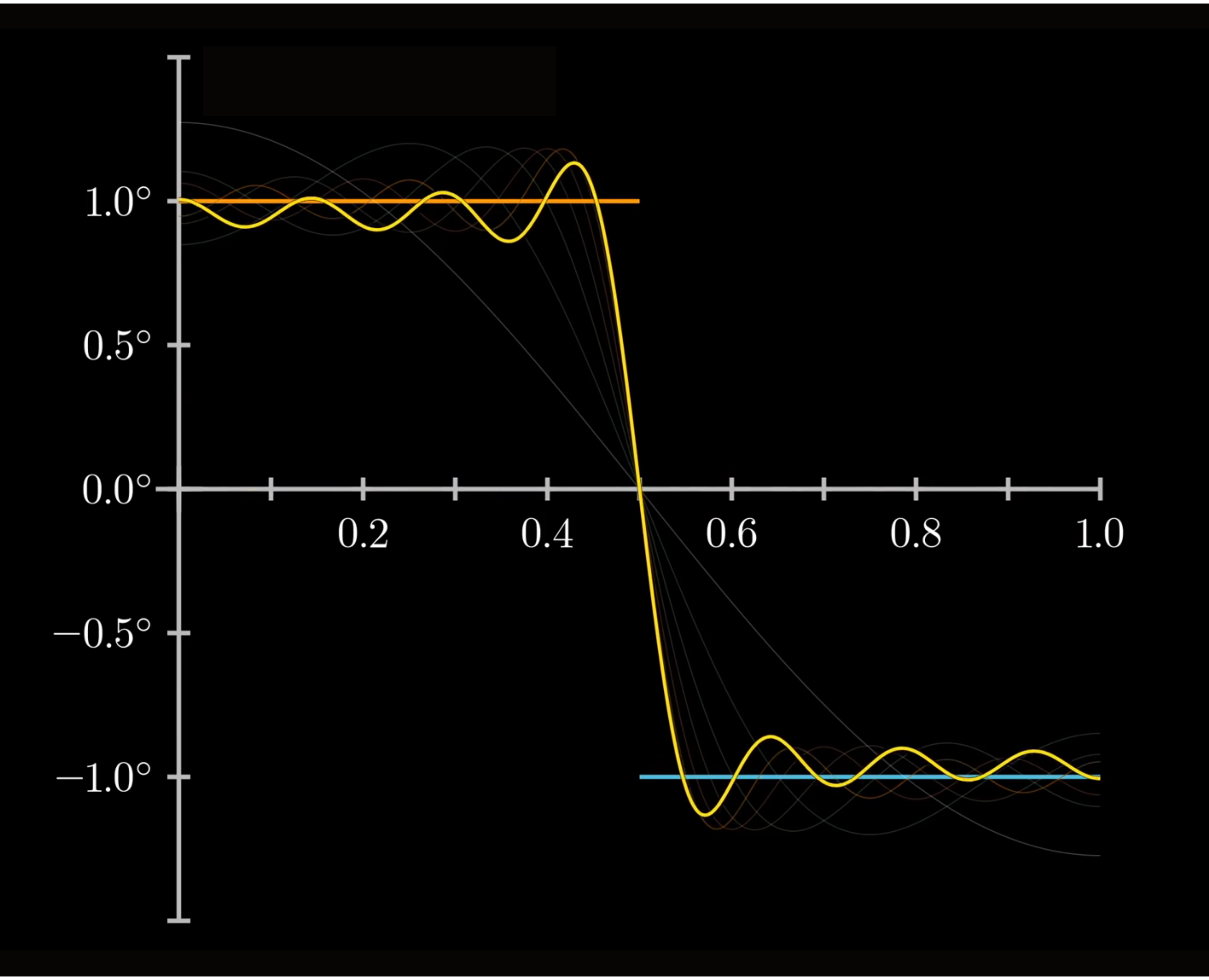
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudio Superiores Aragón
Ecuaciones Diferenciales
Dr. Arturo Rodríguez García

Series de Fourier



García González Karina
García Muratalla Luis Ángel
Gordillo Vázquez César Aarón
Valentin Baena Karla

¿Qué es una serie de Fourier?

En 1822 publicó la obra Teoría analítica del calor. En ella dedujo una ecuación en derivadas parciales para describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido y dio un método para resolverla que hoy en día se siguen aprendiendo en las carreras de ciencias e ingenierías. En uno de los pasos de su método, Fourier afirmaba que toda función periódica –que son las funciones que repiten su valor cada cierto intervalo– podía escribirse como una serie de funciones ondulatorias: senos y cosenos. Además, aportó la expresión exacta de los coeficientes de la serie –los valores que multiplican a cada seno y coseno–. Actualmente esta representación se conoce como serie de Fourier de una función.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones senoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo. Refierase al uso de un analizador de espectros.

Las series de Fourier tienen la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen(\frac{2\pi n}{T}x)$$

Donde a_n y b_n se denominan coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de la función $f(x)$.

¿Cómo se calculan los coeficientes de una serie de Fourier?

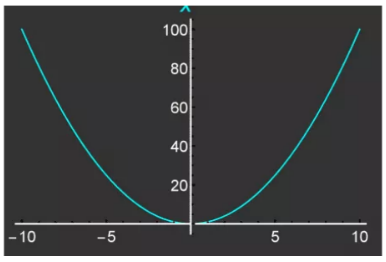
Los coeficientes a_0, a_n y b_n, son los coeficientes de Fourier y sus valores se pueden hallar de la siguiente manera:

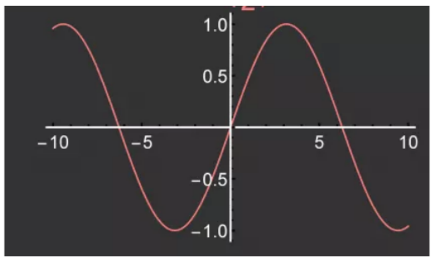
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx$$

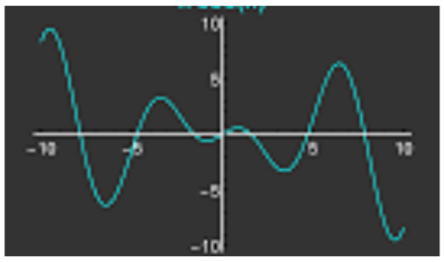
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(\frac{2n\pi}{T} x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, sen(\frac{2n\pi}{T} x)\, dx$$

Lo primero que se debe de hacer es crear la gráfica de la función que nos están dando para determinar el periodo y también ver si se trata de una función que es par, impar o ninguna de las dos.







Posteriormente a observar lo anterior, se van a tener que tomar en cuenta las siguientes condiciones:

- Si observamos que nuestra gráfica de la función es **par**, entonces se tendrá que hacer solamente los cálculos para los coeficientes $a0$ y an , ya que el valor del coeficiente bn nos daría 0.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x)$$

- Si al contrario, vemos que es **impar**, debemos de hacer los cálculos para los coeficientes $a0$ y bn ya que ahora an nos quedaría con valor de 0.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\frac{2\pi n}{T} x)$$

- Otro caso que puede suceder, es que nuestra gráfica **no es par ni impar**, por lo que se tendrá que sacar el valor de todos los coeficientes $a0$, an y bn .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\frac{2\pi n}{T} x)$$

A partir de todas esas consideraciones, se empiezan a sacar los valores de los coeficientes con las fórmulas para cada uno de ellos, en donde se deberá tener ya el valor del periodo, ya que es necesario para sustituirlo y resolver las integrales que se nos van presentando.

Finalmente, cuando tengamos el valor de cada coeficiente, se sustituirán en la fórmula general.

Calcula la serie de Fourier de una señal cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & si\ \frac{\pi}{2} < t \le \pi \end{cases}$$

$$T = \pi \qquad -> Ni\ par,\ ni\ impar$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\ dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi/2} 1\ dt + \int_{-\pi/2}^{\pi} 0\ dt \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\boxed{a_0 = 1}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, cos(\frac{2n\pi}{T}\ t)\ dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{T/2} 1\ cos(\frac{2n\pi}{\pi}\ t)\ dt\ +\ \int_{-\pi/2}^{\pi} 0\ cos(\frac{2n\pi}{\pi}\ t)\ dt\right]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{sen(n\pi)}{2n}\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{sen(n\pi)}{\pi n}}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} 1\ sen(\frac{2n\pi}{\pi}\ t)\ dt\ +\ \int_{-\pi/2}^{\pi} 0\ cos(\frac{2n\pi}{\pi}\ t)\ dt\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\ \frac{cos(\pi n)}{2n}\ +\ \frac{1}{2n}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\ \frac{cos(\pi n)+1}{2n}\right]$$

$$\boxed{b_n = \frac{1-cos(\pi n)}{\pi n}}$$

Al sustituir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos(\frac{2\pi n}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen(\frac{2\pi n}{T}t)$$

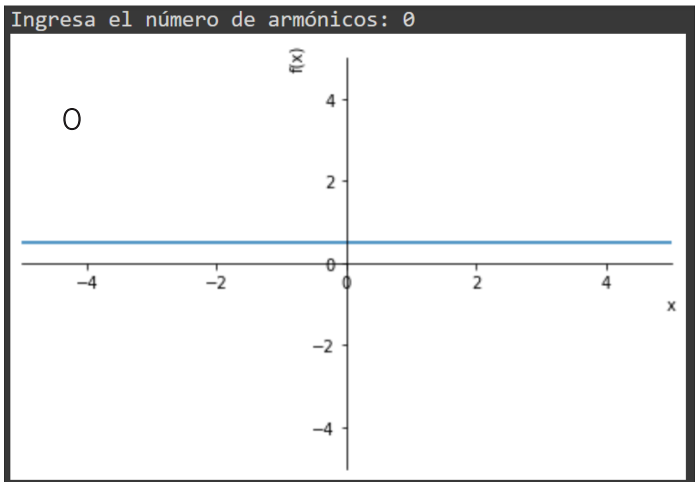
$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n\pi)}{\pi n} \cdot cos(\frac{2\pi n}{\pi}t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-cos(\pi n)}{\pi n} \cdot sen(\frac{2\pi n}{T}t)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n\pi)\cdot cos(2nt)}{\pi n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2nt)\ -\ sen(2nt)\cdot cos(\pi n)}{\pi n}}$$

Elabora un programa que solicita al usuario un número n y muestra la gráfica de la suma de los primeros n armónicos. Muestra tu código completo y las gráficas resultantes para los siguientes valores de n: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7,9,11,13,15,20,25,30,40,50,70,100,500,1000

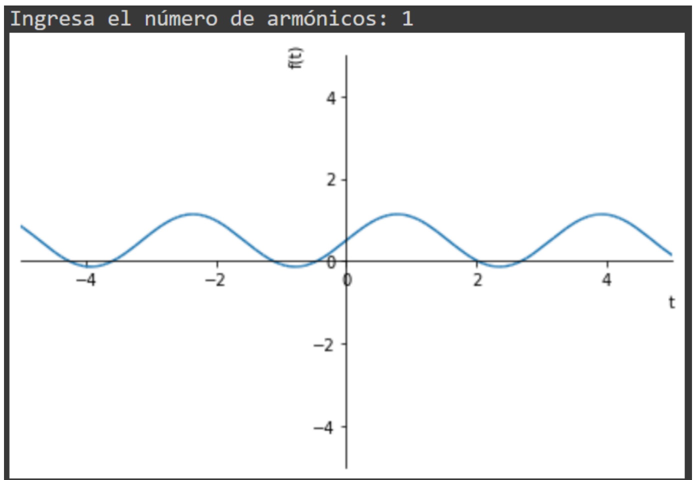
```
from sympy.parsing.sympy_parser import split_symbols_custom
#Importamos el módulo simpy
from sympy import *
#Además importamos las variables simbólicas 'n' y 't'
from sympy.abc import t, n
import sys
from decimal import *
import math

getcontext().prec = 100
p1 = Decimal(3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117070)

#Cambiamos el limite máximo de iteración en python
sys.setrecursionlimit(5000)

#Ingresamos los armónicos
armonicos = int(input('Ingresa el número de armonicos: '))
'''
Generamos las fórmulas para los coeficientes con la función
      | 1 Sí  0 < t <= π/2
f(t) |
      | 0 Sí  π/2 < t <= π
'''
ao = integrate(2.0 / pi, (t, 0, pi / 2.0))

#Comenzamos a formar la serie de Fourier con los armónicos proporcionados
serie = ao/2.0
for n in range(1, armonicos+1):
  #an = integrate((2 / pi) * cos(2 * n * t), (t, 0, pi / 2))
  #pprint(an)
  bn = integrate((2 / p1) * sin(2 * n * t), (t, 0, p1 / 2))
  #print(bn)
  #serie += (an* cos(2 * n * t))
  serie += (bn* sin(2.0 * n * t))

#Finalmente, mostramos la gráfica de ésta
plotting.plot(serie, ylim=(-5, 5), xlim=(-5,5))
```

```
Ingresa el número de armónicos: 0
```



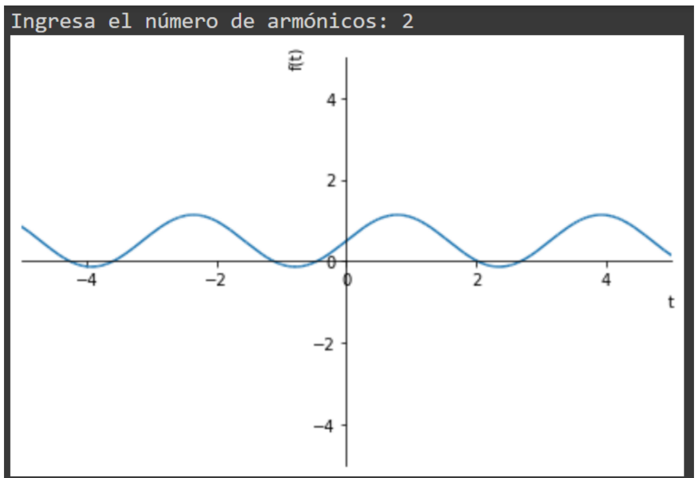

```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26173d2130>
```

```
Ingresa el número de armónicos: 1
```



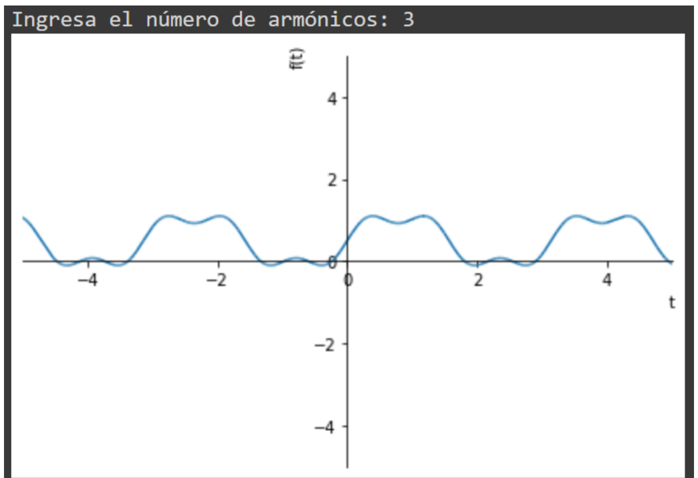

```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f261a8376a0>
```

```
Ingresa el número de armónicos: 2
```



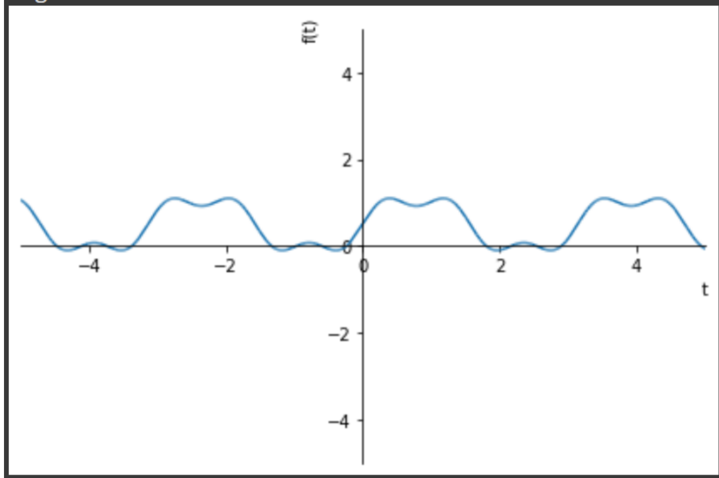

```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f261edd0250>
```

```
Ingresa el número de armónicos: 3
```



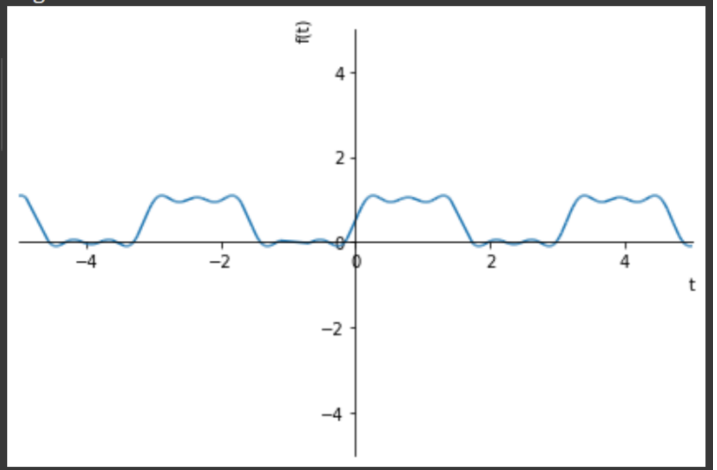

```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f261767faf0>
```

Ingresa el número de armónicos: 4



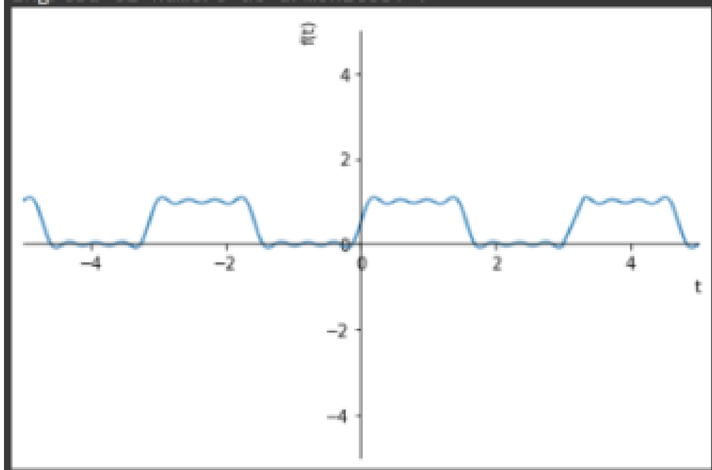
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26186aaaf0>

Ingresa el número de armónicos: 5



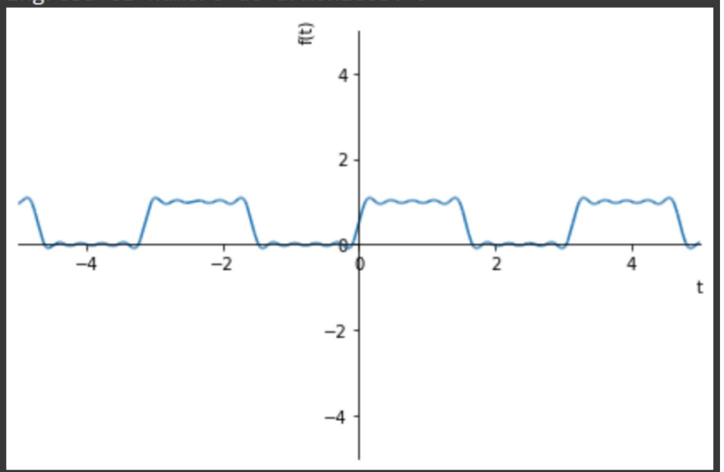
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2631820970>

Ingresa el número de armónicos: 7



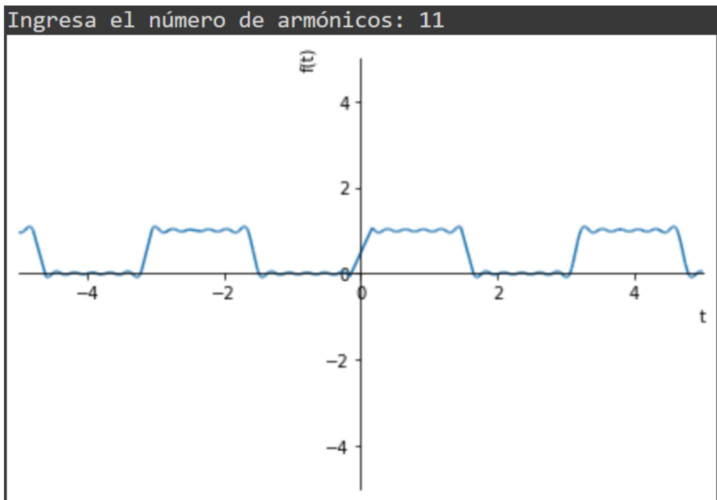
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26172227c0>

Ingresa el número de armónicos: 9



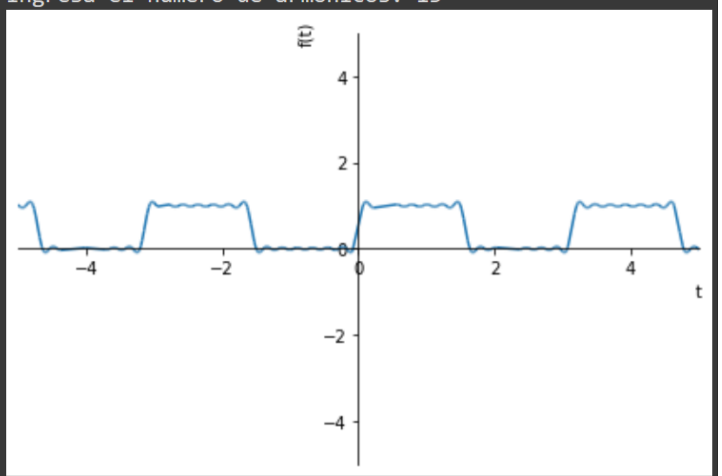
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2617886e50>

Ingresa el número de armónicos: 11



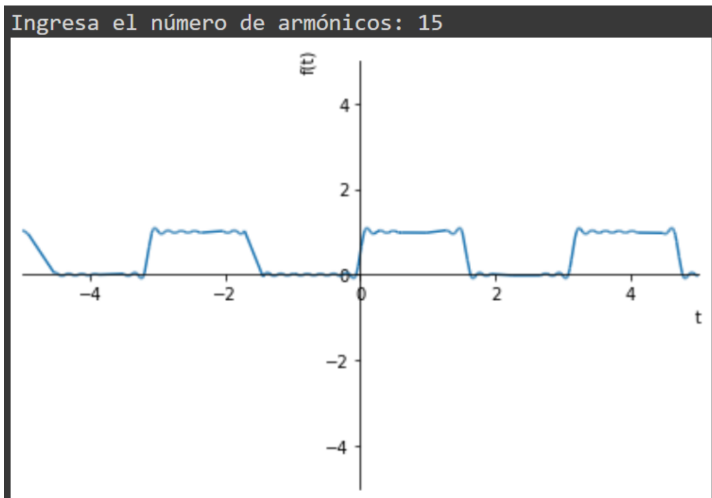
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2617bc49d0>

Ingresa el número de armónicos: 13



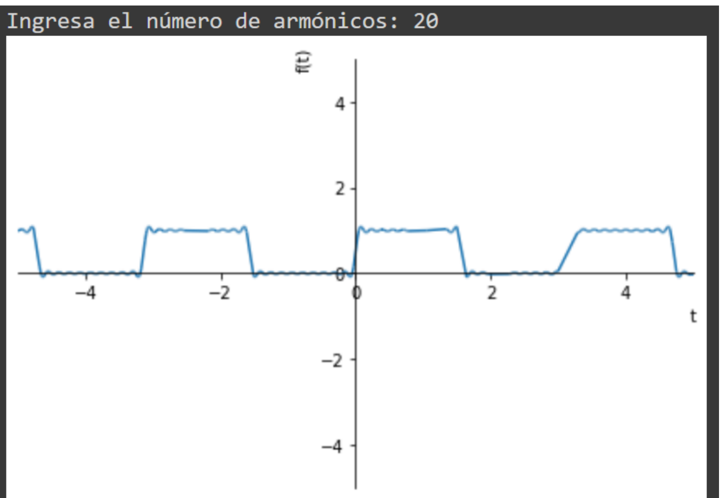
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2617adcc70>

Ingresa el número de armónicos: 15



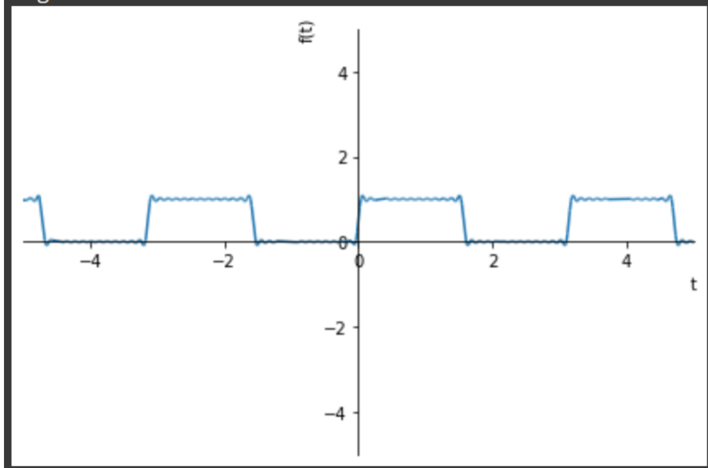
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2616a96f10>

Ingresa el número de armónicos: 20



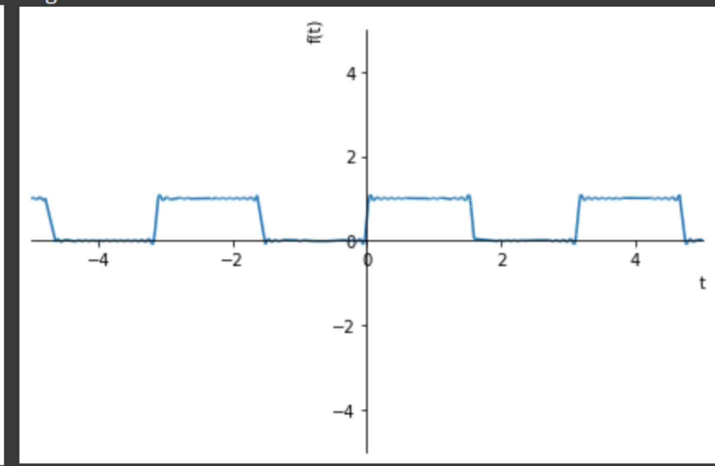
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26176a7a90>

Ingresa el número de armónicos: 25



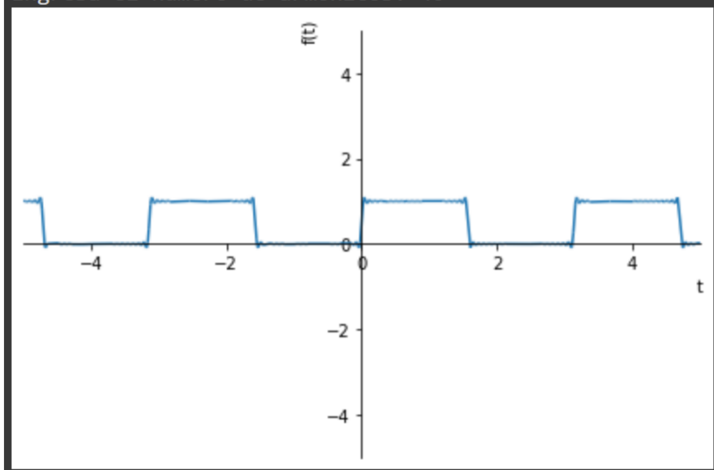
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26161612e0>

Ingresa el número de armónicos: 30



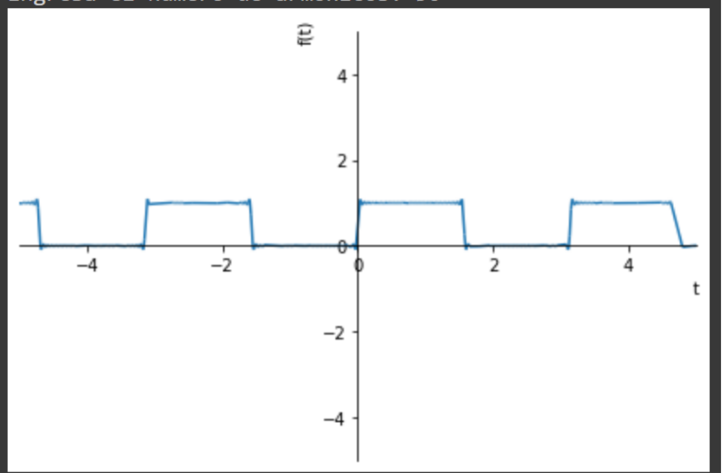
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2618baf3a0>

Ingresa el número de armónicos: 40



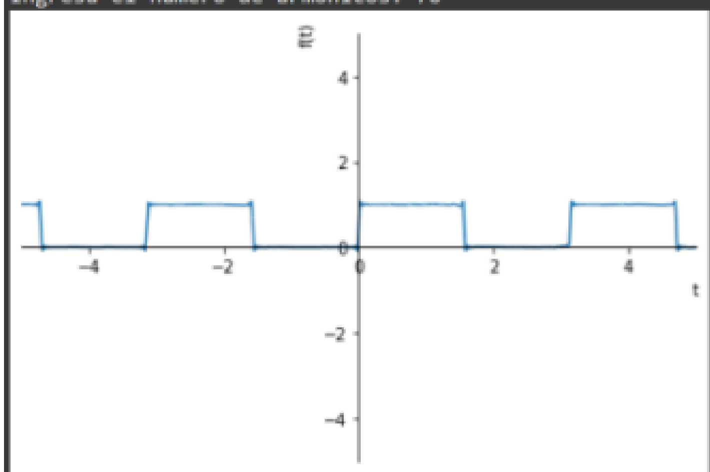
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2615d567f0>

Ingresa el número de armónicos: 50



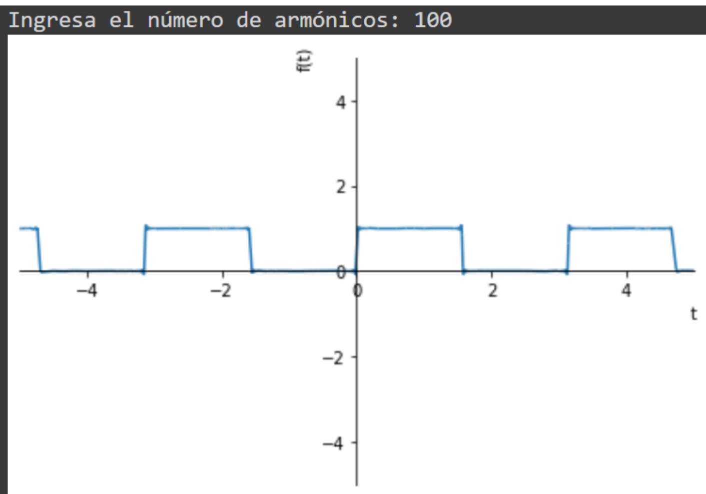
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2616142be0>

Ingresa el número de armónicos: 70



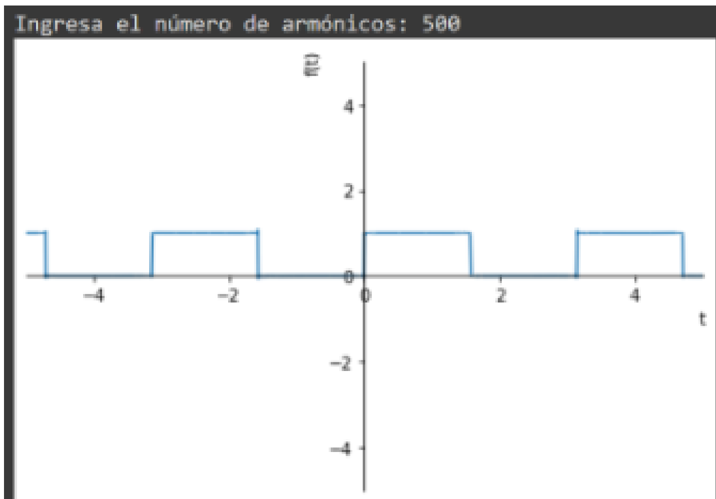
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f261552b790>

Ingresa el número de armónicos: 100



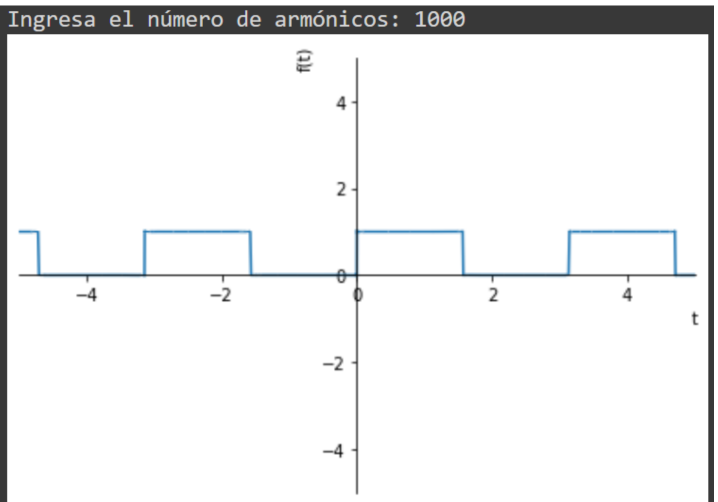
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2614f12340>

Ingresa el número de armónicos: 500



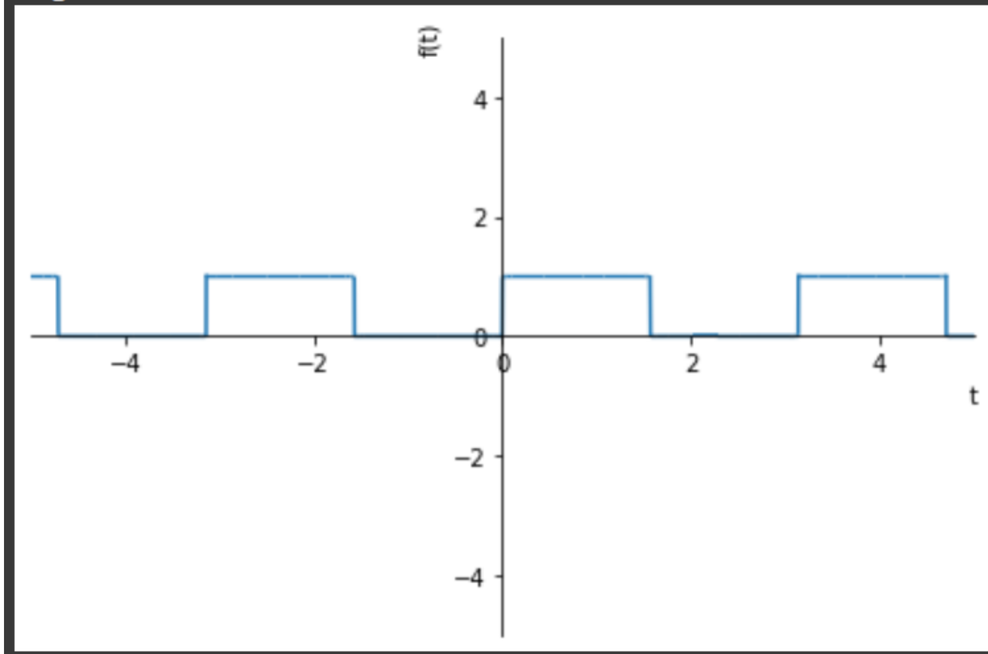
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f2618601250>

Ingresa el número de armónicos: 1000



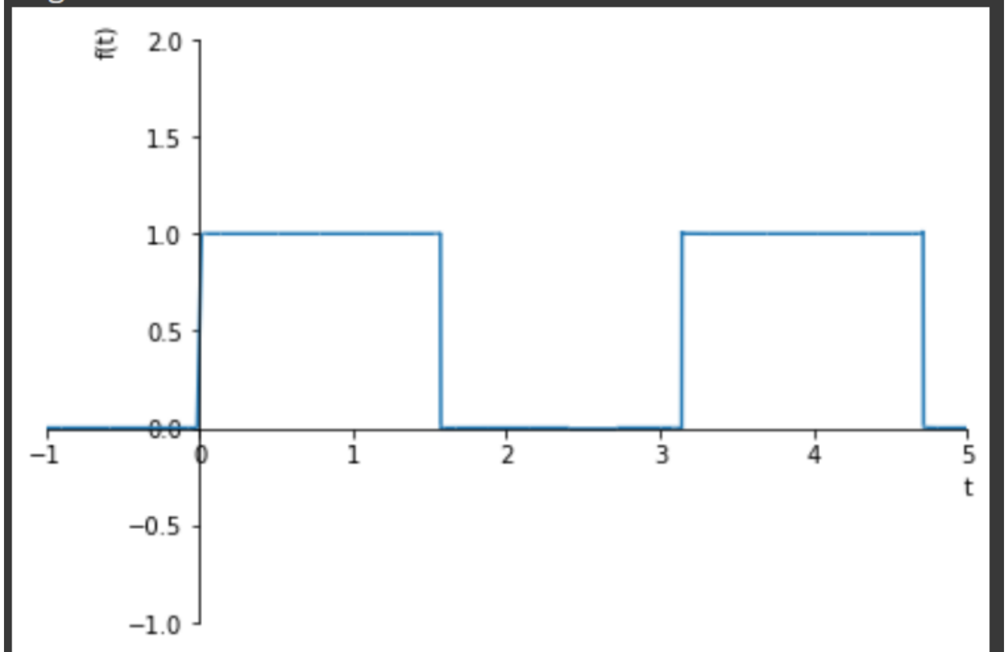
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26154ddfa0>

```
Ingresa el número de armónicos: 5000
```



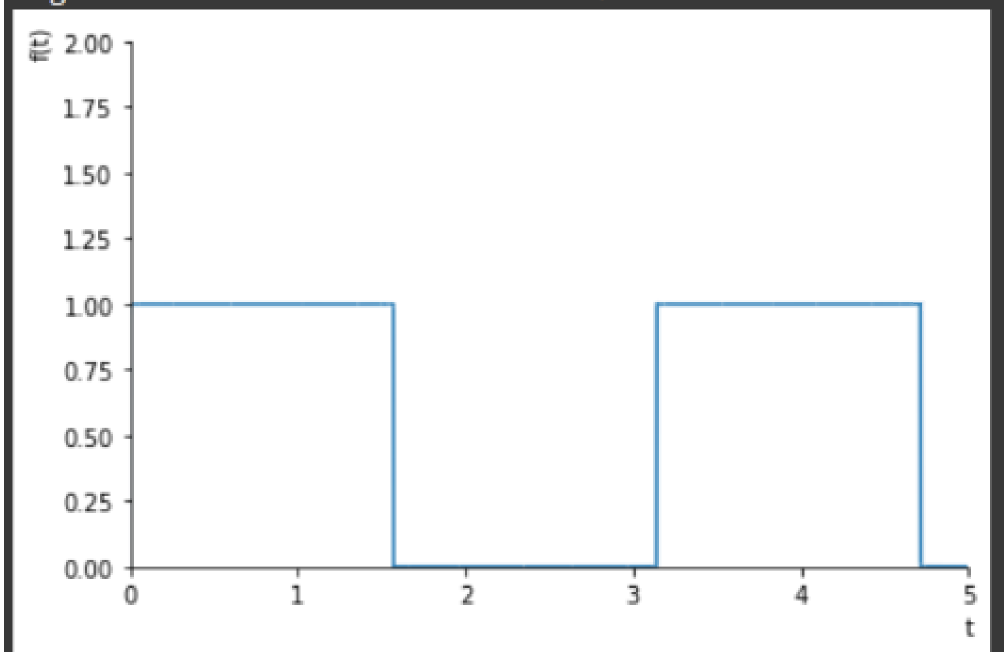

```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f260b73dbe0>
```

```
Ingresa el número de armónicos: 7000
```




```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f26064f3c70>
```

```
Ingresa el número de armónicos: 9500
```




```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f25f536ccd0>
```

El fenómeno de Gibbs es lo que podemos notar como “piquitos” en los extremos de la función.

Podemos observar que el fenómeno desaparece con el aumento del número de iteraciones. Si la sumatoria de éstas no se viera truncada, es decir, si fuera infinita, no se percibiría dicho fenómeno.