Preliminares - Lógica y Conjuntos

1 Lógica proposicional

Definición 1.1. *Se llama* ***proposición*** *a toda oración que tiene un valor de verdad. Es decir, una* ***proposición*** *es una oración que puede ser verdadera o falsa pero no ambas a la vez.*

Sea p una proposición; se define *valor de verdad de p* y se escribe V(p) = V, si p es una proposición verdadera y V(p) = F, si p es una proposición falsa. Recordemos que a cada proposición le corresponde un único valor de verdad de los dos posibles.

Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde la letra p, es decir, p, q, r, s, t,... etc.

Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:
p: $15 + 5 = 21$ (F)
q: Santa Fe es una provincia Argentina. (V)
r: El número 15 es divisible por 3. (V)
s: El perro es un ave. (F)

Expresiones No Proposicionales

Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos, por ejemplo:

- ¿Cómo te llamas?
- Prohibido pasar.

- Haz lo tuyo, muchacho

No son proposiciones porque no se les puede asignar un valor de verdad.

Clasificación de las Proposiciones

Aquellas proposiciones que no se pueden descomponer se llaman **simples o atómicas**. Por ejemplo, sea la proposición $p : 3 + 6 = 9$ es una proposición simple o atómica.

Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama **proposición compuesta o molecular**.
Así, por ejemplo, la proposición: "*Pitágoras era griego y geómetra*" es una proposición compuesta por las proposiciones simples,*p : Pitágoras era griego* y *q : Pitágoras era geómetra.*

No es necesario conocer si una afirmación es verdadera o falsa (es decir, su valor de verdad) para saber que es una proposición. Por ejemplo: "Hay vida extraterrestre" es una proposición, independientemente de que algunos crean que es verdadera y otros que es falsa, puesto que claramente o bien existe vida extraterrestre o bien no existe.

1.2 Conectivos Lógicos

Como dijimos a partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen.
Estudiaremos las distintas formas de conectar proposiciones entre sí, es decir como se puede operar con proposiciones, y para ello utilizaremos los llamados **conectivos lógicos**.

1.2.1 Operaciones Proposicionales

Definiremos las operaciones entre proposiciones, de las que se conoce su valor de verdad, y veremos como asignar a la proposición resultante el suyo.

Negación

Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por $\neg p$ (se lee no p) que le asigna el valor de verdad opuesto al de p.

Por ejemplo:

p: Diego estudia matemática.

$\neg p$: Diego no estudia matemática.

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Se trata de una operación unaria, pues a partir de una sola proposición se obtiene otra, que es su negación.

Otro ejemplo: La negación de p: Santa Fe es una provincia argentina, es:

$\neg p$: Santa Fe no es una provincia argentina.

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición $p \wedge q$ (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación, establece que la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso es falsa.

Ejemplos: Sea la declaración:

$$5 \textit{ es un número impar } \text{ y } 6 \textit{ es un número par}$$

Vemos que está compuesta de dos proposiciones a las que simbolizaremos por:
p:*5 es un número impar*
q: 6 es un número par

Por ser ambas verdaderas, la conjunción es verdadera.

Ahora bien, sea la declaración:

5 es un número impar y 7 es un número par

Esta conjunción es falsa, ya que no son simultáneamente verdaderas las proposiciones que la componen.

Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición compuesta $p \vee q$ (se lee "p o q"), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:
Córdoba es una provincia argentina o Uruguay es un país latinoamericano.
El 3 es par o el 8 es primo.

Como vemos en la tabla y se desprende de los ejemplos para que la disyunción sea verdadera *alcanza* con que al menos una de las proposiciones que la componen lo sea, o dicho de otra forma, una disyunción será falsa sólo si todas las proposiciones que la componen lo son.

Disyunción Exclusiva

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción exclusiva de las proposiciones p y q es la proposición compuesta $p \veebar q$ (también $p \oplus q$), se lee "p o q pero no ambas" (a veces p XOR q), cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

El televisor está prendido o está apagado

La proposición es verdadera o es falsa

Condicional (o implicación)

Consideremos el enunciado: *Si paga en efectivo obtiene un descuento*

Este enunciado está formado por dos proposiciones atómicas:

p: *Paga en efectivo*

q: *Obtiene un descuento*

Lo que nuestro enunciado original afirma es esto: si "pasa" p entonces "pasa" q, si p es verdad, entonces q también es verdad, o, dicho de modo más sencillo, si p entonces q.

En el enunciado $p \to q$, se dice que p es el antecedente y q el consecuente.

El condicional $p \to q$ se lee "p condicional q", "p implica q" o bien "si p entonces q".

Un condicional siempre es verdadero, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Por lo tanto, su valor de verdad queda definido por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otras expresiones que representan también la proposición "*si p entonces q*" y que se simbolizan por $p \to q$:

- p sólo si q
- q si p
- p es condición suficiente para q
- q es condición necesaria para p

Ejemplos:
- Obtiene el descuento si paga en efectivo.
- Es suficiente pagar en efectivo para obtener el descuento.
- Ser tucumano es condición sufiente para ser argentino, pero no necesaria (podría ser de otra provincia).
- Es necesario ser argentino para ser cordobés, pero no suficiente (no alcanza con ser argentino, es necesario pero además hay que nacer en algún lugar de Córdoba)

Condicionales asociados

Se puede ver por medio de las tablas de verdad, que tanto la conjunción como la disyunción tienen la **propiedad conmutativa**, es decir el orden de las componentes de una conjunción o de una disyunción no altera su valor de verdad: es lo mismo $p \wedge q$ que $q \wedge p$, y también es lo mismo $p \vee q$ que $q \vee p$. Pero, ¿ocurre lo mismo con el condicional? ¿Es lo mismo $p \to q$ que $q \to p$? La respuesta es que no.

El recíproco del condicional

Se dice que $q \to p$ es el **recíproco** de $p \to q$. El implicador no tiene la propiedad conmutativa y esto se aprecia en la comparación de las tablas de verdad de $p \to q$ y de su recíproco $q \to p$:

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Veámoslo con un ejemplo:

Sean p : Ahora llueve y q : El suelo está mojado, siendo, por consiguiente $p \to q$: Si ahora llueve, entonces el suelo está mojado. Veamos el recíproco de este enunciado: $q \to p$: Si el suelo está mojado entonces ahora llueve. Supongamos que p es falso, y q verdadero, lo que se corresponde con la tercera fila de la tabla anterior.

- $p \to q$ (Si ahora llueve, entonces el suelo está mojado) es verdadero.
- $q \to p$ (Si el suelo está mojado, entonces ahora llueve) es falso.

El contrarrecíproco del condicional

Aunque un enunciado condicional y su recíproco no tienen los mismos valores de verdad, si los tienen el condicional y su contrarrecíproco.

El contrarrecíproco del enunciado $p \to q$ es $\neg q \to \neg p$. Veámoslo comparando tablas de verdad:

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Comparemos el mismo ejemplo: En el ejemplo anterior donde p: Ahora llueve, q: El suelo está mojado, $p \to q$: Si ahora llueve entonces el suelo está mojado.

El contrarrecíproco es $\neg q \to \neg p$: Si el suelo no está mojado entonces ahora no llueve, que es lógicamente equivalente al enunciado primitivo $p \to q$.

El contrario del condicional

Se dice que $\neg p \rightarrow \neg q$ es el **contrario** de $p \rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Bicondicional

Ya hemos comprobado que $p \rightarrow q$ no es lo mismo que $q \rightarrow p$. Puede ocurrir, sin embargo, que tanto $p \rightarrow q$ como $q \rightarrow p$ sean verdaderos. Por ejemplo, si p: La Tierra es plana, y q: El Sol es un planeta,

entonces tanto $p \rightarrow q$ como $q \rightarrow p$ son verdaderos, porque tanto p como q son falsos. Es necesario tener esto en cuenta para entender bien el concepto de bicondicional. Mediante el bicondicional ($\leftrightarrow$) lo que queremos decir es que un enunciado es a la vez condición necesaria y suficiente para otro. El **bicondicional** $p \leftrightarrow q$, que se lee "p si y sólo si q".

Así, si digo que p: apruebo Filosofía y q: saco un 5 o más en el examen de Lógica la fórmula $p \leftrightarrow q$ significa apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el examen de Lógica.

La proposición compuesta: apruebo Filosofía si y sólo si saco un 5 o más en el exámen de Lógica, se puede formalizar de dos formas equivalentes: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, o bien $p \leftrightarrow q$. En consecuencia, el enunciado $p \leftrightarrow q$ queda definido por el enunciado $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Por esta razón, el símbolo $\leftrightarrow$ se llama bicondicional, y la tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$ es la misma que la de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble flecha horizontal $\leftrightarrow$ es el operador bicondicional.

Mirando con atención la tabla de verdad deducimos que para que $p \leftrightarrow q$ sea verdadera, tanto p

como q han de tener los mismos valores de verdad, y en caso contrario es falsa.
También de la observación de la tabla notamos que es igual a la correspondiente a $\neg(p \veebar q)$

Formalización del bicondicional

El bicondicional puede tener varias expresiones equivalentes en lenguaje natural. Así $p \leftrightarrow q$ es la formalización de las siguientes expresiones de lenguaje natural:

- p si y sólo si q
- p es necesario y suficiente para q

Notar que $p \leftrightarrow q$ y $q \leftrightarrow p$ tendrían totalmente los mismos valores de verdad, puesto que ambas son coimplicaciones y por lo tanto si sus valores de verdad son los mismos, son verdaderas, y son falsas en los demás casos. En consecuencia, podemos reformular los enunciados anteriores intercambiando p y q.

Ejemplos del bicondicional

Ejemplos de bicondicionales verdaderos:

a. La Tierra es plana si y sólo si el Sol es un planeta; si llamamos: p:La Tierra es plana, sabemos que es Falsa y sea q: El Sol es un planeta, también es Falsa.

b. La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es una estrella, sea p: La Tierra es esférica es Verdadera, y sea q: El Sol es una estrella, también es Verdadera.

Ejemplos de bicondicionales falsos:

a. La Tierra es plana si y sólo si el Sol es una estrella; si llamamos: p: La Tierra es plana, sabemos que es Falsa y sea q: El Sol es una estrella, es Verdadera.

b. La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es un planeta, sea p: La Tierra es esférica, es Verdadera, y sea q: El Sol es un planeta, en cambio, es Falsa.

Equivalencia Lógica

> **Definición 1.2.** *Decimos que dos proposiciones P y Q formadas ambas por las mismas letras proposicionales, son **lógicamente equivalentes**, o simplemente **equivalentes**, si coinciden sus valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes.*
> *Se nota como $P \Leftrightarrow Q$, siendo P y Q formas proposicionales no necesariamente atómicas.*
>
> *Importante: usamos la $\Leftrightarrow$ para indicar la equivalencia, mientras que $\leftrightarrow$ simboliza al bicondicional.*

Decimos que dos proposiciones P y Q formadas ambas por las mismas letras proposicionales, son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si coinciden sus valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes.
Se nota como $P \Leftrightarrow Q$, siendo P y Q formas proposicionales no necesariamente atómicas.
Importante: usamos la $\Leftrightarrow$ para indicar la equivalencia, mientras que $\leftrightarrow$ simboliza al bicondicional.

Propiedades

1.- Doble negación: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

2.- Leyes conmutativas: a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

3.- Leyes asociativas: a) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ b) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

4.- Leyes distributivas: a) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5.- Leyes de De Morgan: a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

6.- Implicación: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Notar que las últimas dos columnas coinciden los valores de verdad para los mismos valores de verdad de las componentes p, q y r. Entonces, si miramos la tabla del bicondicional estaremos en la primera o cuarta fila, por lo que $P \leftrightarrow Q$ resultará verdadera.

Esquemas proposicionales en una indeterminada

En Álgebra y Aritmética suele decirse que la siguiente expresión: $x + 2 = 5$ es una ecuación. Tal expresión no es una proposición, pues no tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa, pero existe algún reemplazo de x por un número de modo tal que se transforma en una proposición.

Por ejemplo, si reemplazamos x por 7 queda la expresión $7 + 2 = 5$, es una proposición, la cual en este caso es Falsa. Si reemplazamos x por 3 queda la expresión $3 + 2 = 5$, es una proposición, la cual en este caso es Verdadera.

Definición 1.3. $p(x)$ *es un* ***esquema proposicional en la variable o indeterminada*** x *si y sólo si existe, al menos, una sustitución de* x *por una constante que la transforma en proposición.*
Esto es, "Existe por lo menos un nombre tal que la expresión obtenida sustituyendo la indeterminada por dicho nombre, es una proposición".

Convención: Llamaremos simplemente esquema en lugar de esquema proposicional. Las indeterminadas suelen llamarse variables o incógnitas.

Ejemplos

1. "La x es blanca" es esquema pues existe una constante "flor" que si ocupa el lugar de la variable x produce la siguiente proposición: "La flor es blanca".

Que esta proposición sea Verdadera o Falsa dependerá de cual sea la flor particular que se está eligiendo.

2. ¿Qué es x? NO es un esquema, pues no hay constante que sustituida en la variable produzca una proposición.

Definición: Si $p(x)$ es un esquema en x y a es una constante, se llama **valor de** $p(x)$ **en la constante** a a la expresión obtenida de $p(x)$ sustituyendo x por a. El valor de $p(x)$ para a se designa $p(a)$.

Se llama *conjunto Universal* U, a un conjunto del cual se extraen las constantes para reemplazar a la indeterminada.

Para vincular los esquemas proposicionales utilizamos los mismos conectivos ya estudiados y con los mismos significados;

Vamos a definir al conjunto de valores de verdad de p, lo simbolizamos con $\mathrm{V}(p)$, al conjunto formado por todas las constantes a que hacen verdadera la proposición $p(a)$.

Cuantificadores: Universal y Existencial

Hasta ahora se ha visto un método para obtener proposiciones a partir de esquemas $p(x)$ consiste en sustituir la variable x por una constante adecuada a de tal forma que $p(a)$ sea una proposición.

Hay otro método distinto que transforma un esquema en proposición a partir del esquema $p(x)$, es el método de los **operadores** o **cuantificadores**.

Como vimos en los ejemplos, uno trata de reemplazar la incógnita por valores que tenga cierto sentido como para obtener una proposición, por ejemplo, si el esquema es $p(x) : x > 5$, pensamos que x puede ser un número, y dependiendo de si x es 8 ó x es 2, será verdadera o falsa; pero no pensamos en reemplazar x por algún color del arco iris. Esto nos conduce a la siguiente definición:

> **Definición 1.4.** *Llamaremos **conjunto universal** al conjunto de variables que al reemplazar la x por un elemento de ese conjunto se obtenga una proposición. Lo notaremos por U y lo nombraremos por conjunto universal o, simplemente, universo. Debe contener, al menos, un elemento.*

Por medio de los cuantificadores podemos convertir en proposiciones a los esquemas de la siguiente manera:

El cuantificador existencial,

"Para algún x se verifica $p(x)$"
"Existe x tal que se cumple $p(x)$"
"Para al menos un x se satisface $p(x)$"
son proposiciones que se escriben como $(\exists x)(p(x))$

Ejemplo: Hay flores rojas.

El cuantificador universal

"Para todo x se verifica $p(x)$"
"Para cualquier x tal que se cumple $p(x)$"
"Para cada x se satisface $p(x)$"
son proposiciones que se escriben como $(\forall x)(p(x))$

Ejemplo: Todas las flores son rojas.

Ejemplo

Vamos a escribir en forma simbólica las siguientes proposiciones, (Necesitamos dar un conjunto universal y luego los esquemas, además de identificar el cuantificador):

- *Hay números pares*

  Como la propiedad de ser *par* es una propiedad de los números enteros podemos tranquilamente usar como conjunto universal al conjuntos de los números enteros.
  Luego, si $p(x)$: x es par nuestra proposición quedaría simbolizada por: $(\exists x)p(x)$

- *Todos los números racionales son números enteros*

  Podemos usar como conjunto universal al conjunto de los números racionales, luego nuestra proposición se puede simbolizar como:
  $(\forall x)p(x)$ siendo $p(x)$: x es un número entero

  Ahora, observemos lo siguiente: Si en lugar de elegir de universo al conjunto de los números racionales elegimos al conjunto de los reales tendremos que tomar otras proposiciones para simbolizar la misma frase (ya que hay que dejar claro que sólo hablamos de los racionales y no de todos los elementos del conjunto, los reales). Vamos a necesitar usar más proposiciones y conectarlas.
  Sean $q(x)$: x es un número racional, y $p(x)$: x es un número entero, entonces *Todos los números racionales son números enteros* se simboliza por: $(\forall x)(q(x) \rightarrow p(x)$

Alcance de un operador

Pensemos en el siguiente ejemplo:

$$(\exists x)(v(x)) \wedge r(x) \ (*)$$

con $v(x) : x\ es\ verde$ y $r(x) : x\ es\ rojo$
Vemos que el operador existencial se refiere únicamente al esquema x es verde y NO a x es rojo, o sea que el alcance del operador llega únicamente al primer esquema, si quisiéramos que alcance a los dos esquemas, tendríamos que poner

$$(\exists x)(v(x) \wedge r(x))$$

o sea, usaríamos paréntesis.

Del ejemplo precedente podemos deducir que: La expresión "x es verde" es el esquema más simple que aparece en $(*)$ inmediatamente después del operador.

La expresión "x *es verde* $\wedge$ x *es rojo*", también es un esquema pero no es el más simple. La expresión "x *es rojo*" es un esquema también simple pero no aparece después del operador.

Definición 1.5. *Se llama* ***alcance de un operador en*** x *al esquema más simple que aparece inmediatamente después del operador, salvo que se presenten paréntesis, en cuyo caso deben aplicarse las reglas habituales referentes al uso de paréntesis.*

Negación de operadores

Sea la siguiente proposición: $(\forall n)(p(n))$ con $p(n)$: n es un número primo, que en lenguaje coloquial dice: *Todos los números con primos* (la cuál sabemos es Falsa en el universo de los números naturales).

Vamos ahora a negarla: *No es cierto que todos los números sean primos*, $\neg(\forall n)(\mathrm{p(n)})$

En lenguaje corriente esto nos dice que no todos los números son primos que es lo mismo que si dijéramos: algunos números no son primos, y simbólicamente

$$(\exists n)(n \text{ no es un número primo})$$

De lo anterior se puede deducir, y vale de manera general y no sólo el ejemplo que:

$$\neg(\forall x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$$

De manera análoga se obtiene:

$$\neg(\exists x)(p(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$$

Por lo tanto, en palabras decimos que:

La negación de un cuantificador universal (existencial, respectivamente) es equivalente a la afirmación de un cuantificador existencial (universal) cuyo alcance es la negación del alcance del primero.

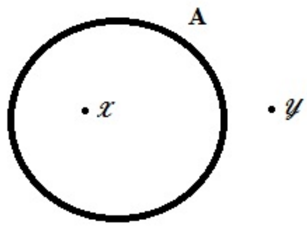
Teoría de Conjuntos

Un **conjunto** es la reunión de entes u objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que en general tienen características similares. Estos entes u objetos se llaman **elementos del conjunto**. Si a es un elemento del conjunto A se denota con la **relación de pertenencia** $a \in A$. En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

Formas de Expresar un Conjunto

- **Diagrama de Venn**

  Seguramente esté familiarizado con gráficos como el siguiente, donde el elemento $x \in A$ y el elemento $y \notin A$.



- **Expresado por Extensión**

  Cuando damos de manera explícita los elementos, es decir, se especifica cuales son cada uno de los elementos de A. Por ejemplo: $A = \{1, 3, 5, 7\}$

- **Expresado por Comprensión**

  Cuando expresamos la propiedad que define el conjunto. En el ejemplo anterior, $A = \{x : x \; es \; un \; nro. \; impar \; menor \; o \; igual \; a \; 7\} = \{x : x \; es \; impar \; \wedge x \leq 7\}$

  Se lee x tal que x es impar y x es menor o igual que 7.

Considere $\{x : x > 1 \wedge 2.x = 1\}$ ¿Es un conjunto, qué elementos tiene?

`Ejemplos de Conjuntos muy utilizados en matemática.`

- Ya vimos en lógica, al conjunto universal o universo, que contiene a todos los elementos en un determinado contexto. Notado por la letra $\mathcal{U}$.

- El conjunto vacío, es aquél que no contiene elementos. Se nota $\emptyset$ ó sólo con $\{\}$.
- Conjuntos numéricos: números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, que desarrollaremos en el siguiente módulo.

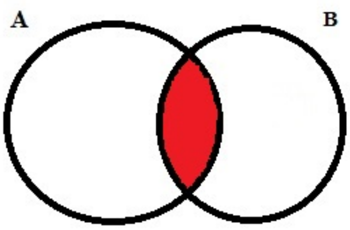
Operaciones con Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que:

- A está contenido en B ó A es un subconjunto de B, si todo elemento de A es también un elemento de B. En símbolos $A \subseteq B$ si y sólo si se verifica el condicional $(\forall x)(x \in A \to x \in B)$
- Los conjuntos A y B son iguales, si y sólo si tienen los mismos elementos. En símbolos $A = B$ si y sólo si se verifica el bicondicional $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

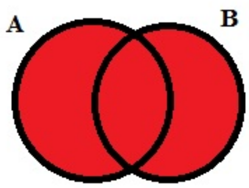
Intersección

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cap B$ que llamaremos **intersección de** A **y** B, como el conjunto formado por los elementos que son comunes a ambos conjuntos. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



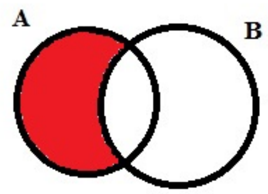
Unión

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A \cup B$ que llamaremos **unión de** A **y** B, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



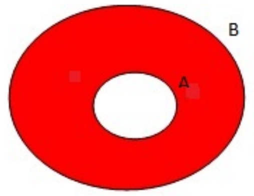
Diferencia

Dados los conjuntos A y B, se define el conjunto $A - B$ que llamaremos **diferencia entre** A **y** B (en ese orden), como el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



Complemento

Si $A \subseteq B$, se define el **complemento de** A **con respecto a** B como el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen a A. $C_B A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$



En particular, si $B = \mathcal{U}$, decimos directamente el complemento de A, sin necesidad de aclarar respecto a quién. En general, usaremos $B = \mathcal{U}$ y simplificamos la notación usando: A^C.

Propiedades:

1. Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
3. Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Complementariedad $A \cup C_{\mathcal{U}} A = U$; $A \cap C_{\mathcal{U}} A = \emptyset$
5. $C_{\mathcal{U}}(C_{\mathcal{U}} A) = A$

Producto Cartesiano

Sean $A_1, A_2, ...A_n$ conjuntos, el *producto cartesiano*[1] de $A_1, ...A_n$ denotado $A_1 \times ..... \times A_n$ es el conjunto de las n-uplas $(a_1, ..., a_n)$ tales que $a_i \in A_i$ para todo i con $i = 1, ...n$.

El elemento $a_i \in A_i$ se denomina *i-ésima coordenada* de $(a_1, ..., a_n)$. Cuando $A_i = A$ para todo i, entonces $A_1 \times ..... \times A_n$ se denota A^n.

Ejemplo

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1\}$ el producto cartesiano entre los conjuntos A y B es

$$A \times B = \{(a, 0); (a, 1); (b, 0); (b, 1); (c, 0); (c, 1)\}$$

[1] El nombre producto cartesiano fue puesto en honor al matemático, físico y filósofo francés René Descartes, 1596-1650.