Matemática IV- 2022

TP3 - Números

1. Probar que no hay naturales simultáneamente pares e impares

2. Demostrar las siguientes propiedades para a, b, c números enteros :
   (a) $a|b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$
   (b) $a(a+1)$ es par
   (c) $a|b$ entonces $a|bc$
   (d) $a|b+c$ y $a|b$ entonces $a|c$

3. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) $1|a$ y $a|0$
   (b) $a|b$ y $b|a$ entonces $|a| = |b|$
   (c) $a|b$ y $c|b$ entonces $ac|b$
   (d) $a|b+c$ entonces $a|c$ ó $a|b$
   (e) $a|b$ y $a|c$ entonces $a|b+c$

4. Si a un número se lo divide por 4, el resto es 2 y si se lo divide por 3, el resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 12 ?

5. Sean a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de $(a + b^2)$

6. Calcular el máximo común divisor entre:
   (i) $(16, 38)$ (ii) $(120, 50)$ (iii) $(31, 57)$ (iv) $(-60, 45)$ (v) $(9834, 1430)$

7. Probar que si a y b son enteros:
   (a) $(a, 1) = 1$
   (b) si a es no nulo, $(a, 0) = |a|$
   (c) $(a, a) = |a|$
   (d) $(a, b) = (a - b, b)$

8. Hallar $mcd(5k + 3, 3k + 2)$, para cualquier k entero

9. Sean a y b dos enteros coprimos, demostrar que :
   (a) $a + b$ es coprimo con a
   (b) $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$

10. Si p es primo, calcular (a, p) para cualquier $a \in Z$

11. Sean $a, b \in Z$ y sea p primo. Demostrar que si $p|ab$ entonces $p|a$ ó $p|b$
    Mostrar que ésto no se cumple si p no es primo.

12. Hallar el menor entero positivo q tal que $6552q$ es el cuadrado de un entero.

13. Sean u y v números racionales. Probar que:
    (a) $u + v \in Q$ y $u - v \in Q$
    (b) $u.v \in Q$
    (c) Si u es no nulo, $u^{-1} \in Q$

    Demostrar que dados a y b en Q tales que $a < b$, existe otro número racional x tal que $a < x < b$.

14. Probar que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 3

15. Indique la parte real Re(z) y la parte imaginaria Im(z) de los siguientes complejos:
    a) $\sqrt{-49}$ b) $\sqrt{-20}$ c) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$ d) $z = -8$ h) $z = 7i$
    f) $z = (3 + i) + (5 - 4i)$ g) $z = 3i - (5 - 2i)$ h) $\frac{1+3i}{3-i}$ i) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$

16. La suma de un número complejo y su conjugado es -8 y la suma de sus módulos es 10. De qué números complejos se trata?

17. Encuentre x e y tales que:
    a) $x - 15i = 9 + 5yi$; b) $2x + 3yi = 6 + yi$;

18. Hallar, si existe, x real tal que $Re(z) = Im(z)$ siendo $z = \frac{x+2i}{4-3i}$

19. Demostrar que para cualquier complejo z vale que
    - $z.\overline{z} = |z|^2$
    - $z + \overline{z} = 2Re(z)$
    - $z - \overline{z} = 2Im(z)i$

20. Encontrar, si existe,un valor de k real para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un número real.

21. Calcular las siguientes potencias:
    a) i^{489} b) $-i^{1026}$ c) $(3i)^{168}$

22. Encontrar las formas de par ordenado, trigonométrica y exponencial de los siguientes complejos en forma binómica:
    $z_1 = 3 + 3i$ $z_2 = -1 + i$ $z_3 = 5 + 4i$ $z_4 = 9$ $z_5 = 5i$ $z_6 = -7$
    $z_7 = -4 - 4i$ $z_8 = -8i$ $z_9 = 2 - 2i$ $z_{10} = 3 - 4i$

23. Realizar las siguientes operaciones con los complejos del punto anterior:
    a) $z_1 + z_7$ b) $z_5 - z_3$ c) $z_9.z_6$ d) z_8/z_{10} e) $z_3 + z_6$ f) $z_2 - z_6$
    g) $z_3.z_{10}$ h) z_1^3 i) z_9^9 j) z_5^{15} k) z_{10}^3

    l) hallar las raíces cuartas de z_2

    m) hallar las raíces cúbicas de z_4

    n) hallar las raíces séptimas de i

Ejercicios Adicionales

1. Dados a,b, c enteros, probar que si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$

2. Demostrar que : Si $(a, b) = d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$

3. El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?

4. * Intente codificar (en el lenguaje que Ud prefiera) el *algoritmo de Euclides.* Pruebe que funciona con alguno de los ejercicios

5. * Investigue que dice *La criba de Eratóstenes* y trate de escribir un código que realice el procedimiento.

6. Sea m un número entero. Probar que 5 no divide a $m^2 + 2$.

7. Dados $a, b, c, d \in Z$, suponiendo que los denominadores no se anulen y que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ no es cero, probar:

   (a) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

   (b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

   (c) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

8. Demostrar que si p es primo y $n \in N$, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional

9. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. De qué números complejos se trata?

10. Encontrar el valor de h para que el complejo $\frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$ sea un imaginario puro.

11. Realizar las operaciones con los complejos del último ejercicio (antes de los adicionales):

    *) hallar las raíces cúbicas de z_5

    **) hallar las raíces quintas de z_6

    ***) hallar las raíces séptimas de z_8