博士学位论文答辩

基于紧致埃尔米特重构的双曲守恒律两步四阶有限体积格式

李昂

中国工程物理研究院研究生院
北京应用物理与计算数学研究所

指导教师：成娟 研究员，$\boxed{\text{李杰权}}$ 教授

2024 年 5 月 23 日

研究背景

- 流体力学在**航空航天工程**、**天气预报**、**激光聚变**和**武器物理**等领域有着重要的应用。
- 一个经典模型——可压缩 Euler 方程组可以表示为：

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{v} \\ \rho E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \otimes (\rho \boldsymbol{v}) + p\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{v}(\rho E + p) \end{bmatrix} = 0.$$

其中，ρ 是密度，$\boldsymbol{v}$ 是速度，E 是比能量，比能量满足 $E = e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$，$e$ 是比内能，$\otimes$ 是张量积，p 是压强，$\boldsymbol{I}$ 是单位向量，ρ、e 和 p 等热力学变量之间满足状态方程，例如完全气体状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho e.$$

- 在数学上，这样的方程组是双曲守恒律

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = 0.$$

研究背景

- 流体力学在**航空航天工程**、**天气预报**、**激光聚变**和**武器物理**等领域有着重要的应用。

- 一个经典模型——可压缩 Euler 方程组可以表示为：

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{v} \\ \rho E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \otimes (\rho \boldsymbol{v}) + p \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{v}(\rho E + p) \end{bmatrix} = 0.$$

  其中，ρ 是密度，$\boldsymbol{v}$ 是速度，E 是比能量，比能量满足 $E = e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$，$e$ 是比内能，$\otimes$ 是张量积，p 是压强，$\boldsymbol{I}$ 是单位向量，ρ、e 和 p 等热力学变量之间满足状态方程，例如完全气体状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho e.$$

- 在数学上，这样的方程组是双曲守恒律

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = 0.$$

研究背景

- 流体力学在**航空航天工程**、**天气预报**、**激光聚变**和**武器物理**等领域有着重要的应用。
- 一个经典模型——可压缩 Euler 方程组可以表示为：

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{v} \\ \rho E \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \otimes (\rho \boldsymbol{v}) + p \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{v}(\rho E + p) \end{bmatrix} = 0.$$

  其中，ρ 是密度，$\boldsymbol{v}$ 是速度，E 是比能量，比能量满足 $E = e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$，$e$ 是比内能，$\otimes$ 是张量积，p 是压强，$\boldsymbol{I}$ 是单位向量，ρ、e 和 p 等热力学变量之间满足状态方程，例如完全气体状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho e.$$

- 在数学上，这样的方程组是双曲守恒律

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = 0.$$

研究背景

- 计算流体力学用数值方法模拟流体流动，其**精度**和**效率**是当前学术界关注的热点问题。精度要求高时，**高精度格式**可以提高计算效率。
- 为了更准确地捕捉流场中的细节，例如湍流和激波，需要开发**高分辨率**的格式，这可以通过构造更加**紧致**的高精度格式来实现。另外，在并行计算中，使用更加**紧致**的格式可以有效地减少计算节点之间的通信开销，更加高效。
- 因此，我们致力于研究求解双曲守恒律的**高精度紧致**数值格式，具体地说，研究基于欧拉框架的显式有限体积格式。

研究背景

- 计算流体力学用数值方法模拟流体流动，其**精度**和**效率**是当前学术界关注的热点问题。精度要求高时，**高精度格式**可以提高计算效率。
- 为了更准确地捕捉流场中的细节，例如湍流和激波，需要开发**高分辨率**的格式，这可以通过构造更加**紧致**的高精度格式来实现。另外，在并行计算中，使用更加**紧致**的格式可以有效地减少计算节点之间的通信开销，更加高效。
- 因此，我们致力于研究求解双曲守恒律的**高精度紧致**数值格式，具体地说，研究基于欧拉框架的显式有限体积格式。

研究背景

- 计算流体力学用数值方法模拟流体流动，其**精度**和**效率**是当前学术界关注的热点问题。精度要求高时，**高精度格式**可以提高计算效率。
- 为了更准确地捕捉流场中的细节，例如湍流和激波，需要开发**高分辨率**的格式，这可以通过构造更加**紧致**的高精度格式来实现。另外，在并行计算中，使用更加**紧致**的格式可以有效地减少计算节点之间的通信开销，更加高效。
- 因此，我们致力于研究求解双曲守恒律的**高精度紧致**数值格式，具体地说，研究基于欧拉框架的显式有限体积格式。

基于欧拉框架的显式有限体积格式

- 对于一维情形下的双曲守恒律，有半离散形式
$$\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}_i(t)}{dt} = \hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i) \triangleq -\frac{1}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$
- 采用某个**时间推进框架**可以得到全离散形式，例如采用欧拉向前时间推进框架：
$$\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau\hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i^n) = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$
- 时间推进框架中的数值通量 $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ 需要由适当的**解法器**精确地（近似地）求解黎曼问题得到，例如采用 Godunov 解法器：
$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}).$$
- 其中，单元边界近似值 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}$ 和 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}$ 通过**重构**获得的，例如可以用分片常数重构：
$$\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-} = \bar{\boldsymbol{u}}_i.$$

基于欧拉框架的显式有限体积格式

- 对于一维情形下的双曲守恒律，有半离散形式

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}_i(t)}{dt} = \hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i) \triangleq -\frac{1}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$

- 采用某个**时间推进框架**可以得到全离散形式，例如采用欧拉向前时间推进框架：

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau\hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i^n) = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$

- 时间推进框架中的数值通量 $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ 需要由适当的**解法器**精确地（近似地）求解黎曼问题得到，例如采用 Godunov 解法器：

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}).$$

- 其中，单元边界近似值 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}$ 和 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}$ 通过**重构**获得的，例如可以用分片常数重构：

$$\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-} = \bar{\boldsymbol{u}}_i.$$

基于欧拉框架的显式有限体积格式

- 对于一维情形下的双曲守恒律，有半离散形式

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}_i(t)}{dt} = \hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i) \triangleq -\frac{1}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$

- 采用某个**时间推进框架**可以得到全离散形式，例如采用欧拉向前时间推进框架：

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau\hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i^n) = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$

- 时间推进框架中的数值通量 $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ 需要由适当的**解法器**精确地（近似地）求解黎曼问题得到，例如采用 Godunov 解法器：

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}).$$

- 其中，单元边界近似值 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}$ 和 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}$ 通过**重构**获得的，例如可以用分片常数重构：

$$\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-} = \bar{\boldsymbol{u}}_i.$$

基于欧拉框架的显式有限体积格式

- 对于一维情形下的双曲守恒律，有半离散形式

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{u}}_i(t)}{dt} = \hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i) \triangleq -\frac{1}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$

- 采用某个**时间推进框架**可以得到全离散形式，例如采用欧拉向前时间推进框架：

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau\hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i^n) = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) - \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i-\frac{1}{2},+})\right).$$

- 时间推进框架中的数值通量 $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+})$ 需要由适当的**解法器**精确地（近似地）求解黎曼问题得到，例如采用 Godunov 解法器：

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}, \boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}).$$

- 其中，单元边界近似值 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-}$ 和 $\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},+}$ 通过**重构**获得的，例如可以用分片常数重构：

$$\boldsymbol{u}_{i+\frac{1}{2},-} = \bar{\boldsymbol{u}}_i.$$

研究现状-时间推进框架

- 欧拉向前方法

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\boldsymbol{u}_i^n).$$

- 龙格库塔 (RK) 方法 (van der Houwen, 1996)

  强稳定保持的龙格库塔 (SSP-RK) 方法 (Gottlieb, Ketcheson, and Shu, 2011)

- Lax-Wendroff (LW) 方法 (P. Lax and Wendroff, 1960; Zwas and Abarbanel, 1971)

- 多步多导数 (MSMD) 方法 (Seal, Güçlü, and A. J. Christlieb, 2014; A. Christlieb et al., 2016)

  两步四阶方法 (Jiequan Li and Du, 2016; Pan et al., 2016)

研究现状-时间推进框架

- 欧拉向前方法

- 龙格库塔 (RK) 方法 (van der Houwen, 1996)

  强稳定保持的龙格库塔 (SSP-RK) 方法 (Gottlieb, Ketcheson, and Shu, 2011)

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{u}}_i^{(1)} &= \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^n) \\
\bar{\boldsymbol{u}}_i^{(2)} &= \frac{3}{4}\bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \frac{1}{4}\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{(1)} + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{(1)})\right) \\
\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} &= \frac{1}{3}\bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \frac{2}{3}\left(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{(2)} + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{(2)})\right).
\end{aligned}
$$

- Lax-Wendroff (LW) 方法 (P. Lax and Wendroff, 1960; Zwas and Abarbanel, 1971)

- 多步多导数 (MSMD) 方法 (Seal, Güçlü, and A. J. Christlieb, 2014; A. Christlieb et al., 2016)

  两步四阶方法 (Jiequan Li and Du, 2016; Pan et al., 2016)

研究现状-时间推进框架

- 欧拉向前方法
- 龙格库塔 (RK) 方法 (van der Houwen, 1996)
  强稳定保持的龙格库塔 (SSP-RK) 方法 (Gottlieb, Ketcheson, and Shu, 2011)
- Lax-Wendroff (LW) 方法 (P. Lax and Wendroff, 1960; Zwas and Abarbanel, 1971)

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}}_i^n + \tau \hat{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^n) + \frac{\tau^2}{2}\widehat{\partial_t \mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^n) + \frac{\tau^3}{6}\widehat{\partial_t^2 \mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^n).$$

- 多步多导数 (MSMD) 方法 (Seal, Güçlü, and A. J. Christlieb, 2014; A. Christlieb et al., 2016)
  两步四阶方法 (Jiequan Li and Du, 2016; Pan et al., 2016)

研究现状-时间推进框架

- 欧拉向前方法
- 龙格库塔 (RK) 方法 (van der Houwen, 1996)
  强稳定保持的龙格库塔 (SSP-RK) 方法 (Gottlieb, Ketcheson, and Shu, 2011)
- Lax-Wendroff (LW) 方法 (P. Lax and Wendroff, 1960; Zwas and Abarbanel, 1971)
- 多步多导数 (MSMD) 方法 (Seal, Güçlü, and A. J. Christlieb, 2014; A. Christlieb et al., 2016)
  两步四阶方法 (Jiequan Li and Du, 2016; Pan et al., 2016)

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{u}}_i^{*} &= \bar{\boldsymbol{u}}_i^{n} + \frac{\tau}{2}\hat{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n}) + \frac{\tau^2}{8}\widehat{\partial_t\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n}) \\
\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n+1} &= \bar{\boldsymbol{u}}_i^{n} + \tau\hat{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n}) + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{1}{3}\widehat{\partial_t\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{n}) + \frac{2}{3}\widehat{\partial_t\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{u}}_i^{*})\right).
\end{aligned}
$$

研究现状-重构算法

- 基本无振荡 (ENO) 重构 (A. Harten et al., 1987)

  加权基本无振荡 (WENO) 重构 (Shu, 1998; X.-D. Liu, Osher, and Chan, 1994; Jiang and Shu, 1996; Shu, 2020; Hu and Shu, 1999)

  WENO-Z 重构 (Castro, Costa, and Don, 2011)

  中心型 WENO(CWENO) 重构 (Capdeville, 2008; Zhu and Shu, 2018)

  阶数自适应 WENO(WENO-AO) 重构 (Balsara, Garain, and Shu, 2016)

- 埃尔米特加权基本无振荡 (HWENO) 重构 (Qiu and Shu, 2004; Qiu and Shu, 2005)

- DG 方法的空间离散也可以视为重构 (Cockburn and Shu, 1989; Cockburn, Hou, and Shu, 1990; Shu, 2016)

- $P_N P_M$ 方法 (Dumbser et al., 2008; Luo et al., 2012; Xia, Luo, and Nourgaliev, 2014)

研究现状-重构算法

- 基本无振荡 (ENO) 重构 (A. Harten et al., 1987)

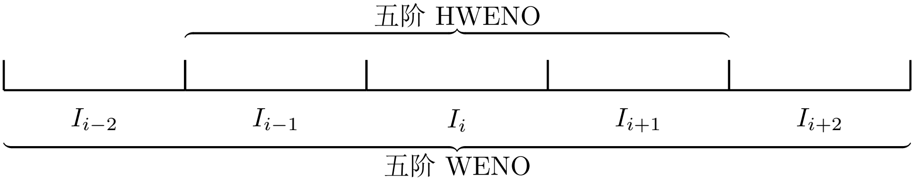
  加权基本无振荡 (WENO) 重构 (Shu, 1998; X.-D. Liu, Osher, and Chan, 1994; Jiang and Shu, 1996; Shu, 2020; Hu and Shu, 1999)

  WENO-Z 重构 (Castro, Costa, and Don, 2011)

  中心型 WENO(CWENO) 重构 (Capdeville, 2008; Zhu and Shu, 2018)

  阶数自适应 WENO(WENO-AO) 重构 (Balsara, Garain, and Shu, 2016)

- 埃尔米特加权基本无振荡 (HWENO) 重构 (Qiu and Shu, 2004; Qiu and Shu, 2005)



研究现状-重构算法

- 基本无振荡 (ENO) 重构 (A. Harten et al., 1987)

  加权基本无振荡 (WENO) 重构 (Shu, 1998; X.-D. Liu, Osher, and Chan, 1994; Jiang and Shu, 1996; Shu, 2020; Hu and Shu, 1999)

  WENO-Z 重构 (Castro, Costa, and Don, 2011)

  中心型 WENO(CWENO) 重构 (Capdeville, 2008; Zhu and Shu, 2018)

  阶数自适应 WENO(WENO-AO) 重构 (Balsara, Garain, and Shu, 2016)

- 埃尔米特加权基本无振荡 (HWENO) 重构 (Qiu and Shu, 2004; Qiu and Shu, 2005)

- DG 方法的空间离散也可以视为重构 (Cockburn and Shu, 1989; Cockburn, Hou, and Shu, 1990; Shu, 2016)

- $P_N P_M$ 方法 (Dumbser et al., 2008; Luo et al., 2012; Xia, Luo, and Nourgaliev, 2014)

研究现状-重构算法

- 基本无振荡 (ENO) 重构 (A. Harten et al., 1987)

  加权基本无振荡 (WENO) 重构 (Shu, 1998; X.-D. Liu, Osher, and Chan, 1994; Jiang and Shu, 1996; Shu, 2020; Hu and Shu, 1999)

  WENO-Z 重构 (Castro, Costa, and Don, 2011)

  中心型 WENO(CWENO) 重构 (Capdeville, 2008; Zhu and Shu, 2018)

  阶数自适应 WENO(WENO-AO) 重构 (Balsara, Garain, and Shu, 2016)

- 埃尔米特加权基本无振荡 (HWENO) 重构 (Qiu and Shu, 2004; Qiu and Shu, 2005)

- DG 方法的空间离散也可以视为重构 (Cockburn and Shu, 1989; Cockburn, Hou, and Shu, 1990; Shu, 2016)

- $P_N P_M$ 方法 (Dumbser et al., 2008; Luo et al., 2012; Xia, Luo, and Nourgaliev, 2014)

- Godunov 解法器 (Godunov, 1959)
- 局部线性化的 Roe 解法器 (Roe, 1981)
  双激波近似的 HLL 解法器 (Amiram Harten, P. D. Lax, and Leer, 1983)
  双激波单接触间断近似的 HLLC 解法器 (Toro, Spruce, and Speares, 1994)
- 广义黎曼问题 (GRP) 解法器 (Ben-Artzi and Falcovitz, 1984)
  推广到欧拉框架 (Ben-Artzi, Jiequan Li, and Warnecke, 2006)
  推广到任意气体状态方程 (Jiequan Li and Wang, 2017)
  推广到二维 (齐进, 2017)

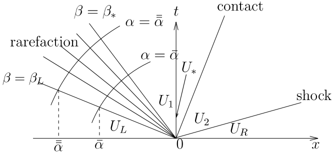


图 1: 黎曼问题

研究现状-解法器

- Godunov 解法器 (Godunov, 1959)
- 局部线性化的 Roe 解法器 (Roe, 1981)

  双激波近似的 HLL 解法器 (Amiram Harten, P. D. Lax, and Leer, 1983)

  双激波单接触间断近似的 HLLC 解法器 (Toro, Spruce, and Speares, 1994)

- 广义黎曼问题 (GRP) 解法器 (Ben-Artzi and Falcovitz, 1984)

  推广到欧拉框架 (Ben-Artzi, Jiequan Li, and Warnecke, 2006)

  推广到任意气体状态方程 (Jiequan Li and Wang, 2017)

  推广到二维 (齐进, 2017)

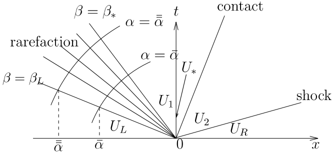


图 1: 黎曼问题

研究现状-解法器

- Godunov 解法器 (Godunov, 1959)
- 局部线性化的 Roe 解法器 (Roe, 1981)

  双激波近似的 HLL 解法器 (Amiram Harten, P. D. Lax, and Leer, 1983)

  双激波单接触间断近似的 HLLC 解法器 (Toro, Spruce, and Speares, 1994)
- 广义黎曼问题 (GRP) 解法器 (Ben-Artzi and Falcovitz, 1984)

  推广到欧拉框架 (Ben-Artzi, Jiequan Li, and Warnecke, 2006)

  推广到任意气体状态方程 (Jiequan Li and Wang, 2017)

  推广到二维 (齐进, 2017)

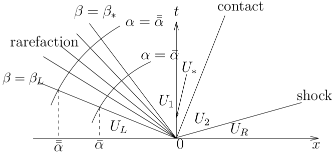


图 1: 黎曼问题

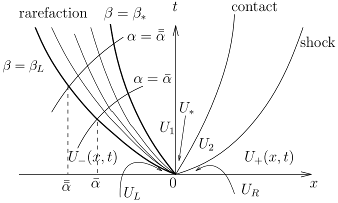


图 2: 广义黎曼问题

研究动机

- 先前工作 (Du and Jiequan Li, 2018) 中针对双曲守恒律，设计了一种两步四阶数值格式。基于 HWENO5 和 WENO5 重构以及 GRP 解法器。其中二维采用逐维重构。
- 为了进一步提高数值格式的**紧致性**，我们要研究求解双曲守恒律的基于紧致 Hermite 重构的显式两步四阶有限体积格式，即函数值和导数值**均使用 Hermite 重构**获得。同时希望**时空均是四阶精度的**。此外在二维情形下，我们要构造一个真正的二维重构，并设计相应的两步四阶格式。

研究动机

- 先前工作 (Du and Jiequan Li, 2018) 中针对双曲守恒律，设计了一种两步四阶数值格式。基于 HWENO5 和 WENO5 重构以及 GRP 解法器。其中二维采用逐维重构。
- 为了进一步提高数值格式的**紧致性**，我们要研究求解双曲守恒律的基于紧致 Hermite 重构的显式两步四阶有限体积格式，即函数值和导数值**均使用 Hermite 重构**获得。同时希望**时空均是四阶精度的**。此外在二维情形下，我们要构造一个真正的二维重构，并设计相应的两步四阶格式。

原始的两步四阶时间推进框架

以线性对流方程为例：

- 第一步

$$\bar{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{2h}\left(\hat{f}^*_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}^*_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\left(\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

其中，

$$\hat{f}^*_{i+\frac{1}{2}} = f\left(u^{n,+}_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\tau}{4}(\partial_t f)^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} = u^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{4}(\partial_t u)^{n,+}_{i+\frac{1}{2}},$$

$$\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} = u^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}(\partial_t u)^{n,+}_{i+\frac{1}{2}}.$$

- 第二步

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\hat{f}^{4th}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}^{4th}_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad \bar{v}_i^{n+1} = \frac{1}{h}\left(\hat{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{u}^{n+1}_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

原始的两步四阶时间推进框架

以线性对流方程为例：

- 第一步

$$\bar{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{2h}\left(\hat{f}^*_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}^*_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad \bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\left(\hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{u}^{n+\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

- 第二步

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\tau}{h}\left(\hat{f}^{4th}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}^{4th}_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad \bar{v}_i^{n+1} = \frac{1}{h}\left(\hat{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{u}^{n+1}_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

其中，

$$\hat{f}^{4th}_{i+\frac{1}{2}} = f\left(u^{n,+}_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\tau}{6}\left(\partial_t f\right)^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{3}\left(\partial_t f\right)^{n+\frac{1}{2},+}_{i+\frac{1}{2}} = u^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{6}\left(\partial_t u\right)^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{3}\left(\partial_t u\right)^{n+\frac{1}{2},+}_{i+\frac{1}{2}},$$

$$\hat{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2}} = u^{n,+}_{i+\frac{1}{2}} + \tau\left(\partial_t u\right)^{n+\frac{1}{2},+}_{i+\frac{1}{2}}.$$

需要改进的原因

- 为了设计基于紧致 Hermite 重构的显式两步四阶有限体积格式，首先构造**恰好四阶精度**的紧致 Hermite 重构，再使用原始的两步四阶框架设计相应的格式。

- 然而，我们发现若函数值和导数值均使用（新构造的）Hermite 重构，原始的两步四阶框架出现了**掉阶**。

表 1: 一维线性对流方程的精度测试中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	34	1.38401e-05		2.17751e-05	
0.6	2/80	67	1.73251e-06	**2.99791**	2.72250e-06	**2.99967**
0.6	2/160	134	2.17508e-07	**2.99372**	3.41695e-07	**2.99415**
0.6	2/320	267	2.72043e-08	**2.99916**	4.27335e-08	**2.99927**
0.6	2/640	534	3.40442e-09	**2.99835**	5.34770e-09	**2.99838**
0.6	2/1280	1067	4.25620e-10	**2.99977**	6.68734e-10	**2.99942**

需要改进的原因

- 为了设计基于紧致 Hermite 重构的显式两步四阶有限体积格式，首先构造**恰好四阶精度**的紧致 Hermite 重构，再使用原始的两步四阶框架设计相应的格式。
- 然而，我们发现若函数值和导数值均使用（新构造的）Hermite 重构，原始的两步四阶框架出现了**掉阶**。

表 1: 一维线性对流方程的精度测试中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	34	1.38401e-05		2.17751e-05	
0.6	2/80	67	1.73251e-06	**2.99791**	2.72250e-06	**2.99967**
0.6	2/160	134	2.17508e-07	**2.99372**	3.41695e-07	**2.99415**
0.6	2/320	267	2.72043e-08	**2.99916**	4.27335e-08	**2.99927**
0.6	2/640	534	3.40442e-09	**2.99835**	5.34770e-09	**2.99838**
0.6	2/1280	1067	4.25620e-10	**2.99977**	6.68734e-10	**2.99942**

需要改进的原因

- 为了设计基于紧致 Hermite 重构的显式两步四阶有限体积格式，首先构造**恰好四阶精度**的紧致 Hermite 重构，再使用原始的两步四阶框架设计相应的格式。

- 然而，我们发现若函数值和导数值均使用（新构造的）Hermite 重构，原始的两步四阶框架出现了**掉阶**。

表 1: 一维线性对流方程的精度测试中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	34	1.38401e-05		2.17751e-05	
0.6	2/80	67	1.73251e-06	**2.99791**	2.72250e-06	**2.99967**
0.6	2/160	134	2.17508e-07	**2.99372**	3.41695e-07	**2.99415**
0.6	2/320	267	2.72043e-08	**2.99916**	4.27335e-08	**2.99927**
0.6	2/640	534	3.40442e-09	**2.99835**	5.34770e-09	**2.99838**
0.6	2/1280	1067	4.25620e-10	**2.99977**	6.68734e-10	**2.99942**

改进的过程：分析掉阶原因

- 以线性对流方程为例，利用泰勒展开，得到掉阶原因是 $\bar{v}_i^{\frac{1}{2}}$ 的近似精度不够。所以需要将之提升至 $\mathcal{O}(\tau^3)$，进而需要提高 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 的精度。

$$\bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2}\left(\partial_t u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}.$$

- 自然的，可以通过将泰勒展开增加一项来达到这个目标，即

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2}\left(\partial_t u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8}\left(\partial_t^2 u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}.$$

在此基础上，得到了改进的两步四阶时间推进框架。

改进的过程：分析掉阶原因

- 以线性对流方程为例，利用泰勒展开，得到掉阶原因是 $\bar{v}_i^{\frac{1}{2}}$ 的近似精度不够。所以需要将之提升至 $\mathcal{O}(\tau^3)$，进而需要提高 $\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 的精度。

$$\bar{v}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\left(\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad \hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2}\left(\partial_t u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}.$$

- 自然的，可以通过将泰勒展开增加一项来达到这个目标，即

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2}\left(\partial_t u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8}\left(\partial_t^2 u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}.$$

在此基础上，得到了改进的两步四阶时间推进框架。

改进的双曲守恒律两步四阶时间推进框架

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2}\left(\partial_t u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8}\left(\partial_t^2 u\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$$

$u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \xrightarrow{\text{需要}}$ Godunov 解法器 $\xrightarrow{\text{需要}}$ 函数值重构

$(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \xrightarrow{\text{需要}}$ GRP 解法器（一阶 LW 解法器）$\xrightarrow{\text{需要}}$ 导数值重构

$(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \xrightarrow{\text{需要}}$ 线性近似的二阶 LW 解法器 $\xrightarrow{\text{需要}}$ 二阶导数值重构

在第一步时间推进中，改进的框架需要由二阶 LW 型解法器提供二阶时间导数。进而，需要重构算法提供二阶空间导数。

改进的双曲守恒律两步四阶时间推进框架

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau}{2}(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} + \frac{\tau^2}{8}(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}$$

$u_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \xrightarrow{\text{需要}}$ Godunov 解法器 $\xrightarrow{\text{需要}}$ 函数值重构

$(\partial_t u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \xrightarrow{\text{需要}}$ GRP 解法器（一阶 LW 解法器）$\xrightarrow{\text{需要}}$ 导数值重构

$(\partial_t^2 u)_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \xrightarrow{\text{需要}}$ 线性近似的二阶 LW 解法器 $\xrightarrow{\text{需要}}$ 二阶导数值重构

在第一步时间推进中，改进的框架需要由二阶 LW 型解法器提供二阶时间导数。进而，需要重构算法提供二阶空间导数。

改进的效果

表 2: 一维线性对流方程的精度测试中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	34	1.39581e-06		2.19020e-06	
0.6	2/80	67	8.73170e-08	**3.99869**	1.37118e-07	**3.99757**
0.6	2/160	134	5.45979e-09	**3.99935**	8.57559e-09	**3.99904**
0.6	2/320	267	3.41097e-10	**4.00059**	5.35806e-10	**4.00045**
0.6	2/640	534	2.12972e-11	**4.00144**	3.35383e-11	**3.99783**
0.6	2/1280	1067	1.33043e-12	**4.00071**	2.39120e-12	**3.81000**

二维也有类似的改进的两步四阶时间推进框架。

改进的效果

表 2: 一维线性对流方程的精度测试中 u 的 L^1 和 L^∞ 误差和误差阶。

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	34	1.39581e-06		2.19020e-06	
0.6	2/80	67	8.73170e-08	**3.99869**	1.37118e-07	**3.99757**
0.6	2/160	134	5.45979e-09	**3.99935**	8.57559e-09	**3.99904**
0.6	2/320	267	3.41097e-10	**4.00059**	5.35806e-10	**4.00045**
0.6	2/640	534	2.12972e-11	**4.00144**	3.35383e-11	**3.99783**
0.6	2/1280	1067	1.33043e-12	**4.00071**	2.39120e-12	**3.81000**

二维也有类似的改进的两步四阶时间推进框架。

一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于一维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将上述格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于一维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将上述格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于一维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将上述格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于一维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将上述格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于一维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将上述格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (Jiequan Li and Wang, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

$$\partial_t^2 u = -\partial_t\partial_x f(u) = -\partial_x\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u)\partial_t u\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)\partial_x u\,\partial_t u - \frac{\partial f}{\partial u}(u)\partial_x\partial_t u,$$

$$\partial_x\partial_t u = -\partial_x\partial_x f(u) = -\partial_x\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u)\partial_x u\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u)\partial_x u\,\partial_x u - \frac{\partial f}{\partial u}(u)\partial_x^2 u.$$

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (Jiequan Li and Wang, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 u &= -\partial_t \partial_x f(u) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_t u \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \partial_x u \partial_t u - \frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x \partial_t u, \\
\partial_x \partial_t u &= -\partial_x \partial_x f(u) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x u \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \partial_x u \partial_x u - \frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x^2 u.
\end{aligned}
$$

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (Jiequan Li and Wang, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

$$
\partial_t^2 u = -\partial_t \partial_x f(u) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_t u \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \partial_x u \partial_t u - \frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x \partial_t u,
$$

$$
\partial_x \partial_t u = -\partial_x \partial_x f(u) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x u \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \partial_x u \partial_x u - \frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x^2 u.
$$

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (Jiequan Li and Wang, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

$$\partial_t^2 u = -\partial_t \partial_x f(u) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_t u \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \partial_x u \partial_t u - \frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x \partial_t u,$$

$$\partial_x \partial_t u = -\partial_x \partial_x f(u) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x u \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u) \partial_x u \partial_x u - \frac{\partial f}{\partial u}(u) \partial_x^2 u.$$

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (Jiequan Li and Wang, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

$$\partial_t^2 \boldsymbol{u} = -\partial_t \partial_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = -\partial_x \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \partial_t \boldsymbol{u} \right) = -\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}^2}(\boldsymbol{u}) \partial_x \boldsymbol{u} \partial_t \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \partial_x \partial_t \boldsymbol{u},$$

$$\partial_x \partial_t \boldsymbol{u} = -\partial_x \partial_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = -\partial_x \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \partial_x \boldsymbol{u} \right) = -\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}^2}(\boldsymbol{u}) \partial_x \boldsymbol{u} \partial_x \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}) \partial_x^2 \boldsymbol{u}.$$

一维 Hermite 重构

以均匀网格为例，给定未知函数 $u(x)$ 的单元平均值和导数平均值

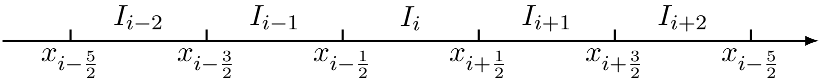
$$\bar{u}_i = \frac{1}{h}\int_{I_i} u(x)dx, \quad \bar{v}_i = \frac{1}{h}\int_{I_i} v(x)dx = \frac{1}{h}(u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_{i-\frac{1}{2}})), \quad i = 1, \cdots, N,$$

重构给出插值多项式 $p_{rj}(x)$，它定义在

$$S_r^k(i) = \bigcup_{m=0}^{k-1} I_{i-r+m}, \quad r = 0, 1, \cdots, k-1, \quad k \geqslant 1,$$

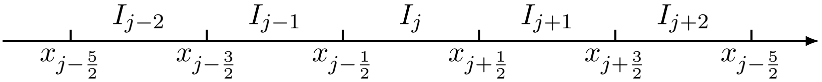
上，并且满足

$$\partial_x^d p_i^r(x) = \partial_x^d u(x) + \mathcal{O}(h^{2k-d}), \quad d = 0, 1, 2.$$



线性紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

- 利用相邻 2 个单元中的 4 个信息，可以得到两个四阶线性重构。



- 使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用四阶线性重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。

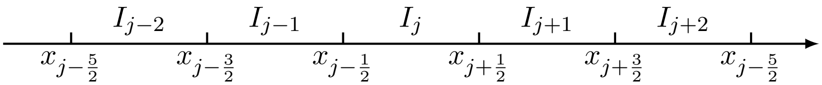
- 利用两值的线性稳定性分析，发现其中有一个稳定的**线性紧致 Hermite 两步四阶格式**，记作 HC-4 格式 ($k = 2$)。

- 类似的，有 HC-2 重构 ($k = 1$)、HC-6 格式 ($k = 3$) 和 HC-8 格式 ($k = 4$)。

HC 代表埃尔米特构造（Hermite Construction）。

线性紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

- 利用相邻 2 个单元中的 4 个信息，可以得到两个四阶线性重构。

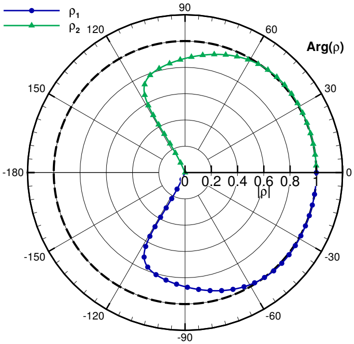


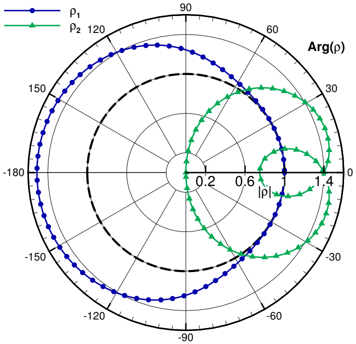
- 使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用四阶线性重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。
- 利用两值的线性稳定性分析，发现其中有一个稳定的**线性紧致 Hermite 两步四阶格式**，记作 HC-4 格式 ($k=2$)。
- 类似的，有 HC-2 重构 ($k=1$)、HC-6 格式 ($k=3$) 和 HC-8 格式 ($k=4$)。

HC 代表埃尔米特构造（Hermite Construction）。

线性紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

- 利用相邻 2 个单元中的 4 个信息，可以得到两个四阶线性重构。
- 使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用四阶线性重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。
- 利用两值的线性稳定性分析，发现其中有一个稳定的**线性紧致 Hermite 两步四阶格式**，记作 HC-4 格式 $(k=2)$。





线性紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

- 利用相邻 2 个单元中的 4 个信息，可以得到两个四阶线性重构。
- 使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用四阶线性重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。
- 利用两值的线性稳定性分析，发现其中有一个稳定的**线性紧致 Hermite 两步四阶格式**，记作 HC-4 格式 ($k = 2$)。
- 类似的，有 HC-2 重构 ($k = 1$)、HC-6 格式 ($k = 3$) 和 HC-8 格式 ($k = 4$)。

HC 代表埃尔米特构造（Hermite Construction）。

加权型紧致 Hermite 重构（Weighted HC-4，WHC-4 重构）

参考 (Zhu and Shu, 2018) 中的 CWENO 格式和 (Balsara, Garain, and Shu, 2016) 中的 WENO-AO 格式。

- 使用 $k=1,2$ 两个线性重构作为组份，构造加权格式。将二阶和四阶重构的结果记为

$$u^o_{i+\frac{1}{2},-}=p^o_i(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad \left(\partial^d_x u\right)^o_{i+\frac{1}{2},-}=\partial^d_x p^o_i(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad d=1,2,\quad o=s,f.$$

- 重写 $u^f_{i+\frac{1}{2},-}$ 为

$$u^f_{i+\frac{1}{2},-}=\gamma_s u^s_{i+\frac{1}{2},-}+\gamma_f\left(\frac{1}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}-\frac{\gamma_s}{\gamma_f}u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right),\quad \gamma_s+\gamma_f=1.$$

- 将线性权 γ_o 替换为非线性权 ω_o，

$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}=\omega_s u^s_{i+\frac{1}{2},-}+\omega_f\left(\frac{1}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}-\frac{\gamma_s}{\gamma_f}u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right),\quad \omega_s+\omega_f=1,$$

即，$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}=\frac{\omega_f}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}+\left(1-\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

加权型紧致 Hermite 重构（Weighted HC-4，WHC-4 重构）

参考 (Zhu and Shu, 2018) 中的 CWENO 格式和 (Balsara, Garain, and Shu, 2016) 中的 WENO-AO 格式。

- 使用 $k=1,2$ 两个线性重构作为组份，构造加权格式。将二阶和四阶重构的结果记为

$$u^o_{i+\frac{1}{2},-}=p^o_i(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad \left(\partial^d_x u\right)^o_{i+\frac{1}{2},-}=\partial^d_x p^o_i(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad d=1,2,\quad o=s,f.$$

- 重写 $u^f_{i+\frac{1}{2},-}$ 为

$$u^f_{i+\frac{1}{2},-}=\gamma_s u^s_{i+\frac{1}{2},-}+\gamma_f\left(\frac{1}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}-\frac{\gamma_s}{\gamma_f}u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right),\quad \gamma_s+\gamma_f=1.$$

- 将线性权 γ_o 替换为非线性权 ω_o，

$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}=\omega_s u^s_{i+\frac{1}{2},-}+\omega_f\left(\frac{1}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}-\frac{\gamma_s}{\gamma_f}u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right),\quad \omega_s+\omega_f=1,$$

即，
$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}=\frac{\omega_f}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}+\left(1-\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

加权型紧致 Hermite 重构（Weighted HC-4，WHC-4 重构）

参考 (Zhu and Shu, 2018) 中的 CWENO 格式和 (Balsara, Garain, and Shu, 2016) 中的 WENO-AO 格式。

- 使用 $k=1,2$ 两个线性重构作为组份，构造加权格式。将二阶和四阶重构的结果记为

$$u^o_{i+\frac{1}{2},-}=p^o_i(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad \left(\partial^d_x u\right)^o_{i+\frac{1}{2},-}=\partial^d_x p^o_i(x_{i+\frac{1}{2}}),\quad d=1,2,\quad o=s,f.$$

- 重写 $u^f_{i+\frac{1}{2},-}$ 为

$$u^f_{i+\frac{1}{2},-}=\gamma_s u^s_{i+\frac{1}{2},-}+\gamma_f\left(\frac{1}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}-\frac{\gamma_s}{\gamma_f}u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right),\quad \gamma_s+\gamma_f=1.$$

- 将线性权 γ_o 替换为非线性权 ω_o，

$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}=\omega_s u^s_{i+\frac{1}{2},-}+\omega_f\left(\frac{1}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}-\frac{\gamma_s}{\gamma_f}u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right),\quad \omega_s+\omega_f=1,$$

即，
$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}=\frac{\omega_f}{\gamma_f}u^f_{i+\frac{1}{2},-}+\left(1-\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

加权型紧致 Hermite 重构（Weighted HC-4，WHC-4 重构）

- 非线性权的定义方式参考文献 (Castro, Costa, and Don, 2011) 中的 WENO-Z 格式：

$$\omega_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_s + \alpha_f}, \quad \alpha_o = \gamma_o \left(1 + \left(\frac{\theta}{\beta_o + \varepsilon}\right)^q\right), \quad o = s, f,$$

其中，$\theta = |\beta_s - \beta_f|$，$\varepsilon = \widehat{C}h^3$，$\widehat{C} = 100$，$q = 2$.

- 光滑因子 β_s 和 β_f 参考文献 (Jiang and Shu, 1996) 中的定义：

$$\beta_o = \sum_{d=1}^{3} \int_{I_i} h^{2\ell-1} \left(\partial_x^d p_i^o(x)\right)^2 dx, \quad o = s, f.$$

- 使用相同的非线性权可以得到一阶和二阶空间导数：

$$\left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} \left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{f} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) \left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{s}, \quad d = 1, 2.$$

加权型紧致 Hermite 重构（Weighted HC-4，WHC-4 重构）

- 非线性权的定义方式参考文献 (Castro, Costa, and Don, 2011) 中的 WENO-Z 格式：

$$\omega_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_s + \alpha_f}, \quad \alpha_o = \gamma_o \left(1 + \left(\frac{\theta}{\beta_o + \varepsilon}\right)^q\right), \quad o = s, f,$$

其中，$\theta = |\beta_s - \beta_f|$，$\varepsilon = \hat{C}h^3$，$\hat{C} = 100$，$q = 2$.

- 光滑因子 β_s 和 β_f 参考文献 (Jiang and Shu, 1996) 中的定义：

$$\beta_o = \sum_{d=1}^{3} \int_{I_i} h^{2\ell-1} \left(\partial_x^d p_i^o(x)\right)^2 dx, \quad o = s, f.$$

- 使用相同的非线性权可以得到一阶和二阶空间导数：

$$\left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} \left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{f} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) \left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{s}, \quad d = 1, 2.$$

加权型紧致 Hermite 重构（Weighted HC-4，WHC-4 重构）

- 非线性权的定义方式参考文献 (Castro, Costa, and Don, 2011) 中的 WENO-Z 格式：

$$\omega_o = \frac{\alpha_o}{\alpha_s + \alpha_f}, \quad \alpha_o = \gamma_o \left(1 + \left(\frac{\theta}{\beta_o + \varepsilon}\right)^q\right), \quad o = s, f,$$

其中，$\theta = |\beta_s - \beta_f|$，$\varepsilon = \hat{C}h^3$，$\hat{C} = 100$，$q = 2$.

- 光滑因子 β_s 和 β_f 参考文献 (Jiang and Shu, 1996) 中的定义：

$$\beta_o = \sum_{d=1}^{3} \int_{I_i} h^{2\ell-1} \left(\partial_x^d p_i^o(x)\right)^2 dx, \quad o = s, f.$$

- 使用相同的非线性权可以得到一阶和二阶空间导数：

$$\left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} \left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{f} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) \left(\partial_x^d u\right)_{i+\frac{1}{2},-}^{s}, \quad d = 1, 2.$$

WHC-4 重构的性质

- 非线性权在光滑区域内满足以下关系

$$\omega_o = \gamma_o + \mathcal{O}(h^2), \quad o = s, f.$$

- 因此，$u^{\mathrm{WHC\text{-}4}}_{i+\frac{1}{2},-}$ 是对精确值 $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 的四阶精确近似：

$$u^{\mathrm{WHC\text{-}4}}_{i+\frac{1}{2},-} = u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \frac{\omega_f - \gamma_f}{\gamma_f}\left(u^f_{i+\frac{1}{2},-} - u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right) = u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \mathcal{O}(h^4) = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^4).$$

- 在间断附近：

$$\omega_s = 1 - \mathcal{O}(h^4), \quad \omega_f = \mathcal{O}(h^4),$$

使得带有 minmod 限制器的二阶重构起主要作用，从而可有效防止振荡。

WHC-4 重构的性质

- 非线性权在光滑区域内满足以下关系

$$\omega_o = \gamma_o + \mathcal{O}(h^2), \quad o = s, f.$$

- 因此，$u^{\mathrm{WHC\text{-}4}}_{i+\frac{1}{2},-}$ 是对精确值 $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 的四阶精确近似：

$$u^{\mathrm{WHC\text{-}4}}_{i+\frac{1}{2},-} = u^{f}_{i+\frac{1}{2},-} + \frac{\omega_f - \gamma_f}{\gamma_f}\left(u^{f}_{i+\frac{1}{2},-} - u^{s}_{i+\frac{1}{2},-}\right) = u^{f}_{i+\frac{1}{2},-} + \mathcal{O}(h^4) = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^4).$$

- 在间断附近：

$$\omega_s = 1 - \mathcal{O}(h^4), \quad \omega_f = \mathcal{O}(h^4),$$

使得带有 minmod 限制器的二阶重构起主要作用，从而可有效防止振荡。

WHC-4 重构的性质

- 非线性权在光滑区域内满足以下关系

$$\omega_o = \gamma_o + \mathcal{O}(h^2), \quad o = s, f.$$

- 因此，$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-}$ 是对精确值 $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ 的四阶精确近似：

$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \frac{\omega_f - \gamma_f}{\gamma_f}\left(u^f_{i+\frac{1}{2},-} - u^s_{i+\frac{1}{2},-}\right) = u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \mathcal{O}(h^4) = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^4).$$

- 在间断附近：

$$\omega_s = 1 - \mathcal{O}(h^4), \quad \omega_f = \mathcal{O}(h^4),$$

使得带有 minmod 限制器的二阶重构起主要作用，从而可有效防止振荡。

杂交选择型紧致 Hermite 重构（Hybrid HC-4，HHC-4 重构）

- 第一项的系数 ω_f/γ_f 在光滑区域趋近于 1，在间断附近趋近于 0。

$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

- 因此，我们可以应用一个截断函数，得到我们的杂交选择型重构

$$u^{\text{HHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \left(1 - \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)\right) u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

- 选择恰当的截断函数并整理不等式，得到

$$u^{\text{HHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = \begin{cases} u^f_{i+\frac{1}{2},-}, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u^s_{i+\frac{1}{2},-}, & \beta_f + \varepsilon \geq \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \end{cases} \qquad \bar{\vartheta} = 50.$$

杂交选择型紧致 Hermite 重构（Hybrid HC-4，HHC-4 重构）

- 第一项的系数 ω_f/γ_f 在光滑区域趋近于 1，在间断附近趋近于 0。

$$u^{\text{WHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

- 因此，我们可以应用一个截断函数，得到我们的杂交选择型重构

$$u^{\text{HHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^f_{i+\frac{1}{2},-} + \left(1 - \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)\right) u^s_{i+\frac{1}{2},-}.$$

- 选择恰当的截断函数并整理不等式，得到

$$u^{\text{HHC-4}}_{i+\frac{1}{2},-} = \begin{cases} u^f_{i+\frac{1}{2},-}, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u^s_{i+\frac{1}{2},-}, & \beta_f + \varepsilon \geq \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \end{cases} \qquad \bar{\vartheta} = 50.$$

杂交选择型紧致 Hermite 重构（Hybrid HC-4，HHC-4 重构）

- 第一项的系数 ω_f/γ_f 在光滑区域趋近于 1，在间断附近趋近于 0。

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{WHC-4}} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u_{i+\frac{1}{2},-}^{f} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u_{i+\frac{1}{2},-}^{s}.$$

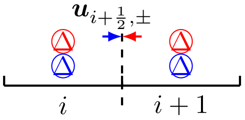
- 因此，我们可以应用一个截断函数，得到我们的杂交选择型重构

$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{HHC-4}} = \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u_{i+\frac{1}{2},-}^{f} + \left(1 - \delta\left(\frac{\omega_f}{\gamma_f}\right)\right) u_{i+\frac{1}{2},-}^{s}.$$

- 选择恰当的截断函数并整理不等式，得到

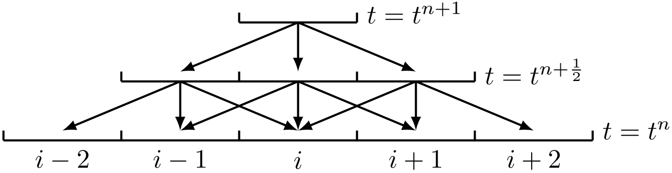
$$u_{i+\frac{1}{2},-}^{\text{HHC-4}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},-}^{f}, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u_{i+\frac{1}{2},-}^{s}, & \beta_f + \varepsilon \geqslant \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \end{cases} \qquad \bar{\vartheta} = 50.$$

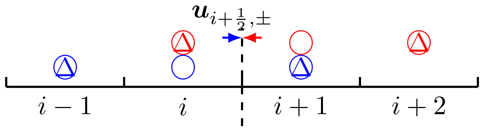
使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用 WHC-4 和 HHC-4 重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。



(a) WHC-4 和 HHC-4 格式的数值通量的依赖区域

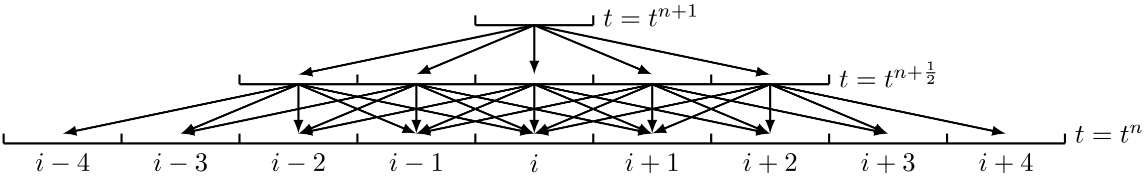
标记 ◯ 代表单元平均值，标记 Δ 代表导数平均值。
蓝色代表左侧重构值的依赖范围，而红色代表右侧重构值的依赖范围。





(c) 文献 (Du and Jiequan Li, 2018) 中的 S2O4-HWENO5 格式的数值通量的依赖区域。

标记 ◯ 代表单元平均值，标记 Δ 代表导数平均值。
蓝色代表左侧重构值的依赖范围，而红色代表右侧重构值的依赖范围。



(d) 文献 (Du and Jiequan Li, 2018) 中的 S2O4-HWENO5 格式的依赖区域

一维欧拉方程组的线性退化的精度测试

例 1 (一维欧拉方程组的线性退化的精度测试)

这个算例选择欧拉方程组

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \partial_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u} = (\rho, \rho u, \rho E)^\top, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p, u(\rho E + p))^\top,$$

作为模型，其中多方指数 γ 取 1.4，初值为

$$\rho(x,0) = 1 + 0.2\sin(\pi x), \quad u(x,0) = 1, \quad p(x,0) = 1.$$

计算区域是 $[-1,1]$，采取周期边界条件。这个问题的精确解是 $\boldsymbol{u}(x,t) = \boldsymbol{u}(x-t,0)$。

一维欧拉方程组的线性退化的精度测试结果

WHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	775	1.35453e-05		2.12772e-05	
0.6	2/80	1549	8.46533e-07	**4.00009**	1.32973e-06	**4.00010**
0.6	2/160	3098	5.29071e-08	**4.00003**	8.31064e-08	**4.00003**
0.6	2/320	6195	3.30668e-09	**4.00001**	5.19407e-09	**4.00002**
0.6	2/640	12389	2.06656e-10	**4.00008**	3.25396e-10	**3.99660**
0.6	2/1280	24778	1.29151e-11	**4.00010**	2.18940e-11	**3.89359**

HHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/40	775	1.35453e-05		2.12772e-05	
0.6	2/80	1549	8.46534e-07	**4.00009**	1.32973e-06	**4.00010**
0.6	2/160	3098	5.29071e-08	**4.00003**	8.31064e-08	**4.00003**
0.6	2/320	6195	3.30668e-09	**4.00001**	5.19407e-09	**4.00002**
0.6	2/640	12389	2.06659e-10	**4.00008**	3.25382e-10	**3.99669**
0.6	2/1280	24778	1.29121e-11	**4.00043**	2.19050e-11	**3.89280**

一维欧拉方程组的非线性的精度测试

例 2 (一维欧拉方程组的非线性的精度测试)

这是一个源自文献 (Jiayin Li, Shu, and Qiu, 2021) 的数值算例，初始条件设定为

$$\rho(x,0) = \frac{1+0.2x}{\sqrt{12}}, \quad u(x,0) = \sqrt{\gamma}\rho(x,y,0), \quad p(x,0) = \rho(x,0)^{\gamma}.$$

计算区域是 $[0, 2\pi]$，并且使用与例 1 相同的欧拉方程组、均匀网格和周期边界。不过，多方指数 γ 设定为 3。

一维欧拉方程组的非线性的精度测试结果

WHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	$2\pi/40$	39	1.18220e-05		1.26466e-04	
0.6	$2\pi/80$	77	9.66763e-07	**3.61216**	1.41186e-05	**3.16308**
0.6	$2\pi/160$	153	6.77058e-08	**3.83581**	1.20561e-06	**3.54976**
0.6	$2\pi/320$	306	4.40330e-09	**3.94262**	8.01712e-08	**3.91054**
0.6	$2\pi/640$	612	2.79578e-10	**3.97726**	5.18467e-09	**3.95076**
0.6	$2\pi/1280$	1223	1.75945e-11	**3.99005**	3.27469e-10	**3.98482**

HHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	$2\pi/40$	39	1.18220e-05		1.26466e-04	
0.6	$2\pi/80$	77	9.66763e-07	**3.61216**	1.41186e-05	**3.16308**
0.6	$2\pi/160$	153	6.77058e-08	**3.83581**	1.20561e-06	**3.54976**
0.6	$2\pi/320$	306	4.40330e-09	**3.94262**	8.01712e-08	**3.91054**
0.6	$2\pi/640$	612	2.79578e-10	**3.97726**	5.18467e-09	**3.95076**
0.6	$2\pi/1280$	1223	1.75945e-11	**3.99006**	3.27469e-10	**3.98482**

一维欧拉方程组的 Lax 激波管问题

例 3 (一维欧拉方程组的 Lax 激波管问题)

这是一个黎曼问题，以欧拉方程组作为模型，初值为

$$(\rho, \rho u, \rho E)(x, 0) = \begin{cases} (0.445, 0.311, 8.928), & x < 0, \\ (0.5, 0, 1.4275), & x > 0. \end{cases}$$

一维欧拉方程组的 Lax 激波管问题结果

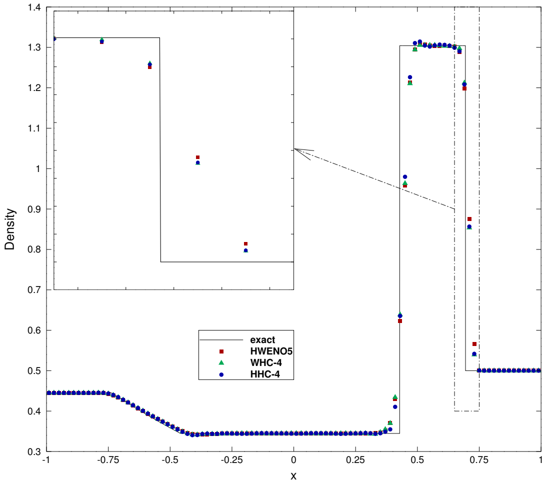


图 3: 一维数值格式在例 3 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.28$ 时刻，100 个网格的结果。

一维欧拉方程组的 Shu-Osher 问题

例 4 (一维欧拉方程组的 Shu-Osher 问题)

这个问题最初是由 Shu 和 Osher 在文献 (Shu and Osher, 1989) 中提出的，以欧拉方程组作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333), & x < -4, \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & x > -4. \end{cases}$$

一维欧拉方程组的 Shu-Osher 问题结果

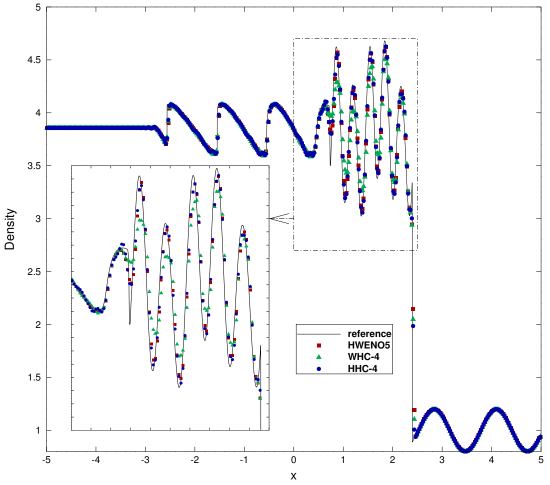


图 4: 一维数值格式在例 4 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 1.8$ 时刻，400 个网格的结果。

一维欧拉方程组的 Titarev-Toro 问题

例 5 (一维欧拉方程组的 Titarev-Toro 问题)

这个问题最初是由 Titarev 和 Toro 在文献 (Titarev and Toro, 2004) 中提出的，以欧拉方程组作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1.515695, 0.523346, 1.805), & x < -4.5, \\ (1 + 0.1\sin(20\pi x), 0, 1), & x > -4.5. \end{cases}$$

一维欧拉方程组的 Titarev-Toro 问题结果

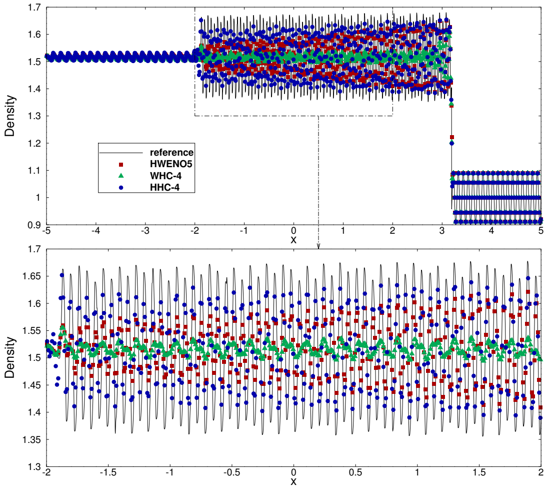


图 5: 一维数值格式在例 5 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 5$ 时刻，1000 个网格的结果。

例 6 (一维欧拉方程组的爆炸波问题)

这个问题最初是由 Woodward 和 Colella 在文献 (Woodward and Colella, 1984) 中提出的，以欧拉方程组作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 10^3), & x < 0.1, \\ (1, 0, 10^{-2}), & 0.1 < x < 0.9, \\ (1, 0, 10^2), & x > 0.9. \end{cases}$$

在计算区域的两侧，使用了反射边界条件。

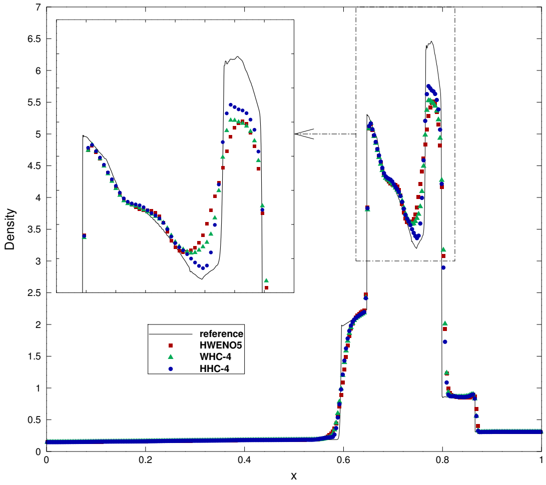


图 6: 一维数值格式在例 6 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.038$ 时刻，300 个网格的结果。

一维欧拉方程组的大压力/密度比问题

例 7 (一维欧拉方程组的大压力/密度比问题)

这个问题最初是由 Tang 和 Liu 在文献 (Tang and T. Liu, 2006) 中提出的，以欧拉方程组作为模型，初值为

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (10^4, 0, 10^4), & x < 0.3, \\ (1, 0, 1), & x > 0.3. \end{cases}$$

一维欧拉方程组的大压力/密度比问题结果

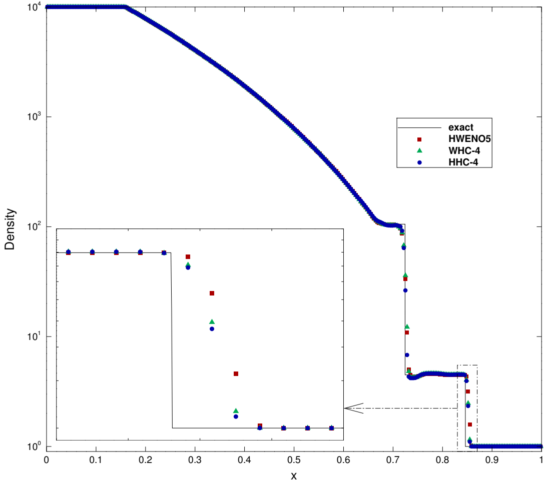


图 7: 一维数值格式在例 7 中密度的图像。展示的是 $t^{tem} = 0.12$ 时刻，300 个网格的结果。

WHC-8 和 HHC-8 格式

得到空间八阶的两步四阶格式的步骤：

- 用从八阶线性重构导出的多项式替换四阶线性重构导出的多项式
- 重新计算相应的光滑因子
- 调整格式中的参数（WHC-8 格式中的 $q = 3$ 和 HHC-8 格式中的 $\bar{\vartheta} = 500000$）

WHC-8 和 HHC-8 格式

得到空间八阶的两步四阶格式的步骤：

- 用从八阶线性重构导出的多项式替换四阶线性重构导出的多项式
- 重新计算相应的光滑因子
- 调整格式中的参数（WHC-8 格式中的 $q = 3$ 和 HHC-8 格式中的 $\bar{\vartheta} = 500000$）

WHC-8 和 HHC-8 格式

得到空间八阶的两步四阶格式的步骤：

- 用从八阶线性重构导出的多项式替换四阶线性重构导出的多项式
- 重新计算相应的光滑因子
- 调整格式中的参数（WHC-8 格式中的 $q = 3$ 和 HHC-8 格式中的 $\bar{\vartheta} = 500000$）

一维欧拉方程组的线性退化的精度测试结果

WHC-8 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	20	2/387	2.30758e-06		3.64246e-06	
0.3	40	2/1549	1.00355e-08	**7.84513**	1.57549e-08	**7.85297**
0.6	40	2/775	8.53015e-08		1.34196e-07	
0.3	80	2/3098	3.59238e-10	**7.89149**	5.64031e-10	**7.89435**
0.6	80	2/1549	3.87437e-09		6.07972e-09	
0.3	160	2/6195	1.56794e-11	**7.94895**	2.47098e-11	**7.94278**
0.6	160	2/3098	2.13052e-10		3.34754e-10	
0.3	320	2/12389	8.67489e-13	**7.94014**	1.80767e-12	**7.53283**

HHC-8 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	20	2/387	2.30758e-06		3.64246e-06	
0.3	40	2/1549	1.00355e-08	**7.84513**	1.57549e-08	**7.85297**
0.6	40	2/775	8.53015e-08		1.34196e-07	
0.3	80	2/3098	3.59237e-10	**7.89149**	5.64027e-10	**7.89436**
0.6	80	2/1549	3.87437e-09		6.07972e-09	
0.3	160	2/6195	1.56783e-11	**7.94905**	2.47069e-11	**7.94295**
0.6	160	2/3098	2.13050e-10		3.34751e-10	
0.3	320	2/12389	8.66274e-13	**7.94215**	1.80056e-12	**7.53850**

一维欧拉方程组的非线性的精度测试结果

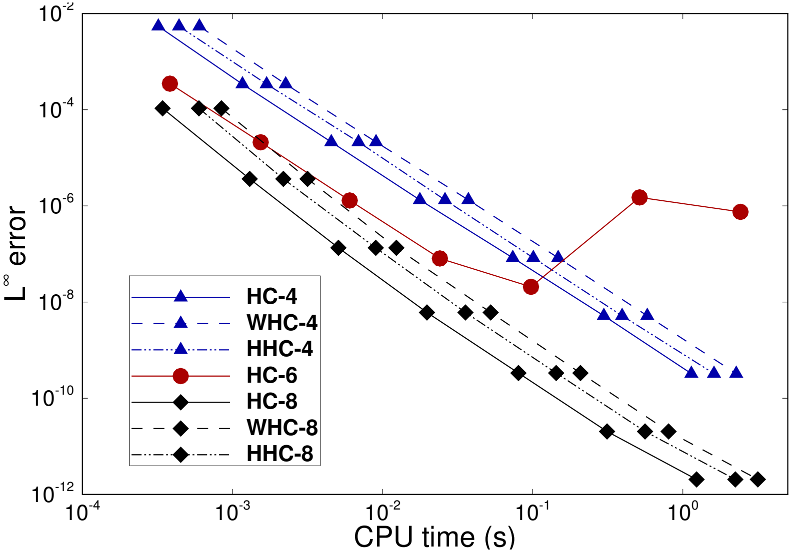
WHC-8 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	$2\pi/80$	77	1.17348e-07		2.17942e-06	
0.3	$2\pi/160$	306	9.32693e-10	**6.97518**	2.03143e-08	**6.74530**
0.6	$2\pi/160$	153	5.21317e-09		1.04608e-07	
0.3	$2\pi/320$	612	3.36388e-11	**7.27589**	7.47703e-10	**7.12831**
0.6	$2\pi/320$	306	2.72365e-10		4.77446e-09	
0.3	$2\pi/640$	1223	1.39030e-12	**7.61400**	2.82586e-11	**7.40050**
0.6	$2\pi/640$	612	1.63512e-11		2.68696e-10	
0.3	$2\pi/1280$	2445	9.84114e-14	**7.37636**	1.33077e-12	**7.65757**

HHC-8 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	$2\pi/80$	77	1.17348e-07		2.17942e-06	
0.3	$2\pi/160$	306	9.32693e-10	**6.97518**	2.03143e-08	**6.74530**
0.6	$2\pi/160$	153	5.21317e-09		1.04608e-07	
0.3	$2\pi/320$	612	3.36388e-11	**7.27589**	7.47703e-10	**7.12831**
0.6	$2\pi/320$	306	2.72365e-10		4.77446e-09	
0.3	$2\pi/640$	1223	1.39036e-12	**7.61394**	2.82580e-11	**7.40054**
0.6	$2\pi/640$	612	1.63512e-11		2.68697e-10	
0.3	$2\pi/1280$	2445	9.84530e-14	**7.37575**	1.33171e-12	**7.65655**

数值格式的时间效率



10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
L^∞ error
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
CPU time (s)
HC-4
WHC-4
HHC-4
HC-6
HC-8
WHC-8
HHC-8

1 引言

2 改进的双曲守恒律两步四阶时间推进框架

3 一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

4 二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式
- 广义黎曼问题解法器
- 线性紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式
- 基本无振荡的紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式
- 数值实验
- 空间八阶精度格式及其数值实验

5 总结

二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于二维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用精确的 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致 Hermite 重构。
- 重构：基于二阶和四阶的线性重构，利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于二维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用精确的 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致 Hermite 重构。
- 重构：基于二阶和四阶的线性重构，利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于二维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用精确的 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致 Hermite 重构。
- 重构：基于二阶和四阶的线性重构，利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于二维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用精确的 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致 Hermite 重构。
- 重构：基于二阶和四阶的线性重构，利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

- 我们想要基于二维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用精确的 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致 Hermite 重构。
- 重构：基于二阶和四阶的线性重构，利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

- 我们想要基于二维改进的两步四阶时间推进框架，设计一个两步四阶数值格式。
- 解法器：设计了一个线性二阶 LW 型解法器，同时采用精确的 Godunov 解法器和 GRP 解法器。
- 重构：经过对模板的精心挑选，成功得到真正的二维线性紧致 Hermite 重构。
- 重构：基于二阶和四阶的线性重构，利用 WENO 和杂交选择技术，构造了两种四阶精度基本无振荡的非线性重构。
- 格式：设计了**时空四阶精度基本无振荡的两步四阶格式**，记作 WHC-4 和 HHC-4 格式。
- 格式：将格式推广到了空间八阶精度，记作 WHC-8 和 HHC-8 格式。

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (齐进, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 二维弱耦合的非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (齐进, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 二维弱耦合的非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (齐进, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 二维弱耦合的非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (齐进, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 二维弱耦合的非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

广义黎曼问题解法器

- Godunov 解法器
- 文献 (齐进, 2017) 中的 GRP 解法器
  - 线性声波近似的 (acoustic) GRP 解法器
  - 二维弱耦合的非线性 GRP 解法器
- 新设计的线性二阶 LW 型解法器

二维线性紧致 Hermite 重构的要求

- 满足精度要求

$$\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}p_{ij}(x,y)=\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}u(x,y)+\mathcal{O}(h^{2k-d_1-d_2}),$$
$$0\leqslant d_1+d_2\leqslant 2k-1.$$

- 二维重构在一维问题中可以退化到之前的一维重构。
- k^2 个单元中总共有 $3k^2$ 个自由度。而在 $\mathcal{P}^{2k-1}$ 空间中，只需要 $2k^2+k$ 个自由度。为了避免最小二乘法的计算开销，将会忽略其中 k^2-k 个自由度。
- 需要使最终的模板尽可能对称。
- 要确保目标单元 I_{ij} 本身在模板中。

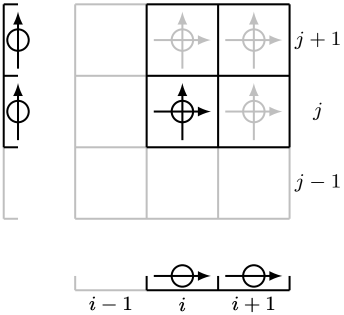


图 8: 单元平均值 $\bar{u}_{ij}$ 由一个圆圈表示，而导数平均值 $\bar{v}_{ij}$ 由一个向右的箭头表示，$\bar{w}_{ij}$ 由一个向左的箭头表示。

二维线性紧致 Hermite 重构的要求

- 满足精度要求

$$\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}p_{ij}(x,y) = \partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}u(x,y) + \mathcal{O}(h^{2k-d_1-d_2}),$$
$$0 \leqslant d_1 + d_2 \leqslant 2k - 1.$$

- 二维重构在一维问题中可以退化到之前的一维重构。
- k^2 个单元中总共有 $3k^2$ 个自由度。而在 $\mathcal{P}^{2k-1}$ 空间中，只需要 $2k^2+k$ 个自由度。为了避免最小二乘法的计算开销，将会忽略其中 k^2-k 个自由度。
- 需要使最终的模板尽可能对称。
- 要确保目标单元 I_{ij} 本身在模板中。

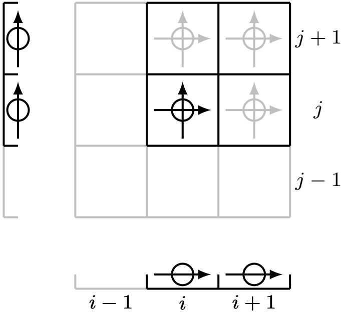


图 8: 单元平均值 $\bar{u}_{ij}$ 由一个圆圈表示，而导数平均值 $\bar{v}_{ij}$ 由一个向右的箭头表示，$\bar{w}_{ij}$ 由一个向左的箭头表示。

二维线性紧致 Hermite 重构的要求

- 满足精度要求

$$\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}p_{ij}(x,y) = \partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}u(x,y) + \mathcal{O}(h^{2k-d_1-d_2}),$$
$$0 \leqslant d_1 + d_2 \leqslant 2k-1.$$

- 二维重构在一维问题中可以退化到之前的一维重构。
- k^2 个单元中总共有 $3k^2$ 个自由度。而在 $\mathcal{P}^{2k-1}$ 空间中，只需要 $2k^2+k$ 个自由度。为了避免最小二乘法的计算开销，将会忽略其中 k^2-k 个自由度。
- 需要使最终的模板尽可能对称。
- 要确保目标单元 I_{ij} 本身在模板中。

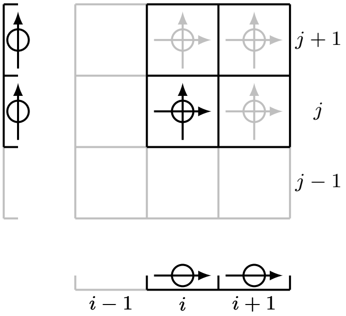


图 8: 单元平均值 $\bar{u}_{ij}$ 由一个圆圈表示，而导数平均值 $\bar{v}_{ij}$ 由一个向右的箭头表示，$\bar{w}_{ij}$ 由一个向左的箭头表示。

二维线性紧致 Hermite 重构的要求

- 满足精度要求

$$\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}p_{ij}(x,y)=\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}u(x,y)+\mathcal{O}(h^{2k-d_1-d_2}),$$
$$0\leqslant d_1+d_2\leqslant 2k-1.$$

- 二维重构在一维问题中可以退化到之前的一维重构。
- k^2 个单元中总共有 $3k^2$ 个自由度。而在 $\mathcal{P}^{2k-1}$ 空间中，只需要 $2k^2+k$ 个自由度。为了避免最小二乘法的计算开销，将会忽略其中 k^2-k 个自由度。
- 需要使最终的模板尽可能对称。
- 要确保目标单元 I_{ij} 本身在模板中。

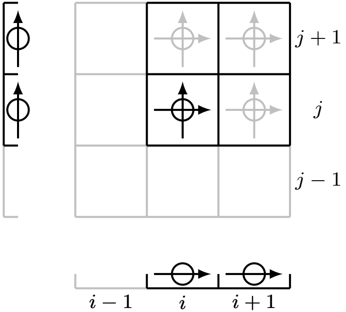


图 8: 单元平均值 $\bar{u}_{ij}$ 由一个圆圈表示，而导数平均值 $\bar{v}_{ij}$ 由一个向右的箭头表示，$\bar{w}_{ij}$ 由一个向左的箭头表示。

二维线性紧致 Hermite 重构的要求

- 满足精度要求

$$\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}p_{ij}(x,y)=\partial_x^{d_1}\partial_y^{d_2}u(x,y)+\mathcal{O}(h^{2k-d_1-d_2}),$$
$$0\leqslant d_1+d_2\leqslant 2k-1.$$

- 二维重构在一维问题中可以退化到之前的一维重构。
- k^2 个单元中总共有 $3k^2$ 个自由度。而在 $\mathcal{P}^{2k-1}$ 空间中，只需要 $2k^2+k$ 个自由度。为了避免最小二乘法的计算开销，将会忽略其中 k^2-k 个自由度。
- 需要使最终的模板尽可能对称。
- 要确保目标单元 I_{ij} 本身在模板中。

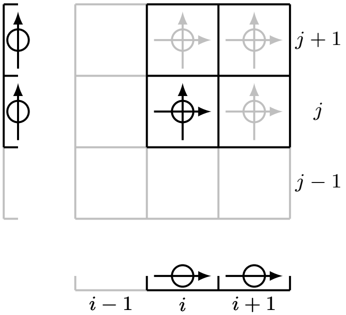
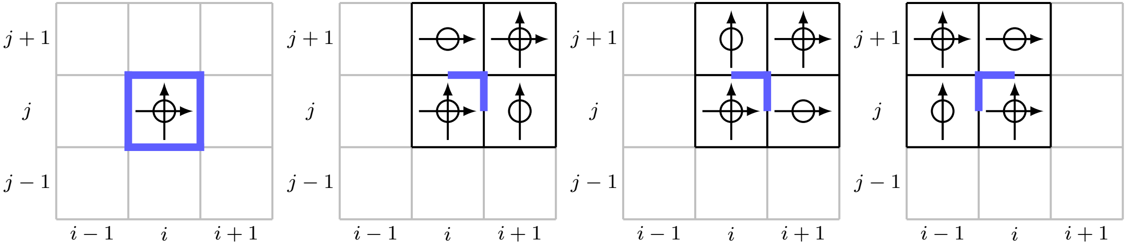


图 8: 单元平均值 $\bar{u}_{ij}$ 由一个圆圈表示，而导数平均值 $\bar{v}_{ij}$ 由一个向右的箭头表示，$\bar{w}_{ij}$ 由一个向左的箭头表示。

二维线性紧致 Hermite 重构

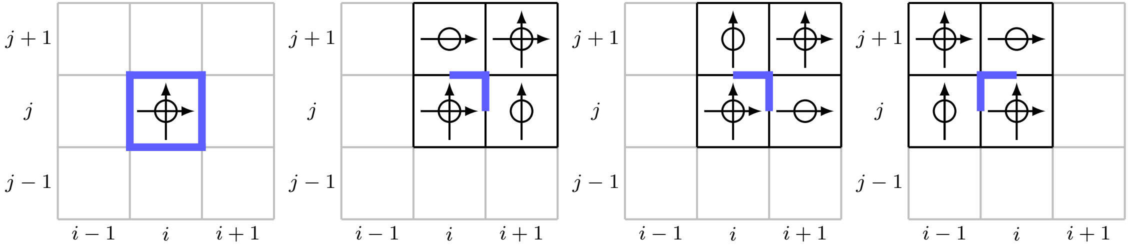


(a) $k=1$ 的情形。 (b) $k=2$ 的第一种情形。 (c) $k=2$ 第二种的情形。 (d) 将图 (b) 旋转得到的情形。

图 9: 当 $k=1,2$ 时的模板示意图。从此模板得到的重构多项式所应用的范围是蓝线所标识的。

使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用二维线性紧致 Hermite 重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。

二维线性紧致 Hermite 重构

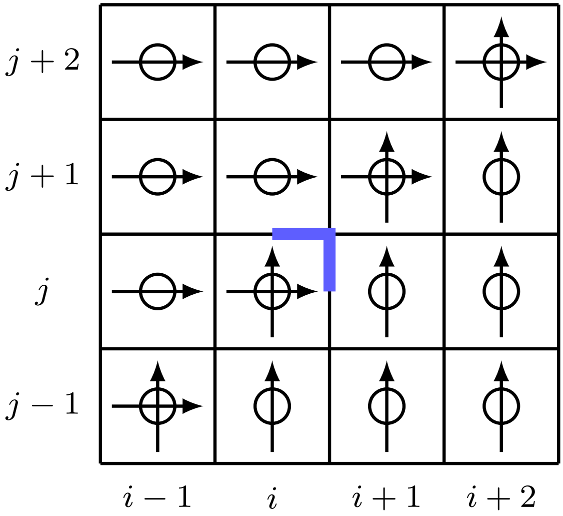


(a) $k=1$ 的情形。 (b) $k=2$ 的第一种情形。 (c) $k=2$ 第二种的情形。 (d) 将图 (b) 旋转得到的情形。

图 9: 当 $k=1,2$ 时的模板示意图。从此模板得到的重构多项式所应用的范围是蓝线所标识的。

使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用二维线性紧致 Hermite 重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。

二维线性紧致 Hermite 重构



当 $k=4$ 时的模板示意图。从此模板得到的重构多项式所应用的范围是蓝线所标识的。

基本无振荡的紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

类似一维，我们有加权型紧致 Hermite 重构（WHC-4 重构）

$$u^{\text{WHC-4}}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u^f_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^s_{(i+\frac{1}{2},-),j+G},$$

以及杂交选择型紧致 Hermite 重构（HHC-4 重构）

$$u^{\text{HHC-4}}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} = \begin{cases} u^f_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u^s_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}, & \beta_f + \varepsilon \geq \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \end{cases} \qquad \bar{\vartheta} = 20.$$

使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用上述二维紧致 Hermite 重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。

基本无振荡的紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

类似一维，我们有加权型紧致 Hermite 重构（WHC-4 重构）

$$u^{\text{WHC-4}}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u^f_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^s_{(i+\frac{1}{2},-),j+G},$$

以及杂交选择型紧致 Hermite 重构（HHC-4 重构）

$$u^{\text{HHC-4}}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} = \begin{cases} u^f_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u^s_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}, & \beta_f + \varepsilon \geqslant \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \end{cases} \qquad \bar{\vartheta} = 20.$$

使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用上述二维紧致 Hermite 重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。

基本无振荡的紧致 Hermite 重构及其相应的两步四阶格式

类似一维，我们有加权型紧致 Hermite 重构（WHC-4 重构）

$$u^{\text{WHC-4}}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} = \frac{\omega_f}{\gamma_f} u^{f}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} + \left(1 - \frac{\omega_f}{\gamma_f}\right) u^{s}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G},$$

以及杂交选择型紧致 Hermite 重构（HHC-4 重构）

$$u^{\text{HHC-4}}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G} = \begin{cases} u^{f}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}, & \beta_f + \varepsilon < \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \\ u^{s}_{(i+\frac{1}{2},-),j+G}, & \beta_f + \varepsilon \geqslant \bar{\vartheta}(\beta_s + \varepsilon), \end{cases} \qquad \bar{\vartheta} = 20.$$

使用改进的两步四阶时间推进框架，其中重构采用上述二维紧致 Hermite 重构，解法器采用 GRP 解法器，就得到了相应的两步四阶格式。

WHC-4 和 HHC-4 格式的紧致性

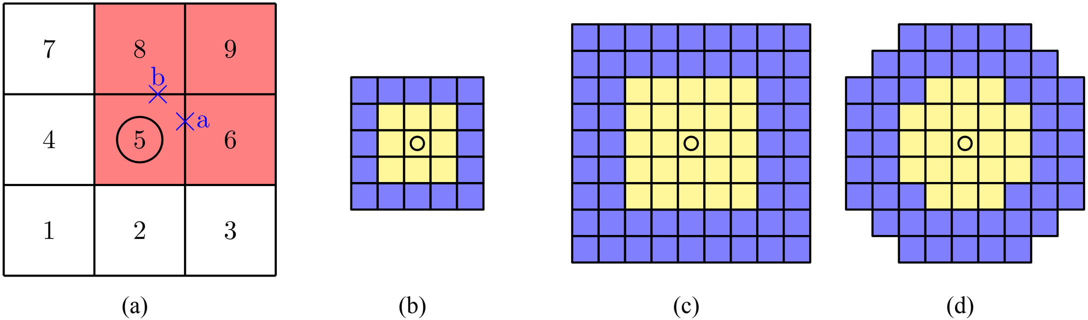


图 10: 依赖区域的示意图。(a) WHC-4 和 HHC-4 格式的数值通量的依赖区域。(b) WHC-4 和 HHC-4 格式的依赖区域。(c) 文献 (Du and Jiequan Li, 2018) 中的 S2O4-HWENO5 格式的依赖区域。(d) 文献 (Qiu and Shu, 2005) 中的 S2O4-HWENO4 格式的依赖区域。

二维欧拉方程组的线性退化的精度测试

例 8 (二维欧拉方程组的线性退化的精度测试)

这个算例选择欧拉方程组

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \partial_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) + \partial_y \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = 0, \\ \boldsymbol{u} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^\top, \\ \boldsymbol{f} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(\rho E + p))^\top, \\ \boldsymbol{g} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(\rho E + p))^\top, \end{cases}$$

作为模型，其中多方指数 γ 取 1.4，初值为

$$\rho(x, y, 0) = 1 + 0.2\sin(\pi(x+y)), \quad u(x, y, 0) = 0.7, \quad v(x, y, 0) = 0.3, \quad p(x, y, 0) = 1.$$

计算区域是 $[-1, 1] \times [-1, 1]$，采取周期边界条件。这个问题是线性退化的，它的精确解是 $\boldsymbol{u}(x, y, t) = \boldsymbol{u}(x - 0.7t, y - 0.3t, 0)$。

二维欧拉方程组的线性退化的精度测试结果

WHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/10	48	3.83978e-03		5.93239e-03	
0.6	2/20	96	2.54386e-04	**3.91593**	3.93865e-04	**3.91284**
0.6	2/40	192	1.59368e-05	**3.99659**	2.49373e-05	**3.98132**
0.6	2/80	383	9.96352e-07	**3.99956**	1.56354e-06	**3.99541**
0.6	2/160	766	6.22757e-08	**3.99991**	9.78061e-08	**3.99875**
0.6	2/320	1532	3.89229e-09	**3.99998**	6.13675e-09	**3.99438**

HHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	2/10	48	3.83978e-03		5.93278e-03	
0.6	2/20	96	2.54382e-04	**3.91595**	3.93903e-03	**3.91280**
0.6	2/40	192	1.59363e-05	**3.99661**	2.49392e-05	**3.98136**
0.6	2/80	383	9.96327e-07	**3.99955**	1.56355e-06	**3.99552**
0.6	2/160	766	6.22742e-08	**3.99991**	9.78029e-08	**3.99880**
0.6	2/320	1532	3.89217e-09	**3.99999**	6.13632e-09	**3.99443**

二维欧拉方程组的非线性的精度测试

例 9 (二维欧拉方程组的非线性的精度测试)

这是一个源自文献 (Jiayin Li, Shu, and Qiu, 2021) 的数值算例，初始条件设定为

$$\begin{aligned}
\rho(x,y,0) &= \frac{1+0.2\sin(0.5(x+y))}{\sqrt{6}}, \\
u(x,y,0) &= v(x,y,0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\rho(x,y,0), \\
p(x,y,0) &= \rho(x,y,0)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

计算区域是 $[0,4\pi]\times[0,4\pi]$，并且使用与例 8 相同的欧拉方程组、均匀网格和周期边界。不过，多方指数 γ 设定为 3。

二维欧拉方程组的非线性的精度测试结果

WHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	$4\pi/150$	48	2.10901e-08		1.11949e-07	
0.6	$4\pi/200$	64	6.84370e-09	**3.91221**	3.00975e-08	**4.56615**
0.6	$4\pi/250$	80	2.80492e-09	**3.99723**	1.23554e-08	**3.99003**
0.6	$4\pi/300$	96	1.35184e-09	**4.00341**	5.97173e-09	**3.98776**
0.6	$4\pi/350$	112	7.29333e-10	**4.00316**	3.23427e-09	**3.97815**
0.6	$4\pi/400$	128	4.27356e-10	**4.00290**	1.91305e-09	**3.93243**

HHC-4 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.6	$4\pi/150$	48	2.10901e-08		1.11949e-07	
0.6	$4\pi/200$	64	6.84370e-09	**3.91221**	3.00975e-08	**4.56615**
0.6	$4\pi/250$	80	2.80492e-09	**3.99723**	1.23554e-08	**3.99003**
0.6	$4\pi/300$	96	1.35184e-09	**4.00341**	5.97173e-09	**3.98776**
0.6	$4\pi/350$	112	7.29333e-10	**4.00316**	3.23427e-09	**3.97815**
0.6	$4\pi/400$	128	4.27356e-10	**4.00290**	1.91305e-09	**3.93243**

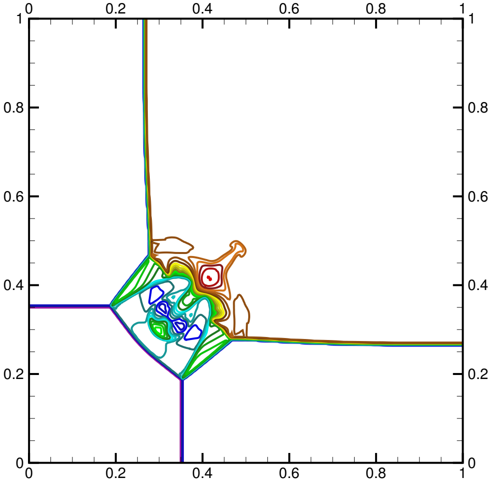
二维欧拉方程组的黎曼问题 1

例 10 (二维欧拉方程组的黎曼问题 1)

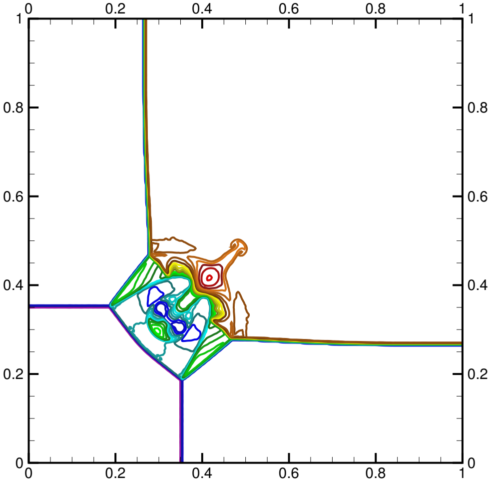
这是一个文 (Han, Jiequan Li, and Tang, 2011) 中提出的包含四个激波相互作用的算例，以欧拉方程组作为模型。计算区域是 $[0,1]\times[0,1]$，初始条件是

$$(\rho,u,v,p)(x,y)=\begin{cases}(1.5,0,0,1.5), & x>0.5,\ y>0.5,\\ (0.532,1.206,0,0.3), & x<0.5,\ y>0.5,\\ (0.138,1.206,1.206,0.029), & x<0.5,\ y<0.5,\\ (0.532,0,1.206,0.3), & x>0.5,\ y<0.5.\end{cases}$$

二维欧拉方程组的黎曼问题 1 的结果 (400 × 400 个网格，$t^{tem} = 0.35$)



(a) WHC-4 格式

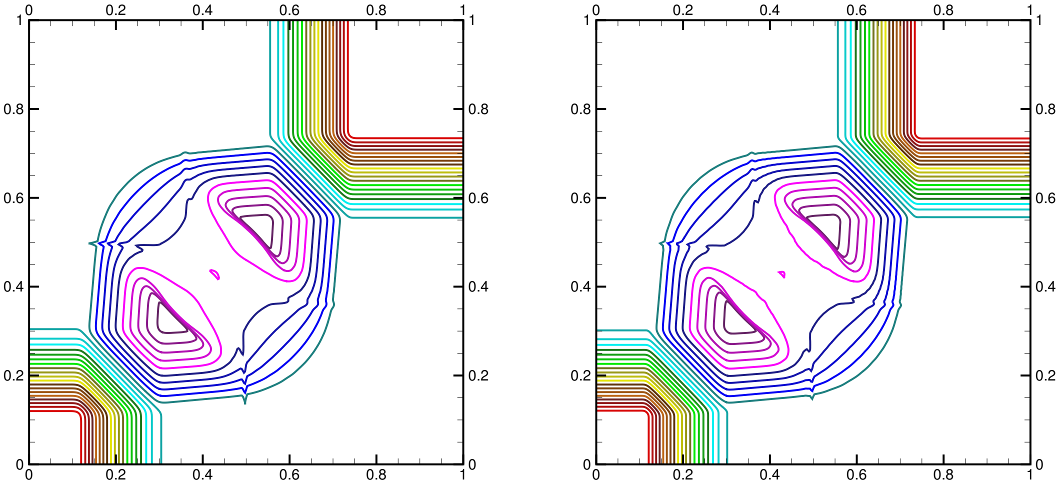


(b) HHC-4 格式

例 11 (二维欧拉方程组的黎曼问题 2)

这是一个来自文 (Han, Jiequan Li, and Tang, 2011) 中的算例，以欧拉方程组作为模型，涉及到四个稀疏波的相互作用。计算区域是 $[0,1]\times[0,1]$，初始条件如下

$$(\rho,u,v,p)(x,y)=\begin{cases}(1,0,0,1), & x>0.5,\ y>0.5,\\ (0.52,-0.726,0,0.4), & x<0.5,\ y>0.5,\\ (1,-0.726,-0.726,1), & x<0.5,\ y<0.5,\\ (0.52,0,-0.726,0.4), & x>0.5,\ y<0.5.\end{cases}$$



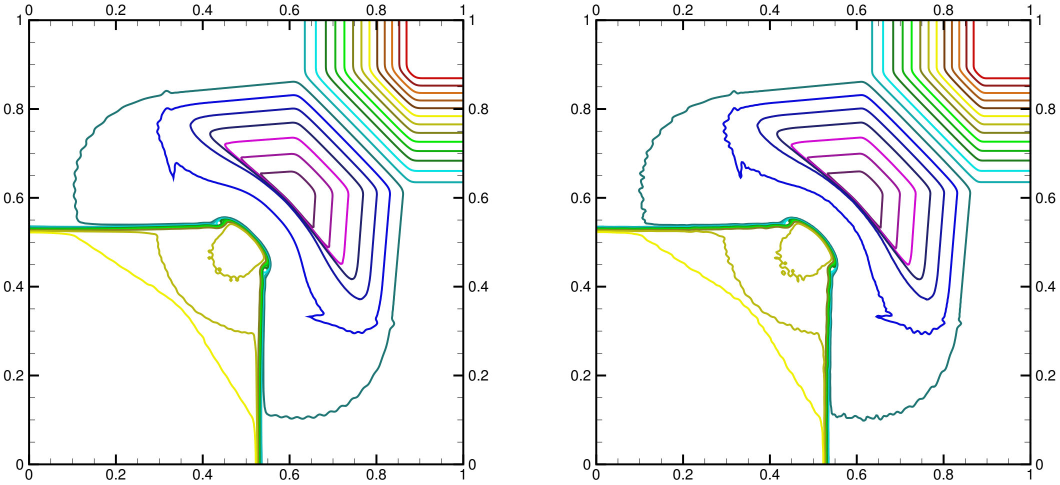
(c) WHC-4 格式　　(d) HHC-4 格式

二维欧拉方程组的黎曼问题 3

例 12 (二维欧拉方程组的黎曼问题 3)

这是另一个来自文 (Han, Jiequan Li, and Tang, 2011) 中的算例，以欧拉方程组作为模型，涉及稀疏波和涡片的相互作用。计算区域也是 $[0,1]\times[0,1]$，初始条件是

$$(\rho,u,v,p)(x,y)=\begin{cases}(1,0.1,0.1,1), & x>0.5,\ y>0.5,\\(0.52,-0.626,0.1,0.4), & x<0.5,\ y>0.5,\\(0.8,0.1,0.1,0.4), & x<0.5,\ y<0.5,\\(0.52,0.1,-0.626,0.4), & x>0.5,\ y<0.5.\end{cases}$$



(e) WHC-4 格式　　(f) HHC-4 格式

二维欧拉方程组的双马赫反射问题

例 13 (二维欧拉方程组的双马赫反射问题)

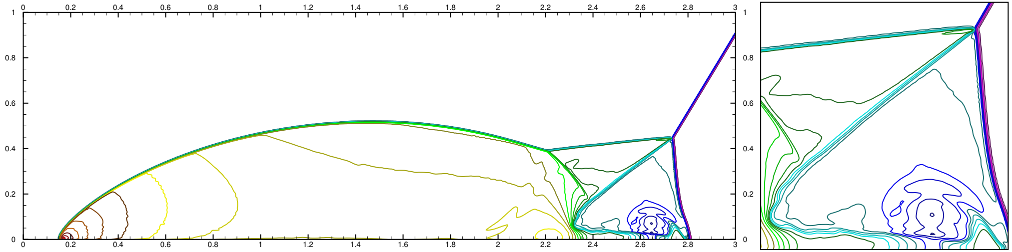
这是一个经典的测试算例，以欧拉方程组作为模型。一个斜向激波撞击下方的反射边界，激波后状态是 $\boldsymbol{u}_L$，激波前状态为 $\boldsymbol{u}_R$，它们是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_L &= (\rho_L, u_L, v_L, p_L) = (8, 4.125\sqrt{3}, -4.125, 116.5), \\
\boldsymbol{u}_R &= (\rho_R, u_R, v_R, p_R) = (1.4, 0, 0, 1).
\end{aligned}
$$

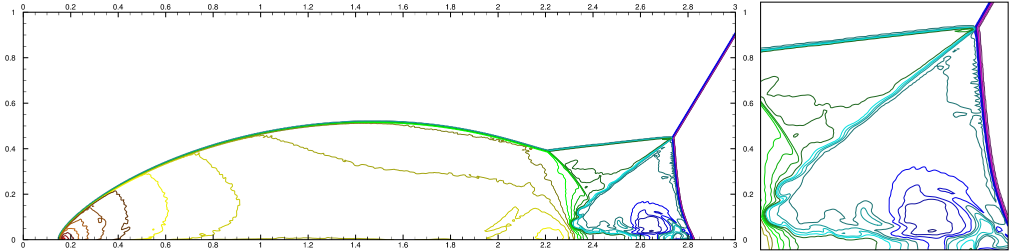
马赫数为 10，计算区域为 $[0,4] \times [0,1]$。

欧拉方程组的双马赫反射问题结果 (1440×360 个网格，$t^{tem} = 0.2$)

WHC-4
格式



HHC-4
格式



二维欧拉方程组的前台阶问题

例 14 (二维欧拉方程组的前台阶问题)

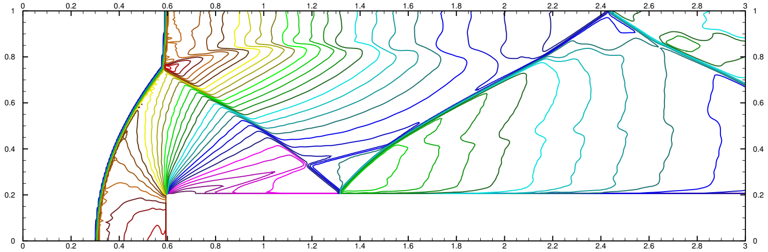
前台阶问题是一个经典的测试算例，以欧拉方程组作为模型，描述了一个带有台阶的管道，最初填充的是均匀的马赫数为 3 的均匀流体，其状态是

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 3, 0, 1).$$

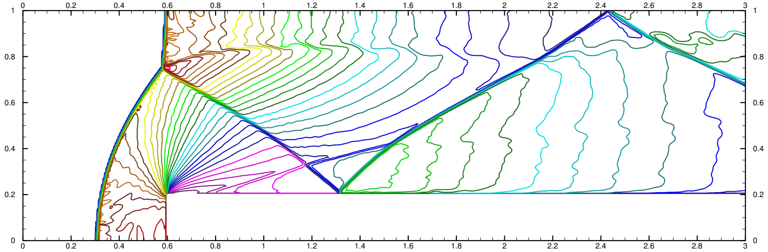
管道的壁面都是反射边界，而左侧和右侧分别作为流入和流出边界。

二维欧拉方程组的前台阶问题结果 (480 × 160 个网格，$t^{tem} = 4$)

WHC-4 格式



HHC-4 格式



WHC-8 和 HHC-8 格式

得到空间八阶的两步四阶格式的步骤：

- 用从八阶线性重构导出的多项式替换四阶线性重构导出的多项式
- 重新计算相应的光滑因子
- 调整格式中的参数（WHC-8 格式中的 $q = 3$ 和 HHC-8 格式中的 $\bar{\vartheta} = 200000$）

WHC-8 和 HHC-8 格式

得到空间八阶的两步四阶格式的步骤：

- 用从八阶线性重构导出的多项式替换四阶线性重构导出的多项式
- 重新计算相应的光滑因子
- 调整格式中的参数（WHC-8 格式中的 $q=3$ 和 HHC-8 格式中的 $\bar{\vartheta}=200000$）

WHC-8 和 HHC-8 格式

得到空间八阶的两步四阶格式的步骤：

- 用从八阶线性重构导出的多项式替换四阶线性重构导出的多项式
- 重新计算相应的光滑因子
- 调整格式中的参数（WHC-8 格式中的 $q = 3$ 和 HHC-8 格式中的 $\bar{\vartheta} = 200000$）

二维欧拉方程组的线性退化的精度测试结果

WHC-8 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.500	2/10	58	1.65877e-05		2.56825e-05	
0.250	2/20	230	8.08424e-08	**7.68079**	1.27776e-07	**7.65103**
0.500	2/20	115	1.60989e-07		2.50151e-07	
0.250	2/40	460	6.76413e-10	**7.89484**	1.08095e-09	**7.85435**
0.500	2/40	230	4.92854e-09		7.6186e-09	
0.333	2/60	517	1.97332e-10	**7.93634**	3.01551e-10	**7.96470**
0.500	2/60	345	6.57423e-10		9.96912e-10	
0.375	2/80	613	6.71483e-11	**7.93037**	1.10485e-10	**7.64659**

HHC-8 格式

CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.5	2/10	58	1.66073e-05		2.56597e-05	
0.25	2/20	230	8.13500e-08	**7.67346**	1.25816e-07	**7.67204**
0.5	2/20	115	1.60981e-07		2.52335e-07	
0.25	2/40	460	6.74489e-10	**7.89888**	1.05654e-09	**7.89984**
0.5	2/40	230	4.93010e-09		7.75582e-09	
0.333	2/60	517	1.97526e-10	**7.93469**	3.10969e-10	**7.93288**
0.5	2/60	345	6.58714e-10		1.03541e-09	
0.375	2/80	613	6.73304e-11	**7.92777**	1.06740e-10	**7.89813**

二维欧拉方程组的非线性的精度测试结果

WHC-8 格式

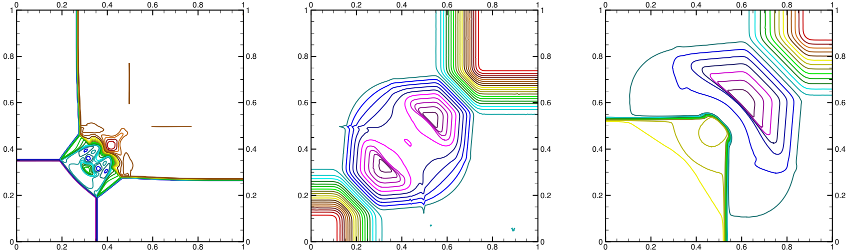
CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.5	$4\pi/100$	39	8.82554e-10		4.69837e-09	
0.417	$4\pi/120$	56	2.24268e-10	**7.51407**	1.20324e-09	**7.47139**
0.5	$4\pi/120$	46	3.47755e-10		1.84389e-09	
0.429	$4\pi/140$	63	1.09164e-10	**7.51635**	5.92636e-10	**7.36325**
0.5	$4\pi/140$	54	1.60710e-10		8.36642e-10	
0.438	$4\pi/160$	70	5.85239e-11	**7.56503**	3.17302e-10	**7.26078**
0.5	$4\pi/160$	62	8.29972e-11		4.17968e-10	
0.444	$4\pi/180$	78	3.40451e-11	**7.56579**	1.83270e-10	**6.99968**

HHC-8 格式

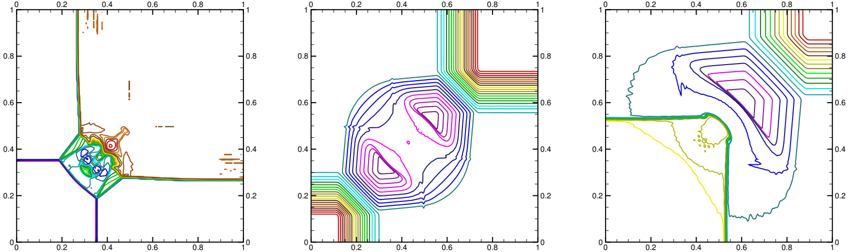
CFL	h	Nstep	L^1-error	L^1-order	L^∞-error	L^∞-order
0.5	$4\pi/100$	39	8.82554e-10		4.69837e-09	
0.417	$4\pi/120$	56	2.24268e-10	**7.51407**	1.20324e-09	**7.47139**
0.5	$4\pi/120$	46	3.47755e-10		1.84389e-09	
0.429	$4\pi/140$	63	1.09164e-10	**7.51635**	5.92636e-10	**7.36325**
0.5	$4\pi/140$	54	1.60710e-10		8.36642e-10	
0.438	$4\pi/160$	70	5.85239e-11	**7.56503**	3.17302e-10	**7.26078**
0.5	$4\pi/160$	62	8.29972e-11		4.17968e-10	
0.444	$4\pi/180$	78	3.40451e-11	**7.56579**	1.83270e-10	**6.99968**

二维欧拉方程组的黎曼问题 (300 × 300 个网格)

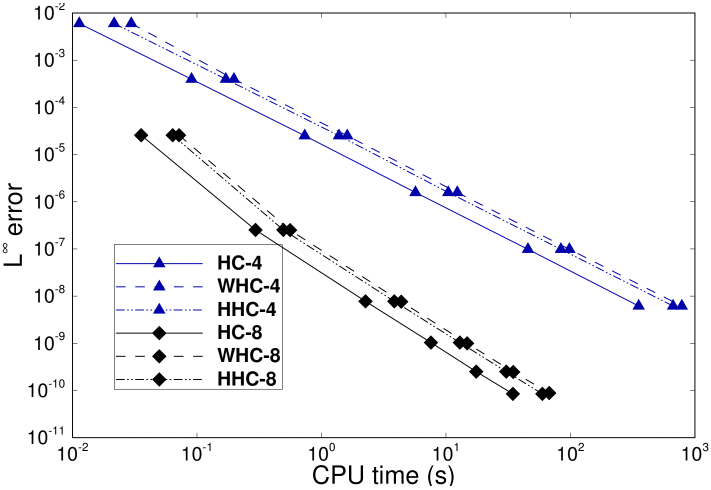
WHC-4 格式



HHC-4 格式



数值格式的时间效率



L^∞ error
CPU time (s)
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{-11}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
HC-4
WHC-4
HHC-4
HC-8
WHC-8
HHC-8

1 引言

2 改进的双曲守恒律两步四阶时间推进框架

3 一维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

4 二维基于紧致 Hermite 重构的双曲守恒律两步四阶数值格式

5 总结

总结

- **我们提出了改进的两步四阶时间推进框架。** 我们分析了原始的时间推进框架掉阶的原因，并在此基础上提出了改进的两步四阶时间推进框架。在改进的框架中导数重构采用更加紧致的 Hermite 重构时，获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。
- **我们设计了一维基于紧致 Hermite 重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。** 然后给了许多算例，验证了我们的一维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。
- **我们设计了二维基于紧致 Hermite 重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。** 然后给了许多算例，验证了我们的二维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

总结

- **我们提出了改进的两步四阶时间推进框架。** 我们分析了原始的时间推进框架掉阶的原因，并在此基础上提出了改进的两步四阶时间推进框架。在改进的框架中导数重构采用更加紧致的 Hermite 重构时，获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。
- **我们设计了一维基于紧致 Hermite 重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。** 然后给了许多算例，验证了我们的一维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。
- **我们设计了二维基于紧致 Hermite 重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。** 然后给了许多算例，验证了我们的二维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

总结

- **我们提出了改进的两步四阶时间推进框架。** 我们分析了原始的时间推进框架掉阶的原因，并在此基础上提出了改进的两步四阶时间推进框架。在改进的框架中导数重构采用更加紧致的 Hermite 重构时，获得的数值格式可以在光滑区域保持四阶精度。
- **我们设计了一维基于紧致 Hermite 重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。** 然后给了许多算例，验证了我们的一维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。
- **我们设计了二维基于紧致 Hermite 重构的基本无振荡的两步四阶数值格式。** 然后给了许多算例，验证了我们的二维数值格式具有高精度、稳定、紧致、高效以及基本无振荡的优良特性。

发表的学术论文

[1] **Ang Li**, Jiequan Li. Lax-wendroff solvers-based Hermite reconstruction for hyperbolic problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 447: 127915.

[2] **Ang Li**, Jiequan Li, Juan Cheng and Chi-Wang Shu, High order compact Hermite reconstructions and their application in the improved two-stage fourth order time-stepping framework for hyperbolic problems: two-dimensional case[J]. Communications in Computational Physics, Accepted.

请老师和同学们
批评指正！

References

- van der Houwen, P.J. (1996). "The development of Runge-Kutta methods for partial differential equations". In: *Applied Numerical Mathematics* 20.3, pp. 261–272. ISSN: 0168-9274. DOI: 10.1016/0168-9274(95)00109-3.
- Gottlieb, Sigal, David Ketcheson, and Chi-Wang Shu (2011). *Strong stability preserving Runge-Kutta and multistep time discretizations*. Singapore: World Scientific. DOI: 10.1142/7498.
- Lax, Peter and Burton Wendroff (1960). "Systems of conservation laws". In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13.2, pp. 217–237.
- Zwas, Gideon and Saul Abarbanel (1971). "Third and fourth order accurate schemes for hyperbolic equations of conservation law form". In: *Mathematics of Computation* 25.114, pp. 229–236.
- Seal, David C, Yaman Güçlü, and Andrew J Christlieb (2014). "High-order multiderivative time integrators for hyperbolic conservation laws". In: *Journal of Scientific Computing* 60, pp. 101–140. DOI: 10.1007/s10915-013-9787-8.

References

- Christlieb, A. et al. (2016). "Explicit strong stability preserving multistage two-derivative time-stepping schemes". In: *Journal of Scientific Computing* 68, pp. 914–942. DOI: 10.1007/s10915-016-0195-8.
- Li, Jiequan and Zhifang Du (2016). "A two-stage fourth order time-accurate discretization for Lax-Wendroff type flow solvers I. Hyperbolic conservation laws". In: *SIAM Journal of Scientific Computing* 38.5, A3046–A3069. DOI: 10.1137/15M1052512.
- Pan, L. et al. (2016). "An efficient and accurate two-stage fourth-order gas-kinetic scheme for the Euler and Navier-Stokes equations". In: *Journal of Computational Physics* 326, pp. 197–221. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.08.054.
- Harten, A. et al. (1987). "Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III". In: *Journal of Computational Physics* 71, pp. 231–303. DOI: 10.1016/0021-9991(87)90031-3.
- Shu, Chi-Wang (1998). "Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws". In: *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*. Ed. by Alfio Quarteroni. Berlin, Heidelberg: Springer, pp. 325–432. ISBN: 978-3-540-49804-9. DOI: 10.1007/BFb0096355.

References

- Liu, Xu-Dong, Stanley Osher, and Tony Chan (1994). "Weighted essentially non-oscillatory schemes". In: *Journal of Computational Physics* 115.1, pp. 200–212. DOI: 10.1006/jcph.1994.1187.
- Jiang, Guang-Shan and Chi-Wang Shu (1996). "Efficient implementation of weighted ENO schemes". In: *Journal of Computational Physics* 126.1, pp. 202–228. DOI: 10.1006/jcph.1996.0130.
- Shu, Chi-Wang (2020). "Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes". In: *Acta Numerica* 29, pp. 701–762. DOI: 10.1017/S0962492920000057.
- Hu, Changqing and Chi-Wang Shu (1999). "Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes". In: *Journal of Computational Physics* 150.1, pp. 97–127. DOI: 10.1006/jcph.1998.6165.
- Castro, Marcos, Bruno Costa, and Wai Sun Don (2011). "High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws". In: *Journal of Computational Physics* 230.5, pp. 1766–1792. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.11.028.

Referencs

- Capdeville, Guy (2008). “A central WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws on non-uniform meshes”. In: *Journal of Computational Physics* 227.5, pp. 2977–3014. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.11.029.
- Zhu, Jun and Chi-Wang Shu (2018). “A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy”. In: *Journal of Computational Physics* 375, pp. 659–683. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.09.003.
- Balsara, Dinshaw S, Sudip Garain, and Chi-Wang Shu (2016). “An efficient class of WENO schemes with adaptive order”. In: *Journal of Computational Physics* 326, pp. 780–804. DOI: 10.1016/j.jcp.2019.109062.
- Qiu, Jianxian and Chi-Wang Shu (2004). “Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case”. In: *Journal of Computational Physics* 193, pp. 115–135. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.07.026.
- — (2005). “Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method. II: Two dimensional case”. In: *Computers & Fluids* 34, pp. 642–663. DOI: 10.1016/j.compfluid.2004.05.005.

References

- Cockburn, Bernardo and Chi-Wang Shu (1989). "TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework". In: *Mathematics of Computation* 52, pp. 411–435. DOI: 10.2307/2008474.
- Cockburn, Bernardo, S. Hou, and Chi-Wang Shu (1990). "The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multi-dimensional case". In: *Mathematics of Computation* 54, pp. 545–581. DOI: 10.2307/2008501.
- Shu, Chi-Wang (2016). "High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: a brief survey of several recent developments". In: *Journal of Computational Physics* 316, pp. 598–613. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.04.030.
- Dumbser, Michael et al. (2008). "A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes". In: *Journal of Computational Physics* 227.18, pp. 8209–8253.
- Luo, Hong et al. (2012). "A Hermite WENO reconstruction-based discontinuous Galerkin method for the Euler equations on tetrahedral grids". In: *Journal of Computational Physics* 231.16, pp. 5489–5503.

References

- Xia, Yidong, Hong Luo, and Robert Nourgaliev (2014). "An implicit Hermite WENO reconstruction-based discontinuous Galerkin method on tetrahedral grids". In: *Computers & Fluids* 96, pp. 406–421.
- Godunov, Sergei Konstantinovich (1959). "A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations". In: *Mathematics Sbornik* 47, pp. 271–306.
- Roe, Philip L (1981). "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes". In: *Journal of computational physics* 43.2, pp. 357–372.
- Harten, Amiram, Peter D Lax, and Bram van Leer (1983). "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws". In: *SIAM review* 25.1, pp. 35–61.
- Toro, Eleuterio F, Michael Spruce, and William Speares (1994). "Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver". In: *Shock waves* 4, pp. 25–34.
- Ben-Artzi, Matania and Joseph Falcovitz (1984). "A second-order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics". In: *Journal of Computational Physics* 55.1, pp. 1–32. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90013-5.

Referencs

- Ben-Artzi, Matania, Jiequan Li, and Gerald Warnecke (2006). "A direct Eulerian GRP scheme for compressible fluid flows". In: *Journal of Computational Physics* 218.1, pp. 19–43. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.044.
- Li, Jiequan and Yue Wang (2017). "Thermodynamical effects and high resolution methods for compressible fluid flows". In: *Journal of Computational Physics* 343, pp. 340–354.
- 齐进 (2017). "二维欧拉方程组广义黎曼问题数值建模及其应用". PhD thesis. 北京: 北京师范大学.
- Du, Zhifang and Jiequan Li (2018). "A Hermite WENO reconstruction for fourth order temporal accurate schemes based on the GRP solver for hyperbolic conservation laws". In: *Journal of Computational Physics* 355, pp. 385–396. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.11.023.
- Li, Jiayin, Chi-Wang Shu, and Jianxian Qiu (2021). "Multi-resolution HWENO schemes for hyperbolic conservation laws". In: *Journal of Computational Physics* 446, p. 110653. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110653.

References

- Shu, Chi-Wang and Stanley Osher (1989). "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II". In: *Journal of computational physics* 83.1, pp. 32–78.
- Titarev, Vladimir A and Eleuterio F Toro (2004). "Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws". In: *Journal of Computational Physics* 201.1, pp. 238–260. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.05.015.
- Woodward, Paul and Phillip Colella (1984). "The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks". In: *Journal of Computational Physics* 54.1, pp. 115–173. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90142-6.
- Tang, Huazhong and Tiegang Liu (2006). "A note on the conservative schemes for the Euler equations". In: *Journal of Computational Physics* 218.2, pp. 451–459. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.03.035.
- Han, Ee, Jiequan Li, and Huazhong Tang (2011). "Accuracy of the adaptive GRP scheme and the simulation of 2-D Riemann problems for compressible Euler equations". In: *Communications in Computational Physics* 10.3, pp. 577–609. DOI: 10.4208/cicp.280410.300710a.