

## Relaciones entre conjuntos

Una relación es una estructura discreta utilizada en matemáticas para representar las relaciones entre elementos de dos o más conjuntos.

En este apunte definiremos las relaciones  $n$ -arias pero estudiaremos con más detalle las relaciones binarias (de éstas pueden extenderse varias nociones a las primeras).

Además veremos algunas propiedades de las relaciones binarias y dos tipos especiales de ellas que más tarde nos servirán para estudiar algunas aplicaciones.

**Definición 0.1.** Una relación  $n$ -aria sobre  $A_1, \dots, A_n$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A_1 \times \dots \times A_n$

Si  $R$  es una relación  $n$ -aria sobre  $A_1, \dots, A_n$  se llama  **$i$ -ésima proyección**  $\Pi_i$  a la aplicación de  $R$  en  $A_i$  que a cada  $n$ -upla de  $R$  le asigna su  $i$ -ésima coordenada.

**Ejemplo 0.2.** Como todo conjunto, las relaciones están dadas por extensión, dando todos las tuplas que la componen, o por comprensión dando la propiedad que la caracteriza.

- $R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < b < c\}$  es una relación 3-aria (o ternaria) definida en el conjunto de los números reales

- Supongamos los siguientes conjuntos:

$$A = \{\text{alumnos de mate 4}\} = \{\text{Ana, Pedro, Juan, Lucía, Felipe, ....}\}$$

$D = \{\text{docentes de mate 4}\} = \{\text{Antonio, Diego, Eli, Mari, Franco ....}\}$

$E = \{\text{evaluaciones de mate 4}\} = \{\text{parcial1, parcial2, parcial3, parcial4, ...}\}$

$N = \{\text{notas}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

*Podemos definir una relación 4-aria (o cuaternaria) sobre los conjuntos anteriores donde cada tupla muestre a los alumnos con la nota que alcanzó en determinado examen y el docente que corrigió.*

$R = \{(Ana, \text{parcial1}, 9, Antonio); (Juan, \text{parcial2}, 8, Eli); (Lucia, \text{parcial1}, Mari, 10); \dots$   
 $\dots (Felipe, \text{parcial2}, Diego, 7); (Felipe, \text{parcial3}, 8, Eli); \dots\} \subset A \times E \times N \times D$

Una aplicación de las relaciones n-arias es el análisis de las bases de datos (específicamente las bases de datos relacionales).

Existe una analogía entre *Relación* (conjunto matemático) y *Tabla* .

Los conceptos básicos de una base de datos relacional son:

- Tablas: son las relaciones (que representan las bases de datos).
- Registros: son las n-tuplas
- Campos: son las entradas de las n-tuplas (elementos de los conjuntos).
- Atributos: son las columnas de cada tabla

# 1 Relaciones Binarias

Las relaciones 2-arias se llaman también **binarias**, entonces:

*Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , una relación binaria definida entre los mismos es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ , caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos*

$$R = \{(x, y) / (x, y) \in A \times B\} \subset A \times B$$

*Muchas veces cuando  $(x, y) \in R$  escribiremos  $xRy$  y diremos que  $x$  está relacionado por  $R$  con  $y$ .*

**Ejemplos 1.1.**    1. Si  $A = \{x/x \text{ es vocal}\}$  y  $B = \{\text{brisa, sol, mar, nube}\}$

*y la relación en  $A \times B$  viene definida por:  $xRy$  si y sólo si  $x$  es letra de  $y$ .*

*Entonces, la relación definida por extensión quedaría:*

$$R = \{(i, \text{brisa}); (a, \text{brisa}); (a, \text{mar}); (o, \text{sol}); (u, \text{nube}); (e, \text{nube})\}$$

2. Si  $A = \{\text{enteros pares entre } -4 \text{ y } 10 \text{ inclusive}\}$ ,  $B = \mathbb{Z}$  y la relación viene definida en la forma:  $xRy$  si y sólo si  $y$  es el cuadrado de  $x$

*Entonces, la relación definida por extensión quedaría:*

$$R = \{(-4, 16); (-2, 4); (0, 0); (2, 4); (4, 16); (6, 36); (8, 64); (10, 100)\}$$

- **Dominio e Imagen de una Relación**

Sea  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ .

Se llama **dominio** de  $R$  al conjunto de elementos  $x$  de  $A$  tales que  $(x, y) \in R$

$$Dom_R = \{x \in A : (x, y) \in R\}$$

Se llama **imagen** de  $R$  al conjunto de elementos  $y$  de  $B$  tales que  $(x, y) \in R$

$$Im_R = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

**Ejemplo 1.2.** *Dados los conjuntos  $A = \{a, e, i\}$  y  $B = \{sol, nube, cielo\}$  y la relación  $R$  en  $A \times B$  definida por:  $xRy$  si y sólo si  $x$  es letra de  $y$ , esto es:  $R = \{(e, nube), (i, cielo)\}$*

*Luego,*

$$Dom(R) = \{e, i\} \subset A$$

$$Im(R) = \{nube, cielo\} \subset B$$

- **Relación Inversa**

Sea  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ . Se llama **relación inversa** de  $R$  al subconjunto de  $B \times A$  definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

**Ejemplo 1.3.** *Sean  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  y  $B = \{-27, -16, -8, -2, -1, 0, 1, 2, 8, 16, 27\}$ , y sea  $R$  de  $A$  en  $B$  definida por :  $xRy$  si y sólo si  $x$  es el cubo de  $y$ ; dada por extensión por:*

$$R = \{(-8, -2); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (8, 2); (27, 3)\}$$

$$\text{Entonces, } R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} = \{(-2, -8); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (2, 8); (3, 27)\}$$

*es decir,  $yR^{-1}x$  si y sólo si  $y$  es la raíz cúbica de  $x$*

- **Composición**

Dadas las relaciones  $R$  en  $A \times B$  y  $S$  en  $B \times C$  se puede construir la relación composición

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset A \times C$$

**Ejemplo 1.4.** Sean los siguientes subconjuntos de enteros:  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  y  $C = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Sea  $R$  de  $A$  en  $B$  definida por :  $xRy$  si y sólo si  $x$  es el opuesto de  $y$ , y escrita por extensión:  $R = \{(-2, 2); (-1, 1); (0, 0); (1, -1); (2, -2)\}$

Sea  $S$  de  $B$  en  $C$  definida por :  $xRy$  si y sólo si  $y$  es el doble de  $x$ , y escrita por extensión:  $S = \{(-2, -4); (-1, -2); (0, 0); (1, 2); (2, 4)\}$

Ahora busquemos la relación compuesta. Observemos que podremos encontrar  $SoR$  de  $A$  en  $C$  pero no  $RoS$ .

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} = \{(-2, 4); (-1, 2); (0, 0); (1, -2); (2, -4)\}$$

**Ejemplo 1.5.** Sean  $A$  un conjunto de alumnos,  $B$  un banco de preguntas de un formulario y  $C = \{10, 15, 20, 30\}$ .

Sea  $R$  de  $A$  en  $B$  dada por:  $aRb$  si y sólo si  $a$  contestó correctamente la pregunta  $b$  y sea  $S$  la relación de  $B$  en  $C$  :  $bSc$  si y sólo si  $c$  es el puntaje asignado a la pregunta  $b$

Entonces la relación compuesta  $RS$  está definida de la siguiente forma:

$a SoR b$  si y sólo si  $a$  contestó correctamente una pregunta con puntaje asignado  $c$

## 1.1 Relaciones Binarias en un conjunto

Si una relación  $R$  es tal que  $R \subset A \times A$ , se dice que está definida en el conjunto  $A$  (o que  $R$  es una relación sobre  $A$ )

En este tipo de relaciones se pueden definir las siguientes propiedades:

- **Reflexividad:**  $R$  será *reflexiva* si para todo  $x \in A$  vale que  $xRx$
- **Simetría:**  $R$  será *simétrica* si para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  implica  $yRx$
- **Antisimetría:**  $R$  será *antisimétrica* si para todo  $x, y$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRx$  implican que  $x = y$
- **Transitividad:**  $R$  será *transitiva* si para todo  $x, y, z$  en  $A$  vale que  $xRy$  e  $yRz$  implican que  $xRz$

Obs: Vemos que las propiedades están definidas por un condicional entonces para probarlas debemos mirar bien que *si se cumple que el antecedente es Verdadero tiene que ser Verdadero también el consecuente para que todo el condicional sea Verdadero*, es decir los únicos casos **falsos** son los de antecedente Verdadero y consecuente Falso. Recordemos que de igual manera, *antecedente Falso hace que el condicional sea Verdadero, no importa cual sea el valor de verdad del consecuente*, entonces si no encontramos un par no tenemos que buscar su inverso u otro para componer para probar simetría, antisimetría o transnitividad.

**Ejemplos 1.6.** 1. Sea  $A = \{a, b, c\}$

- $R = \{(a, b); (a, a); (b, b)\}$  es transitiva pero no simétrica ni reflexiva. También es antisimétrica.

Como no todos los elementos de  $A$  están relacionados consigo mismo  $R$  no puede ser reflexiva. Tampoco es simétrica porque vemos que tenemos el par  $(a, b)$  pero no está el  $(b, a)$ . Como todos los pares que se pueden componer tienen en el mismo conjunto  $R$  su par compuesto decimos que es transitiva. Cada par que tiene su inverso cumple que su primer coordenada es igual a la segunda.

- $R = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$  es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva

*Esta relación es bastante trivial, es la Identidad de  $A$  que ya antes mencionamos ( $\Delta_A$ ). Se ve fácilmente que cumple con todas las propiedades (claramente todos los elementos se relacionan consigo mismo; como la primer coordenada es igual a la segunda en todos los casos, tenemos el par inverso, y por lo tanto será simétrica. La transitividad y antisimetría se da al no cumplirse (o cumplirse de manera trivial al relacionar cada par con él mismo) la conjunción del antecedente.*

- $R = \{(a, b); (b, c); (a, c); (c, b); (a, a); (b, b); (c, c)\}$  es reflexiva, transitiva pero no es simétrica ni antisimétrica.

*Como para cada elemento  $x \in A$  encontramos el par  $(x, x)$  entonces es reflexiva. Si miramos cada par que puede componerse vemos que está también el compuesto (por ejemplo,  $(a, b)$  y  $(b, c)$  se pueden componer y nos da  $(a, c)$  que está; lo mismo con  $(a, c)$  y  $(c, b)$  que da  $(a, b)$ , o  $(b, c)$  y  $(c, b)$  que devuelven  $(c, c)$  y  $(b, b)$  que están en  $R$ ).*

*Vemos que no es simétrica ya que tenemos al par  $(a, b)$  pero no a su inverso el par  $(b, a)$  (no importa que otros pares tengan a su inverso, tiene que darse para todos). Tampoco es antisimétrica ya que está el par  $(b, c)$  y el par  $(c, b)$  pero  $b \neq c$ .*

*Éste es un ejemplo de una relación que no es ni simétrica ni antisimétrica, mostrando que una propiedad no es “opuesta” a la otra.*

2. La relación  $x \leq y$  en el conjunto de los números naturales es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Obviamente no es simétrica.

*Observemos que si el “menor” es estricto la relación no sería reflexiva ni antisimétrica.*

3. En el conjunto de las rectas del plano, la relación  $L$  es paralela a  $M$  es reflexiva, simétrica y transitiva (podemos pensarlo geométricamente o recordar que dos rectas del plano son paralelas si tienen igual pendiente).

4. La relación de “ $X$  es correlativa con  $Y$ ”, entre las materias de un plan de estudio (de una carrera en particular), es transitiva

### 1.1.1 Relaciones de Orden

**Definición 1.7.** Una relación binaria  $R$  definida sobre un conjunto  $A$  es un **preorden** en  $A$  si es reflexiva y transitiva.

$R$  es una **relación de orden** (ó un **orden** sobre  $A$ ) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Muchas veces diremos que la relación ordena  $S$  y la notaremos por  $\leq$  (no confundir este símbolo con el orden de los números reales, el orden de los reales es un ejemplo más de orden).

Al par del conjunto y su orden lo denotaremos  $(A, R)$  ó  $(A, \leq)$  y lo llamamos conjunto ordenado.

Con esto se pretende formalizar la idea intuitiva de orden de un conjunto.

**Ejemplos 1.8.** Varios conjuntos con los que estamos familiarizados o estudiamos antes en este apunte son conjuntos ordenados:

- Dado  $\mathbb{R}$ , el conjunto de los números reales, y su orden usual, se puede ver fácilmente que se cumplen las tres propiedades para que sea un conjunto ordenado.
- La relación sobre un conjunto  $A$  llamada **relación Identidad** y denotada por  $\Delta_A$  es una relación de orden.
- Dado un conjunto  $S$ , sea  $P(S)$  el conjunto de “Partes de  $S$ ”, o sea, el conjunto de todos los subconjuntos de  $S$ .

La inclusión de conjuntos  $\subseteq$  en  $P(S)$  es una relación de orden (todo subconjunto de  $S$  está contenido o es igual a si mismo, entonces tenemos la reflexividad. Si vale la doble inclusión entre conjuntos entonces los dos conjuntos son iguales y la relación es antisimétrica. Es fácil ver que también vale la propiedad transitiva de la inclusión entre subconjuntos.

Si pensamos en la inclusión estricta entonces la relación sería un preorden.

- Sea  $B = \{B, \wedge, \vee, ', 0, 1\}$  un algebra de Boole y sea  $x$  la relación dada por  $a \leq b$  si y sólo si  $a \wedge b = a$  es un orden en  $B$ .



- Dado el conjunto de todos los alumnos de la facultad podemos ordenarlo por el número de legajo de cada alumno.
- Sea  $A$  un conjunto de personas y sea  $R$  la relación sobre  $A$  dada por  $aRb$  si y sólo si la estatura de  $a$  es menor a la estatura de  $b$   
 $R$  es un preorden y sería un orden sólo si entre todas las personas de  $A$  no hay personas con la misma estatura.

**Ejemplo 1.9.** La divisibilidad es una relación de orden en  $\mathbb{N}$

Recordemos que  $a$  **divide** a  $b$ , y se escribe  $a|b$  si existe un entero  $c$  tal que  $b = ac$ . Ahora probemos que esta relación entre números naturales cumple las tres propiedades necesarias para ser una relación de orden.

- para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n|n$  ya que existe 1 tal que  $n = n \cdot 1$ ; por lo tanto la relación es reflexiva.
- para todo par  $n, m \in \mathbb{N}$ , si  $n|m$  y  $m|n$  entonces  $n = m$  ya que  $n|m$  implica que existe  $k$  tal que  $m = nk$ ; por otro lado, si  $m|n$  existe  $h$  tal que  $n = mh$ . Luego,  $n = mh = (nk)h = n(kh)$  y como son todos números naturales  $kh = 1$  y  $n = m$ . De esta manera probamos que la relación es antisimétrica.
- dados tres números naturales cualesquiera,  $n, m, r$  tales que  $n|m$  y  $m|r$ , entonces probaremos que  $n|r$  para demostrar que la relación es transitiva.

Como  $n|m$  existe  $k$  tal que  $m = nk$  y como  $m|r$  existe  $h$  tal que  $r = mh$ ;

luego,  $r = mh = (nk)h = n(hk)$  entonces existe un natural  $t = hk$  tal que  $r = nt$  y por lo tanto  $n|r$  como queríamos probar.

Observemos que si en lugar del conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales tomamos el conjunto de los enteros,  $\mathbb{Z}$ , no se cumplirá la propiedad de antisimetría  
 (ya que  $n|-n$  y  $-n|n$  PERO  $n \neq -n$ ).

La divisibilidad en  $\mathbb{Z}$  no es un orden (es un preorden)

Observemos que mientras en algunos de los ejemplos anteriores todos los elementos están relacionados (dados dos números reales cualesquiera  $x$  e  $y$ , siempre se da que :  $x \leq y$ ,  $x = y$  ó  $y \leq x$ , todas las personas pueden compararse por su altura, etc), en otros ejemploa hay elementos que no están relacionados (podemos encontrar subconjuntos  $E$  y  $H$  de  $S$  que tengan intersección vacía o que tengan elementos en común pero no se dé ninguna de las dos inclusiones  $E \not\subset H$  y  $H \not\subset E$ . Hay naturales  $m$  y  $n$  tales que no se cumple  $m|n$  ni  $n|m$  ).

Esta diferencia define nuevos tipos de conjuntos ordenados:

**Definición 1.10.** Dado un conjunto ordenado  $(A, R)$  se dice que dos elementos  $a, b$  del conjunto son **comparables** si se verifica que  $aRb$  ó  $bRa$ , en caso contrario se dice que son **incomparables**.

Si todos los elementos de  $A$  son comparables dos a dos entonces se dice que  $A$  está **totalmente ordenado** y que  $R$  es un **orden total** en  $A$ . Si existen elementos incomparables se dirá que  $R$  es un **orden parcial** en  $A$ .

Sabemos que los números reales están ordenados por su orden usual  $\leq$ , es igual con los naturales, enteros y racionales (con el mismo orden usual). Además vimos que los naturales y los enteros pueden ser ordenados (o parcialmente ordenados) por la relación *divide*. Pero, ¿qué pasa con los números complejos? hay alguna forma de ordenarlos?

Si pensamos a los complejos como pares ordenados y definimos una relación entre pares (*serían pares de pares...*) podríamos ver que tipo de orden hay entre ellos.

No sólo podemos pensar en el producto de dos relaciones si no de  $n$  relaciones:

**Definición 1.11.** Sean  $(A_1, R_1), (A_2, R_2) \dots (A_n, R_n)$  una familia de conjuntos ordenados.

- Se llama relación **orden producto** (estándar) a la relación  $R \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  definida por:  $(x_1, x_2, \dots, x_n)R(y_1, y_2, \dots, y_n)$  si y sólo si  $x_1R_1y_1, x_2R_2y_2 \dots x_nR_ny_n$  para todo  $i = 1 \dots n$
- Se llama relación **producto lexicográfico** a la relación  $L \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  definida por:  $(x_1, x_2, \dots, x_n)L(y_1, y_2, \dots, y_n)$  si y sólo si  $x_i = y_i$  para todo  $i = 1 \dots n$ , ó  $x_jR_jy_j$  siendo  $j$  el primer índice tal que  $x_j \neq y_j$

### 1.1.2 Relaciones de Equivalencia

**Definición 1.12.** Diremos que una relación  $R$  definida sobre un conjunto  $A$  reflexiva, simétrica y transitiva es una **relación de equivalencia** (ó que es un equivalencia en  $A$ )

Muchas veces notaremos a una relación de equivalencia  $R$  por  $\sim$ ,  $\approx$  ó  $\equiv$

La idea de equivalencia sobre un conjunto permite establecer una relación entre los elementos del conjunto que comparten cierta característica o propiedad. Esto permitirá reagrupar dichos elementos.

**Ejemplos 1.13.** • La igualdad matemática (ya sean conjuntos numéricos o conjuntos en general) es trivialmente una relación de equivalencia.

- La relación sobre un conjunto  $A$  llamada **relación Identidad** y denotada por  $\Delta_A$  es una relación de equivalencia.
- Antes vimos que en el conjunto de las rectas del plano, la relación  $L$  es paralela a  $M$  es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto esta relación es una Equivalencia.
- Pensemos en los ángulos (esto ya lo usamos cuando trabajamos con los argumentos de los números complejos en forma trigonométrica, polar o exponencial!!).

Decimos que  $\alpha \sim \beta$  si y sólo si existe un entero  $k$  tal que  $\alpha = \beta + 2k\pi$

Claramente la relación es reflexiva ya que para  $k = 0$  todo ángulo está relacionado con sí mismo.

Supongamos que  $\alpha \sim \beta$  entonces existe  $k$  tal que  $\alpha = \beta + 2k\pi$ , luego  $\beta = \alpha - 2k\pi = \alpha + 2(-k)\pi$ , y por lo tanto  $\beta \sim \alpha$  mostrando que la relación es simétrica.

Por último probemos que  $\sim$  es transitiva. Si  $\alpha \sim \beta$  y  $\beta \sim \delta$  entonces veremos que  $\alpha \sim \delta$

$\alpha \sim \beta$  entonces existe  $k$  tal que  $\alpha = \beta + 2k\pi$

$\beta \sim \delta$  entonces existe  $h$  tal que  $\beta = \delta + 2h\pi$

por lo tanto,  $\alpha = \beta + 2k\pi = (\delta + 2h\pi) + 2k\pi = \delta + 2(h+k)\pi$  con  $h+k$  entero, obteniendo que  $\alpha \sim \delta$

- Sea  $A$  el conjunto de los alumnos de Mate 4, y sea  $R$  la relación definida por  $\mathbf{aRb}$  si y sólo si el apellido de  $\mathbf{a}$  comienza con la misma letra que el apellido de  $\mathbf{b}$

- Sea  $E$  un conjunto de conjuntos.

La relación  $X \sim Y$  si y sólo si existe una biyección de  $X$  en  $Y$  es una equivalencia en  $E$ . A esta relación se la llama de **coordinabilidad**, y los conjuntos  $X$  e  $Y$  se dicen **coordinables**. (puede que recuerden (o estudien más adelante) esta relación en otras materias de la carrera)

- Sea un entero  $p$  fijo.

La relación  $x \sim y$  si y sólo si  $(x - y)$  es múltiplo de  $p$  es una equivalencia (se llama relación de congruencia y la estudiaremos más adelante).

## Clases de Equivalencia, Conjunto Cociente y Particiones

**Definición 1.14.** Dada una relación de equivalencia  $R$  sobre  $A$  y un elemento  $a \in A$  se denominará **clase de equivalencia de  $a$  por  $R$**  y se denotará  $\bar{a}$  (ó  $\mathbf{R}(a)$ ) al conjunto de todos los elementos de  $A$  que están relacionados con  $a$  por  $R$ . Es decir,  $\bar{a} = \{x \in A : xRa\}$

Cualquier elemento de  $\bar{a}$  se llama **representante** de la clase, y en particular, como la relación es reflexiva se da que  $a \in \bar{a}$ , luego  $a$  es representante de la clase  $\bar{a}$  para todo  $a \in A$ .

**Ejemplos 1.15.** • La relación de equivalencia  $L$  es paralela a  $M$  en el conjunto de las rectas del plano, podemos tomar como representante de cada **clase** a la recta que pasa por el origen

- Cuando se trabaja con números racionales sabemos que una propiedad que tienen las fracciones es la siguiente:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ac = bd$ , entonces por lo general uno toma o “se queda” con la fracción irreducible que la cumpla.

Esa fracción irreducible será la representante de la clase bajo la relación de equivalencia dada por esa propiedad característica.

- En el ejemplo de equivalencia entre ángulos podemos tomar como representante de cada clase a los ángulos dentro del intervalo  $[0, 2\pi)$  (como hacíamos con los argumentos de los complejos).

**Definición 1.16.** Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos del conjunto  $A$  respecto de la relación  $R$  se lo llamará **conjunto cociente de  $A$  respecto de la relación  $R$**  y se lo denotará:  $A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$

**Definición 1.17.** Una **partición** de un conjunto  $A$  es un conjunto de partes no vacías de  $A$ , disjuntas dos a dos y tales que su unión coincide con  $A$ .

Esto es, dado  $A$  un conjunto, y  $P = \{A_i\}$  con  $i \in I$  (una familia de subconjuntos de  $A$ ). Se dice que  $P$  es una partición de  $A$  si y sólo si se verifican:

- Si  $A_i \in P$  entonces  $A_i \neq \emptyset$
- Si  $A_i, A_j \in P$  entonces  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Es decir, una división de un conjunto no vacío en “partes” separadas y no vacías representadas mediante una colección o familia de subconjuntos de dicho conjunto que lo recubren.

**Notación:** Si bien estamos usando la  $P$  para referirnos a las particiones, en general una partición suele anotarse con la letra  $\pi$

**Ejemplos 1.18.** • El conjunto de los números naturales puede ser “particionado” en pares e impares

- El conjunto de alumnos de mate4 puede dividirse en los que aprobaron la entrega 1, los que deben reentregarla y los que no lo hicieron.

Sea  $P$  una partición de un conjunto  $A$ .

Definiremos sobre  $A$  la siguiente relación  $R$ :  $aRb$  si y sólo si existe  $X \in P$  tal que  $a, b \in X$

Claramente  $R$  es reflexiva ya que al ser  $P$  una partición de  $A$  todo elemento del conjunto pertenece a algún subconjunto de la familia  $P$ .

Es inmediata la simetría de  $R$  (si existe  $X \in P$  tal que  $a, b \in X$ , existirá (ese mismo)  $X$  tal que  $b, a \in X$ ).

Sólo falta comprobar la transitividad de  $R$  para poder afirmar que es una relación de equivalencia: queremos probar que si dados  $a, b, c \in A$  tales que  $aRb$  y  $bRc$  entonces  $aRc$ .

Si  $aRb$  y  $bRc$  entonces existen  $X, Y \in P$  tales que  $a, b \in X$  y  $b, c \in Y$ , luego  $b \in X \cap Y$  pero como  $X, Y \in P$  pero como  $P$  es una partición sus elementos tienen intersección vacía, con lo cual o no existe  $b$  o  $X = Y$  y por lo tanto  $a, c \in Y = X$  y  $aRc$ .

La relación  $R$  definida de esta forma es llamada ***equivalencia asociada a la partición  $P$***

**Ejemplo 1.19.** Sea el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  y sea  $P = \{\{a\}; \{b, e\}; \{c, d, f\}\}$  una partición de  $A$ .

La relación asociada a la partición está dada por

$$R = \{(a, a); (b, b); (e, e); (b, e); (e, b); (c, c); (d, d); (f, f); (c, d); (d, c); (c, f); (f, c); (d, f); (f, d)\}$$

y claramente vemos que es de equivalencia.

Ahora veamos unos resultados que nos muestran una propiedad dual para las relaciones de equivalencias y las particiones.

**Lema 1.20.** Sea  $R$  una relación de equivalencia en un conjunto  $A$ , entonces para todos par  $a, b$  de elementos de  $A$  vale que  $\bar{a} = \bar{b}$  si y sólo si  $aRb$

Supongamos que  $\bar{a} = \bar{b}$ , como  $R$  es reflexiva  $aRa$  entonces  $a \in \bar{a} = \bar{b}$ , luego  $a \in \bar{b}$  y  $aRb$ . Ahora suponemos que  $aRb$  y probaremos que las clases son iguales: Sea  $z \in \bar{a}$ , entonces  $zRa$  pero como  $R$  es de equivalencia, por transitividad y la hipótesis general  $aRb$  tenemos que  $zRb$ , luego  $\bar{a} \subset \bar{b}$ . De la misma manera podemos ver que vale la otra inclusión y por lo tanto,  $\bar{a} = \bar{b}$ .

**Teorema 1.21.** Si  $R$  es una relación de equivalencia en un conjunto  $A$ , el conjunto cociente  $A/R$  es una partición de  $A$ .

**Demostración:** Queremos mostrar que  $A/R$  (el conjunto de todas las clases de equivalencia por  $R$ ) particiona a  $A$

Veamos que cumple con la definición, o sea que es un conjunto de partes no vacías de  $A$  disjuntas dos a dos y que su unión es  $A$

Como  $R$  es reflexiva, para todo  $a \in A$  vale que  $aRa$  y por lo tanto  $\bar{a} = R(a)$  es no vacío. Supongamos que existe  $x \in R(a) \cap R(b)$ , luego  $xRa$  y  $xRb$ . Como  $R$  es simétrica y transitiva (por ser de equivalencia)  $aRb$  pero esto significa que las clases son iguales. Entonces todas las partes o son iguales o son disjuntas

Por definición todas las clases de equivalencia por  $R$  sobre  $A$  son subconjuntos de  $A$  y por la tanto la unión de todas ellas está incluida en  $A$ .

Como todo elemento  $a \in A$  pertenece a su propia clase  $\bar{a} = R(a)$  (por ser  $R$  reflexiva), vemos que todo elemento de  $A$  es un elemento en la unión de todas las clases.

**Ejemplo 1.22.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1); (2, 4); (4, 2); (4, 1); (1, 4)\}$  una relación de equivalencia en  $A$

El conjunto cociente  $A/R = \{\{1, 2, 4\}; \{3\}\}$  es una partición de  $A$