Métodos de conteo

Cuando se calculan probabilidades, algunas veces se necesita determinar el número de resultados en un espacio muestral. Se describirán diversos métodos con ese propósito.
La regla básica, que se conoce como principio fundamental de conteo, se presenta por medio del siguiente ejemplo:

Ejemplo: Cierto tipo de automóvil se encuentra disponible en tres colores: rojo, azul y verde, y puede tener un motor grande o pequeño. ¿De cuántas maneras puede un comprador elegir un automóvil?

Solución:
Hay tres opciones de color y dos opciones de motor. Una lista completa de las opciones se muestra en la siguiente tabla de 3 × 2. El número total de opciones es (3) (2) = 6

	Rojo	**Azul**	**Verde**
Grande	Rojo y grande	Azul y grande	Verde y grande
Pequeño	Rojo y pequeño	Azul y pequeño	Verde y pequeño

Al generalizar el ejemplo, si hay n_1 elecciones de color y n_2 elecciones de motor, una lista completa de elecciones se puede escribir como una tabla de $n_1 \times n_2$ por lo que el número total de elecciones es $n_1 . n_2$

Si una operación se puede realizar en n_1 maneras y si para cada una de esas maneras se puede realizar una segunda operación en n_2 maneras, entonces el número total de maneras en que se realizan las dos operaciones es $n_1 . n_2$

Este razonamiento del principio fundamental del conteo se puede ampliar para cualquier número de operaciones.

El principio fundamental de conteo
Suponga que se pueden realizar k operaciones. Si hay n_1 maneras de realizar la primera operación y si para cada una de esas maneras hay n_2 maneras de realizar la segunda operación, y si para cada una de esas elecciones de esas de esas maneras de realizar las dos primeras operaciones hay n_3 maneras de realizar la tercera operación y así sucesivamente, entonces el número total de maneras de realizar la secuencia de las k operaciones es $n_1 . n_2 \dots n_k$.

Ejemplo:
Cuando se hace un pedido de cierto tipo de computadora, hay tres elecciones de disco duro, cuatro de la cantidad de memoria, dos de la tarjeta de video y tres de monitor. ¿En cuántas maneras se puede solicitar una computadora?

Solución:
El número total es (3) (4) (2) (3) = 72

Podemos simbolizar cada operación con un guión y escribir debajo del mismo el número de formas en que puede realizarse

$$\underbrace{3}_{}^{1º}\ \underbrace{4}_{}^{2º}\ \underbrace{2}_{}^{3º}\ \underbrace{3}_{}^{4º}$$

Permutaciones

Una **permutación** constituye un ordenamiento de un conjunto de elementos. Por ejemplo, hay 6 permutaciones de las letras A, B y C:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

Con solamente tres elementos, es fácil determinar el número de permutaciones, sólo con hacer una lista de todas ellas. Pero con un gran número de elementos esto último no sería factible. El principio fundamental de conteo se puede usar para determinar el número de permutaciones de cualquier conjunto de elementos. Por ejemplo, se puede determinar el número de permutaciones de un conjunto de tres elementos de la siguiente manera: hay tres elecciones para colocar el primer elemento. Después que se hace la elección hay dos elecciones restantes para el elemento del segundo lugar. Entonces queda una elección para el elemento del último lugar. Por tanto, el número total de maneras de ordenar tres objetos es (3)(2)(1) = 6. Este razonamiento se puede generalizar. El número de permutaciones de un conjunto de *n* elementos es

$$n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$$

Éste es el producto de los enteros del 1 al *n*. Este producto se puede escribir con el símbolo $n!$, que se lee "n factorial".

Para cualquier entero positivo *n*, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$
También se define $0! = 1$

El número de permutaciones de n objetos es $n!$

Ejemplos:

1- Cinco personas están en hilera en un cine. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar?.

Solución:
El número de permutaciones de un conjunto de cinco personas es

$$5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$$

2- a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar en un estante 3 libros de Matemática y 4 de Física?

b) ¿De cuántas formas si los de Matemática deben estar juntos?
c) ¿De cuántas formas si los libros de Matemática deben estar juntos y los de Física también deben estar juntos?

Solución:
a) 7!
b) Si los de Matemática deben estar juntos, consideramos los 3 libros de Matemática como un solo libro, es decir pensamos que tenemos que ordenar 5 libros

$$\underbrace{M_1 \ M_2 \ M_3}_{M} \ F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4$$

Entonces considerando a los tres libros de Matemática en un bloque, la forma de ordenar los 7 libros es

5! 3!

Nº de formas de ordenar los de Matemática dentro del bloque

Nº de formas de permutar los libros considerando a los 3 de Matemática como un solo libro.

c) Razonando en forma similar al inciso anterior consideramos dos bloques: un bloque consiste en los 3 libros de Matemática, y el otro bloque consiste en los 4 libros de Física. El número de formas de permutar los bloques es 2!. Dentro de cada bloque podemos permutar los libros: de 3! maneras a los de Matemática y de 4! formas a los de Física.
Por lo tanto la respuesta es 2! 3! 4!.

A veces se está interesado en contar el número de permutaciones de los subconjuntos de cierto tamaño elegidos de un conjunto más grande. Esto se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo:
Cinco salvavidas están disponibles para la guardia de un sábado por la tarde. Hay tres estaciones de salvavidas. ¿De cuántas maneras se pueden elegir y organizar los tres salvavidas entre las estaciones?

Solución:
Se usa el principio fundamental de conteo. Hay cinco maneras de elegir un salvavidas para que ocupe la primera estación, luego cuatro de elegir a un salvavidas para que ocupe la segunda estación y por último tres para elegir un salvavidas que ocupe la tercera estación. El número total de permutaciones de los tres salvavidas elegidos entre los cinco es (5)(4)(3) = 60.

El razonamiento usado para resolver el ejemplo anterior se puede generalizar. El número de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n objetos es

$$n(n-1)........(n-k+1)$$

Esta expresión se puede simplificar utilizando la notación factorial:

$$n(n-1)........(n-k+1) = \frac{n(n-1)....(n-k+1)(n-k)(n-k-1)....(3)(2)(1)}{(n-k)(n-k-1)....(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

El número de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n elementos es

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Usamos el símbolo $P_{k,n} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Los anteriores son casos de permutaciones donde los objetos se eligen a lo sumo un vez. Si un objeto puedo elegirse más de una vez tenemos permutaciones con elementos repetidos

Ejemplo:
A la cumbre de una montaña conducen 5 caminos. ¿De cuántas formas puede realizar un turista el camino de ida y vuelta (subir y descender)?

Solución:
Hay 5 formas posibles de subir a la montaña y 5 formas de descender si consideramos que se puede elegir para el descenso el mismo camino que se tomó para el ascenso. Por lo tanto la respuesta es (5)(5) = 25

En general si se deben elegir k elementos de un conjunto de n objetos y cada objeto se puede elegir más de un vez entonces el número de formas posibles de realizar esta operación es $(n)(n).....(n) = n^k$

El número de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n elementos donde cada elemento se puede elegir más de una vez es

$$n^k$$

Simbolizamos

$$P^{*}_{k,n} = n^k$$

Combinaciones

En algunos casos, cuando se elige un conjunto de elementos de un conjunto más grande, no se tiene en cuenta el orden de los elementos elegidos, solo se consideran los elementos que se eligen. Por ejemplo, puede que no importe qué salvavidas ocupe cada estación, puede que solo sea importante la elección de tres salvavidas. A cada grupo distinto de elementos que se puede seleccionar, sin importar el orden, se le llama **combinación**. Se mostrará cómo determinar el número de combinaciones de k elementos elegidos de un conjunto de n objetos. Se mostrará el razonamiento con el resultado del ejemplo anterior. En este ejemplo se mostró que hay 60 permutaciones de tres elementos elegidos entre cinco. Al denotar a los elementos por A, B, C, D, E en la figura siguiente se presenta una lista de las 60 permutaciones.

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
ACB	ADB	AEB	ADC	AEC	AED	BDC	BEC	BED	CED
BAC	BAD	BAE	CAD	CAE	DAE	CBD	CBE	DBE	DCE
BCA	BDA	BEA	CDA	CEA	DEA	CDB	CEB	DEB	DEC
CAB	DAB	EAB	DAC	EAC	EAD	DBC	EBC	EBD	ECD
CBA	DBA	EBA	DCA	ECA	EDA	DCB	ECB	EDB	EDC

Las 60 permutaciones están ordenadas en 10 columnas de 6 permutaciones cada una. Dentro de cada columna, los tres elementos son los mismos y la columna contiene las 6 permutaciones diferentes de esos tres elementos. Por lo tanto cada columna representa una combinación distinta de tres elementos elegidos entre cinco y hay diez combinaciones de este tipo. Por lo tanto la figura muestra que el número de combinaciones de tres elementos elegidos entre cinco se puede encontrar al dividir el número de permutaciones de los tres elementos elegidos, o sea 5!/(5-3)!, por el número de permutaciones de los tres elementos que es 3!. En resumen, el número de combinaciones de los tres elementos elegidos es $\dfrac{5!}{3!(5-3)!}$.

A menudo el número de combinaciones de k elementos elegidos entre n se anota por el símbolo $\dbinom{n}{k}$ o también con el símbolo $C_{k,n}$.

El razonamiento utilizado para deducir el número de combinaciones de los tres elementos elegidos se puede generalizar para deducir una expresión para $\dbinom{n}{k}$.

El número de combinaciones de k elementos elegidos de un grupo de n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo: A cierto evento asisten 30 personas y se elegirá aleatoriamente a 5 para recibir premios. Estos últimos son iguales, así que el orden en que se elige a las personas no es importante. ¿Cuántos grupos diferentes de 5 personas se pueden elegir?

Solución:
En virtud de que el orden de las 5 personas elegidas no es importante, se tiene que calcular el número de combinaciones de 5 elegidas entre 30. Esto es

$$\binom{30}{5} = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{(30)(29)(28)(27)(26)}{(5)(4)(3)(2)(1)} = 142506$$

Elegir una combinación de k elementos de un conjunto de n elementos, divide a los n elementos en dos subconjuntos: k que fueron elegidos y $n - k$ que no fueron elegidos. A veces un conjunto se divide en más de dos subconjuntos. Por ejemplo, suponga que en una clase de 12 estudiantes se asignará un proyecto a los estudiantes para trabajar en equipos. Se formarán tres equipos, que constarán de 5, 4 y 3 estudiantes. Se puede calcular el número de maneras en las que se formarán los equipos del siguiente modo. Se considera el proceso para dividir la clase en 3 equipos como una secuencia de dos operaciones. La primera operación es seleccionar una combinación de 5 estudiantes para formar el equipo de 5. La segunda consiste en elegir una combinación de 4 estudiantes entre los 7 restantes, para formar el equipo de 4. El equipo de 3 automáticamente constará de los 3 estudiantes que quedan.
El número de maneras de realizar la primera operación es

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!}$$

Después de que se ha realizado la primera operación, el número de formas de realizar la segunda es

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!}$$

Por lo tanto el número total de maneras de realizar la secuencia de las dos operaciones es

$$\binom{12}{5}\binom{7}{4} = \frac{12!}{5!7!}\,\frac{7!}{4!3!} = \frac{12!}{5!4!3!} = 27720$$

Observe que el numerador en la respuesta final es el factorial del tamaño total del grupo, mientras que el denominador constituye el producto de los factoriales de los tamaños de los equipos elegidos de éste. Esto último es válido en general

> El número de maneras de dividir un grupo de n elementos en grupos de $k_1, \dots, k_r$ elementos, donde $k_1 + \dots + k_r = n$ es
>
> $$\frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

Ejemplo:
Se lanza un dado 20 veces. En virtud de que en 3 de las tiradas salió el número 1, en 5 de las tiradas salió el 2, en 4 salió el 3, en 2 el 4, en 3 salió el 5 y en 3 el 6, ¿cuántos arreglos diferentes de resultados hay?

Solución:
Hay 20 resultados, están divididos en 6 grupos: el grupo de 3 resultados en los que salió el 1, el de 5 en los que salió el 2 y así sucesivamente. El número de maneras de dividir los 20 resultados en 6 grupos de tamaños específicos es

$$\frac{20!}{3!5!4!2!3!3!}$$

Observación: Notar que en este ejemplo podemos razonar de la siguiente manera.
Se lanza un dado 20 veces, podemos interpretar entonces que tenemos 20 objetos donde hay 3 elementos iguales entre sí (los 3 número 1), 5 elementos iguales entre sí y diferentes de los anteriores (los 5 números 2), y así siguiendo.
Una posible forma de que esto ocurra sería que en los sucesivos tiros se hayan obtenido los números en el siguiente orden:

1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 5 5 5 6 6 6

La pregunta es cuántas formas hay de **ordenar** estos 20 objetos. La respuesta no es 20! pues para esto deberían ser los 20 elementos **diferentes**.
Podemos pensar que hay un 1º tiro, un 2º tiro, etc., es decir tenemos 20 lugares diferentes y debemos elegir entre ellos, sin orden, 3 lugares, para ubicar los tiros en que salieron los número 1. Luego elegimos entre los 17 tiros que quedan 5 para ubicar los tiros en donde salieron los números 2, y así siguiendo.
Por lo tanto el número $\frac{20!}{3!5!4!2!3!3!}$ se podría interpretar como el número de formas de ordenar 20 elementos donde no todos son distintos.
En general $\frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$ indicaría el número de formas de ordenar n elementos donde hay n_1 iguales entre sí, n_2 iguales entre sí y diferentes de los anteriores,….., n_k iguales entre sí y diferentes de todos los anteriores donde $k_1 + \dots + k_r = n$

Ejemplo:
¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra INGENIERIA?

Solución:
La palabra INGENIERIA consta de 10 letras donde hay 3 letras I, 2 letras N, 2 letras E.
Por lo tanto la respuesta es $\dfrac{10!}{3!2!2!}$

Principio de suma

Supongamos el siguiente ejemplo:
¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 101 o con 111?
Una cadena de 8 bits que comienza con 101 puede construirse con 5 operaciones: se elige el cuarto bit, luego el quinto bit y así siguiendo. Cada una de estas elecciones puede hacerse de 2 maneras, se elige un 0 ó se elige un 1. Por el principio fundamental del conteo, hay $2^5 = 32$ cadenas que comienzan con 101.
Análogamente, hay $2^5 = 32$ cadenas que comienzan con 111.
Si A es el conjunto de las cadenas de 8 bits que comienzan con 101 y B es el conjunto de las cadenas de 8 bits que comienzan con 111 entonces $A \cap B = \varnothing$. Por lo tanto el número de cadenas de 8 bits que comienzan con 101 o con 111 es el número de elementos de $A \cup B$, es decir 32 + 32 = 64.
En general

Principio de suma

Si $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ son conjuntos tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$, entonces el número de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$ es igual a la suma del número de elementos de cada conjunto, en símbolos

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \ldots\ldots + \#A_n$$

Ejemplos:
1- De un grupo de 4 hombres y 5 mujeres, ¿cuántos comités de 3 miembros son posibles
a) sin restricciones?
b) con 1 hombre y 2 mujeres?
c) con mas mujeres que hombres?

Solución:
a) En un comité no hay cargos, por lo tanto no importa el orden en el cual son elegidos los miembros, por lo tanto la respuesta es

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

b) Si debe haber un hombre y 2 mujeres hay que contar el número de formas de elegir un hombre entre 4 : $\binom{4}{1} = 4$

y el número de formas de elegir 2 mujeres entre 5:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = 5 \times 2 = 10 \ .$$

Por el principio fundamental del conteo la respuesta es $4 \times 10 = 40$

c) Separamos en casos y aplicamos el principio de suma:

caso1: 2 mujeres y 1 hombre $\longrightarrow$ 40

caso 2: 3 mujeres $\longrightarrow$ $\binom{5}{3} = 10$

La respuesta es 40 + 10 = 50

2- En el alfabeto Morse de puntos y rayas, ¿cuántos caracteres pueden formarse empleando a lo sumo 3 signos?

<u>Solución</u>:
Un carácter esta formado por puntos y rayas.
Podríamos considerar 3 casos excluyentes:

caso1: carácter de 1 signo
En este caso el número de formas de construir un carácter es 2, se elige un punto o una raya

caso2: carácter de 2 signos
En este caso tenemos 2 posibles elecciones para cada signo, elegir un punto o una raya. Considerando que la elección para cada signo es una operación que se puede hacer de 2 formas distintas y que debemos realizar 2 operaciones (porque tenemos 2 signos) la respuesta es $(2)(2) = 2^2 = 4$

caso3: carácter de 3 signos
Nuevamente tenemos 2 posibles elecciones para cada signo, elegir un punto o una raya. Considerando que la elección para cada signo es una operación que se puede hacer de 2 formas distintas y que debemos realizar 3 operaciones (porque tenemos 3 signos) por lo tanto la respuesta es $(2)(2)(2) = 2^3 = 8$

Por el principio de suma el resultado final es 2 + 4 + 8 = 14

3- Tres parejas de casados han comprado boletos para el teatro y se sientan en una fila formada por solo 6 asientos.

a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse de manera tal que Juan y Paula (marido y mujer) se sienten en los 2 asientos de la extrema izquierda?

b) ¿De cuántas maneras pueden sentarse de manera tal que Juan y Paula (marido y mujer) se sienten juntos?

c) ¿De cuántas maneras pueden sentarse de manera tal que por lo menos una de las esposas termine sentada junto a su marido?

<u>Solución:</u>
a) Simbolicemos la situación utilizando guiones para cada uno de los 6 asientos

P   J
___ ___ ___ ___ ___ ___

Permutamos a las 4 restantes personas pero además Juan y Paula pueden permutar entre sí, la respuesta es

$$4!\ 2!$$

donde 2! es el número de formas en que Juan y Paula pueden permutar entre sí.

b) En este inciso a diferencia del anterior Juan y Paula pueden sentarse en cualquier asiento no necesariamente en el extremo izquierdo. Pensamos a Juan y Paula como una sola persona

P   J
___ ___ ___ ___ ___ ___

considerados a Juan y Paula
como una sola persona, permutamos 5 personas

La respuesta sería 5! 2!

c) Podemos considerar 3 casos:

caso1: los integrantes de la pareja 1 están sentados juntos
caso2: los integrantes de la pareja 2 están sentados juntos
caso3: los integrantes de la pareja 3 están sentados juntos

Notar que **no son casos excluyentes**
Nos ayudamos con conjuntos escribiendo
A_i es el conjunto de todas las permutaciones de las 6 personas donde los miembros de la pareja i están sentados juntos con i = 1, 2, 3

Entonces observar que la respuesta es el número de elementos del conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ pero los conjuntos no son disjuntos de a dos.
Por lo tanto **no podemos aplicar el principio de suma**
Pero sí podemos escribir lo siguiente

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$
$$\#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Además

$\#A_1 + \# A_2 + \#A_3 = 5!\,2! + 5!\,2! + 5!\,2!$

$\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_3) = 4!\,2!\,2!$
pues consideramos a los miembros de dos de las parejas en un bloque, es decir tenemos dos bloques y los dos integrantes de la pareja restante que pueden no estar sentados uno al lado del otro, en total 4 elementos para permutar. Además dentro de cada bloque los integrantes de cada pareja pueden permutar entre sí.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3!\,2!\,2!\,2!$ pues ahora tenemos 3 bloques

El resultado final es $5!\,2! + 5!\,2! + 5!\,2! - 3\,(4!\,2!\,2!) + 3!\,2!\,2!\,2!$

Practica

1) a) ¿Cuántas banderas diferentes de 3 bandas distintas se pueden formar con los colores verde, rojo, azul, blanco, amarillo y negro?
   b) ¿Cuántas se pueden formar si se permite también la primera banda igual a la tercera?
2) a) ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse?
   b) ¿Cuántos con todas las cifras distintas?
   c) ¿ Cuántos con todas las cifras distintas y que terminen en cero?
3) ¿De cuántas maneras pueden disponerse las cinco letras de la palabra ARBOL?
4) Una torta necesita 8 ingredientes, ¿de cuántas maneras se pueden mezclar?
5) ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 10 niños, si uno determinado de ellos no puede estar a la cabeza?
6) Se quieren disponer 4 libros de matemática distintos, 6 distintos de física y 2 distintos de química en un estante. ¿De cuántas maneras puede hacerse si:
   a) los libros de un mismo tema deben estar juntos?
   b) solo es obligatorio que los libros de matemática estén juntos?
7) ¿En cuántas permutaciones de la palabra AYCYDYTV las tres Y aparecen juntas?
8) ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 si:
   a) los números deben ser impares?.
   b) los números deben tener las dos primeras cifras pares?.
9) ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar a partir de las cifras del número 327332?
10) a) ¿De cuántas maneras pueden disponerse las letras de la palabra PAPANATA?
    b)¿ De cuántas, de manera que la T esté al principio?. ¿Y al final?.
11) ¿De cuántas maneras puede elegirse entre 9 personas un comité de 5?
12) Dados 5 puntos del plano no alineados de a 3, ¿cuántos triángulos determinan?
13) Se elige un comité de 5 personas entre 30 hombres y 20 mujeres.
    a) ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección?
    b)¿De cuántas si el número de mujeres debe sobrepasar al de hombres?
14) ¿Cuántas palabras de 4 consonantes distintas y 3 vocales distintas pueden formarse con 9 consonantes y 5 vocales?
15) Una planta de producción emplea 20 trabajadores en el turno de día, 15 trabajadores en el segundo turno y 10 en el turno noche. Un consultor de control de calidad selecciona 6 de estos trabajadores para hacerles una entrevista.
    a) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 6 trabajadores que provengan del turno día?
    b) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 6 trabajadores que provengan del mismo turno?