & U[x_{i-\frac{1}{2}}] + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}}) + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 \\ & + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}})^2(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \\ & + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}})^2(x - x_{i+\frac{1}{2}})^2 \\ & + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}](x - x_{i-\frac{1}{2}})^2(x - x_{i+\frac{1}{2}})^2(x - x_{i+\frac{3}{2}}), \end{aligned} \quad (3-44)$$

此时 $p_i^0(x) = \partial_x P_i^0(x)$ 变成了

$$\begin{aligned} p_i^0(x) = & U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}] + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]\xi_1 + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]\xi_2 \\ & + U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}]\xi_3, \end{aligned} \quad (3-45)$$

其中 $\xi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ 是

$$\xi_1(x) = 2(x - x_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3-46)$$

$$\xi_2(x) = (x - x_{i-\frac{1}{2}})(3x - 2x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3-47)$$

$$\xi_3(x) = 2(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})(2x - x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}). \quad (3-48)$$

$U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}] = \partial_x U(x_{i-\frac{1}{2}})$ 的值, 可以通过求解 (3-35) 得到, 具体地说, 通过求解下面这个方程得到

$$U[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}] = 0. \quad (3-49)$$

因此, 我们可以得到 $p_i^0(x)$ 的显式表达式, 并在单元 I_i 的边界 $x = x_{i\pm\frac{1}{2}}$ 上得到

$$(\partial_x^d u)_{i\pm\frac{1}{2},\mp}^0 = \partial_x^d p_i^0(x_{i\pm\frac{1}{2}}), \quad d = 0, 1, 2. \quad (3-50)$$

类似的, 我们可以得到模板 $S_1^2(i)$ 上的重构多项式 $p_i^1(x)$, 以及 $(\partial_x^d u)_{i\pm\frac{1}{2},\mp}^1$.

3.2.2.3 均匀网格情况下线性紧致埃尔米特重构多项式的系数

$k = 3, 4$ 的情形就不再具体讨论。一旦我们给定了 $k \geq 1$ 和 r , 那么模板 $S_r^k(i)$ 的选择就确定了, 如果我们知道了每个单元上的两个平均值 $(\bar{u}_{i-r+m}, \bar{v}_{i-r+m})$, 我们就可以得到 $p_i^r(x)$ 。然后在 $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ 处, 我们有以下形式的单元边界值

$$(\partial_x^d u)_{i\pm\frac{1}{2},\mp}^r = \frac{1}{h^d} \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{m,\mp}^{r,d} \bar{u}_{i-r+m} + \frac{1}{h^{d-1}} \sum_{m=0}^{k-1} \psi_{m,\mp}^{r,d} \bar{v}_{i-r+m}, \quad d = 0, 1, 2, \quad (3-51)$$

其中系数 $\phi_{m,\mp}^{r,d}$ 和 $\psi_{m,\mp}^{r,d}$ 在均匀网格的情况下是常数。由于模板的对称性, 对于 $m, r = 0, 1, \dots, k-1$ 和 $d = 0, 1, 2$, 有

$$\phi_{k-1-m,+}^{k-1-r,d} = (-1)^d \phi_{m,-}^{r,d}, \quad \psi_{k-1-m,+}^{k-1-r,d} = (-1)^{d+1} \psi_{m,-}^{r,d}. \quad (3-52)$$

在表 3.1 中给出了在本章中使用的重构在均匀网格的情况下的系数 $\phi_{m,-}^{r,d}$ 和 $\psi_{m,-}^{r,d}$, $d = 0, 1, 2$, 而与其对称的模板的系数 $\phi_{k-1-m,+}^{k-1-r,d}$ 和 $\psi_{k-1-m,+}^{k-1-r,d}$ 可以根据 (3-52) 得到。

3.2.3 基于线性紧致埃尔米特重构的两步四阶格式及其稳定性分析

在上一小节, 我们已经得到了 $k = 1, 2, 3, 4$ 下的十个线性紧致埃尔米特重构, 接下来我们要设计相应的格式, 并考察其线性稳定性。

$k = 1$ 的二阶重构其实就是文 [73] 中的广义黎曼问题格式所用的重构。这个重构是二阶的, 不适用于两步四阶时间推进。对于 $k = 2, 3, 4$ 的九个线性重构, 使用我们在第 2.2 节中提出的改进的两步四阶时间推进框架, 其中的重构 \mathcal{R} 采用新设计的线性重构, LW 型解法器 \mathcal{G} 采用第 3.1 节中介绍的 Godunov 解法器和广义黎曼问题解法器。然后, 我们得到了九个两步四阶格式。

接下来, 我们考察这九个数值格式的线性稳定性。线性耗散分析有助于理解格

表 3.1 在均匀网格的情况下，系数 $\phi_{m,-}^{r,d}$ 和 $\psi_{m,-}^{r,d}$ ， $k \leq 4$ 。

k	r	d	$\phi_{0,-}^{r,d}$	$\phi_{1,-}^{r,d}$	$\phi_{2,-}^{r,d}$	$\phi_{3,-}^{r,d}$	$\psi_{0,-}^{r,d}$	$\psi_{1,-}^{r,d}$	$\psi_{2,-}^{r,d}$	$\psi_{3,-}^{r,d}$
1	0	0	1				1/2			
1	0	1	0				1			
1	0	2	0				0			
2	0	0	1/2	1/2			1/6	-1/6		
2	0	1	-2	2			-1/2	-1/2		
2	0	2	0	0			-1	1		
3	1	0	11/60	19/30	11/60		1/20	1/2	-1/20	
3	1	1	1/4	-2	7/4		1/12	-1/6	-5/12	
3	1	2	-11/4	-2	19/4		-3/4	-6	-3/4	
4	1	0	5/84	37/84	37/84	5/84	1/70	17/70	-17/70	-1/70
4	1	1	-7/54	-5/2	5/2	7/54	-1/36	-11/12	-11/12	-1/36
4	1	2	-1	1	1	-1	-1/4	-9/4	9/4	1/4

式的稳定性，选取线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{C} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \tilde{C} = 1, \quad (3-53)$$

作为模型方程。由于上一小节给出的九个数值格式属于双值格式，即单元平均值 \bar{u}_i^n 和导数平均值 \bar{v}_i^n 同时被推进。耗散性质应该从这两个分量的角度进行研究。因此，我们考虑以下傅立叶模式：

$$\bar{u}_i^n = \lambda^n e^{jk_i h}, \quad h\bar{v}_i^n = j\kappa h \mu^n e^{jk_i h}, \quad \kappa h \in [0, 2\pi], \quad j^2 = -1, \quad (3-54)$$

其中 λ 和 μ 是增长因子，为了避免与一维的单元下标 i 混淆，使用 j 作为虚数单位。请注意， λ 和 μ 并不相同，因为单元平均值和导数平均值是通过不同的数值公式更新的。数值格式的形式可以写成

$$\bar{u}_i^{n+1} = \sum_m a_m(\eta) \bar{u}_{i+m}^n + h \sum_m b_m(\eta) \bar{v}_{i+m}^n, \quad (3-55)$$

$$h\bar{v}_i^{n+1} = \sum_m c_m(\eta) \bar{u}_{i+m}^n + h \sum_m d_m(\eta) \bar{v}_{i+m}^n. \quad (3-56)$$

其中， $\eta = \tau/h$ 是时间步长和网格大小的比值， a_m ， b_m ， c_m 和 d_m 是依赖于特定数值格式的系数。将 (3-54) 带入 (3-55) 和 (3-56)，得到

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i^{n+1} \\ h\bar{v}_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_m a_m(\eta) e^{jkmh} & \sum_m b_m(\eta) e^{jkmh} \\ \sum_m c_m(\eta) e^{jkmh} & \sum_m d_m(\eta) e^{jkmh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^n \\ h\bar{v}_i^n \end{bmatrix}, \quad (3-57)$$

接下来, 我们需要分析下面这个矩阵的谱半径,

$$G = \begin{bmatrix} \sum_m a_m(\eta) e^{jkmh} & \sum_m b_m(\eta) e^{jkmh} \\ \sum_m c_m(\eta) e^{jkmh} & \sum_m d_m(\eta) e^{jkmh} \end{bmatrix}. \quad (3-58)$$

设 ρ_m , $m = 1, 2$ 是矩阵 G 的特征值, 那么 $\rho_m(G)$ 的最大模就决定了数值格式的稳定性, 格式稳定的必要条件是

$$\max_{m=1,2, \kappa h \in [0, 2\pi]} |\rho_m(G)| \leq 1 + O(\tau). \quad (3-59)$$

我们现在对得到的九个两步四阶格式, 分别进行如上所述的傅立叶分析, 得到了如图 3.2~3.6 的结果。图中展示了两个特征值 $\rho_m(G)$ 在复平面上的图像, 其中, $\kappa h \in [0, 2\pi]$, $\eta = 0.6$ 。

我们对重构多项式 $p_i^r(x)$ 在 $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ 选取的模板有如下结论。

1. 当 $k = 2$ 时, $S_0^2(i) = I_i \cup I_{i+1}$ 是一个好的模板, 因为其特征值位于单位圆内, 得到的数值格式是一个稳定的格式。不过 $S_1^2(i) = I_{i-1} \cup I_i$ 不是。自然的, 我们选择模板 $S_0^2(i)$, 得到一个稳定的两步四阶格式。这个重构是我们所期望构造的一维线性埃尔米特重构, 得到的格式是我们所期望设计的一维两步四阶格式。

2. 当 $k = 3$ 时, $S_1^3(i)$ 是一个好的模板, 而其他两个表现的不好。

3. 当 $k = 4$ 时, $S_1^4(i)$ 是一个好的模板, 其他三个表现的都不好。同时, 这个重构模板恰好与文 [74] 中的八阶重构模板相同。

自然的, 如果风向是反方向的, 即 $\tilde{C} < 0$, 模板的选择也是相反的。举个例子, 当 $k = 4$ 时, 我们会选择 $S_2^4(i+1) = I_{i-1} \cup I_i \cup I_{i+1} \cup I_{i+2}$ 来构造多项式 $p_{2,i+1}(x)$, 并进一步得到 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 处的值。

注记 3.1 这一数值得到的结果与“稳定性原则”一致: 对于一个收敛的数值格式, 其依赖域必须包含迎风的成分, 而且尽可能接近相应的偏微分方程的依赖域。

注记 3.2 当采用两步四阶时间推进框架求解方程组时, 根据迎风原理, $u_{i+\frac{1}{2},-}$ 采用 $\tilde{C} > 0$ 时以 I_i 为中心的模板; 而 $u_{i+\frac{1}{2},+}$ 采用 $\tilde{C} < 0$ 时以 I_{i+1} 为中心的模板。

这一节中, 我们构造了在一维情形下的线性紧致埃尔米特重构, 并设计了相应的线性格式。一共有三个稳定的格式, 根据它们的阶数不同, 分别记作 HC-4、HC-6 和 HC-8 格式。其中的“HC”代表埃尔米特构造 (Hermite Construction)。其中的 HC-4 格式就是我们所期望设计的四阶的基于紧致埃尔米特重构的两步四阶格式的线性版本, 下面为了在间断附近避免数值振荡, 我们将构造非线性的重构, 并设计相应的基本无振荡格式。

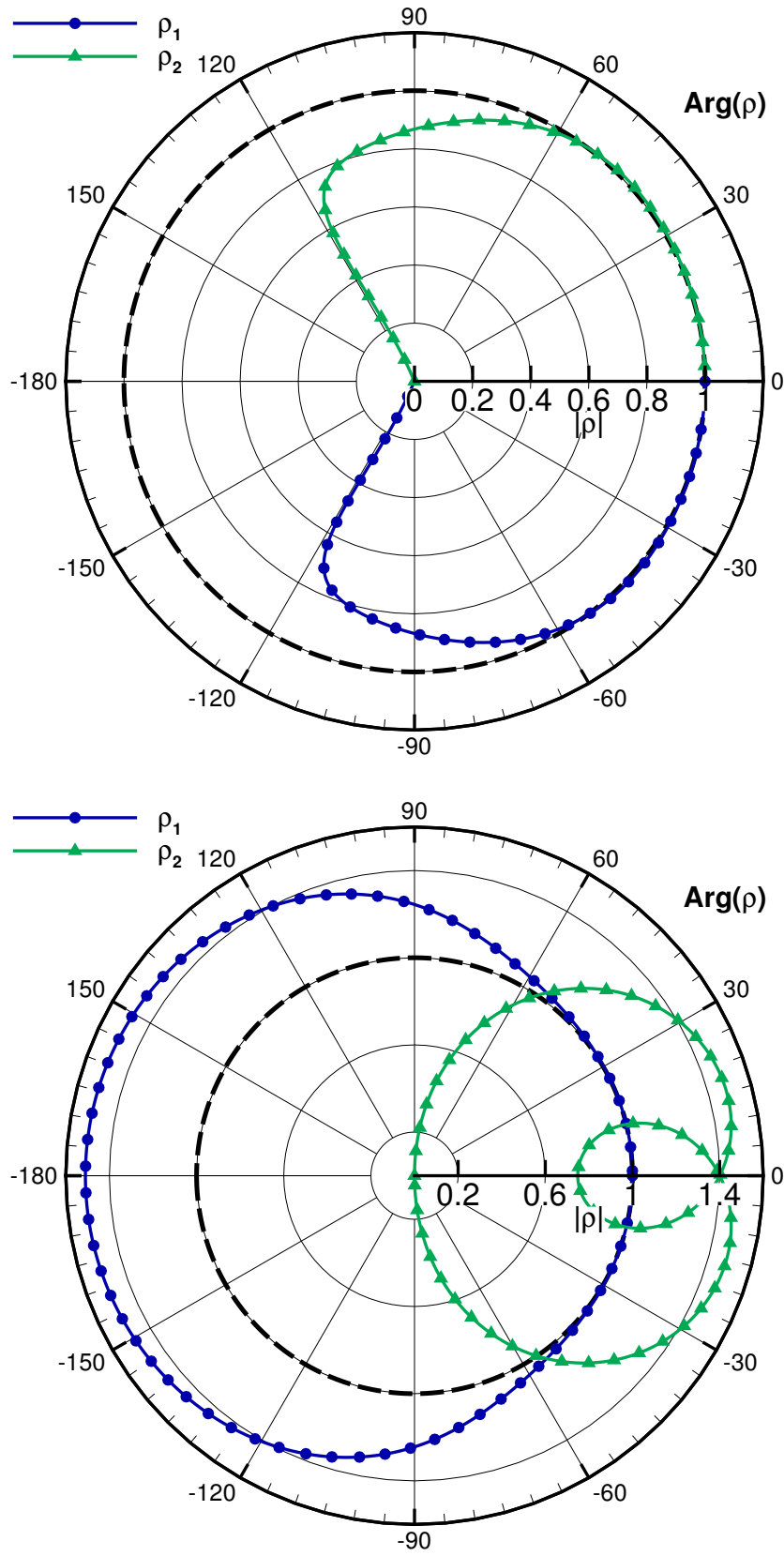


图 3.2 $\rho_m(G)$ 在复平面的值。上: $k=2, r=0$, 下: $k=2, r=1$ 。 k 是模板含有的单元数, r 是 (3-25) 中定义的模板的偏移量, $\kappa h \in [0, 2\pi]$, 蓝色和绿色的线分别对应特征值 $\rho_1(G)$ 和 $\rho_2(G)$ 。

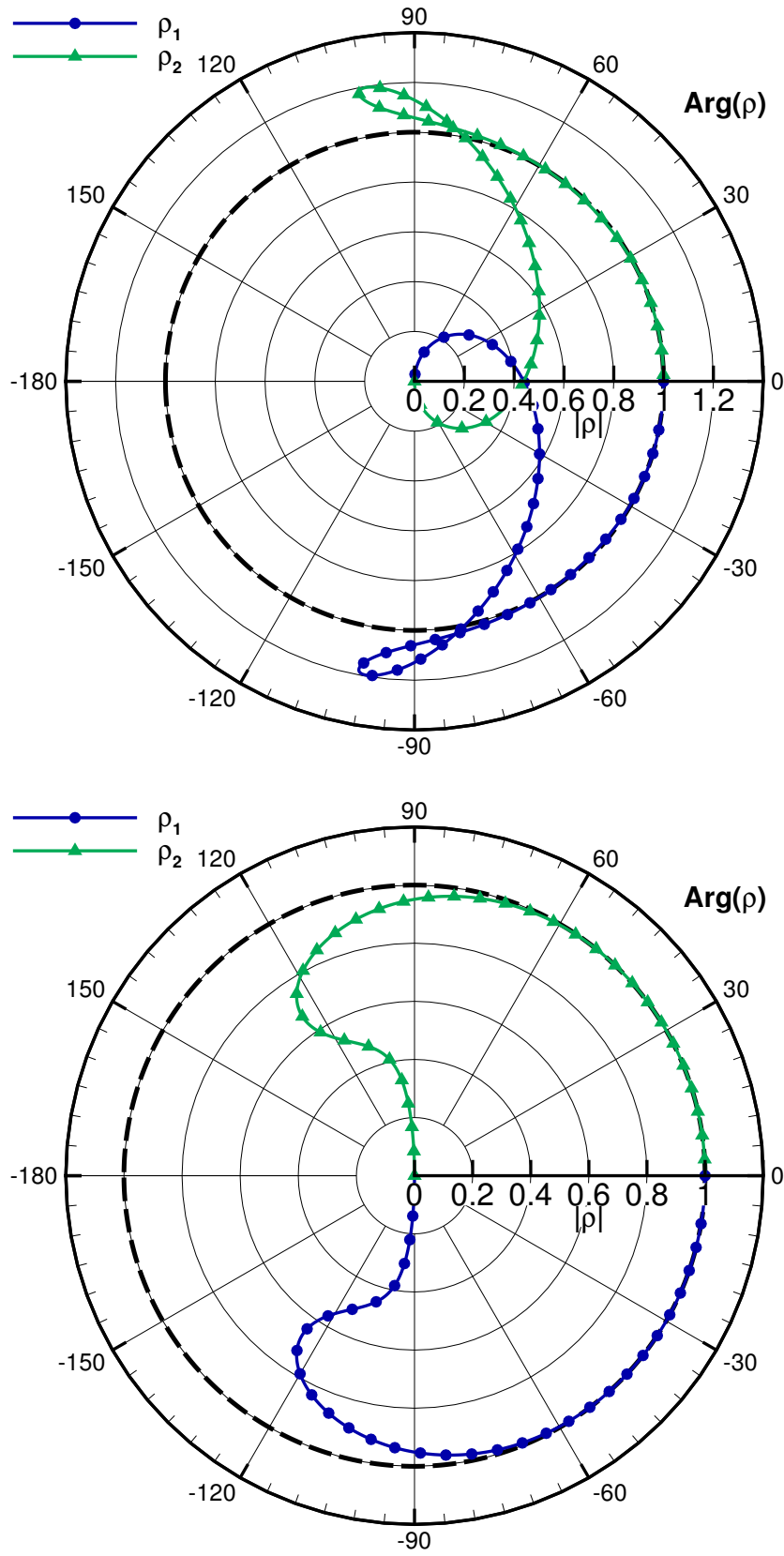


图 3.3 $\rho_m(G)$ 在复平面的值。上: $k=3, r=0$, 下: $k=3, r=1$ 。 k 是模板含有的单元数, r 是 (3-25) 中定义的模板的偏移量, $\kappa h \in [0, 2\pi]$, 蓝色和绿色的线分别对应特征值 $\rho_1(G)$ 和 $\rho_2(G)$ 。

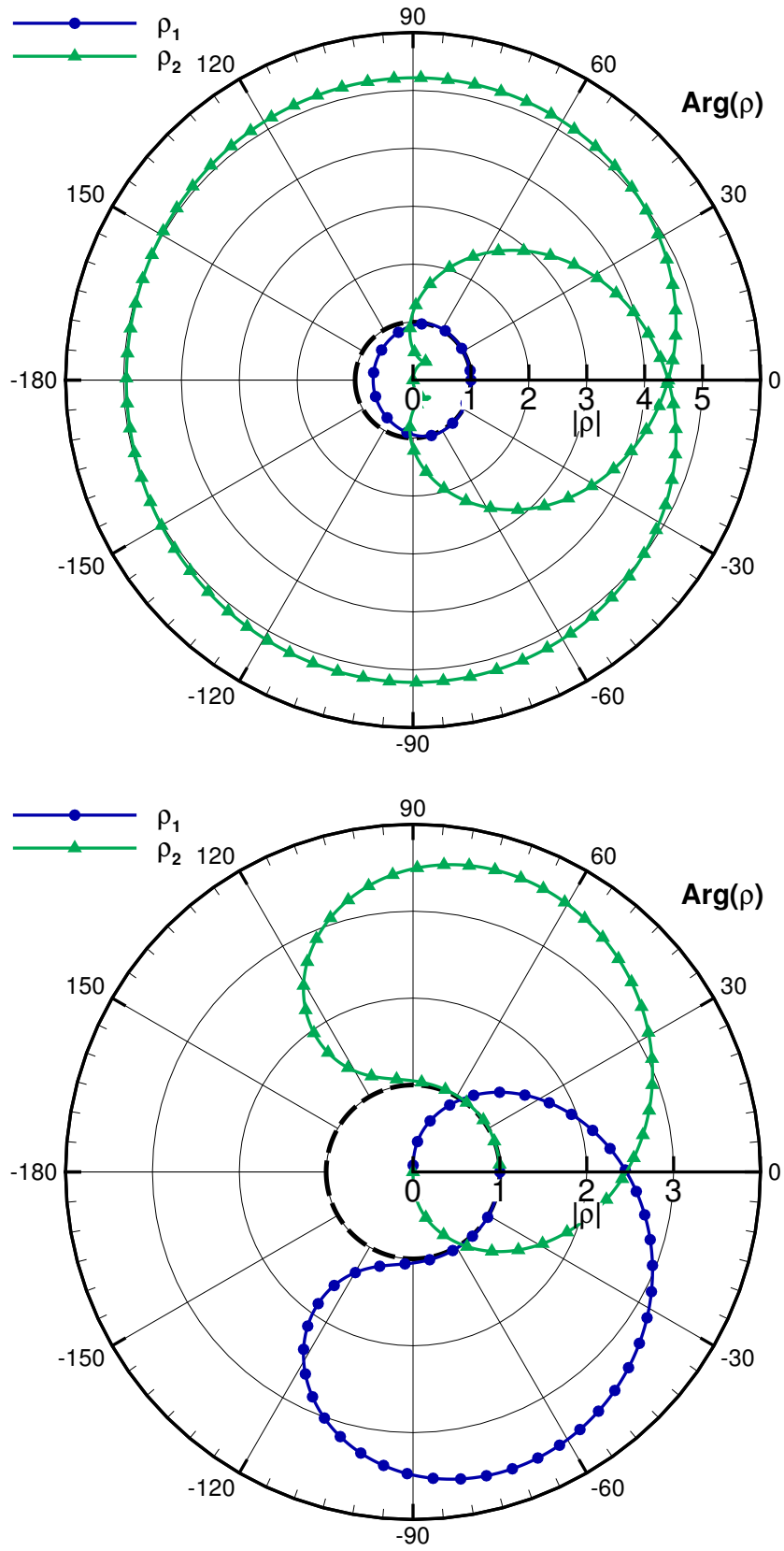


图 3.4 $\rho_m(G)$ 在复平面的值。上: $k=3, r=2$, 下: $k=4, r=0$ 。 k 是模板含有的单元数, r 是 (3-25) 中定义的模板的偏移量, $\kappa h \in [0, 2\pi]$, 蓝色和绿色的线分别对应特征值 $\rho_1(G)$ 和 $\rho_2(G)$ 。

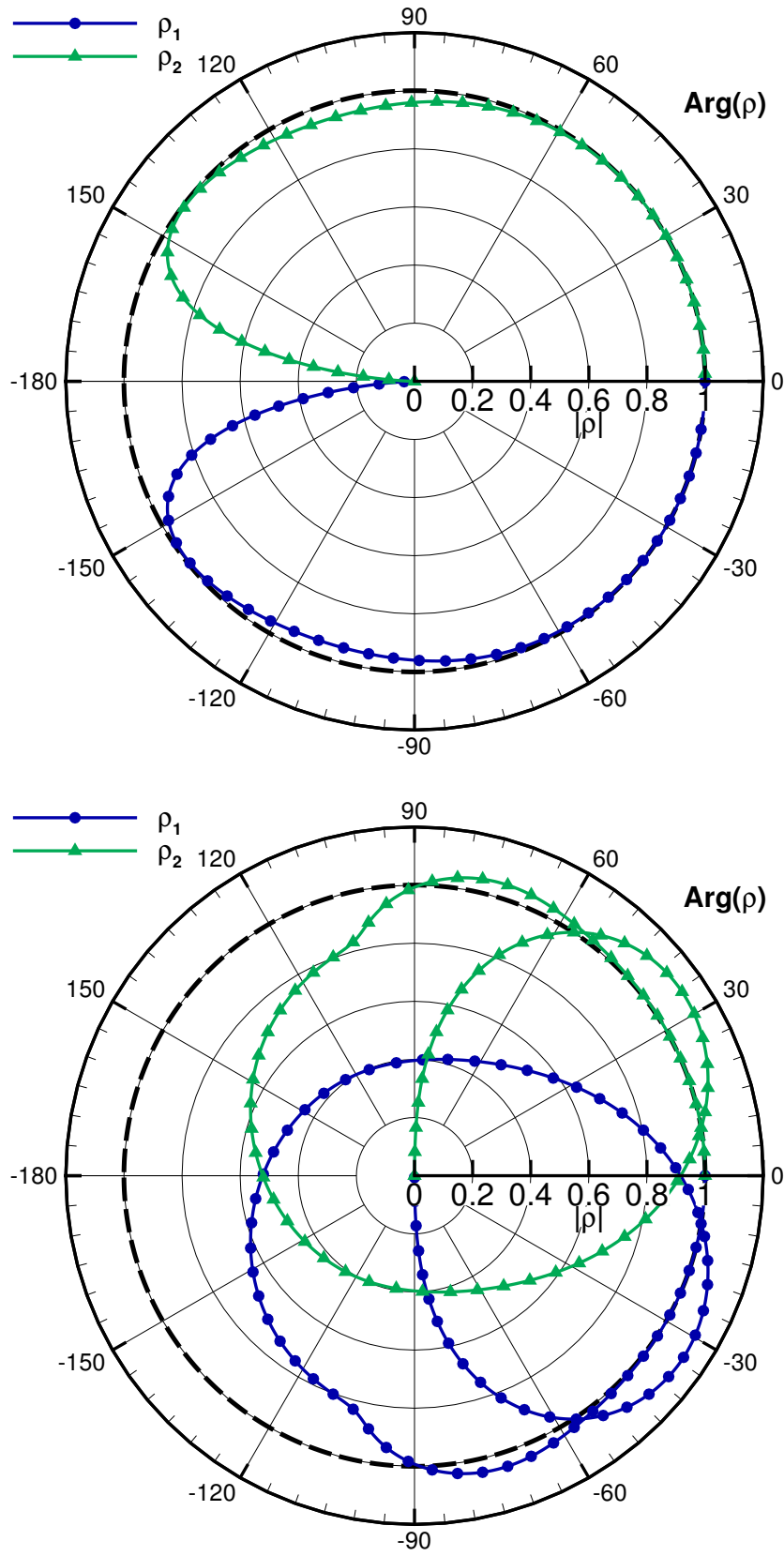


图 3.5 $\rho_m(G)$ 在复平面的值。上: $k=4, r=1$, 下: $k=4, r=2$ 。 k 是模板含有的单元数, r 是 (3-25) 中定义的模板的偏移量, $\kappa h \in [0, 2\pi]$, 蓝色和绿色的线分别对应特征值 $\rho_1(G)$ 和 $\rho_2(G)$ 。

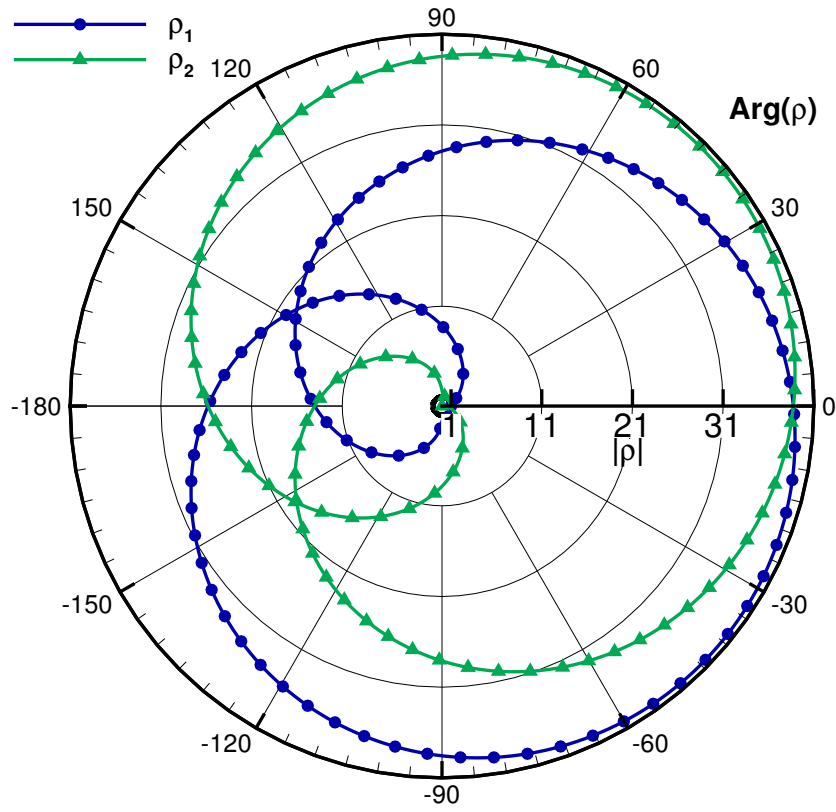


图 3.6 $\rho_m(G)$ 在复平面的值。 $k = 4$, $r = 3$ 。 k 是模板含有的单元数, r 是 (3-25) 中定义的模板的偏移量, $\kappa h \in [0, 2\pi]$, 蓝色和绿色的线分别对应特征值 $\rho_1(G)$ 和 $\rho_2(G)$ 。

3.3 基本无振荡的紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式

我们在第 3.2 节中构造了线性紧致埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式，它们在光滑区域可以保持高阶精度，但是在间断附近会出现数值振荡。为了设计格式能够在光滑区域保持高阶精度，并同时有效防止间断附近出现数值振荡，本节中我们在一维情形下，构造两种基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构。然后，我们将设计相应的两步四阶格式。

3.3.1 加权型紧致埃尔米特重构

在文 [48] 中提出的非线性的 WENO 重构，是一种有代表性的方法。这引发了大量旨在优化其模板选择的后续研究，包括 CWENO^[52, 53] 和 WENO-AO^[54] 格式，这些先进的技术能够组合多个不同阶精度的重构。还有一些旨在优化 WENO 重构中的非线性权构造的后续研究，例如 WENO-Z^[51] 格式。下面我们利用类似的技术，推导加权型的紧致埃尔米特重构。

3.3.1.1 加权型紧致埃尔米特重构的组成成分

在第 3.2 节中，我们得到了二阶、四阶、六阶和八阶的线性埃尔米特重构。值得注意的是，二阶的重构与文 [73] 中广义黎曼问题格式使用的重构是一样的，该格式在应对数值振荡方面表现出色。为了达到相似的性能，我们对 (3-41) 中的 $p_i(x)$ 应用与文 [73] 中相同的 minmod 限制器，得到

$$\bar{v}_i^{lim} = \frac{1}{h} \minmod(\alpha(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i), h_x \bar{v}_i, \alpha(\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1})), \quad (3-60)$$

$$p_i^s(x) = \bar{u}_i + \bar{v}_i^{lim}(x - x_i), \quad (3-61)$$

其中，参数 α 在区间 [1, 2) 内。在本章的数值算例中，我们将 α 的值设为 1.9。符号“s”被用来表示这个表达式是由二阶（second order）重构得出的。在本节中，我们仅关注多项式在 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 处的值，即

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^s = p_i^s(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad (\partial_x^d u)_{i+\frac{1}{2},-}^s = \partial_x^d p_i^s(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad d = 1, 2. \quad (3-62)$$

另一方面，四阶重构正好与两步四阶时间推进框架的精度匹配，因此我们可以预期在光滑区域中达到四阶精度。同样，我们定义了符号

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^f = p_i^f(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad (\partial_x^d u)_{i+\frac{1}{2},-}^f = \partial_x^d p_i^f(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad d = 1, 2, \quad (3-63)$$

这些值是由四阶线性重构得到的，其中“f”表示由四阶（fourth order）重构得出的。

3.3.1.2 加权型紧致埃尔米特重构的推导

现在，我们借鉴 CWENO 和 WENO-AO 格式中使用的技术来推导我们的加权型重构。我们将从四阶线性重构得到的值 $u_{i+\frac{1}{2},-}^f$ 重写为

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^f = \gamma_s u_{i+\frac{1}{2},-}^s + \gamma_f \left(\frac{1}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^f - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^s \right), \quad \gamma_s + \gamma_f = 1, \quad (3-64)$$

其中， γ_s 和 γ_f 是线性权。在实际数值算例中，线性权 γ_s 和 γ_f 的值通常选择为 0.1 和 0.9。随后，将线性权 γ_o 用非线性权 ω_o 替代，其中 $o = s, f$ 代表精度阶数，得到

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \omega_s u_{i+\frac{1}{2},-}^s + \omega_f \left(\frac{1}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^f - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^s \right), \quad \omega_s + \omega_f = 1, \quad (3-65)$$

这里，上标“WHC”代表加权埃尔米特构造（Weighted Hermite Construction），相应的四阶重构被称为 WHC-4 重构。这个表达式可以进一步简化为

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^f + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f} \right) u_{i+\frac{1}{2},-}^s. \quad (3-66)$$

本章中的非线性权的定义方式参考文 [51] 中的 WENO-Z 格式。这些非线性权的表达式为

$$\omega_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_s + \alpha_f}, \quad \alpha_o = \gamma_o \left(1 + \left(\frac{\theta}{\beta_o + \varepsilon} \right)^q \right), \quad o = s, f, \quad (3-67)$$

其中，变量 θ 是 β_s 和 β_f 的差的绝对值，即 $\theta = |\beta_s - \beta_f|$ 。小量 ε 的表达式是 $\widehat{C}h^3$ ，其中 \widehat{C} 在我们的数值算例中设为 100。幂指数 q 设为 2。

光滑因子 β_s 和 β_f 采取类似于文 [48] 中使用的定义，即一维的情形下为

$$\beta_o = \sum_{d=1}^3 \int_{I_i} h^{2\ell-1} \left(\partial_x^d p_i^o(x) \right)^2 dx, \quad o = s, f, \quad (3-68)$$

在均匀网格的情况下，具体的表达式可以写为

$$\beta_s = (h\bar{v}_i)^2, \quad (3-69)$$

$$\begin{aligned} \beta_f = & \frac{13}{3} (-3\bar{u}_i + 3\bar{u}_{i+1} - 2\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1})^2 + \frac{1}{16} (-2\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1} + 3\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1})^2 \\ & + \frac{1}{8} (-2\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i+1} + 3\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1}) (2\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{v}_i + \bar{v}_{i+1}) \\ & + \frac{3129}{80} (2\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{v}_i + \bar{v}_{i+1})^2. \end{aligned} \quad (3-70)$$

我们继续使用与 (3-67) 中相同的非线性权，可以在 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 处得到一阶和二阶空间导数，即

$$\left(\partial_x^d u \right)_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} \left(\partial_x^d u \right)_{i+\frac{1}{2},-}^f + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f} \right) \left(\partial_x^d u \right)_{i+\frac{1}{2},-}^s, \quad d = 1, 2. \quad (3-71)$$

在计算导数的重构时，几乎没有额外的计算代价，因为不必重新计算非线性权。

3.3.1.3 加权型紧致埃尔米特重构的性质

我们现在已经得到了四阶加权型埃尔米特重构。接下来，我们将验证这种重构的性质。不失一般性，我们采用均匀网格。此时可以得到光滑因子在光滑区域的 x_i

处的泰勒展开:

$$\begin{aligned}\beta_s &= \xi_1 h^2 + \frac{1}{12} \xi_3 h^4 + O(h^6), \quad \beta_f = \xi_1 h^2 + \frac{1}{12} (\xi_2 + \xi_3) h^4 + O(h^6), \\ \theta &= |\beta_s - \beta_f| = \frac{1}{12} \xi_2 h^4 + O(h^6),\end{aligned}\tag{3-72}$$

其中 ξ_1 、 ξ_2 和 ξ_3 的定义如下

$$\xi_1 = (\partial_x u)^2, \quad \xi_2 = 13 (\partial_x^2 u)^2, \quad \xi_3 = \partial_x u \cdot \partial_x^3 u.\tag{3-73}$$

随后, 我们根据非线性权的定义 (3-67) 可以得到非线性权在光滑区域内满足以下关系

$$\omega_o = \gamma_o + O(h^2), \quad o = s, f.\tag{3-74}$$

因此, 我们得到 $u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}}$ 是对精确值 $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 的四阶精确近似, 如下式所示

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = u_{i+\frac{1}{2},-}^f + \frac{\omega_f - \gamma_f}{\gamma_f} \left(u_{i+\frac{1}{2},-}^f - u_{i+\frac{1}{2},-}^s \right) = u_{i+\frac{1}{2},-}^f + O(h^4) = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h^4).\tag{3-75}$$

在间断附近, 我们有

$$\omega_s = 1 - O(h^4), \quad \omega_f = O(h^4),\tag{3-76}$$

也就是 ω_s 接近于 1, 使得二阶的重构起主要作用, 从而可有效防止振荡。

综上所述, 我们从理论上论证了该重构可以在光滑区域保持高阶精度, 同时可以有效防止间断附近的出现数值振荡。

3.3.1.4 八阶加权型紧致埃尔米特重构

由于六阶线性埃尔米特重构对应的数值格式 HC-6 格式在求解非线性方程组 (如欧拉方程组) 时, 遇到了数值不稳定的问题, 如表 3.15 所示, 我们不再将之发展到非线性重构。这里将八阶线性埃尔米特重构发展到加权型紧致埃尔米特重构。此时, 需要对现有的加权型紧致埃尔米特重构进行微小的修改:

1. 用从八阶重构导出的多项式 $p^e(x, y)$ 替换 $p^f(x, y)$ 。
2. 重新计算相应的光滑因子。
3. 调整 (3-67) 中的幂指数 q 为 3。

本小节中, 我们在一维情形下, 构造了四阶和八阶的加权型紧致埃尔米特重构。这些重构分别被称为 WHC-4 和 WHC-8 重构。

3.3.2 杂交选择型紧致埃尔米特重构

在加权型紧致埃尔米特重构中, 计算了两个候选模板的重构值, 并选择它们的凸组合作为最终的重构值。然而, 在光滑区域, 只有高阶重构的计算有价值, 而在间断附近, 只有低阶重构发挥了避免振荡的效果。因此, 基于对加权型重构的分析, 我们得到了杂交选择策略, 这可能是一种更有效的重构方法。这种策略最初是在文

[75] 中提出的, 已经被广泛应用于许多研究中^[76]。

3.3.2.1 杂交选择型紧致埃尔米特重构的推导

我们先回顾 (3-66):

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^f + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u_{i+\frac{1}{2},-}^s.$$

我们观察到, 第一项的系数 ω_f/γ_f 在光滑区域趋近于 1, 而在间断附近, 这个系数趋近于 0。因此, 我们可以对 (3-66) 应用一个截断函数, 得到我们的杂交选择型重构

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{HHC-4}} = \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u_{i+\frac{1}{2},-}^f + \left(1 - \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)\right) u_{i+\frac{1}{2},-}^s. \quad (3-77)$$

这里, 上标 “HHC” 代表杂交埃尔米特构造 (Hybrid Hermite Construction), 截断函数 δ 的定义是

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > C/\gamma_f, \\ 0, & \xi \leq C/\gamma_f, \end{cases} \quad (3-78)$$

其中, C 是一个位于区间 $(0, \gamma_f)$ 内的阈值。然后 (3-77) 就等价于

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{HHC-4}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},-}^f, & \omega_f > C, \\ u_{i+\frac{1}{2},-}^s, & \omega_f \leq C. \end{cases} \quad (3-79)$$

由于非线性权 ω_f 的计算较为复杂, 我们希望探寻 $\omega_f > C$ 是否可以被一个计算更便宜的不等式替代。将 (3-67) 代入 $\omega_f > C$, 我们得到

$$1 + \left(\frac{\beta_s - \beta_f}{\beta_f + \varepsilon}\right)^2 > \frac{C\gamma_s}{(1-C)\gamma_f} \left(1 + \left(\frac{\beta_s - \beta_f}{\beta_s + \varepsilon}\right)^2\right). \quad (3-80)$$

设 $\vartheta = (\beta_f + \varepsilon)/(\beta_s + \varepsilon)$ 和 $E = (1-C)/C \cdot \gamma_f/\gamma_s$ 。那么有 $\vartheta > 0$ 和 $E > 1$ 。我们注意到对于固定的 C , E 实际上是一个常数, 因为 γ_s 和 γ_f 是固定的线性权。由于下式成立

$$\frac{\beta_s - \beta_f}{\beta_f + \varepsilon} = \frac{1}{\vartheta} - 1, \quad (3-81)$$

我们将 (3-80) 重写为

$$g(E, \vartheta) := (E-1)\vartheta^2 + (1-\vartheta)^2(E-\vartheta^2) > 0. \quad (3-82)$$

记

$$s(\vartheta) = \frac{\vartheta^2((1-\vartheta)^2 + 1)}{((1-\vartheta)^2 + \vartheta^2)}, \quad (3-83)$$

则有 $g(s(\vartheta), \vartheta) = 0$, 同时我们注意到 $s(\vartheta)$ 作为 $\vartheta > 0$ 的函数是单调递增的, 这意味着 $E > s(\vartheta)$ 成立等价于 (3-82) 成立。我们设 $\bar{\vartheta} = s^{-1}(E)$, 这样 (3-80) 成立就等价于

$$0 < \vartheta < \bar{\vartheta}. \quad (3-84)$$

因此, 我们用 (3-84) 替换 (3-79) 中的 $\omega_f > C$, 得到

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{HHC-4}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},-}^f, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u_{i+\frac{1}{2},-}^s, & \beta_f + \varepsilon \geq \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon). \end{cases} \quad (3-85)$$

这是我们最终的 HHC-4 重构。与 WHC-4 重构相比, 它避免了计算非线性权 ω_s 和 ω_f 。

注记 3.3 最初在 (3-79) 中, 我们需要给定 C 。然后由于 $\bar{\vartheta}$ 和 C 之间有直接的一一映射关系, 现在我们只需在 (3-85) 中给定阈值 $\bar{\vartheta}$ 。

3.3.2.2 杂交选择型紧致埃尔米特重构中参数 $\bar{\vartheta}$ 的选择

我们注意到 (3-85) 中的不等式可以理解为 ϑ 和阈值 $\bar{\vartheta}$ 之间的比较。经过仔细分析, 我们发现在光滑区域, ϑ 接近于 1, 满足

$$\vartheta = \frac{\beta_f + \varepsilon}{\beta_s + \varepsilon} = 1 + \frac{\beta_f - \beta_s}{\beta_s + \varepsilon} = 1 + O(h), \quad (3-86)$$

然而, 在有物理振荡的光滑区域, 例如数值算例中的 Titarev-Toro 问题, (3-86) 中 h 的系数可能非常大, 以至于 ϑ 的值远离 1。在间断附近, 它是一个相对较大的数, 满足

$$\vartheta = \frac{\beta_f + \varepsilon}{\beta_s + \varepsilon} = O(h^{-2}), \quad (3-87)$$

然而, 当间断不强时, ϑ 的值并不是很大。换句话说, 一些弱间断附近的 ϑ 值, 可能会接近有物理振荡的光滑区域中的 ϑ 值。因此很难使用 ϑ 清楚地区分那些有物理振荡的光滑区域和接近弱间断的区域。 ϑ 和 $\bar{\vartheta}$ 的关系示意图展示在图 3.7 中, 展示了 ϑ 在光滑区域、混合区域和间断附近区域的关系。混合区域指一些高频振荡的光滑区域和接近弱间断的区域是混合在一起的。因此, 我们必须适当地选择 $\bar{\vartheta}$, 一维情形下建议取 50。

回顾 (3-85), 可以观察到, $\bar{\vartheta}$ 的取值越大, 高阶多项式被使用的比例就越大。我们可以据此调整 $\bar{\vartheta}$ 以获得满意的解。

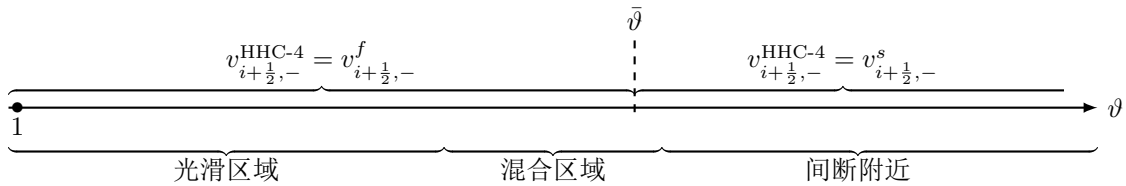


图 3.7 ϑ 和 $\bar{\vartheta}$ 的关系示意图。

3.3.2.3 八阶杂交选择型紧致埃尔米特重构

我们在这里可以将八阶线性重构发展到杂交选择型紧致埃尔米特重构, 需要对现有的杂交选择型紧致埃尔米特重构进行微小的修改:

1. 用从八阶重构导出的多项式 $p^e(x, y)$ 替换 $p^f(x, y)$ 。
2. 重新计算相应的光滑因子。

3. 重新选择新的阈值 $\bar{\vartheta}$ 。

此时，推荐的阈值 $\bar{\vartheta}$ 与四阶重构的情况不同，我们建议取 500000。

本小节中，我们在一维情形下，构造了四阶和八阶的杂交选择型紧致埃尔米特重构。这些重构分别被称为 HHC-4 和 HHC-8 重构。

3.3.3 基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶格式

下面我们基于紧致埃尔米特重构，设计一维基本无振荡的紧致两步四阶格式。我们使用在第 2.2 节中提出的改进的两步四阶时间推进框架，其中的重构 \mathcal{R} 采用已经得到的两个四阶的紧致埃尔米特重构 WHC-4 和 HHC-4 重构，LW 型解法器 \mathcal{G} 采用第 3.1 节中介绍的 Godunov 解法器和广义黎曼问题解法器。然后，我们得到了相应的数值格式——WHC-4 和 HHC-4 格式。类似的，我们也可以得到 WHC-8 和 HHC-8 格式。

关于 WHC-4 和 HHC-4 格式，我们有以下论述。

1. HHC-4 重构通过直接比较光滑因子来选取合适的模板，使其比 WHC-4 重构更高效。

2. 在间断附近，HHC-4 重构完全采用 HC-2 重构，这在应对间断方面表现出了强大的数值性能。

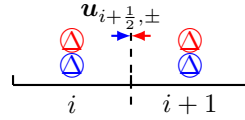
3. 在光滑区域，HHC-4 重构只采用 HC-4 重构，这使得数值格式具有更小的误差。

4. 另一方面，HHC-4 重构对单元平均值和导数平均值的依赖不连续，在 ϑ 接近 $\bar{\vartheta}$ 的区域，由于舍入误差的小扰动，选择可能会有所不同，并导致重构结果的突变。

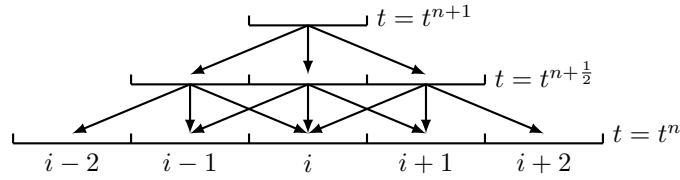
3.3.4 数值格式的紧致性

在本小节，我们将讨论一维数值格式的紧致性。对于特定的数值格式，如果它在一个单元依赖的前一个时间层上的单元越少，那么该格式就越紧致。以我们的 WHC-4 格式为例。重构值 $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 、 $(\partial_x \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ 和 $(\partial_x^2 \mathbf{u})_{i+\frac{1}{2},\pm}^n$ ，在单元边界 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 的两侧，如图 3.8 (a) 所示，依赖于时间层 $t = t^n$ 的 I_i 和 I_{i+1} 两个单元。因此，这个单元边界处的数值通量 $\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 和点值 $\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 依赖于这两个单元。类似的，单元 I_i 左侧边界上的数值通量和单元边界值依赖于 I_i 和 I_{i-1} 两个单元。因此，时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ 的平均值 $\bar{\mathbf{u}}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_i^{n+\frac{1}{2}}$ 依赖于时间层 $t = t^n$ 的三个单元。然后，时间层 $t = t^{n+1}$ 的平均值就依赖于时间层 $t = t^n$ 的 5 个单元，如图 3.8 (b) 所示。我们的 HHC-4 格式也是一样的。

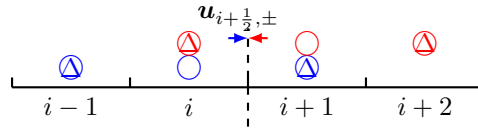
作为对比，文 [1] 中的 S2O4-HWENO5 格式，它在时间层 $t = t^{n+1}$ 的平均值依赖于时间层 $t = t^n$ 的 9 个单元，如图 3.8 (c) 和 3.8 (d) 所示。所以，我们新设计的格式是一个更加紧致的格式。



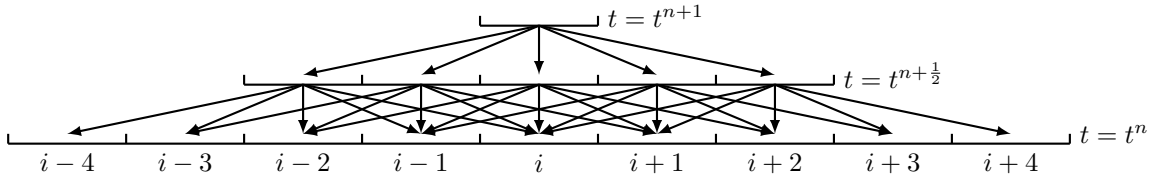
(a) WHC-4 和 HHC-4 格式的数值通量的依赖区域



(b) WHC-4 和 HHC-4 格式的依赖区域



(c) 文献 [1] 中的 S2O4-HWENO5 格式的数值通量的依赖区域



(d) 文献 [1] 中的 S2O4-HWENO5 格式的依赖区域

图 3.8 这是依赖区域的示意图。标记 \circ 代表单元平均值，而标记 Δ 代表导数平均值。蓝色代表左侧重构值的依赖范围，而红色代表右侧重构值的依赖范围，两者的并集就是数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^*$ 和单元边界值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 的依赖区域。

本节中，我们在一维情形下，构造了两种基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构，并设计了相应的基本无振荡的两步四阶格式。一共四个格式，分别记作 WHC-4、WHC-8、HHC-4 和 HHC-8 格式。其中的 WHC-4 和 HHC-4 格式就是我们所期望设计的一维四阶的基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。

3.4 数值实验

我们在一维情形下，一共得到了三种线性紧致的两步四阶格式以及四种基本无振荡的紧致两步四阶格式——HC-4、HC-6、HC-8、WHC-4、WHC-8、HHC-4 和 HHC-8 格式。在这一节，我们将用一些数值算例来测试它们的性能，其中要重点测试我们设计的四阶精度格式 HC-4、WHC-4 和 HHC-4 格式。对于所有的算例，CFL 数取 0.6，除了在算例 3.8 中取 0.2。 $\bar{\vartheta}$ 的值按照建议在所有的算例中取 50，除了在算例 3.6 中取 500。对于空间八阶的 HHC-8 格式，阈值 $\bar{\vartheta}$ 设定为 500000。

在本节中，我们提供了一些双曲守恒律 (2-45) 的数值算例来展示我们的数值格式的性能。双曲守恒律选取了两种，分别是线性对流方程

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \quad (3-88)$$

和欧拉方程组

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E)^\top, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p, u(\rho E + p))^\top, \quad (3-89)$$

其中 ρ 、 u 和 p 分别是密度、速度和压力， $E = u^2/2 + e$ 是总能量， e 是内能，对于多方气体有 $e = p/((\gamma - 1)\rho)$ ，其中 γ 是多方指数，如无特别说明取 1.4。

3.4.1 空间四阶精度的两步四阶格式

算例 3.1 (一维线性对流方程的精度测试) 这个算例选择线性对流方程 (3-88) 作为模型，初值为

$$u(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x). \quad (3-90)$$

计算区域是 $[-1, 1]$ ，采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, t) = u(x - t, 0)$ 。

对应于时间 $t^{em} = 1$ ，采用 HC-4 格式、WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的变量 u 的单元平均值的误差见表 3.2~3.4，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

算例 3.2 (一维欧拉方程组的线性退化的精度测试) 这个算例选择欧拉方程组 (3-89) 作为模型，其中多方指数 γ 取 1.4，初值为

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x), \quad u(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = 1. \quad (3-91)$$

表 3.2 HC-4 格式在算例 3.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	34	1.39581e-06		2.19020e-06	
0.6	2/80	67	8.73170e-08	3.99869	1.37118e-07	3.99757
0.6	2/160	134	5.45979e-09	3.99935	8.57559e-09	3.99904
0.6	2/320	267	3.41097e-10	4.00059	5.35806e-10	4.00045
0.6	2/640	534	2.12972e-11	4.00144	3.35383e-11	3.99783
0.6	2/1280	1067	1.33043e-12	4.00071	2.39120e-12	3.81000

表 3.3 WHC-4 格式在算例 3.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	34	1.39581e-06		2.19020e-06	
0.6	2/80	67	8.73170e-08	3.99869	1.37118e-07	3.99757
0.6	2/160	134	5.45979e-09	3.99935	8.57559e-09	3.99904
0.6	2/320	267	3.41097e-10	4.00059	5.35806e-10	4.00045
0.6	2/640	534	2.12974e-11	4.00143	3.35378e-11	3.99785
0.6	2/1280	1067	1.33042e-12	4.00072	2.38898e-12	3.81132

表 3.4 HHC-4 格式在算例 3.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	34	1.39581e-06		2.19020e-06	
0.6	2/80	67	8.73170e-08	3.99869	1.37118e-07	3.99757
0.6	2/160	134	5.45979e-09	3.99935	8.57559e-09	3.99904
0.6	2/320	267	3.41097e-10	4.00059	5.35806e-10	4.00045
0.6	2/640	534	2.12972e-11	4.00144	3.35383e-11	3.99783
0.6	2/1280	1067	1.33043e-12	4.00071	2.39120e-12	3.81000

计算区域是 $[-1, 1]$ ，采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, t) = u(x - t, 0)$ 。

对应于时间 $t^{em} = 10$ ，采用 HC-4 格式、WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的密度 ρ 的单元平均值的误差见表 3.5~3.7，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

表 3.5 HC-4 格式在算例 3.2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	775	1.35453e-05		2.12772e-05	
0.6	2/80	1549	8.46534e-07	4.00009	1.32973e-06	4.00010
0.6	2/160	3098	5.29071e-08	4.00003	8.31064e-08	4.00003
0.6	2/320	6195	3.30668e-09	4.00001	5.19407e-09	4.00002
0.6	2/640	12389	2.06655e-10	4.00008	3.25390e-10	3.99663
0.6	2/1280	24778	1.29157e-11	4.00003	2.19097e-11	3.89253

表 3.6 WHC-4 格式在算例 3.2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	775	1.35453e-05		2.12772e-05	
0.6	2/80	1549	8.46533e-07	4.00009	1.32973e-06	4.00010
0.6	2/160	3098	5.29071e-08	4.00003	8.31064e-08	4.00003
0.6	2/320	6195	3.30668e-09	4.00001	5.19407e-09	4.00002
0.6	2/640	12389	2.06656e-10	4.00008	3.25396e-10	3.99660
0.6	2/1280	24778	1.29151e-11	4.00010	2.18940e-11	3.89359

算例 3.3 (一维欧拉方程组的非线性的精度测试) 这是一个源自文 [77] 的数值算例，初始条件设定为

$$\rho(x, 0) = \frac{1 + 0.2x}{\sqrt{12}}, \quad u(x, 0) = \sqrt{\gamma}\rho(x, y, 0), \quad p(x, 0) = \rho(x, 0)^\gamma. \quad (3-92)$$

计算区域是 $[0, 2\pi]$ ，并且使用与算例 3.2 相同的欧拉方程组 (3-89)、均匀网格和周期边界。不过，多方指数 γ 设定为 3。首先求解关于 $\mu(x, t)$ 的下面这个伯格斯 (Burgers) 方程的精确解

$$\partial_t \mu + \frac{1}{2} \partial_x (\mu^2) = 0, \quad \mu(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(x), \quad (3-93)$$

然后可以得到该算例的精确解

$$\rho(x, t) = \frac{\mu(x, t)}{\sqrt{3}}, \quad u(x, t) = \sqrt{\gamma}\rho(x, t), \quad p(x, t) = \rho(x, t)^\gamma. \quad (3-94)$$

表 3.7 HHC-4 格式在算例 3.2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	775	1.35453e-05		2.12772e-05	
0.6	2/80	1549	8.46534e-07	4.00009	1.32973e-06	4.00010
0.6	2/160	3098	5.29071e-08	4.00003	8.31064e-08	4.00003
0.6	2/320	6195	3.30668e-09	4.00001	5.19407e-09	4.00002
0.6	2/640	12389	2.06659e-10	4.00008	3.25382e-10	3.99669
0.6	2/1280	24778	1.29121e-11	4.00043	2.19050e-11	3.89280

对应于时间 $t^{em} = 3$ ，采用 HC-4 格式、WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的密度 ρ 的单元平均值的误差见表 3.8~3.10，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

表 3.8 HC-4 格式在算例 3.3 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 3$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$2\pi/40$	39	1.18220e-05		1.26466e-04	
0.6	$2\pi/80$	77	9.66763e-07	3.61216	1.41186e-05	3.16308
0.6	$2\pi/160$	153	6.77058e-08	3.83581	1.20561e-06	3.54976
0.6	$2\pi/320$	306	4.40330e-09	3.94262	8.01712e-08	3.91054
0.6	$2\pi/640$	612	2.79578e-10	3.97726	5.18467e-09	3.95076
0.6	$2\pi/1280$	1223	1.75945e-11	3.99005	3.27468e-10	3.98483

算例 3.4 (一维欧拉方程组的 Lax 激波管问题) 这是一个黎曼问题，以欧拉方程组 (3-89) 作为模型，初值为

$$(\rho, \rho u, \rho E)(x, 0) = \begin{cases} (0.445, 0.311, 8.928), & x < 0, \\ (0.5, 0, 1.4275), & x > 0. \end{cases} \quad (3-95)$$

在终止时刻 $t^{em} = 0.28$ ，使用 100 个网格，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的数值结果见图 3.9。WHC-4 和 HHC-4 两个格式，捕捉间断的能力都略优于 S2O4-HWENO5 格式。

算例 3.5 (一维欧拉方程组的 Shu-Osher 问题) 这个问题最初是由 Shu 和 Osher 在文

表 3.9 WHC-4 格式在算例 3.3 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 3$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$2\pi/40$	39	1.18220e-05		1.26466e-04	
0.6	$2\pi/80$	77	9.66763e-07	3.61216	1.41186e-05	3.16308
0.6	$2\pi/160$	153	6.77058e-08	3.83581	1.20561e-06	3.54976
0.6	$2\pi/320$	306	4.40330e-09	3.94262	8.01712e-08	3.91054
0.6	$2\pi/640$	612	2.79578e-10	3.97726	5.18467e-09	3.95076
0.6	$2\pi/1280$	1223	1.75945e-11	3.99005	3.27469e-10	3.98482

表 3.10 HHC-4 格式在算例 3.3 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 3$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$2\pi/40$	39	1.18220e-05		1.26466e-04	
0.6	$2\pi/80$	77	9.66763e-07	3.61216	1.41186e-05	3.16308
0.6	$2\pi/160$	153	6.77058e-08	3.83581	1.20561e-06	3.54976
0.6	$2\pi/320$	306	4.40330e-09	3.94262	8.01712e-08	3.91054
0.6	$2\pi/640$	612	2.79578e-10	3.97726	5.18467e-09	3.95076
0.6	$2\pi/1280$	1223	1.75945e-11	3.99006	3.27469e-10	3.98482

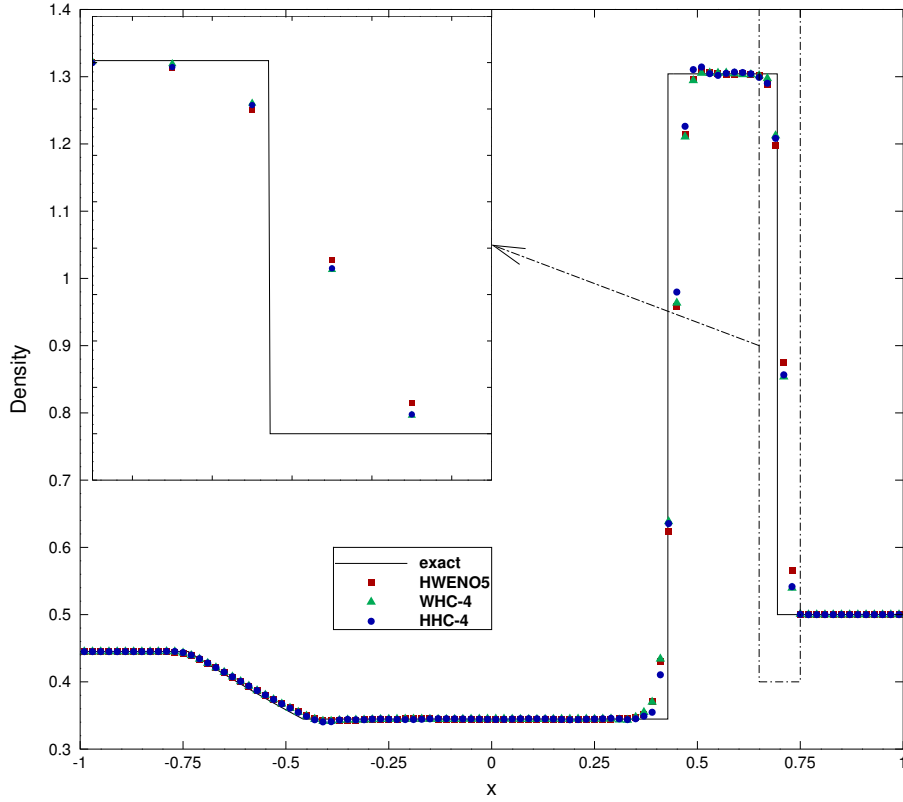


图 3.9 一维数值格式在算例 3.4 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.28$ 时刻，100 个网格的结果。

[78] 中提出的，以欧拉方程组 (3-89) 作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1), & x > -4. \end{cases} \quad (3-96)$$

在终止时刻 $t^{tem} = 1.8$ ，使用 400 个网格，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的数值结果见图 3.10。其中的参考解是 GRP 格式^[73] 在 10000 个网格上计算得到的，算例 3.6 和 3.7 也是一样的。我们发现 WHC-4 格式并不如 S2O4-HWENO5 格式好。这是因为高频振荡被 WENO 类型的非线性权视为间断。然后，在高频振荡区域，WHC-4 格式大量使用了二阶重构。因此，高频振荡被至多二阶的重构的数值耗散效应磨光了。在同一区域，S2O4-HWENO5 格式的候选模板的权重不是线性权，精度降到三阶，因为其候选模板的精度阶数都是三阶的。因此，在这个算例中，S2O4-HWENO5 格式比 WHC-4 格式做得更好。HHC-4 格式在这个算例中用推荐的 $\bar{\vartheta}$ 值解决了这个难题。在高频振荡区域应用了四阶重构。因此，我们发现 HHC-4 格式比 S2O4-HWENO5 格式稍微好一些。

算例 3.6 (一维欧拉方程组的 Titarev-Toro 问题) 这个问题最初是由 Titarev 和 Toro 在

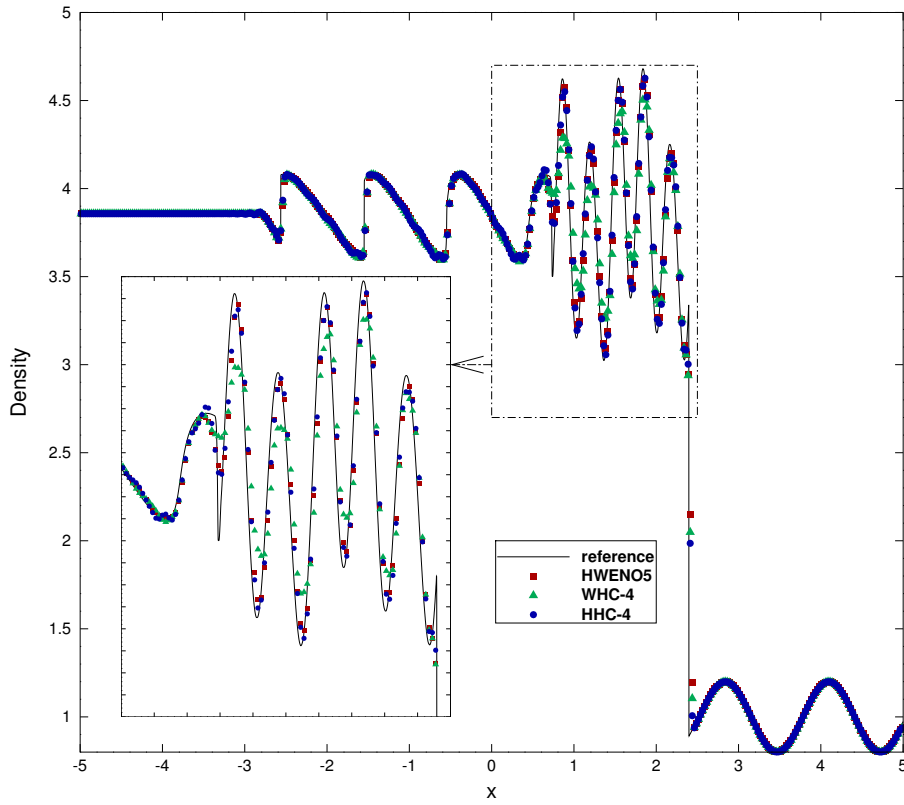


图 3.10 一维数值格式在算例 3.5 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 1.8$ 时刻，400 个网格的结果。

文 [79] 中提出的，以欧拉方程组 (3-89) 作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1.515695, 0.523346, 1.805), & x < -4.5, \\ (1 + 0.1 \sin(20\pi x), 0, 1), & x > -4.5. \end{cases} \quad (3-97)$$

在终止时刻 $t^{tem} = 5$ ，使用 1000 个网格，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的数值结果见图 3.11。我们发现数值结果与算例 3.5 中的结果相似，HHC-4 格式比 S2O4-HWENO5 格式做得更好。这里使用了一个较大的值 $\bar{\vartheta} = 500$ 来面对振荡频率更高的问题。如此做的原因是，如果 $\bar{\vartheta}$ 取得较小，高频振荡会被误认为是间断。

算例 3.7 (一维欧拉方程组的爆炸波问题) 这个问题最初是由 Woodward 和 Colella 在文 [80] 中提出的，以欧拉方程组 (3-89) 作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 10^3), & x < 0.1, \\ (1, 0, 10^{-2}), & 0.1 < x < 0.9, \\ (1, 0, 10^2), & x > 0.9. \end{cases} \quad (3-98)$$

在计算区域的两侧，使用了反射边界条件。

在终止时刻 $t^{tem} = 0.038$ ，使用 300 个网格，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的数值结果见图 3.12。WHC-4 和 HHC-4 两种格式都可以很好的捕捉强激波。从分辨

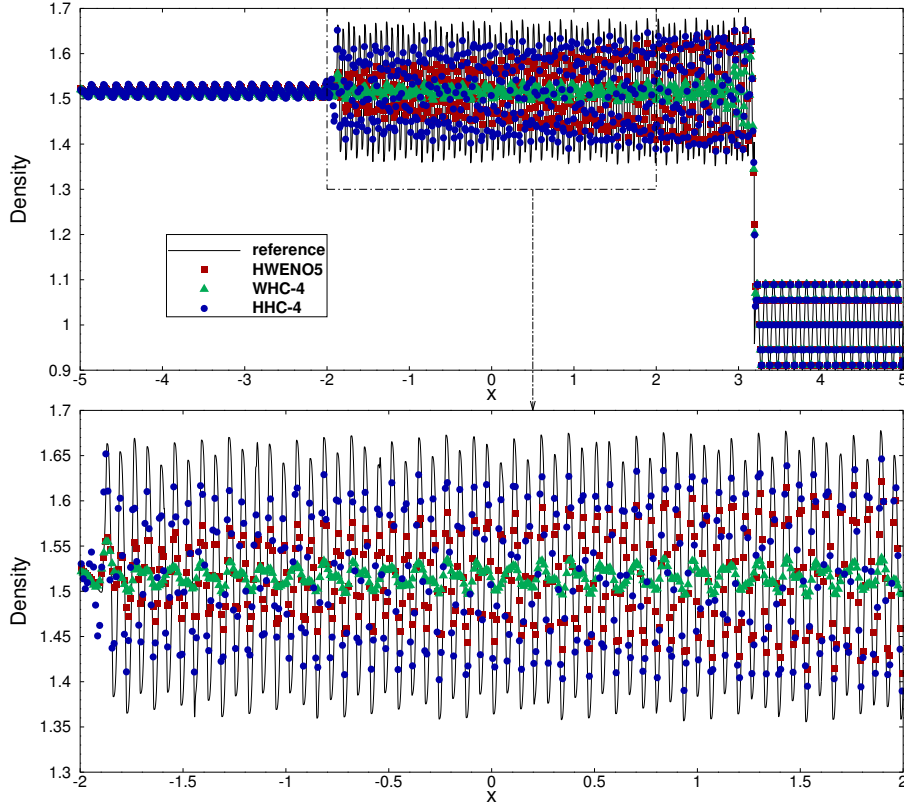


图 3.11 一维数值格式在算例 3.6 中密度的图像。展示的是 $t^{em} = 5$ 时刻，1000 个网格的结果。

率的角度看，HHC-4 格式最好，其次是 WHC-4 格式。

算例 3.8 (一维欧拉方程组的大压力/密度比问题) 这个问题最初是由 Tang 和 Liu 在文 [81] 中提出的，以欧拉方程组 (3-89) 作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (10^4, 0, 10^4), & x < 0.3, \\ (1, 0, 1), & x > 0.3. \end{cases} \quad (3-99)$$

在终止时刻 $t^{em} = 0.12$ ，使用 300 个网格，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的数值结果见图 3.13。这个算例中的 CFL 数取 0.2。WHC-4 和 HHC-4 两种格式都可以比 S2O4-HWENO5 格式更好地捕捉激波。HHC-4 格式比 WHC-4 格式稍微好一点。

3.4.2 空间六阶和八阶精度的两步四阶格式

接下来，我们将测试空间六阶和八阶精度的两步四阶格式的数值性能。

算例 3.1-2 (一维欧拉方程组的精度测试) 这个算例选择线性对流方程 (3-88) 作为模型，初值为

$$u(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x). \quad (3-100)$$

计算区域是 $[-1, 1]$ ，采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, t) = u(x - t, 0)$ 。

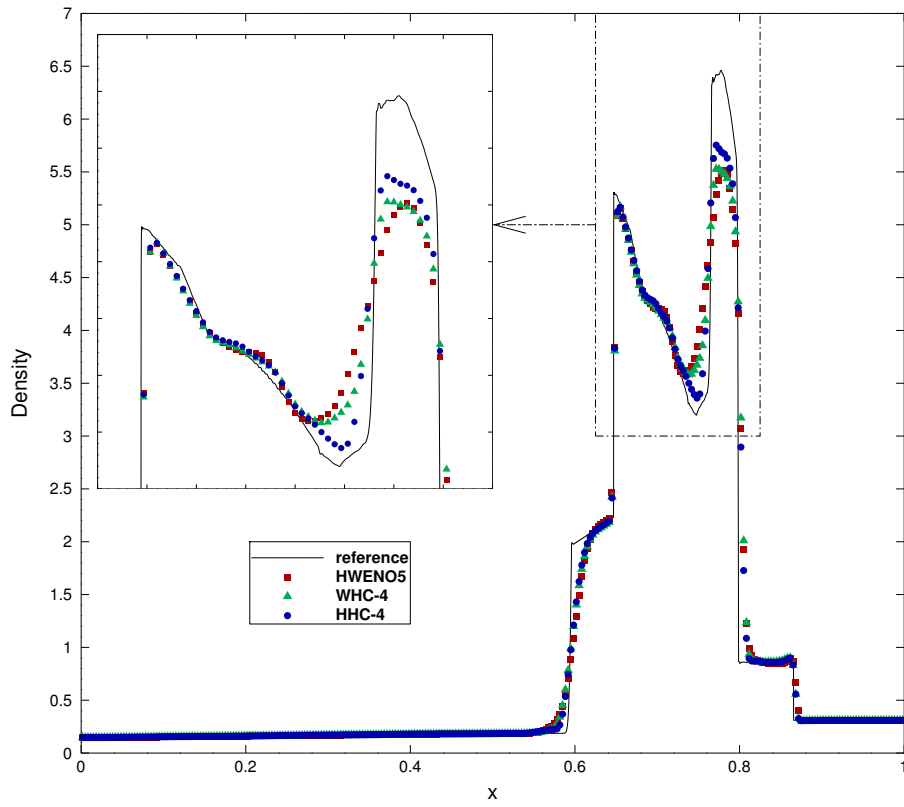


图 3.12 一维数值格式在算例 3.7 中密度的图像。展示的是 $t^{em} = 0.038$ 时刻，300 个网格的结果。

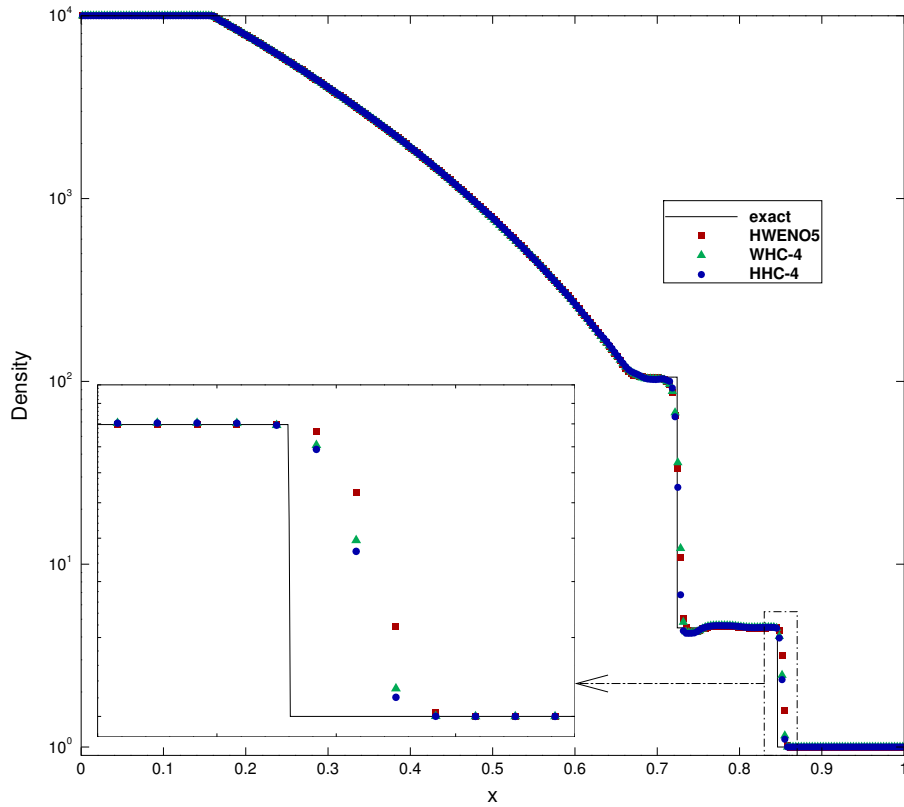


图 3.13 一维数值格式在算例 3.8 中密度的图像。展示的是 $t^{em} = 0.12$ 时刻，300 个网格的结果。

对应于时间 $t^{em} = 1$ ，采用 HC-6、HC-8、WHC-8 和 HHC-8 格式计算得到的变量 u 的单元平均值的误差见表 3.11~3.14，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。其中，空间六阶和八阶的两步四阶格式采用了注记 3.4 中的技术来得到重构算法的精度阶数。

注记 3.4 对于像 HC-6 和 HC-8 这样的数值格式，它在空间上具有六阶和八阶精度，但在时间上只有四阶精度，我们不能直接得到重构算法的精度阶数。以空间六阶的两步四阶格式为例，我们有误差估计

$$E(h, C_{CFL}) = \tilde{C}_1 \tau^4 + C_2 h^6 = C_1 C_{CFL}^4 h^4 + C_2 h^6, \quad (3-101)$$

因此，对于相邻的两个单元大小 h 和 $h/2$ ，我们分别取 CFL 数为 c 和 $c/\sqrt{2}$ ，那么我们有

$$E(h, c) = C_1 c^4 h^4 + C_2 h^6, \quad E\left(\frac{h}{2}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right) = C_1 \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^4 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + C_2 \left(\frac{h}{2}\right)^6 = \frac{E(h, c)}{2^6}. \quad (3-102)$$

随后，通过取 $E(h, c)$ 和 $E(h/2, c/\sqrt{2})$ 的比值并应用对数，我们可以得到重构的阶数。

表 3.11 HC-6 格式在算例 3.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	34	8.91404e-07		1.40232e-06	
0.424	2/80	95	2.14939e-08	5.37408	3.37646e-08	5.37616
0.6	2/80	67	5.76102e-08		9.05214e-08	
0.424	2/160	189	1.35466e-09	5.41032	2.12794e-09	5.41073
0.6	2/160	134	3.64358e-09		5.72373e-09	
0.424	2/320	378	8.49419e-11	5.42274	1.33426e-10	5.42284
0.6	2/320	267	2.29018e-10		3.59747e-10	
0.424	2/640	755	5.33039e-12	5.42508	8.42904e-12	5.41547

算例 3.2-2 (一维欧拉方程组的线性退化的精度测试) 此算例以欧拉方程组 (3-89) 作为模型，其中多方指数 γ 取 1.4，初值为

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x), \quad u(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = 1. \quad (3-103)$$

计算区域是 $[-1, 1]$ ，采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, t) = u(x - t, 0)$ 。

对应于时间 $t^{em} = 10$ ，采用 HC-6、HC-8、WHC-8 和 HHC-8 格式计算得到的密度 ρ 的单元平均值的误差见表 3.15~3.18，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。空间八阶的两步四阶格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。其中，空间六阶和八阶

表 3.12 HC-8 格式在算例 3.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/20	17	1.92673e-06		3.04799e-06	
0.3	2/40	67	1.34651e-08	7.16078	2.11098e-08	7.17380
0.6	2/40	34	1.35577e-07		2.13057e-07	
0.3	2/80	134	6.56851e-10	7.68933	1.03114e-09	7.69085
0.6	2/80	67	9.04701e-09		1.42100e-08	
0.3	2/160	267	3.78187e-11	7.90220	5.93956e-11	7.90233
0.6	2/160	134	5.76726e-10		9.05881e-10	
0.3	2/320	534	2.31377e-12	7.96150	3.67661e-12	7.94480

表 3.13 WHC-8 格式在算例 3.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/20	17	1.92673e-06		3.04799e-06	
0.3	2/40	67	1.34651e-08	7.16078	2.11098e-08	7.17380
0.6	2/40	34	1.35577e-07		2.13057e-07	
0.3	2/80	134	6.56851e-10	7.68933	1.03114e-09	7.69085
0.6	2/80	67	9.04701e-09		1.42100e-08	
0.3	2/160	267	3.78187e-11	7.90220	5.93972e-11	7.90230
0.6	2/160	134	5.76726e-10		9.05879e-10	
0.3	2/320	534	2.31375e-12	7.96151	3.67484e-12	7.94549

表 3.14 HHC-8 格式在算例 3.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/20	17	1.92673e-06		3.04799e-06	
0.3	2/40	67	1.34651e-08	7.16078	2.11098e-08	7.17380
0.6	2/40	34	1.35577e-07		2.13057e-07	
0.3	2/80	134	6.56851e-10	7.68933	1.03114e-09	7.69085
0.6	2/80	67	9.04701e-09		1.42100e-08	
0.3	2/160	267	3.78187e-11	7.90220	5.93956e-11	7.90233
0.6	2/160	134	5.76726e-10		9.05881e-10	
0.3	2/320	534	2.31377e-12	7.96150	3.67661e-12	7.94480

的两步四阶格式采用了注记 3.4 中的技术来得到重构算法的精度阶数。这里的 HC-6 格式表现出了数值不稳定，说明这个格式虽然是线性稳定的，但是应用于非线性方程组时不稳定，故以后不再使用这个空间六阶的两步四阶格式。

表 3.15 HC-6 格式在算例 3.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/40	775	8.27459e-07		1.29667e-06	
0.424	2/80	2190	1.86981e-08	5.46772	2.94233e-08	5.46171
0.6	2/80	1549	5.14263e-08		8.07340e-08	
0.424	2/160	4381	7.21427e-07	-3.81027	2.66267e-06	-5.04355
0.6	2/160	3098	7.52045e-09		2.30543e-08	
0.424	2/320	8761	2.90710e-07	-5.27262	8.54718e-07	-5.21234
0.6	2/320	6195	3.87887e-07		1.63360e-06	
0.424	2/640	17521	4.45954e-07	-0.20126	1.40088e-06	0.22173

算例 3.3-2 (一维欧拉方程组的非线性的精度测试) 这是一个源自文 [77] 的数值算例，初始条件设定为

$$\rho(x, 0) = \frac{1 + 0.2x}{\sqrt{12}}, \quad u(x, 0) = \sqrt{\gamma}\rho(x, y, 0), \quad p(x, 0) = \rho(x, 0)^\gamma. \quad (3-104)$$

计算区域是 $[0, 2\pi]$ ，并且使用与算例 3.2 相同的欧拉方程组 (3-89)、均匀网格和周期边界。不过，多方指数 γ 设定为 3。

表 3.16 HC-8 格式在算例 3.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	20	2/387	2.30758e-06		3.64246e-06	
0.3	40	2/1549	1.00355e-08	7.84513	1.57549e-08	7.85297
0.6	40	2/775	8.53015e-08		1.34196e-07	
0.3	80	2/3098	3.59234e-10	7.89150	5.64030e-10	7.89435
0.6	80	2/1549	3.87437e-09		6.07971e-09	
0.3	160	2/6195	1.56789e-11	7.94900	2.47085e-11	7.94285
0.6	160	2/3098	2.13053e-10		3.34755e-10	
0.3	320	2/12389	8.64611e-13	7.94495	1.79901e-12	7.53976

 表 3.17 WHC-8 格式在算例 3.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	20	2/387	2.30758e-06		3.64246e-06	
0.3	40	2/1549	1.00355e-08	7.84513	1.57549e-08	7.85297
0.6	40	2/775	8.53015e-08		1.34196e-07	
0.3	80	2/3098	3.59238e-10	7.89149	5.64031e-10	7.89435
0.6	80	2/1549	3.87437e-09		6.07972e-09	
0.3	160	2/6195	1.56794e-11	7.94895	2.47098e-11	7.94278
0.6	160	2/3098	2.13052e-10		3.34754e-10	
0.3	320	2/12389	8.67489e-13	7.94014	1.80767e-12	7.53283

表 3.18 HHC-8 格式在算例 3.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 10$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	20	2/387	2.30758e-06		3.64246e-06	
0.3	40	2/1549	1.00355e-08	7.84513	1.57549e-08	7.85297
0.6	40	2/775	8.53015e-08		1.34196e-07	
0.3	80	2/3098	3.59237e-10	7.89149	5.64027e-10	7.89436
0.6	80	2/1549	3.87437e-09		6.07972e-09	
0.3	160	2/6195	1.56783e-11	7.94905	2.47069e-11	7.94295
0.6	160	2/3098	2.13050e-10		3.34751e-10	
0.3	320	2/12389	8.66274e-13	7.94215	1.80056e-12	7.53850

对应于时间 $t^{tem} = 3$ ，采用 HC-8、WHC-8 和 HHC-8 格式计算得到的密度 ρ 的单元平均值的误差见表 3.19~3.21，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数，并采用了注记 3.4 中的技术来得到重构算法的精度阶数。

表 3.19 HC-8 格式在算例 3.3-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 3$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$2\pi/80$	77	1.17348e-07		2.17942e-06	
0.3	$2\pi/160$	306	9.32693e-10	6.97518	2.03143e-08	6.74530
0.6	$2\pi/160$	153	5.21317e-09		1.04608e-07	
0.3	$2\pi/320$	612	3.36388e-11	7.27589	7.47703e-10	7.12831
0.6	$2\pi/320$	306	2.72365e-10		4.77446e-09	
0.3	$2\pi/640$	1223	1.39036e-12	7.61394	2.82590e-11	7.40048
0.6	$2\pi/640$	612	1.63513e-11		2.68696e-10	
0.3	$2\pi/1280$	2445	9.85380e-14	7.37451	1.33188e-12	7.65637

3.4.3 数值格式的时间效率

在比较空间四阶和八阶的两步四阶格式时，我们应该关注在相同的误差下哪个格式的计算时间（CPU 时间）更短。如图 3.14 所示，我们可以观察到空间八阶的两步四阶格式展现出了更优的时间效率。

表 3.20 WHC-8 格式在算例 3.3-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 3$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$2\pi/80$	77	1.17348e-07		2.17942e-06	
0.3	$2\pi/160$	306	9.32693e-10	6.97518	2.03143e-08	6.74530
0.6	$2\pi/160$	153	5.21317e-09		1.04608e-07	
0.3	$2\pi/320$	612	3.36388e-11	7.27589	7.47703e-10	7.12831
0.6	$2\pi/320$	306	2.72365e-10		4.77446e-09	
0.3	$2\pi/640$	1223	1.39030e-12	7.61400	2.82586e-11	7.40050
0.6	$2\pi/640$	612	1.63512e-11		2.68696e-10	
0.3	$2\pi/1280$	2445	9.84114e-14	7.37636	1.33077e-12	7.65757

 表 3.21 HHC-8 格式在算例 3.3-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 3$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$2\pi/80$	77	1.17348e-07		2.17942e-06	
0.3	$2\pi/160$	306	9.32693e-10	6.97518	2.03143e-08	6.74530
0.6	$2\pi/160$	153	5.21317e-09		1.04608e-07	
0.3	$2\pi/320$	612	3.36388e-11	7.27589	7.47703e-10	7.12831
0.6	$2\pi/320$	306	2.72365e-10		4.77446e-09	
0.3	$2\pi/640$	1223	1.39036e-12	7.61394	2.82580e-11	7.40054
0.6	$2\pi/640$	612	1.63512e-11		2.68697e-10	
0.3	$2\pi/1280$	2445	9.84530e-14	7.37575	1.33171e-12	7.65655

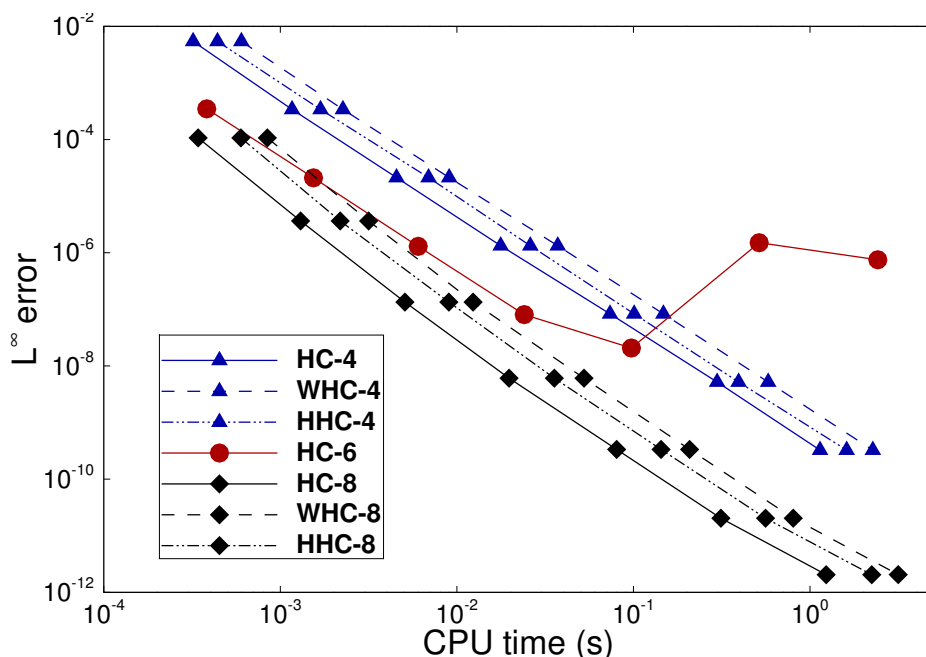


图 3.14 几种数值格式在算例 3.2-2 中 CPU 时间与密度的 L^∞ 误差之间的关系。

3.5 小结

本章针对一维双曲守恒律，设计了基于紧致埃尔米特重构的两步四阶数值格式。具体来说，我们先构造了不同精度的线性埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式。然后，我们做了线性稳定性分析，在空间四阶、六阶和八阶精度下，分别得到了一个线性稳定的两步四阶数值格式。接着，我们构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构，并设计了相应的时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。两种格式均采用 Godunov 解法器和广义黎曼问题解法器。我们也将格式推广到了空间八阶精度。过后，我们讨论了数值格式的紧致性，得出了结论：与文 [1] 中的一维两步四阶格式相比，我们的一维四阶精度两步四阶格式更加紧致。最后我们给出了许多算例，验证了我们的数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

第四章 二维基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

在第二章中，我们为了使用紧致的埃尔米特重构，提出了改进的两步四阶时间推进框架。在本章，我们将基于此框架设计二维基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式，所以我们需要选择适当的重构算法和解法器。

4.1 广义黎曼问题解法器

在二维情形下，本文采用二维的 Godunov 解法器 and 文 [70] 中的二维弱耦合的广义黎曼问题解法器作为标准一阶 LW 型解法器，然后使用第 2.3.3 小节中的线性二阶 LW 型解法器。这些二维解法器和一维解法器的区别在于面对的黎曼问题和广义黎曼问题是不同的。这里以高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 为例，并将 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}, t^n)$ 平移到原点，二维的广义黎曼问题是

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^n + (\partial_x \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^n x + (\partial_y \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^n y, & x < 0, \\ \mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2}, +), j+G}^n + (\partial_x \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, +), j+G}^n x + (\partial_y \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2}, +), j+G}^n y, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4-1)$$

由于二维情形下的解法器过于复杂，这里就不做详细介绍，读者如果有兴趣，详见文献 [70]。

4.2 线性紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式

在一维情形下，因为文 [1] 中五阶 HWENO 重构相比四阶重构不够紧致，同时计算开销更大，所以我们新构造了四阶精度的紧致埃尔米特重构。在二维情形下，我们出于同样的原因，不使用文 [1] 中逐维的 HWENO5 和 WENO5 重构，而是尝试将一维的紧致埃尔米特重构推广到二维情形，同时保持类似的性能。另外，逐维的重构不能保证对称性，内存需求高，还难以推广到非规则网格与非结构网格。

在本节，我们将探讨二维情形下的线性埃尔米特重构。我们希望这种重构比逐维的 HWENO5 和 WENO5 重构更加紧致，希望它是四阶的，更适合改进的两步四阶时间推进框架，并且希望它是真正二维的。

给定一个函数 $u(x, y)$ ，定义函数 $u(x, y)$ 及其导数 $\nabla u = (v, w)$ 在计算单元 I_{ij} 上的平均值为

$$\bar{u}_{ij} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{I_{ij}} u(x, y) dx dy, \quad (\bar{v}_{ij}, \bar{w}_{ij}) = \frac{1}{h_x h_y} \int_{I_{ij}} \nabla u(x, y) dx dy, \quad (4-2)$$

其中, 计算单元 $I_{ij} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$, 其大小为 $h_x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, N_x$ 和 $h_y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$, $j = 1, \dots, N_y$, 并且为了简单起见, 我们仍采用均匀网格。同时也适用于非均匀网格。对于 $2k$ 阶重构, 我们希望在 k^2 个潜在的候选模板

$$S_{rs}^k(i, j) = \bigcup_{m=0}^{k-1} \bigcup_{\ell=0}^{k-1} I_{i-r+m, j-s+\ell}, \quad r, s = 0, 1, \dots, k-1, k \geq 1, \quad (4-3)$$

中选择适当的模板并在其上得到相应的埃尔米特重构 $p_{ij}^{rs}(x, y)$, 其中的上标 r 和 s 表示这些值取决于模板 $S_{rs}^k(i, j)$, 在没有引起歧义的情况下将被省略。

4.2.1 线性紧致埃尔米特重构模板的选择策略

在这一小节, 我们会讨论对二维线性重构的要求。

1. 我们所期望构造的线性紧致埃尔米特重构, 应该在每个单元 I_{ij} 内以 $2k$ 阶的精度近似 $u(x, y)$,

$$p_{ij}(x, y) = u(x, y) + O(h^{2k}), \quad (4-4)$$

并且它的各阶导数满足

$$\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} p_{ij}(x, y) = \partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u(x, y) + O(h^{2k-d_1-d_2}), \quad d_1 + d_2 \leq 2k-1. \quad (4-5)$$

此时, 我们可以得到, 在单元边界的高斯点上, 重构有 $2k$ 阶近似精度。

2. 我们希望构建的二维重构在一维问题中可以退化到我们在第 3.2 节中给出的一维重构。这可以有效保障我们的二维重构可以取得类似一维重构的良好性能。

3. 我们注意到, 模板 S_{rs}^k 包含总共 k^2 个单元中的 $3k^2$ 个自由度。而在 \mathcal{P}^{2k-1} 空间中, 构造一个 $2k$ 阶的重构只需要 $2k^2 + k$ 个自由度。当 $k = 1$ 时, 两者是相等的, 但当 $k > 1$ 时, 存在冗余的自由度, 这可能需要最小二乘法或其他技术。然而, 我们认为最小二乘法的计算成本相当高, 所以我们寻求另一种解决方案。我们将会忽略其中 $k^2 - k$ 个自由度, 使得自由度可以刚好构造一个 $2k$ 阶的重构。

4. 我们需要使最终的模板尽可能对称。

5. 此外, 要确保目标单元 I_{ij} 本身在模板中。

4.2.2 线性紧致埃尔米特重构的具体形式

我们综合第 4.2.1 小节中的要求, 得到如下模板。

1. 在 $k = 1$ 的情形下, 唯一的模板选择如图 4.1 (a) 所示。在这个图中, 单元平均值 \bar{u}_{ij} 由一个圆圈表示, 而导数平均值 \bar{v}_{ij} 或 \bar{w}_{ij} 由一个相应方向的箭头表示。从此模板得到的重构多项式所应用的范围是蓝线所标识的。重构多项式可以表示为

$$p_{ij}(x, y) = \bar{u}_{ij} + \bar{v}_{ij}(x - x_i) + \bar{w}_{ij}(y - y_j). \quad (4-6)$$

2. 在 $k = 2$ 的情形下, 我们得到两个可行的模板, 如图 4.1 (b) 和 4.1 (c) 所示。进

行一系列简单地测试后，我们发现两个模板的性能相当。在本文的计算中，我们选择了第一个模板，即图 4.1 (b) 中展示的模板。需要注意的是，这个模板得到的多项式只应用于单元边界的四分之一区域。其余的单元边界上的值由旋转过的模板提供，如图 4.1 (d) 所示。因此，完成一个单元上的重构一共使用了四个模板。重构多项式的表达相对复杂，将不会写出。其在均匀网格上的单元边界高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 处的多项式值可以表示为

$$\begin{aligned} (\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u)_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G} = \partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} p_{ij}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}) = \frac{1}{h_x^{d_1} h_y^{d_2}} \sum_{m=0}^1 \sum_{\ell=0}^1 (\phi_{m,\ell}^{d_1,d_2} \bar{u}_{i+m,j+\ell} \\ + h_x \psi_{m,\ell}^{d_1,d_2} \bar{v}_{i+m,j+\ell} + h_y \sigma_{m,\ell}^{d_1,d_2} \bar{w}_{i+m,j+\ell}). \end{aligned} \quad (4-7)$$

当导数的阶数 d_1 和 d_2 等于零时，表达式对应于多项式本身。系数 $\phi_{m,\ell}^{d_1,d_2}$ 、 $\psi_{m,\ell}^{d_1,d_2}$ 和 $\sigma_{m,\ell}^{d_1,d_2}$ 可以在表 4.1 中找到。注意，其他高斯点处的多项式值可以通过对 (4-7) 进行简单的变换获得。

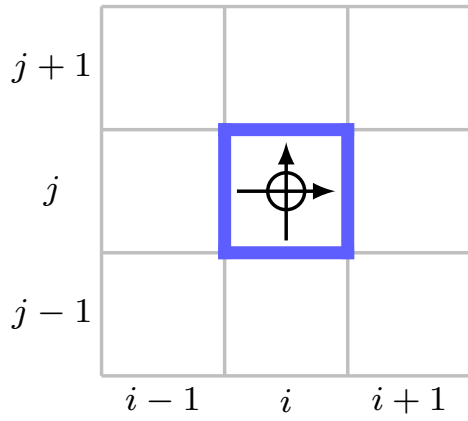
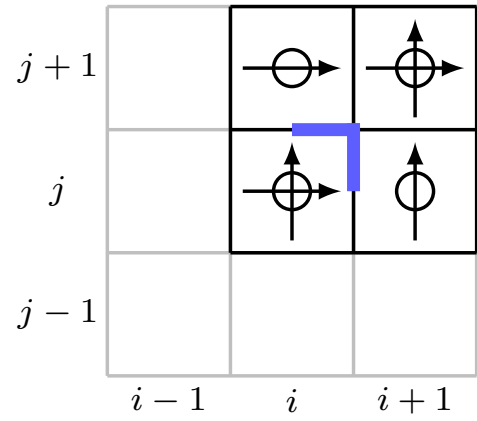
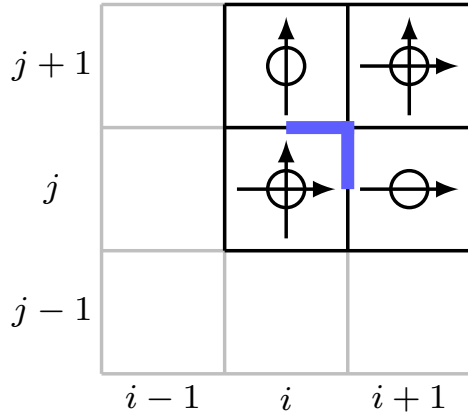
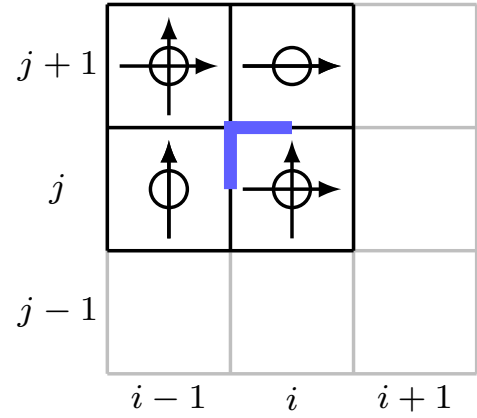
3. 在 $k = 3$ 的情形下，我们注意到一维空间六阶的两步四阶格式有线性稳定性；然而，在求解非线性方程组（如欧拉方程）时，遇到了数值不稳定的问题，如表 3.15 所示。因此，我们没有将这种重构推广到二维情形。

4. 在 $k = 4$ 的情形下，我们有大约 5.982×10^{11} 个选择满足第 4.2.1 小节中要求的可选模板，因而不能一一验证所有可能的模板。在这里，我们根据在 $k = 2$ 情形下获得的经验，提出了一个可行的模板，如图 4.1 (e) 所示。另外三个模板依然可以通过旋转操作得到。

4.2.3 基于线性紧致埃尔米特重构的两步四阶格式

我们已经得到了 $k = 1, 2, 4$ 下的三个线性紧致埃尔米特重构，记作 HC-2、HC-4 和 HC-8 重构。 $k = 1$ 的二阶重构，与文 [73] 中的广义黎曼问题格式所用的重构相同，这个重构是二阶的，不适用于两步四阶时间推进。对于 $k = 2, 4$ 的四阶和八阶线性重构，使用我们在第 2.3 节中提出的改进的两步四阶时间推进框架，其中的重构 \mathcal{R} 采用新设计的线性重构，LW 型解法器 \mathcal{G} 采用二维的 Godunov 解法器和二维弱耦合的广义黎曼问题解法器^[70]。然后，我们就得到了两个两步四阶格式，记作 HC-4 和 HC-8 格式。

这一节中，我们构造了真正的二维线性紧致埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式。一共有两个稳定的格式，根据它们的阶数不同，分别记作 HC-4 和 HC-8 格式，其中的 HC-4 格式是我们所期望设计的四阶的基于紧致埃尔米特重构的两步四阶格式的线性版本。下面为了在间断附近避免数值振荡，我们将构造非线性的重构，并设计了相应的基本无振荡格式。


 (a) $k = 1$ 的情形。

 (b) $k = 2$ 的第一种情形。

 (c) $k = 2$ 第二种的情形。


(d) 将图 (b) 旋转得到的情形。

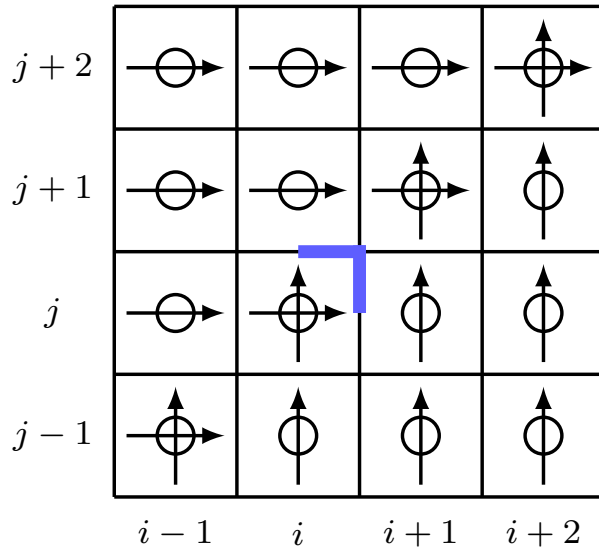

 (e) $k = 4$ 的情形。

图 4.1 当 $k = 1, 2, 4$ 时的模板示意图。单元平均值 \bar{u}_{ij} 由一个圆圈表示，而导数平均值 \bar{v}_{ij} 由一个向右的箭头表示， \bar{w}_{ij} 由一个向左的箭头表示。从此模板得到的重构多项式所应用的范围是蓝线所标识的。

表 4.1 公式 (4-7) 中的系数。

(d_1, d_2)	$\phi_{0,0}^{d_1,d_2}$ $\psi_{0,0}^{d_1,d_2}$	$\phi_{0,1}^{d_1,d_2}$ $\psi_{0,1}^{d_1,d_2}$	$\phi_{1,0}^{d_1,d_2}$ $\psi_{1,1}^{d_1,d_2}$	$\phi_{1,1}^{d_1,d_2}$ $\sigma_{0,0}^{d_1,d_2}$	$\sigma_{1,0}^{d_1,d_2}$	$\sigma_{1,1}^{d_1,d_2}$
$(0, 0)$	$(15 - \sqrt{3})/18$ $(6 - \sqrt{3})/18$	$(\sqrt{3} - 6)/18$ $(\sqrt{3} - 3)/18$	$1/6$ $-1/6$	$1/3$ $\sqrt{3}/12$	$\sqrt{3}/18$	$-\sqrt{3}/36$
$(1, 0)$	-1 0	-1 $-1/2$	1 $-1/2$	1 $-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/6$	0
$(0, 1)$	$-(2 + \sqrt{3})/6$ $-1/3$	$(2 + \sqrt{3})/6$ $1/3$	$(2 - 5\sqrt{3})/6$ 0	$-(2 - 5\sqrt{3})/6$ $(3 - \sqrt{3})/6$	$(3 - \sqrt{3})/6$	$-\sqrt{3}/3$
$(2, 0)$	$(\sqrt{3} - 6)/3$ $(\sqrt{3} - 6)/3$	$(6 - \sqrt{3})/3$ $(3 - \sqrt{3})/3$	$(6 - \sqrt{3})/3$ 1	$(\sqrt{3} - 6)/3$ 0	0	0
$(1, 1)$	$\sqrt{3}/3$ 0	$-\sqrt{3}/3$ 0	$\sqrt{3}/3$ 0	$\sqrt{3}/3$ $(\sqrt{3} - 3)/3$	$(3 - \sqrt{3})/3$	0
$(0, 2)$	-1 0	1 0	$2\sqrt{3} - 5$ 0	$5 - 2\sqrt{3}$ -1	$\sqrt{3} - 3$	$\sqrt{3} - 2$

4.3 基本无振荡的紧致埃尔米特重构及其相应的两步四阶格式

我们在第 4.2 节中构造了线性紧致的埃尔米特重构，它们在光滑区域可以保持高阶精度；但是在间断附近会出现数值振荡。为了设计格式能够在光滑区域保持高阶精度，并同时有效防止间断附近出现数值振荡，我们在本节中构造了两种二维的基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构。

4.3.1 加权型紧致埃尔米特重构

在本小节，我们仍然参考文 [48, 51–54] 中的 WENO 格式，推导加权型的紧致埃尔米特重构。

4.3.1.1 加权型紧致埃尔米特重构的组成成分

在第 4.2 节中，我们得到了二阶、四阶和八阶的线性重构。值得注意的是，二阶的重构与广义黎曼问题格式文 [73] 中使用的重构是一样的，该格式在应对数值振荡方面表现出色。为了达到相似的性能，我们对 (4-6) 中的 $p_{ij}(x)$ 应用相同的 minmod 限

制器，得到

$$\bar{v}_{ij}^{lim} = \frac{1}{h_x} \minmod(\alpha(\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}), h_x \bar{v}_{ij}, \alpha(\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j})), \quad (4-8)$$

$$\bar{w}_{ij}^{lim} = \frac{1}{h_y} \minmod(\alpha(\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{ij}), h_y \bar{w}_{ij}, \alpha(\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i,j-1})), \quad (4-9)$$

$$p_{ij}^s(x, y) = \bar{u}_{ij} + \bar{v}_{ij}^{lim}(x - x_i) + \bar{w}_{ij}^{lim}(y - y_j), \quad (4-10)$$

其中，参数 α 在区间 $[1, 2)$ 内。在本文的数值算例中，我们将 α 的值设为 1.9。符号“ s ”被用来表示这个表达式是由二阶重构得出的。在本章中，我们仅关注多项式在高斯点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 处的值，即

$$u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s = p_{ij}^s(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}), \quad (4-11)$$

$$\left(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u\right)_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s = \partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} p_{ij}^s(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}), \quad d_1 + d_2 = 1, 2. \quad (4-12)$$

另外，四阶重构正好与两步四阶时间推进框架的精度匹配，因此我们可以预期在光滑区域中达到四阶精度。同样，我们定义了符号

$$u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f = p_{ij}^f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}), \quad (4-13)$$

$$\left(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u\right)_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f = \partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} p_{ij}^f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}), \quad d_1 + d_2 = 1, 2, \quad (4-14)$$

这些值是由四阶线性重构得到的，其中“ f ”表示由四阶重构得出的。

4.3.1.2 加权型紧致埃尔米特重构的推导

现在，我们借鉴 CWENO 和 WENO-AO 格式中使用的技术来推导我们的加权型重构。我们将从四阶线性重构得到的值 $u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f$ 重写为

$$u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f = \gamma_s u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s + \gamma_f \left(\frac{1}{\gamma_f} u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s \right), \quad \gamma_s + \gamma_f = 1, \quad (4-15)$$

其中， γ_s 和 γ_f 是线性权。在实际数值算例中，线性权 γ_s 和 γ_f 的值通常选择为 0.1 和 0.9。随后，将线性权 γ_o 用非线性权 ω_o 替代，其中 $o = s, f$ 代表精度阶数，得到

$$u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^{WHC-4} = \omega_s u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s + \omega_f \left(\frac{1}{\gamma_f} u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f - \frac{\gamma_s}{\gamma_f} u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s \right), \quad \omega_s + \omega_f = 1, \quad (4-16)$$

这里，上标“WHC”代表加权埃尔米特构造 (Weighted Hermite Construction)，相应的四阶重构被称为 WHC-4 重构。这个表达式可以进一步简化为

$$u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^{WHC-4} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f} \right) u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s. \quad (4-17)$$

本文中的非线性权的定义方式的参考文 [51] 中的 WENO-Z 格式。这些非线性权的表达式为

$$\omega_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_s + \alpha_f}, \quad \alpha_o = \gamma_o \left(1 + \left(\frac{\theta}{\beta_o + \varepsilon} \right)^q \right), \quad o = s, f, \quad (4-18)$$

其中，变量 θ 是 β_s 和 β_f 的差的绝对值，即 $\theta = |\beta_s - \beta_f|$ 。小量 ε 的表达式是 $\widehat{C}h^3$ ，其中 \widehat{C} 在我们的数值算例中设为 100。幂指数 q 设为 2。

光滑因子 β_s 和 β_f 采取类似于文 [48] 中使用的定义, 即在二维的情形下, 光滑因子是

$$\beta_o = \sum_{d_1+d_2 \geq 1} \iint_{I_{ij}} h_x^{2d_1-1} h_y^{2d_2-1} \left(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} p_{ij}^o(x, y) \right)^2 dx dy, \quad o = s, f, \quad (4-19)$$

在均匀网格的情况下, 具体的表达式可以写为

$$\beta_s = (h_x \bar{v}_{ij})^2 + (h_y \bar{w}_{ij})^2, \quad (4-20)$$

$$\beta_f = \mathbf{U}^\top \mathbf{A} \mathbf{U}, \quad (4-21)$$

其中,

$$\mathbf{U} = \left[\bar{u}_{ij}, \bar{u}_{i,j+1}, \bar{u}_{i+1,j}, \bar{u}_{i+1,j+1}, h_x \bar{v}_{ij}, h_x \bar{v}_{i,j+1}, h_x \bar{v}_{i+1,j}, h_x \bar{v}_{i+1,j+1}, h_y \bar{w}_{ij}, h_y \bar{w}_{i,j+1}, h_y \bar{w}_{i+1,j}, h_y \bar{w}_{i+1,j+1} \right]^\top, \quad (4-22)$$

和

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{577}{30} & -\frac{187}{15} & -\frac{187}{15} & -\frac{203}{15} & \frac{102}{5} & -\frac{46}{15} & \frac{26}{3} & \frac{102}{5} & -\frac{46}{15} & \frac{26}{3} \\ 0 & \frac{5653}{30} & -\frac{203}{15} & -\frac{5263}{15} & \frac{28}{5} & \frac{2779}{15} & \frac{2603}{15} & -\frac{102}{5} & \frac{46}{15} & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5653}{30} & -\frac{5263}{15} & -\frac{102}{5} & \frac{46}{15} & -\frac{26}{3} & \frac{28}{5} & \frac{2779}{15} & \frac{2603}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10729}{30} & -\frac{28}{5} & -\frac{2779}{15} & -\frac{2603}{15} & -\frac{28}{5} & -\frac{2779}{15} & -\frac{2603}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{56}{5} & -\frac{46}{15} & \frac{26}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{197}{4} & \frac{2603}{30} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2603}{60} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{56}{5} & -\frac{46}{15} & \frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{197}{4} & \frac{2603}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2603}{60} \end{bmatrix}. \quad (4-23)$$

我们继续使用与 (4-18) 中相同的非线性权, 可以在 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 处得到一阶和二阶空间导数, 即

$$\left(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u \right)_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} \left(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u \right)_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f} \right) \left(\partial_x^{d_1} \partial_y^{d_2} u \right)_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s, \quad d_1 + d_2 = 1, 2. \quad (4-24)$$

在计算导数的重构时, 几乎没有额外的计算代价, 因为不必重新计算非线性权。

4.3.1.3 加权型紧致埃尔米特重构的性质

我们现在已经得到了四阶加权型埃尔米特重构。接下来, 我们将验证这种重构的性质。不失一般性, 我们采用均匀网格。此时可以得到光滑因子在光滑区域的 (x_i, y_j) 处的泰勒展开:

$$\begin{aligned} \beta_s &= \xi_1 h^2 + \frac{1}{12} \xi_3 h^4 + O(h^6), \quad \beta_f = \xi_1 h^2 + \frac{1}{12} (\xi_2 + \xi_3) h^4 + O(h^6), \\ \theta &= |\beta_s - \beta_f| = \frac{1}{12} \xi_2 h^4 + O(h^6), \end{aligned} \quad (4-25)$$

其中 ξ_1 、 ξ_2 和 ξ_3 是

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2, \quad \xi_2 = 13(\partial_x^2 u)^2 + 14(\partial_x \partial_y u)^2 + 13(\partial_y^2 u)^2, \\ \xi_3 &= \partial_x u (\partial_x^3 u + \partial_x \partial_y^2 u) + \partial_y u (\partial_y^3 u + \partial_y \partial_x^2 u).\end{aligned}\quad (4-26)$$

随后, 我们根据非线性权可以得到非线性权在光滑区域内满足以下关系

$$\omega_o = \gamma_o + O(h^2), \quad o = s, f. \quad (4-27)$$

因此, 我们得到 $u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^{\text{WHC-4}}$ 是对精确值 $u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G})$ 的四阶精确近似, 如下式所示

$$\begin{aligned}u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^{\text{WHC-4}} &= u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f + \frac{\omega_f - \gamma_f}{\gamma_f} (u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f - u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s) \\ &= u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f + O(h^4) = u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+G}) + O(h^4).\end{aligned}\quad (4-28)$$

在间断附近, 我们有

$$\omega_s = 1 - O(h^4), \quad \omega_f = O(h^4), \quad (4-29)$$

也就是 ω_s 接近于 1, 使得二阶的重构起主要作用, 从而可有效防止振荡。

综上所述, 我们从理论上论证了该重构可以在光滑区域保持高阶精度, 同时可以有效防止间断附近的出现数值振荡。

4.3.1.4 八阶加权型紧致埃尔米特重构

接下来, 我们将八阶线性重构发展到加权型紧致埃尔米特重构。此时, 需要对现有的加权型紧致埃尔米特重构进行微小的修改:

1. 用从八阶重构导出的多项式 $p^e(x, y)$ 替换 $p^f(x, y)$ 。
2. 重新计算相应的光滑因子。
3. 调整 (4-18) 中的幂指数 q 为 3。

本小节中, 我们在二维情形下, 构造了四阶和八阶的加权型紧致埃尔米特重构。这些重构分别被称为 WHC-4 和 WHC-8 重构。

4.3.2 杂交选择型紧致埃尔米特重构

接下来, 我们将类似一维情形下的做法, 构造杂交选择型的紧致埃尔米特重构, 得到

$$u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^{\text{HHC-4}} = \begin{cases} u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^f, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u_{(i+\frac{1}{2}, -), j+G}^s, & \beta_f + \varepsilon \geq \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon). \end{cases} \quad (4-30)$$

这是我们的 HHC-4 重构。与 WHC-4 重构相比, 它避免了计算非线性权 ω_s 和 ω_f 。

4.3.2.1 杂交选择型紧致埃尔米特重构中的参数选择

类似一维情形下, (4-30) 中的不等式可以理解为 ϑ 和阈值 $\bar{\vartheta}$ 之间的比较。在二维情形下, 我们发现在光滑区域, ϑ 仍然接近于 1, 满足

$$\vartheta = \frac{\beta_f + \varepsilon}{\beta_s + \varepsilon} = 1 + \frac{\beta_f - \beta_s}{\beta_s + \varepsilon} = 1 + O(h), \quad (4-31)$$

在间断附近, 它是一个相对较大的数, 满足

$$\vartheta = \frac{\beta_f + \varepsilon}{\beta_s + \varepsilon} = O(h^{-2}). \quad (4-32)$$

在上面两个式子中的 h 和 h^{-2} 前方的系数在不同的具体问题中可能相差很大。具体地说, 一些弱间断附近的 ϑ 值, 可能会接近有物理振荡的光滑区域中的 ϑ 值。因此很难使用 ϑ 清楚地区分那些有物理振荡的光滑区域和接近弱间断的区域。 ϑ 和 $\bar{\vartheta}$ 的关系示意图展示在图 4.2 中, 展示了 ϑ 在光滑区域、混合区域和间断附近区域的值的关系。混合区域指一些高频振荡的光滑区域和接近弱间断的区域是混合在一起的。因此, 我们必须适当地选择 $\bar{\vartheta}$, 建议在 (5, 50) 范围内选取, 我们最推荐 $\bar{\vartheta} = 20$ 。

回顾 (4-30), 可以观察到, $\bar{\vartheta}$ 的取值越大, 高阶多项式被使用的比例就越大。我们可以据此调整 $\bar{\vartheta}$ 以获得满意的解。

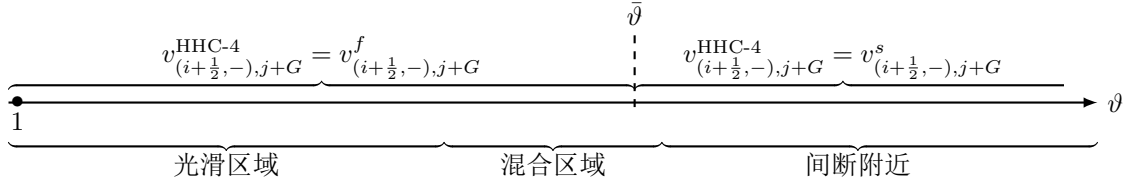


图 4.2 ϑ 和 $\bar{\vartheta}$ 的关系示意图。

4.3.2.2 八阶杂交选择型紧致埃尔米特重构

我们仍然可以将八阶线性重构发展到杂交选择型紧致埃尔米特重构, 这只需要对现有的杂交选择型紧致埃尔米特重构进行微小的修改:

1. 用从八阶重构导出的多项式 $p^e(x, y)$ 替换 $p^f(x, y)$ 。
2. 重新计算相应的光滑因子。
3. 重新选择新的阈值 $\bar{\vartheta}$ 。

此时, 推荐的阈值 $\bar{\vartheta}$ 与 $k = 2$ 的情况不同, 建议在 (50000, 500000) 范围内选取, 我们最推荐 $\bar{\vartheta} = 200000$ 。

本小节中, 我们在二维情形下, 构造了四阶和八阶的杂交选择型紧致埃尔米特重构。这些重构分别被称为 HHC-4 和 HHC-8 重构。

4.3.3 基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的紧致两步四阶格式

下面我们基于基本无振荡的紧致埃尔米特重构，设计二维基本无振荡的紧致两步四阶格式。我们使用在第 2.3 节中提出的改进的两步四阶时间推进框架，其中的重构 \mathcal{R} 采用已经得到的两个真正的二维四阶紧致埃尔米特重构 WHC-4 和 HHC-4 重构，LW 型解法器 \mathcal{G} 采用二维的 Godunov 解法器和二维弱耦合的广义黎曼问题解法器^[70]。然后，我们得到了相应的二维数值格式——WHC-4 和 HHC-4 格式。类似的，我们也可以得到二维的 WHC-8 和 HHC-8 格式。

关于二维的 WHC-4 和 HHC-4 格式，我们有以下论述。

1. HHC-4 重构比 WHC-4 重构更高效，因为其直接比较光滑因子来选取合适的模板。
2. 在间断附近，HHC-4 重构比 WHC-4 重构应对间断方面的数值性能强大，因为完全采用了 HC-2 重构。
3. 在光滑区域，HHC-4 重构比 WHC-4 重构具有更小的误差，因为只采用 HC-4 重构。
4. 另一方面，HHC-4 重构对单元平均值和导数平均值的依赖是不连续的，例如在 ϑ 接近 $\bar{\vartheta}$ 的区域，由于舍入误差的小扰动，会导致 HHC-4 重构的选择有所不同，进而导致重构结果的突变。

4.3.4 数值格式的紧致性

在本节，我们将讨论二维数值格式的紧致性。对于特定的数值格式，如果它在一个单元依赖的前一个时间层上的单元越少，那么该格式就越紧致。以我们的二维 WHC-4 格式为例。重构值 $\mathbf{u}_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n$ 、 $(\partial_x \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n$ 、 $(\partial_y \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n$ 、 $(\partial_x^2 \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n$ 、 $(\partial_x \partial_y \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n$ 和 $(\partial_y^2 \mathbf{u})_{(i+\frac{1}{2},\pm),j+G}^n$ ，在高斯点“a”的两侧，如图 4.3 (a) 所示，依赖于时间层 $t = t^n$ 的编号为 #5、#6、#8 和 #9 的四个单元。高斯点“b”也是同样的情况。因此，这个高斯点处的数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j+G}^*$ 和点值 $\hat{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n+\frac{1}{2}}$ 依赖于这四个单元。通过类似的推导可以得到，单元 I_{ij} 边界上的八个高斯点处的数值通量和单元边界值依赖于编号为 #1 到 #9 的九个单元。因此，时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ 的平均值 $\bar{\mathbf{u}}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\bar{\mathbf{w}}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 依赖于时间层 $t = t^n$ 的九个单元，这些是图 4.3 (b) 中的黄色单元。

然后，时间层 $t = t^{n+1}$ 的平均值就依赖于时间层 $t = t^n$ 的 25 个单元，这些是图 4.3 (b) 中的黄色和蓝色单元。我们的 HHC-4 格式也是一样的。作为对比，文 [1] 中的 S2O4-HWENO5 格式，它的重构是逐维的，它在时间层 $t = t^{n+1}$ 的平均值依赖于时间层 $t = t^n$ 的 81 个单元，如图 4.3 (c) 所示。如果选择文 [56] 中的真正的二维 HWENO4 重构结合两步四阶时间推进框架，时间层 $t = t^{n+1}$ 的平均值依赖于时间层 $t = t^n$ 的 69 个单元，如图 4.3 (d) 所示。所以，我们新提出的格式在二维情形下，是一个更加紧

致的格式。

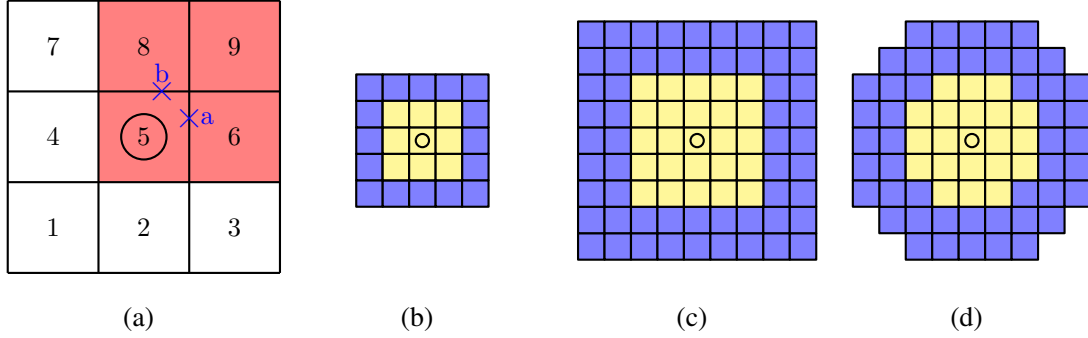


图 4.3 这是依赖区域的示意图。图中显示的是时间层 $t = t^n$ 的单元。标记 \circ 的单元是 I_{ij} 。红色单元代表数值通量 $\hat{f}_{i+\frac{1}{2},j+G}^*$ 和单元边界值 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+G}^{n+\frac{1}{2}}$ 的依赖区域。黄色单元代表时间层 $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ 中平均值 $\bar{u}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 、 $\bar{v}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\bar{w}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ 的依赖区域，黄色和蓝色单元的整体代表时间层 $t = t^{n+1}$ 的平均值的依赖区域。(a) WHC-4 和 HHC-4 格式的数值通量的依赖区域。(b) WHC-4 和 HHC-4 格式的依赖区域。(c) 文献 [1] 中的 S2O4-HWENO5 格式的依赖区域。(d) 文献 [56] 中的 S2O4-HWENO4 格式的依赖区域。

本节中，我们构造了两种真正的二维基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构，并设计了相应的基本无振荡的两步四阶格式。一共四个格式，分别记作 WHC-4、WHC-8、HHC-4 和 HHC-8 格式。其中的 WHC-4 和 HHC-4 格式就是我们所期望设计的二维四阶的基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。

4.4 数值实验

我们在二维情形下，一共得到了两种线性紧致的两步四阶格式以及四种基本无振荡的紧致两步四阶格式——HC-4、HC-8、WHC-4、WHC-8、HHC-4 和 HHC-8 格式。在这一节，我们将用一些数值算例来测试它们的性能，其中要重点测试我们设计的四阶精度格式 HC-4、WHC-4 和 HHC-4 格式。对于所有的算例，空间四阶的两步四阶格式的 CFL 数取 0.6，阈值 $\bar{\vartheta}$ 取 20；空间八阶的两步四阶格式的 CFL 数取 0.5，阈值 $\bar{\vartheta}$ 取 200000。

在这一节中，我们使用二维的双曲守恒律 (2-76) 来测试我们新设计的数值格式的性能。双曲守恒律选取了两种，分别是线性对流方程

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_y u = 0, \quad (4-33)$$

和欧拉方程组

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \partial_y \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^\top, \\ \mathbf{f} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(\rho E + p))^\top, \\ \mathbf{g} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(\rho E + p))^\top, \end{cases} \quad (4-34)$$

其中, ρ 、 u 、 v 、 E 和 p 分别是密度、速度的两个分量、比总能量和压力。热力学变量满足状态方程 $p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2))$, 其中 γ 是多方指数, 如无特别说明取 1.4。

4.4.1 空间四阶精度的两步四阶格式

算例 4.1 (二维线性对流方程的精度测试) 这个算例选择线性对流方程 (4-33) 作为模型, 初值为

$$u(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)). \quad (4-35)$$

计算区域是 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, y, t) = u(x - t, y - t, 0)$ 。

对应于时间 $t^{tem} = 1$, 采用 HC-4、WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的变量 u 的单元平均值的误差见表 4.2~4.4, 其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

表 4.2 HC-4 格式在算例 4.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	5.19648e-03		8.02901e-03	
0.6	2/20	34	3.49935e-04	3.89238	5.42281e-04	3.88811
0.6	2/40	67	2.20157e-05	3.99048	3.44617e-05	3.97597
0.6	2/80	134	1.37816e-06	3.99772	2.16291e-06	3.99395
0.6	2/160	267	8.61712e-08	3.99939	1.35337e-07	3.99835
0.6	2/320	534	5.38656e-09	3.99977	8.49669e-09	3.99351

算例 4.2 (二维欧拉方程组的线性退化的精度测试) 这个算例选择欧拉方程组 (4-34) 作为模型, 其中多方指数 γ 取 1.4, 初值为

$$\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)), \quad u(x, y, 0) = 0.7, \quad v(x, y, 0) = 0.3, \quad p(x, y, 0) = 1. \quad (4-36)$$

计算区域是 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 采取周期边界条件。这个问题是线性退化的, 它的精确解是 $\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(x - 0.7t, y - 0.3t, 0)$ 。

表 4.3 WHC-4 格式在算例 4.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	5.19648e-03		8.02901e-03	
0.6	2/20	34	3.49935e-04	3.89238	5.42281e-04	3.88811
0.6	2/40	67	2.20157e-05	3.99048	3.44617e-05	3.97597
0.6	2/80	134	1.37816e-06	3.99772	2.16294e-06	3.99393
0.6	2/160	267	8.61712e-08	3.99939	1.35403e-07	3.99767
0.6	2/320	534	5.38656e-09	3.99977	1.11618e-08	3.60061

表 4.4 HHC-4 格式在算例 4.1 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	5.19648e-03		8.02901e-03	
0.6	2/20	34	3.49935e-04	3.89238	5.42281e-04	3.88811
0.6	2/40	67	2.20157e-05	3.99048	3.44617e-05	3.97597
0.6	2/80	134	1.37816e-06	3.99772	2.16291e-06	3.99395
0.6	2/160	267	8.61712e-08	3.99939	1.35337e-07	3.99835
0.6	2/320	534	5.38656e-09	3.99977	8.49669e-09	3.99351

对应于时间 $t^{em} = 2$ ，采用 HC-4、WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的密度 ρ 的单元平均值的误差见表 4.5~4.7，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

表 4.5 HC-4 格式在算例 4.2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 2$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	48	3.83978e-03		5.93278e-03	
0.6	2/20	96	2.54382e-04	3.91595	3.93903e-04	3.91280
0.6	2/40	192	1.59363e-05	3.99661	2.49392e-05	3.98136
0.6	2/80	383	9.96327e-07	3.99955	1.56355e-06	3.99552
0.6	2/160	766	6.22742e-08	3.99991	9.78029e-08	3.99880
0.6	2/320	1532	3.89217e-09	3.99999	6.13632e-09	3.99443

表 4.6 WHC-4 格式在算例 4.2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 2$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	48	3.83978e-03		5.93239e-03	
0.6	2/20	96	2.54386e-04	3.91593	3.93865e-04	3.91284
0.6	2/40	192	1.59368e-05	3.99659	2.49373e-05	3.98132
0.6	2/80	383	9.96352e-07	3.99956	1.56354e-06	3.99541
0.6	2/160	766	6.22757e-08	3.99991	9.78061e-08	3.99875
0.6	2/320	1532	3.89229e-09	3.99998	6.13675e-09	3.99438

因为算例 4.2 是线性退化的，因而没有测试方程的非线性对数值格式精度的影响。为了进一步测试数值格式的精度，我们测试了下面这个非线性的精度测试。

算例 4.3 (二维欧拉方程组的非线性的精度测试) 这是一个源自文 [77] 的数值算例，初始条件设定为

$$\rho(x, y, 0) = \frac{1 + 0.2 \sin(0.5(x + y))}{\sqrt{6}}, \quad (4-37)$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \rho(x, y, 0), \quad (4-38)$$

$$p(x, y, 0) = \rho(x, y, 0)^\gamma. \quad (4-39)$$

计算区域是 $[0, 4\pi] \times [0, 4\pi]$ ，并且使用与算例 4.2 相同的欧拉方程组 (4-34)、均匀网格和周期边界。不过，多方指数 γ 设定为 3。首先求解关于 $\mu(x, y, t)$ 的下面这个伯格斯

表 4.7 HHC-4 格式在算例 4.2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 2$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	48	3.83978e-03		5.93278e-03	
0.6	2/20	96	2.54382e-04	3.91595	3.93903e-03	3.91280
0.6	2/40	192	1.59363e-05	3.99661	2.49392e-05	3.98136
0.6	2/80	383	9.96327e-07	3.99955	1.56355e-06	3.99552
0.6	2/160	766	6.22742e-08	3.99991	9.78029e-08	3.99880
0.6	2/320	1532	3.89217e-09	3.99999	6.13632e-09	3.99443

(Burgers) 方程的精确解

$$\partial_t \mu + \frac{1}{2} \partial_x (\mu^2) + \frac{1}{2} \partial_y (\mu^2) = 0, \quad \mu(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(0.5(x + y)), \quad (4-40)$$

然后可以得到该算例的精确解

$$\rho(x, y, t) = \frac{\mu(x, y, t)}{\sqrt{6}}, \quad u(x, y, t) = v(x, y, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \rho(x, y, t), \quad p(x, y, t) = \rho(x, y, t)^\gamma. \quad (4-41)$$

对应于时间 $t^{tem} = 1$ 的结果在表 4.8~4.10 中呈现，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。可以看到，即使存在非线性流场的情况下，所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

 表 4.8 HC-4 格式在算例 4.3 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$4\pi/150$	48	2.10901e-08		1.11949e-07	
0.6	$4\pi/200$	64	6.84370e-09	3.91221	3.00975e-08	4.56615
0.6	$4\pi/250$	80	2.80492e-09	3.99723	1.23554e-08	3.99003
0.6	$4\pi/300$	96	1.35184e-09	4.00341	5.97173e-09	3.98776
0.6	$4\pi/350$	112	7.29333e-10	4.00316	3.23427e-09	3.97815
0.6	$4\pi/400$	128	4.27356e-10	4.00290	1.91305e-09	3.93243

在验证了格式的数值精度之后，我们继续测试包含间断的算例。

算例 4.4 (二维欧拉方程组的黎曼问题 1) 这是一个文 [82] 中提出的包含四个激波相互作用的算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型。计算区域是 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，初始条件

表 4.9 WHC-4 格式在算例 4.3 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$4\pi/150$	48	2.10901e-08		1.11949e-07	
0.6	$4\pi/200$	64	6.84370e-09	3.91221	3.00975e-08	4.56615
0.6	$4\pi/250$	80	2.80492e-09	3.99723	1.23554e-08	3.99003
0.6	$4\pi/300$	96	1.35184e-09	4.00341	5.97173e-09	3.98776
0.6	$4\pi/350$	112	7.29333e-10	4.00316	3.23427e-09	3.97815
0.6	$4\pi/400$	128	4.27356e-10	4.00290	1.91305e-09	3.93243

表 4.10 HHC-4 格式在算例 4.3 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{tem} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	$4\pi/150$	48	2.10901e-08		1.11949e-07	
0.6	$4\pi/200$	64	6.84370e-09	3.91221	3.00975e-08	4.56615
0.6	$4\pi/250$	80	2.80492e-09	3.99723	1.23554e-08	3.99003
0.6	$4\pi/300$	96	1.35184e-09	4.00341	5.97173e-09	3.98776
0.6	$4\pi/350$	112	7.29333e-10	4.00316	3.23427e-09	3.97815
0.6	$4\pi/400$	128	4.27356e-10	4.00290	1.91305e-09	3.93243

是

$$(\rho, u, v, p)(x, y) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.532, 1.206, 0, 0.3), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (0.138, 1.206, 1.206, 0.029), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.532, 0, 1.206, 0.3), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases} \quad (4-42)$$

在 $t^{tem} = 0.35$ 时，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的结果如图 4.4 所示。我们观察到，这两种格式都能有效地捕捉到小结构，均表现良好。

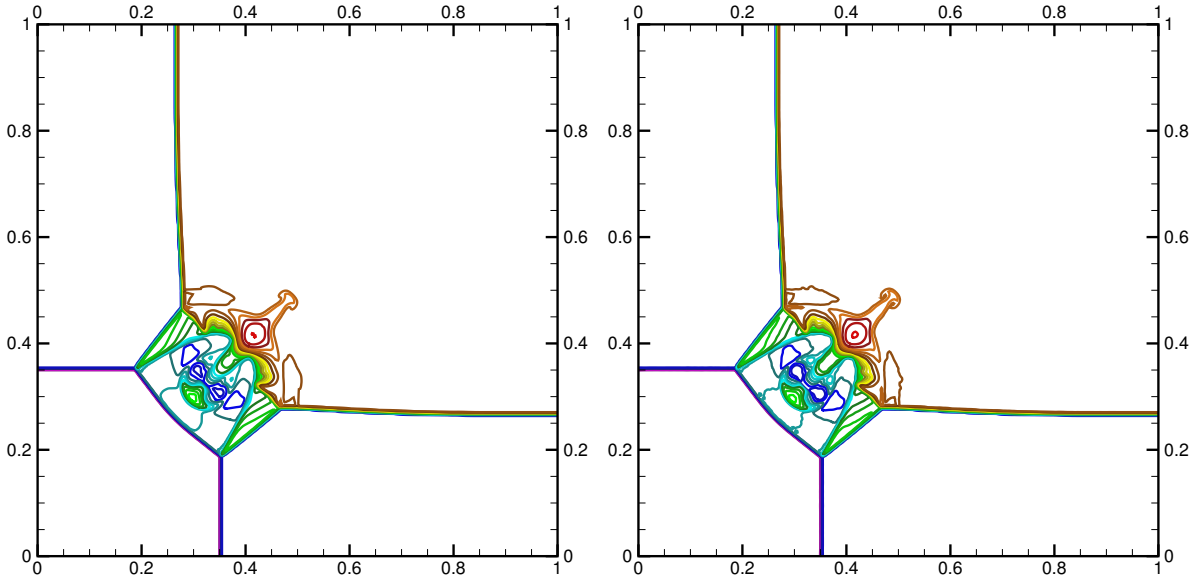


图 4.4 二维四阶格式在算例 4.4 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.35$ 时刻， 400×400 个网格的结果。左：WHC-4 格式，右：HHC-4 格式。

算例 4.5 (二维欧拉方程组的黎曼问题 2) 这是一个来自文 [82] 中的算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型，涉及到四个稀疏波的相互作用。计算区域是 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，初始条件如下

$$(\rho, u, v, p)(x, y) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.52, -0.726, 0, 0.4), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1, -0.726, -0.726, 1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.52, 0, -0.726, 0.4), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases} \quad (4-43)$$

在 $t^{tem} = 0.2$ 时，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的结果如图 4.5 所示。显然，所有这些格式都能有效地捕捉到小结构，表现良好。

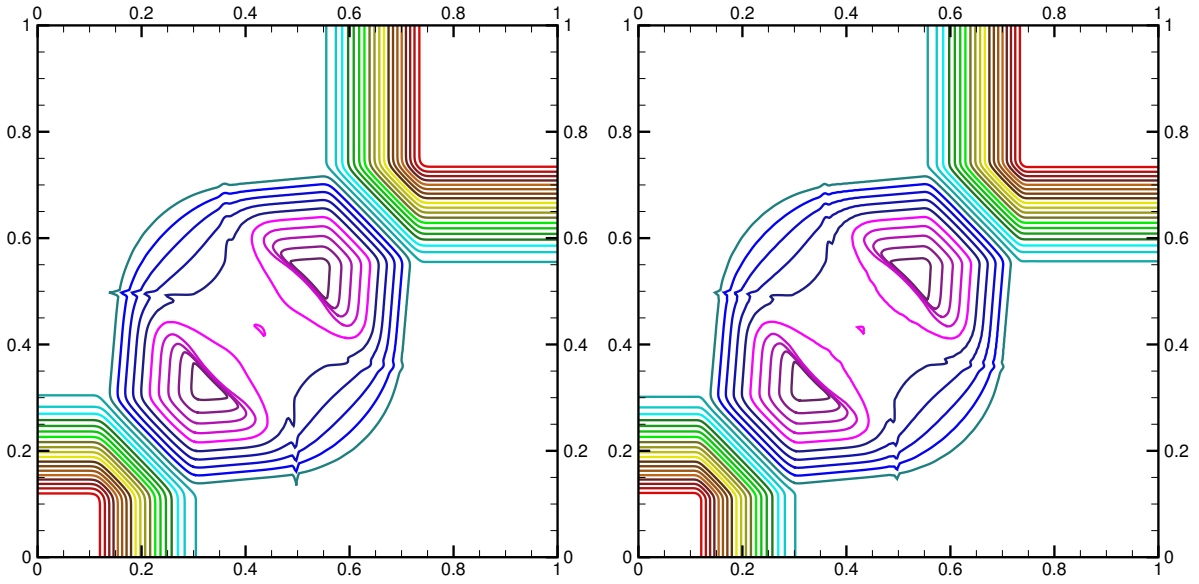


图 4.5 二维四阶格式在算例 4.5 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.2$ 时刻， 400×400 个网格的结果。左：WHC-4 格式，右：HHC-4 格式。

算例 4.6 (二维欧拉方程组的黎曼问题 3) 这是另一个来自文 [82] 中的算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型，涉及稀疏波和涡片的相互作用。计算区域也是 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，初始条件是

$$(\rho, u, v, p)(x, y) = \begin{cases} (1, 0.1, 0.1, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.52, -0.626, 0.1, 0.4), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (0.8, 0.1, 0.1, 0.4), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.52, 0.1, -0.626, 0.4), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases} \quad (4-44)$$

在 $t^{tem} = 0.3$ 时，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的结果如图 4.6 所示。我们可以看到，这两种格式都能很好地描绘出稀疏波和涡片之间的相互作用。

算例 4.7 (二维欧拉方程组的双马赫反射问题) 这是一个经典的测试算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型。一个斜向激波撞击下方的反射边界，激波后状态是 \mathbf{u}_L ，激波前状态为 \mathbf{u}_R ，它们是

$$\mathbf{u}_L = (\rho_L, u_L, v_L, p_L) = (8, 4.125\sqrt{3}, -4.125, 116.5), \quad (4-45)$$

$$\mathbf{u}_R = (\rho_R, u_R, v_R, p_R) = (1.4, 0, 0, 1). \quad (4-46)$$

马赫数为 10，计算区域为 $[0, 4] \times [0, 1]$ 。

在 $t^{tem} = 0.2$ 时，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的结果如图 4.7 所示，这里仅展示了 $[0, 3] \times [0, 1]$ 区域的结果。我们可以看到，两种格式都很好地描绘了激波与反射边界的相互作用，清晰地显示了马赫茎的位置。HHC-4 格式比 WHC-4 格式捕捉

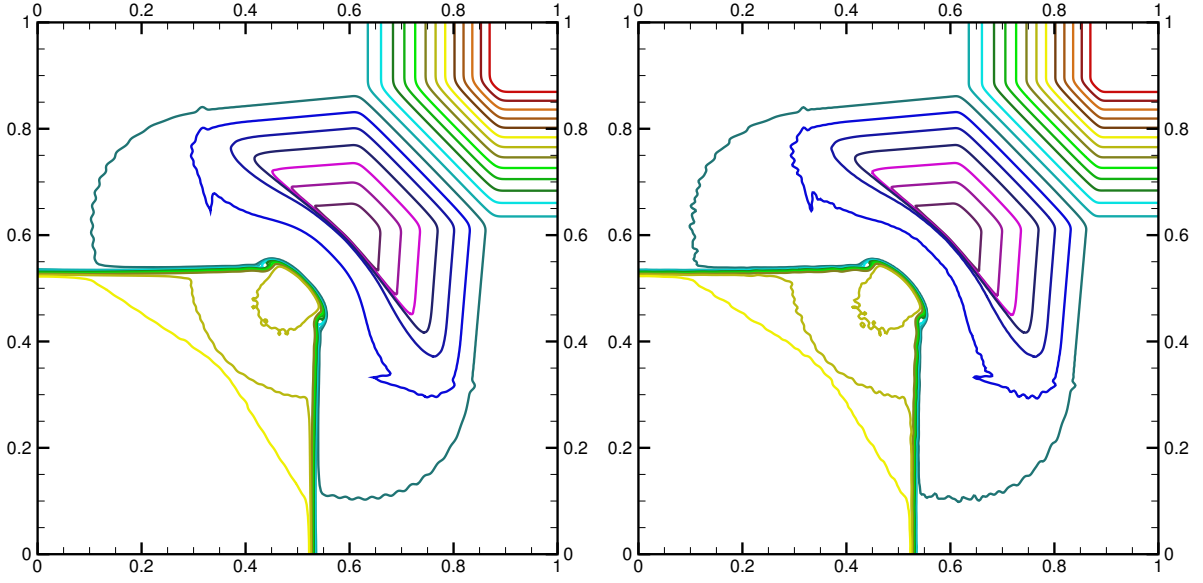


图 4.6 二维四阶格式在算例 4.6 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.3$ 时刻， 400×400 个网格的结果。左：WHC-4 格式，右：HHC-4 格式。

了更多的小涡旋结构，但也引入了一些小振荡。

算例 4.8 (二维欧拉方程组的前台阶问题) 前台阶问题是一个经典的测试算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型，描述了一个带有台阶的管道，最初填充的是均匀的马赫数为 3 的均匀流体，其状态是

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 3, 0, 1). \quad (4-47)$$

管道的壁面都是反射边界，而左侧和右侧分别作为流入和流出边界。

在台阶的角点，我们采用了与文 [80] 中第 131 和 132 页上相同的技术来增强计算结果。在 $t^{tem} = 4$ 时，采用 WHC-4 和 HHC-4 格式计算得到的结果如图 4.8 所示。很明显，两种格式都很好地区分了台阶对稳定流体的影响，捕捉了清晰的流动结构。由 HHC-4 格式引入的振荡略大于 WHC-4 格式。

4.4.2 空间八阶精度的两步四阶格式

接下来，我们将测试空间八阶精度的两步四阶格式的数值性能。

算例 4.1-2 (二维线性对流方程的精度测试) 这个算例选择线性对流方程 (4-33) 作为模型，初值为

$$u(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)). \quad (4-48)$$

计算区域是 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ，采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $u(x, y, t) = u(x - t, y - t, 0)$ 。

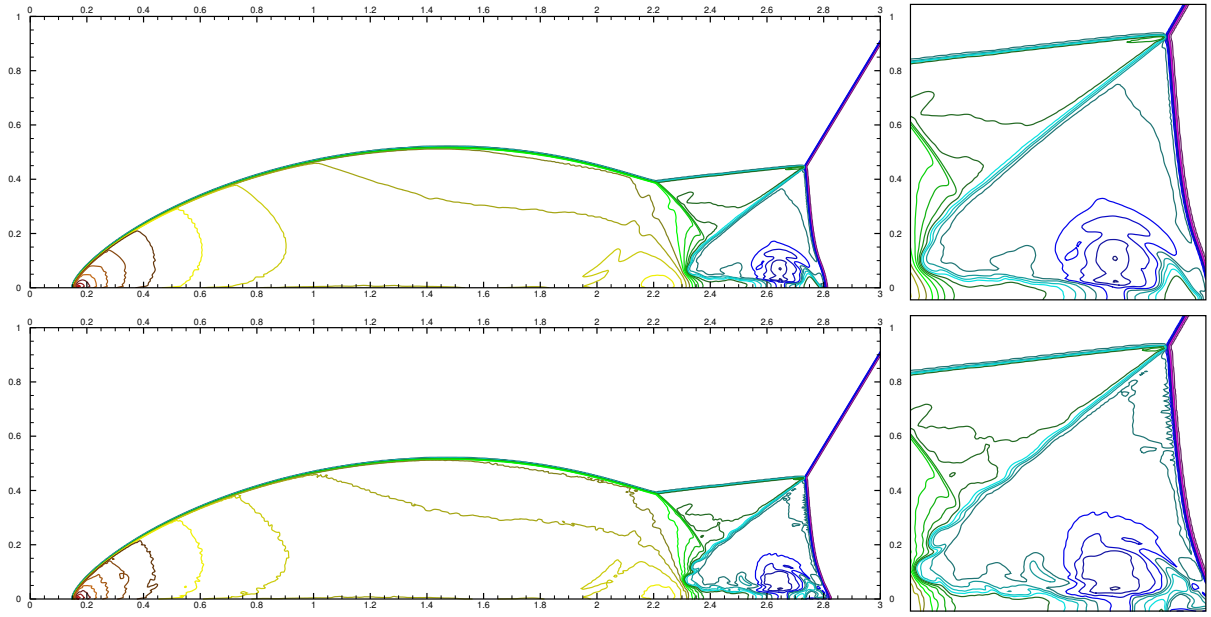


图 4.7 二维四阶格式在算例 4.7 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.2$ 时刻， 1440×360 个网格的结果。上：WHC-4 格式，下：HHC-4 格式。

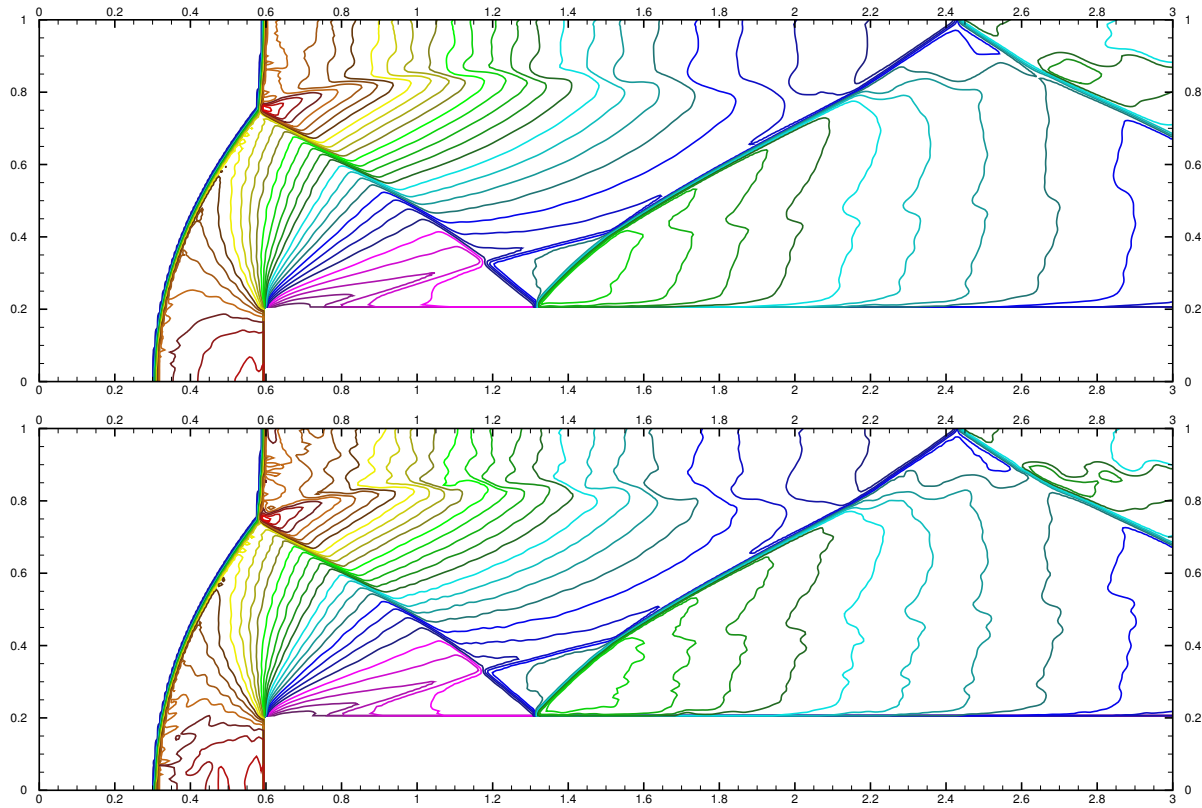


图 4.8 二维四阶格式在算例 4.8 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 4$ 时刻， 480×160 个网格的结果。上：WHC-4 格式，下：HHC-4 格式。

对应于时间 $t^{em} = 2$ ，采用 HC-8、WHC-8 和 HHC-8 格式计算得到的数值结果的单元平均值的误差见表 4.11~4.13，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。所有格式采用了注记 3.4 中的技术来得到重构算法的精度阶数。

表 4.11 HC-8 格式在算例 4.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	1.09754e-04		1.69579e-04	
0.3	2/20	67	7.20595e-07	7.25086	1.12058e-06	7.24157
0.6	2/20	34	3.50001e-06		5.48609e-06	
0.3	2/40	134	2.25297e-08	7.27939	3.52473e-08	7.28212
0.6	2/40	67	1.15587e-07		1.81903e-07	
0.4	2/60	150	6.43378e-09	7.12382	1.01024e-08	7.12935
0.6	2/60	100	1.65937e-08		2.60881e-08	
0.45	2/80	178	2.16443e-09	7.08026	3.40204e-09	7.08109

表 4.12 WHC-8 格式在算例 4.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	2.84414e-02		4.76854e-02	
0.3	2/20	67	7.20440e-07	15.2688	1.12063e-06	15.3769
0.6	2/20	34	3.50179e-06		5.62712e-06	
0.3	2/40	134	2.25250e-08	7.28042	3.51276e-08	7.32365
0.6	2/40	67	1.15580e-07		1.82027e-07	
0.4	2/60	150	6.43227e-09	7.12425	1.00712e-08	7.13866
0.6	2/60	100	1.65915e-08		2.61237e-08	
0.45	2/80	178	2.16286e-09	7.08234	3.40002e-09	7.08789

算例 4.2-2 (二维线性对流方程的精度测试) 这个算例选择欧拉方程组 (4-34) 作为模型，其中多方指数 γ 取 1.4，初值为

$$\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)), \quad u(x, y, 0) = 0.7, \quad v(x, y, 0) = 0.3, \quad p(x, y, 0) = 1. \quad (4-49)$$

计算区域是 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ，采取周期边界条件。这个问题是线性退化的，它的精确解是 $\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(x - 0.7t, y - 0.3t, 0)$ 。

表 4.13 HHC-8 格式在算例 4.1-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.6	2/10	17	1.09754e-04		1.69579e-04	
0.3	2/20	67	7.20595e-07	7.25086	1.12058e-06	7.24157
0.6	2/20	34	3.50001e-06		5.48609e-06	
0.3	2/40	134	2.25297e-08	7.27939	3.52473e-08	7.28212
0.6	2/40	67	1.15587e-07		1.81903e-07	
0.4	2/60	150	6.43378e-09	7.12382	1.01024e-08	7.12935
0.6	2/60	100	1.65937e-08		2.60881e-08	
0.45	2/80	178	2.16443e-09	7.08026	3.40204e-09	7.08109

对应于时间 $t^{em} = 2$ ，采用 HC-8、WHC-8 和 HHC-8 格式计算得到的密度 ρ 的单元平均值的误差见表 4.14~4.16，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有格式仍然采用了注记 3.4 中的技术来得到重构算法的精度阶数，并在光滑区域都达到了预期的精度阶数。

表 4.14 HC-8 格式在算例 4.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 2$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.5	2/10	58	1.66073e-05		2.56597e-05	
0.25	2/20	230	8.13500e-08	7.67346	1.25816e-07	7.67204
0.5	2/20	115	1.60981e-07		2.52335e-07	
0.25	2/40	460	6.74489e-10	7.89888	1.05654e-09	7.89984
0.5	2/40	230	4.93010e-09		7.75582e-09	
0.333	2/60	517	1.97526e-10	7.93469	3.10969e-10	7.93288
0.5	2/60	345	6.58714e-10		1.03541e-09	
0.375	2/80	613	6.73304e-11	7.92777	1.06740e-10	7.89813

算例 4.3-2 (二维欧拉方程组的非线性的精度测试) 这是一个源自文 [77] 的数值算例，

表 4.15 WHC-8 格式在算例 4.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 2$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.500	2/10	58	1.65877e-05		2.56825e-05	
0.250	2/20	230	8.08424e-08	7.68079	1.27776e-07	7.65103
0.500	2/20	115	1.60989e-07		2.50151e-07	
0.250	2/40	460	6.76413e-10	7.89484	1.08095e-09	7.85435
0.500	2/40	230	4.92854e-09		7.6186e-09	
0.333	2/60	517	1.97332e-10	7.93634	3.01551e-10	7.96470
0.500	2/60	345	6.57423e-10		9.96912e-10	
0.375	2/80	613	6.71483e-11	7.93037	1.10485e-10	7.64659

表 4.16 HHC-8 格式在算例 4.2-2 中密度的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 2$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.5	2/10	58	1.66073e-05		2.56597e-05	
0.25	2/20	230	8.13500e-08	7.67346	1.25816e-07	7.67204
0.5	2/20	115	1.60981e-07		2.52335e-07	
0.25	2/40	460	6.74489e-10	7.89888	1.05654e-09	7.89984
0.5	2/40	230	4.93010e-09		7.75582e-09	
0.333	2/60	517	1.97526e-10	7.93469	3.10969e-10	7.93288
0.5	2/60	345	6.58714e-10		1.03541e-09	
0.375	2/80	613	6.73304e-11	7.92777	1.06740e-10	7.89813

初始条件设定为

$$\rho(x, y, 0) = \frac{1 + 0.2 \sin(0.5(x + y))}{\sqrt{6}}, \quad (4-50)$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \rho(x, y, 0), \quad (4-51)$$

$$p(x, y, 0) = \rho(x, y, 0)^\gamma. \quad (4-52)$$

计算区域是 $[0, 4\pi] \times [0, 4\pi]$ ，并且使用欧拉方程组 (4-34) 作为模型、均匀网格和周期边界。不过，多方指数 γ 设定为 3。

对应于时间 $t^{em} = 1$ ，采用 HC-8、WHC-8 和 HHC-8 格式计算得到的数值结果的单元平均值的误差见表 4.17~4.19，其中的“Nstep”代表时间推进的次数。所有的格式在光滑区域都达到了预期的精度阶数。所有格式也采用了注记 3.4 中的技术来得到重构算法的精度阶数。

表 4.17 HC-8 格式在算例 4.3-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.5	$4\pi/100$	39	8.82554e-10		4.69837e-09	
0.417	$4\pi/120$	56	2.24268e-10	7.51407	1.20324e-09	7.47139
0.5	$4\pi/120$	46	3.47755e-10		1.84389e-09	
0.429	$4\pi/140$	63	1.09164e-10	7.51635	5.92636e-10	7.36325
0.5	$4\pi/140$	54	1.60710e-10		8.36642e-10	
0.438	$4\pi/160$	70	5.85239e-11	7.56503	3.17302e-10	7.26078
0.5	$4\pi/160$	62	8.29972e-11		4.17968e-10	
0.444	$4\pi/180$	78	3.40451e-11	7.56579	1.83270e-10	6.99968

算例 4.4-2 (二维欧拉方程组的黎曼问题 1) 这是一个文 [82] 中提出的包含四个激波相互作用的算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型。计算区域是 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，初始条件是

$$(\rho, u, v, p)(x, y) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.532, 1.206, 0, 0.3), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (0.138, 1.206, 1.206, 0.029), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.532, 0, 1.206, 0.3), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases} \quad (4-53)$$

表 4.18 WHC-8 格式在算例 4.3-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.5	$4\pi/100$	39	8.82554e-10		4.69837e-09	
0.417	$4\pi/120$	56	2.24268e-10	7.51407	1.20324e-09	7.47139
0.5	$4\pi/120$	46	3.47755e-10		1.84389e-09	
0.429	$4\pi/140$	63	1.09164e-10	7.51635	5.92636e-10	7.36325
0.5	$4\pi/140$	54	1.60710e-10		8.36642e-10	
0.438	$4\pi/160$	70	5.85239e-11	7.56503	3.17302e-10	7.26078
0.5	$4\pi/160$	62	8.29972e-11		4.17968e-10	
0.444	$4\pi/180$	78	3.40451e-11	7.56579	1.83270e-10	6.99968

表 4.19 HHC-8 格式在算例 4.3-2 中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。展示的是 $t^{em} = 1$ 时刻的结果。

CFL	h	Nstep	L^1 -error	L^1 -order	L^∞ -error	L^∞ -order
0.5	$4\pi/100$	39	8.82554e-10		4.69837e-09	
0.417	$4\pi/120$	56	2.24268e-10	7.51407	1.20324e-09	7.47139
0.5	$4\pi/120$	46	3.47755e-10		1.84389e-09	
0.429	$4\pi/140$	63	1.09164e-10	7.51635	5.92636e-10	7.36325
0.5	$4\pi/140$	54	1.60710e-10		8.36642e-10	
0.438	$4\pi/160$	70	5.85239e-11	7.56503	3.17302e-10	7.26078
0.5	$4\pi/160$	62	8.29972e-11		4.17968e-10	
0.444	$4\pi/180$	78	3.40451e-11	7.56579	1.83270e-10	6.99968

算例 4.5-2 (二维欧拉方程组的黎曼问题 2) 这是一个来自文 [82] 中的算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型，涉及到四个稀疏波的相互作用。计算区域是 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，初始条件如下

$$(\rho, u, v, p)(x, y) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.52, -0.726, 0, 0.4), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (1, -0.726, -0.726, 1), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.52, 0, -0.726, 0.4), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases} \quad (4-54)$$

算例 4.6-2 (二维欧拉方程组的黎曼问题 3) 这是另一个来自文 [82] 中的算例，以欧拉方程组 (4-34) 作为模型，涉及稀疏波和涡片的相互作用。计算区域也是 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，初始条件是

$$(\rho, u, v, p)(x, y) = \begin{cases} (1, 0.1, 0.1, 1), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (0.52, -0.626, 0.1, 0.4), & x < 0.5, y > 0.5, \\ (0.8, 0.1, 0.1, 0.4), & x < 0.5, y < 0.5, \\ (0.52, 0.1, -0.626, 0.4), & x > 0.5, y < 0.5. \end{cases} \quad (4-55)$$

我们测试了含有间断的算例 4.4-2~4.6-2，并得到了图 4.9~4.11 中显示的结果。两种空间八阶的两步四阶格式尽管使用的单元较少，但它们的性能可与两种四阶格式相媲美。

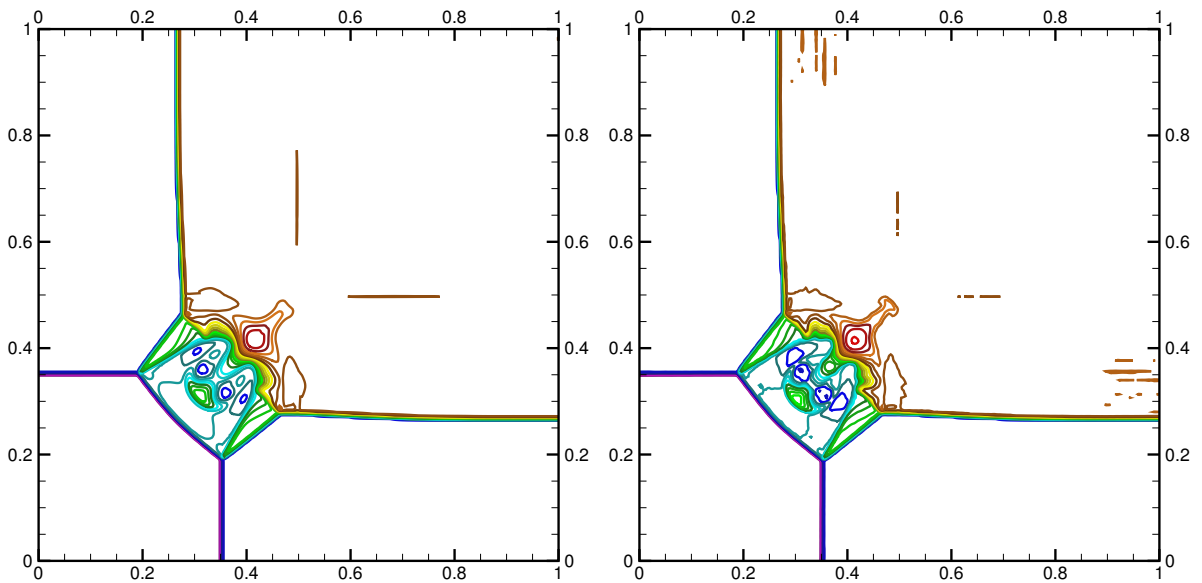


图 4.9 二维空间八阶的两步四阶格式在算例 4.4 中密度的图像。展示的是 $t^{em} = 0.35$ 时刻， 300×300 个网格的结果。左：WHC-8 格式，右：HHC-8 格式。

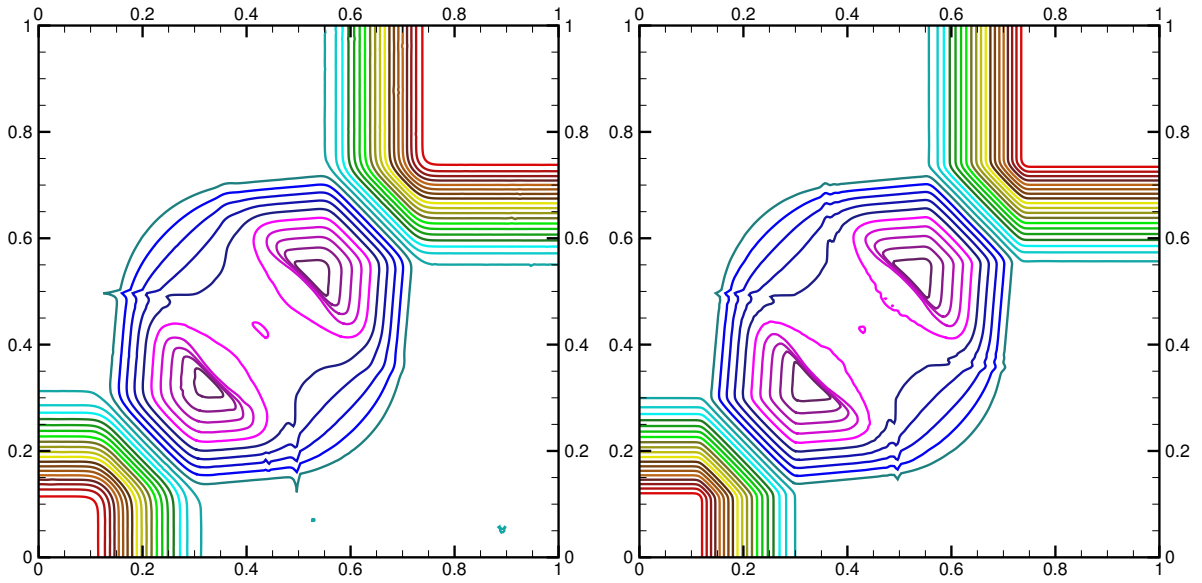


图 4.10 二维空间八阶的两步四阶格式在算例 4.5 中密度的图像。展示的是 $t^{em} = 0.2$ 时刻， 300×300 个网格的结果。左：WHC-8 格式，右：HHC-8 格式。

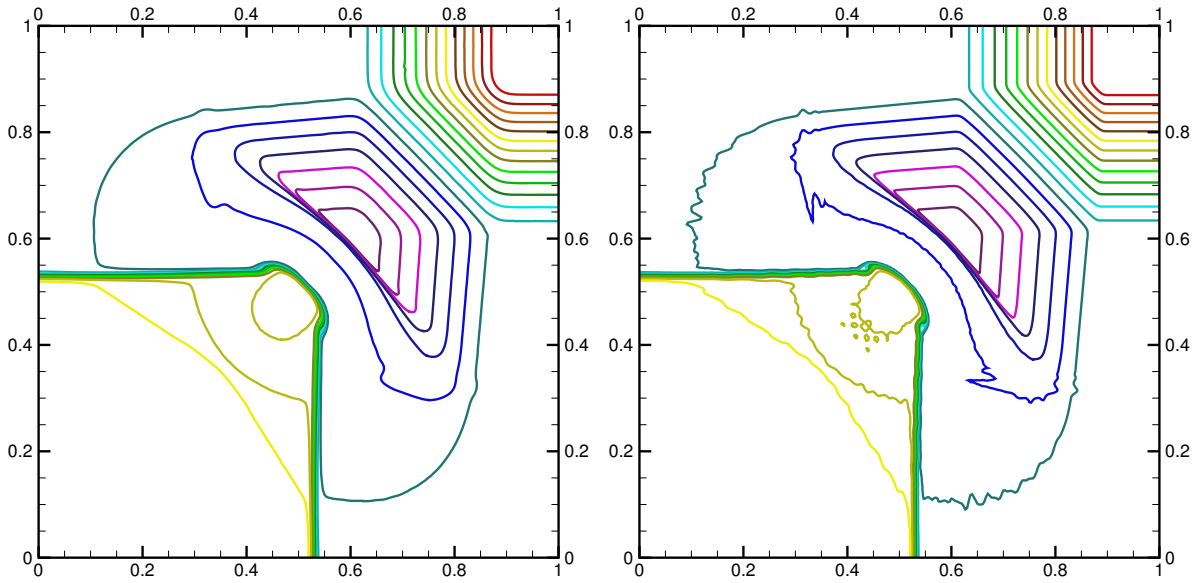


图 4.11 二维空间八阶的两步四阶格式在算例 4.6 中密度的图像。展示的是 $t^{em} = 0.3$ 时刻， 300×300 个网格的结果。左：WHC-8 格式，右：HHC-8 格式。

4.4.3 数值格式的时间效率

最后，我们来考察数值格式的时间效率，关注在相同的误差下哪种格式的计算时间（CPU 时间）更短。如图 4.12 所示，我们可以观察到二维的情形下，两种空间八阶精度的两步四阶格式都展现出了更优的时间效率。

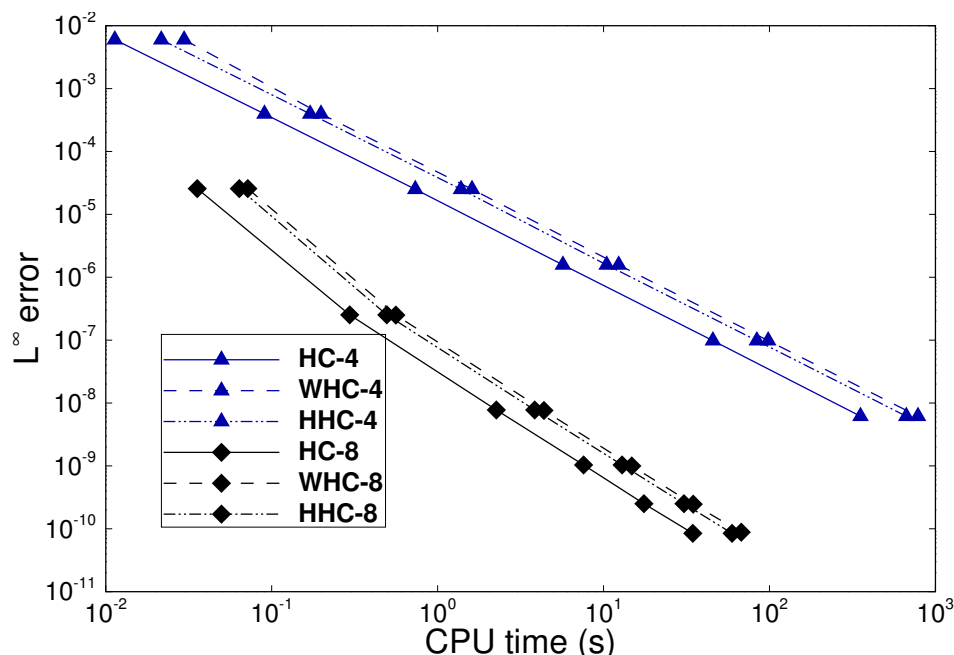


图 4.12 几种数值格式在算例 4.2-2 中 CPU 时间与密度的 L^∞ 误差之间的关系。本图中所有格式的 CFL 数均取 0.5。

4.5 小结

本章针对二维双曲守恒律，设计了基于紧致埃尔米特重构的两步四阶数值格式。具体地说，我们经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式。这些二维重构在一维问题中可以退化到我们先前构造的一维重构，从而这些二维重构可以取得类似一维重构的良好性能。然后，基于二阶和四阶的线性重构，我们构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构，并设计了相应的时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。它们均采用二维的 Godunov 解法器和二维弱耦合的广义黎曼问题解法器。我们也将格式推广到了空间八阶精度。接着，我们讨论了数值格式的紧致性，得出了结论：与文 [1] 中的二维两步四阶格式相比，我们的二维四阶精度两步四阶格式更加紧致。最后我们给出了许多算例，验证了我们的数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

第五章 总结与展望

文 [1] 中作者针对双曲守恒律，基于五阶的 HWENO 和 WENO 重构以及广义黎曼问题解法器，设计了一种两步四阶数值格式。这种数值格式有一维和二维两个版本。其中，一维两步四阶数值格式采用五阶的 HWENO 重构函数值，同时采用五阶的 WENO 重构导数值；二维两步四阶数值格式采用逐维的 HWENO5 重构函数值，然后在两个空间方向上分别使用 WENO5 和 HWENO5 重构来获得导数值。为了提高数值格式的紧致性，本文针对双曲守恒律，开展了基于紧致埃尔米特重构的显式两步四阶有限体积格式的研究。主要工作分为以下三个部分：

1. 我们在第二章中提出了改进的两步四阶时间推进框架。首先，我们在研究中发现原始的两步四阶时间推进框架的紧致性和高精度不可兼得。如果导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构，那么所得格式在光滑区域只有三阶精度。随后，我们分析了其原因，并在此基础上提出了改进的两步四阶时间推进框架。在改进的框架中导数重构采用更加紧致的埃尔米特重构时，获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。

2. 我们在第三章中设计了一维基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。首先，我们先构造了不同精度的线性埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式。然后我们做了线性稳定性分析，在空间四阶、六阶和八阶精度下，分别得到了一个线性稳定的两步四阶数值格式。接着，我们构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构，并设计了相应的时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。两种格式均被推广到了空间八阶精度。过后，我们讨论了数值格式的紧致性，得出了结论：与文 [1] 中的一维两步四阶格式相比，我们的一维四阶精度两步四阶格式更加紧致。最后我们在第 3.4 节中给了许多算例，验证了我们的一维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

3. 我们在第四章中设计了二维基于紧致埃尔米特重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。首先，我们经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致埃尔米特重构，并设计了相应的线性格式。这些二维重构在一维问题中可以退化到我们先前构造的一维重构，从而这些二维重构可以取得类似一维重构的良好性能。然后，基于二阶和四阶的线性重构，我们构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构，即加权型和杂交选择型的紧致埃尔米特重构，并设计了相应的时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式。接下来，我们将两种格式推广到了空间八阶精度，并且由于这些数值格式是真正二维的，有推广到非结构化网格的潜力。接着，我们讨论了数值格式的紧致性，得出了结论：与文 [1] 中的二维两步四阶格式相比，我们的二

维四阶精度两步四阶格式更加紧致。最后我们在第 4.4 节中给了许多算例，验证了我们的二维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

在本文研究的方向内，我们还有很多在未来的工作中值得继续努力的地方：

1. 本文完成了欧拉结构网格的数值格式的设计，我们希望能够将之推广到非结构网格，并希望能进一步推广到拉格朗日方法和任意拉格朗日-欧拉方法。

2. 本文完成了一维和二维正交网格的数值格式的设计，我们希望能够将之推广到三维正交网格情形，以及二维柱（球）坐标系、三维球坐标系等带源项的流体力学欧拉方程组情形。

3. 除此之外，我们还希望能够进一步设计具有更多物理性质的数值格式，例如：保正性和熵不等式等。

参考文献

- [1] Du Z, Li J. A Hermite WENO reconstruction for fourth order temporal accurate schemes based on the GRP solver for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 355: 385–396.
- [2] Anderson J D, Jr. Computational fluid dynamics: the basics with applications[M]. USA: McGraw-Hill International Editions, 1995.
- [3] Ben-Artzi M, Li J, Warnecke G. A direct Eulerian GRP scheme for compressible fluid flows[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 218(1): 19–43.
- [4] Li A, Li J. Lax-Wendroff solvers-based Hermite reconstruction for hyperbolic problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 447: 127915.
- [5] Li A, Li J, Cheng J, et al. High order compact Hermite reconstructions and their application in the improved two-stage fourth order time-stepping framework for hyperbolic problems: two-dimensional case[J]. Communications in Computational Physics, Accepted.
- [6] Cheng J, Shu C W. Positivity-preserving Lagrangian scheme for multi-material compressible flow[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 257: 143–168.
- [7] Cheng J, Shu C W. A high order ENO conservative Lagrangian type scheme for the compressible Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 227(2): 1567–1596.
- [8] Qi J, Tian B, Li J. A high-resolution cell-centered Lagrangian method with a vorticity-based adaptive nodal solver for two-dimensional compressible Euler equations[J]. Commun Comput Phys, 2018, 24(3): 774–790.
- [9] Noh W F. CEL: A time-dependent, two-space-dimensional, coupled Euler-Lagrange code[J]. Advances in Research and Applications, 1964.
- [10] Franck R M, Lazarus R B. Mixed Eulerian-Lagrangian method[J]. Methods in computational physics, 1964, 3: 47–67.
- [11] Trulio J G. Theory and structure of the AFTON codes[R]. Tech. Rep. AFWL-TR-66-19, Air Force Weapons Laboratory, 1966.
- [12] Hirt C W, Amsden A A, Cook J. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds[J]. Journal of computational physics, 1974, 14(3): 227–253.
- [13] Donea J, Huerta A, Ponthot J P, et al. Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods[J]. Encyclopedia of computational mechanics, 2004.

-
- [14] Boscheri W. High order direct Arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE) finite volume schemes for hyperbolic systems on unstructured meshes[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2017, 24(4): 751–801.
- [15] Boscheri W, Dumbser M. A direct Arbitrary-Lagrangian-Eulerian ADER-WENO finite volume scheme on unstructured tetrahedral meshes for conservative and non-conservative hyperbolic systems in 3D[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 275: 484–523.
- [16] Qi J, Li J. A fully discrete ALE method over untwisted time–space control volumes[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2017, 83(8): 625–641.
- [17] Wu W, Zhang A M, Liu M. A cell-centered indirect Arbitrary-Lagrangian-Eulerian discontinuous Galerkin scheme on moving unstructured triangular meshes with topological adaptability[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 438: 110368.
- [18] Loubere R, Maire P H, Shashkov M, et al. ReALE: a reconnection-based arbitrary-Lagrangian-Eulerian method[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(12): 4724–4761.
- [19] Sod G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws[J]. Journal of computational physics, 1978, 27(1): 1–31.
- [20] Zhang M, Zhao Z. A fifth-order finite difference HWENO scheme combined with limiter for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 472: 111676.
- [21] Eymard R, Gallouët T, Herbin R. Finite volume methods[M]//Handbook of numerical analysis. Elsevier, 2000, vol. 7: 713–1018.
- [22] Zhu J, Qiu J. A new fifth order finite difference WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 318: 110–121.
- [23] Cockburn B, Shu C W, Johnson C, et al. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems[M]//Quarteroni A. Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998: 150–268.
- [24] Cockburn B, Shu C W. The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws[J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1991, 25(3): 337–361.
- [25] Beam R M, Warming R F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form[J]. Journal of computational physics, 1976, 22(1): 87–110.
- [26] Mulder W A, Van Leer B. Experiments with implicit upwind methods for the Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 1985, 59(2): 232–246.
- [27] Arun K, Samantaray S. Asymptotic preserving low mach number accurate IMEX finite volume schemes for the isentropic euler equations[J]. Journal of Scientific Computing, 2020, 82: 1–32.

-
- [28] Tan M, Cheng J, Shu C W. Stability of high order finite difference and local discontinuous Galerkin schemes with explicit-implicit-null time-marching for high order dissipative and dispersive equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2022, 464: 111314.
- [29] Duchemin L, Eggers J. The explicit-implicit-null method: Removing the numerical instability of PDEs[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 263: 37–52.
- [30] Wang H, Zhang Q, Wang S, et al. Local discontinuous Galerkin methods with explicit-implicit-null time discretizations for solving nonlinear diffusion problems[J]. *Science China Mathematics*, 2020, 63: 183–204.
- [31] Seal D C, Güçlü Y, Christlieb A J. High-order multiderivative time integrators for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2014, 60: 101–140.
- [32] Toro E F. *Numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction*[M]. Berlin, Germany: Springer, 1997.
- [33] van der Houwen P. The development of Runge-Kutta methods for partial differential equations[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 1996, 20(3): 261–272.
- [34] Gottlieb S, Ketcheson D, Shu C W. *Strong stability preserving Runge-Kutta and multistep time discretizations*[M]. Singapore: World Scientific, 2011.
- [35] Lax P, Wendroff B. Systems of conservation laws[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, 13(2): 217–237.
- [36] Zwas G, Abarbanel S. Third and fourth order accurate schemes for hyperbolic equations of conservation law form[J]. *Mathematics of Computation*, 1971, 25(114): 229–236.
- [37] Qiu J, Shu C W. Finite difference WENO schemes with Lax-Wendroff-type time discretizations[J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2003, 24: 2185–2198.
- [38] Qian J, Li J, Wang S. The generalized Riemann problems for compressible fluid flows: towards high order[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 259: 358–389.
- [39] Wu K, Yang Z, Tang H. A third-order accurate direct Eulerian GRP scheme for the Euler equations in gas dynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 264: 177–208.
- [40] Christlieb A, Gottlieb S, Grant Z, et al. Explicit strong stability preserving multistage two-derivative time-stepping schemes[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, 68: 914–942.
- [41] Li J, Du Z. A two-stage fourth order time-accurate discretization for Lax-Wendroff type flow solvers I. Hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2016, 38(5): A3046–A3069.
- [42] Pan L, Xu K, Li Q, et al. An efficient and accurate two-stage fourth-order gas-kinetic scheme for the Euler and Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 326: 197–221.

- [43] 李雯莉. 双曲守恒律的两步四阶时间离散的 HWENO 格式 [D]. 厦门: 厦门大学, 2020.
- [44] Dumbser M, Balsara D S, Toro E F, et al. A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(18): 8209–8253.
- [45] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71: 231–303.
- [46] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[M]//Quarteroni A. *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998: 325–432.
- [47] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(1): 200–212.
- [48] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202–228.
- [49] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Acta Numerica*, 2020, 29: 701–762.
- [50] Hu C, Shu C W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 150(1): 97–127.
- [51] Castro M, Costa B, Don W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(5): 1766–1792.
- [52] Capdeville G. A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(5): 2977–3014.
- [53] Zhu J, Shu C W. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 375: 659–683.
- [54] Balsara D S, Garain S, Shu C W. An efficient class of WENO schemes with adaptive order[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 326: 780–804.
- [55] Qiu J, Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 193: 115–135.
- [56] Qiu J, Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method. II: Two dimensional case[J]. *Computers & Fluids*, 2005, 34: 642–663.
- [57] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework[J]. *Mathematics of Computation*, 1989, 52: 411–435.

-
- [58] Cockburn B, Hou S, Shu C W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multi-dimensional case[J]. *Mathematics of Computation*, 1990, 54: 545–581.
- [59] Shu C W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: a brief survey of several recent developments[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 316: 598–613.
- [60] Luo H, Xia Y, Li S, et al. A Hermite WENO reconstruction-based discontinuous Galerkin method for the Euler equations on tetrahedral grids[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(16): 5489–5503.
- [61] Xia Y, Luo H, Nourgaliev R. An implicit Hermite WENO reconstruction-based discontinuous Galerkin method on tetrahedral grids[J]. *Computers & Fluids*, 2014, 96: 406–421.
- [62] Godunov S K. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations[J]. *Mathematics Sbornik*, 1959, 47: 271–306.
- [63] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of computational physics*, 1981, 43(2): 357–372.
- [64] Tang H. On the sonic point glitch[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 202(2): 507–532.
- [65] Harten A, Hyman J M. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of computational Physics*, 1983, 50(2): 235–269.
- [66] Harten A, Lax P D, van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM review*, 1983, 25(1): 35–61.
- [67] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. *Shock waves*, 1994, 4: 25–34.
- [68] Ben-Artzi M, Falcovitz J. A second-order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 55(1): 1–32.
- [69] Li J, Wang Y. Thermodynamical effects and high resolution methods for compressible fluid flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 343: 340–354.
- [70] 齐进. 二维欧拉方程组广义黎曼问题数值建模及其应用 [D]. 北京: 北京师范大学, 2017.
- [71] Kress R. Numerical analysis[M]. Springer, 1998.
- [72] van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1979, 32: 101–136.
- [73] Ben-Artzi M, Falcovitz J. Generalized Riemann problems in computational fluid dynamics[M]. Cambridge University Press, 2003.

-
- [74] Zhao F, Ji X, Shyy W, et al. Compact higher-order gas-kinetic schemes with spectral-like resolution for compressible flow simulations[J]. *Advances in Aerodynamics*, 2019, 1(1): 13.
- [75] Adams N A, Shariff K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 127(1): 27–51.
- [76] Liu X, Zhang S, Zhang H, et al. A new class of central compact schemes with spectral-like resolution II: Hybrid weighted nonlinear schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 284: 133–154.
- [77] Li J, Shu C W, Qiu J. Multi-resolution HWENO schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, 446: 110653.
- [78] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II[J]. *Journal of computational physics*, 1989, 83(1): 32–78.
- [79] Titarev V A, Toro E F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 201(1): 238–260.
- [80] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54(1): 115–173.
- [81] Tang H, Liu T. A note on the conservative schemes for the Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 218(2): 451–459.
- [82] Han E, Li J, Tang H. Accuracy of the adaptive GRP scheme and the simulation of 2-D Riemann problems for compressible Euler equations[J]. *Communications in Computational Physics*, 2011, 10(3): 577–609.

攻读博士学位期间完成的论文及其他成果

（一）发表的学术论文

- [1] Ang Li, Jiequan Li. Lax-Wendroff solvers-based Hermite reconstruction for hyperbolic problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 447: 127915.
- [2] Ang Li, Jiequan Li, Juan Cheng and Chi-Wang Shu. High order compact Hermite reconstructions and their application in the improved two-stage fourth order time-stepping framework for hyperbolic problems: two-dimensional case[J]. Communications in Computational Physics, Accepted.

（二）参加学术活动情况

- [1] 2019 年 9 月 Sino-German Workshop on Advanced Numerical Methods for Hyperbolic Balance Laws
- [2] 2020 年 1 月第二届计算流体力学中高精度方法及应用研讨会
- [3] 2021 年 3 月 Hyperbolic Balance Laws: Modeling, Analysis, and Numerics
- [4] 2022 年 7 月湍流与噪声及 CFD 方法暑期高级讲习班
- [5] 2022 年 10 月多物理问题的高精度数值方法国际研讨会
- [6] 2023 年 8 月气体动理学格式讲习班 (口头报告)
- [7] 2023 年 8 月 The Fifth International Workshop on Development and Application of High-Order Numerical Methods
- [8] 2023 年 8 月京津冀 + 计算数学学术交流会 (口头报告)
- [9] 2023 年 9 月 Sino-German Workshop on Advanced Numerical Methods for Hyperbolic Balance Laws

致 谢

在论文即将完成之际，回想起这五年的博士研究生期间，发生了诸多幸运与不幸。想起二十一年的学生时代将随着博士毕业而彻底结束，感慨万千，却欲说还休。

这五年间不幸有三，其一是最爱我的爷爷去世了，2019年9月初。除了在高中的三年需要住校以及在外地读大学的四年，爷爷几乎始终陪在我身边，他总是能容忍我的任性、总是能容忍我的顽皮，不停地给我讲他的军旅往事、给我讲他的工厂轶闻、给我讲数学物理、给我讲天文地理、给我讲政治历史、给我讲人生的道理，即使上了一天班、即使刚和奶奶吵架、即使身患重病。然而，他永远的离开了。我仍记得，和我讲过的最后一句话：“去北京读书吧，安慰爷爷一句：‘死亡没什么大不了的，爷爷，你勇敢一点。’”现在好想和爷爷讲一句：“我博士要毕业了，你看我厉害不，……，我再也不是小孩子了，之前我太任性了，我太顽皮了，……，我好想让你看我成家立业的样子。”特在此思念您。

其二是我敬爱的李老师去世了，2023年5月中旬。最初得知消息是在微信群中，师兄说李老师走了，我起初以为是从首师大离开了，然后觉得师兄在开玩笑，始终不敢相信李老师竟然英年早逝；直到遗体告别仪式，我才肯接受这个事实。李老师在学术上学识渊博、严谨治学、言传身教，曾为了帮助我理解掌握广义黎曼问题解法器，让我连续数周向他报告同样的文章，直到确认我真的理解清楚了为止。在撰写文章时，不厌其烦的阅读不才写的草稿，给出中肯的意见，帮助修改润色文章的措辞，力求严谨、细致。在生活上，也经常关心晚辈的生活，教会晚辈人生的道理。哎，天妒英才，您无私的教诲我竟无以为报。特在此怀念您。

其三是三年的新冠疫情，是为此奉献的广大人民。2020年年初，本以为是学生时代习以为常的寒假，结果9月初才得以返校。面对未知的病毒爆发，除了尽力帮助自己和身边家人老师朋友、用科学指导行动尽可能保证自己和大家的安全，我无能为力。多亏广大群众的努力，尤其是医疗工作者以及社区工作人员等人全力保障医疗和生存物资的供应。在此感谢这些伟大的人们。

正是不幸遇的多了，这些年间的幸运才变得弥足珍贵。首先要感谢成老师的知遇之恩。最初，在2018年春夏之交，在南航听了成老师对九所的宣讲，我便结下了与成老师的缘分，也结下了与九所的五年之缘。于同年夏天，南京大学主办的一个学术会议上，有幸和成老师交流了研究生期间的规划。在李老师换单位之后，又是成老师接收了我。我很清楚接替其他老师培养一个进行了一半科研训练的学生很难，要花费更多的精力和耐心。正是我很清楚这一点，我对成老师的感激无以言表。成老师深耕计算数学领域多年，有着丰富的前沿视野和多年的科研经验，十分感谢成老师帮助我在领域内开拓视野。在学术文章和毕业论文撰写过程中，提出了许多建

设性意见，投入了超多的心血和精力，帮助我不断完善论文，才使得不才的论文写成如今的模样。在生活上，成老师关照有加，经常投喂水果、零食，会关心我生活上的琐事，关心我的状态，关心我找工作等等。总之，十分感谢成老师在各个方面的帮助！我将要竭尽全力报答您的恩情。

第二个幸运是舒老师愿意指导不才的工作，在数值实验的设计和文章撰写上提供了不可估量的帮助，对此我十分感谢！早在大四的时候，就听闻舒老师的大名，在入门 CFD 时学习的 WENO 格式便是舒老师 1997 年的一份科技报告。何尝敢想能和舒老师合作发表论文。

第三个幸运是临近毕业，前两篇文章顺利接收了。我要感谢两篇文章的编辑和给予我反馈意见的同行专家！他们的宝贵意见和建议对我的学术文章和毕业论文起到了很大的促进作用。

一路走来，还有许多，不再一一列举。在这里感谢南航的王春武、朱君和尹晨老师等，对诸位老师的帮忙和关怀表示诚挚的谢意！感谢帮助过我的师兄、师姐、师弟、师妹、朋友、室友和同学们，感谢你们在生活上的照顾，在学习上的帮助。我也要感谢参考文献中的作者们，透过他们的研究文章，使我对研究课题有了充分的认识。我还要谢谢论文评阅老师和答辩委员会成员们的辛苦工作。

最后，衷心感谢我的家人们，真是在他们的鼓励和支持下我才得以顺利完成博士期间的研究以及此论文。