Matemática IV- 2022

TP1 - Cálculo en dos o más variables

1 Límites y Continuidad

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2$

   (c) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y^2 - z^2}$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   (e) $f(x,y) = e^{-x^2+y^2}$

   (f) $f(x,y) = \log\left(16 - x^2 - 16y^2\right)$

2. Evaluar las siguientes funciones en los puntos dados (cuando los puntos pertenezcan al dominio):

   (a) $f(x,y) = \log\left(9 - x^2 - 9y^2\right)$ en $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ en $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1); (2,2)$

   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ en $(1,0); (1,1); (0,1); (-1,1)$

3. Calcular los siguientes límites, o demostrar que no existen:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,1)} 5x - x^2 + 3y^2$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{(7x^2 - 2y^2)}{x^2+y^2} + 1\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} e^{x+y^2-z}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(x+y+z)$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^4}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x-y}$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de no estar definida en todo R^2, redefinirla de manera que pueda extenderse su continuidad.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

5. (*) Calcular el siguiente límite por definición: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   Luego, para entender intuitivamente el límite, generar un código que muestre cómo se va acercando $f(x_0, y_0)$ a su límite L cuando (x,y) se acerca a $(0,0)$. Es decir, escribir un programa que devuelva la lista con los resultados de hacer $|f(x,y) - 0|$ para $(x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$ por ejemplo, tales que $|(0,0) - (\frac{1}{n}, \frac{1}{m})| = \frac{1}{n^2+m^2} < \delta$ (p.e para $n = 10$, $m = 10$, $n = 100$, $m = 1000$, etc...)

2 Diferenciabilidad

6. Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, indicando sus dominios:

   (a) $f(x,y) = 3x^2y + y^3$

   (b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$

   (c) $f(x,y) = e^{xy} + \sin\left(x^2 + y\right)$

   (d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = x^2 \log(x+y)$

   (f) $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (x + yx_i)]^2$

7. Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x, y) = xe^{x^2 y}$ en $(1, \log(2))$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(-4, 3)$

8. Analizar diferenciabilidad en R^2 de las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = sen(x^2 + y^2)$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x.y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (e) $f(x, y) = \begin{cases} cos(x^2 + y^2) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

9. Hallar, en caso de que exista, el plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ en el punto $(-1, 1, f(-1, 1))$.
   De ser posible, con ayuda de un software a su elección, muestre las gráficas de la función y el plano tangente.

10. Encontrar la aproximación lineal de la función $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en $(1, 0)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $f(0.98, 0.05)$.
    Grafique con ayuda de software la función y su aproximación lineal.

11. Calcular los vectores gradientes de las siguientes funciones

    (a) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

    (b) $f(x, y, z) = x.y.z$

12. Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y dirección de los vectores dados:

    (a) $f(x, y) = x^2 + 3xy^2$; $p = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, -2)$

    (b) $f(x, y) = x.y^2$; $p = (1, 1)$ y $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -1)$

13. Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional en el punto $(1,0)$ de $f(x,y) = x^2 + sen(xy)$ tiene el valor 1.

14. Encontrar la dirección de máximo crecimiento de las siguientes funciones en los puntos dados:

    (a) $f(x,y) = xe^y + 3y$; $\quad p = (1,0)$
    (b) $f(x,y) = 4x^2yz^3$; $\quad p = (1,2,1)$

15. Halle los máximos y mínimos locales y en sus puntos silla y el valor en esos puntos de cada función :

    (a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
    (b) $f(x,y) = xy - 2x - y$
    (c) $f(x,y) = xseny$

16. El criterio de las derivadas segundas, ¿permite clasificar los puntos estacionarios de $f(x,y) = x^2y$?
    En caso afirmativo, hallarlos y analizarlos.

Ejercicios Adicionales

- Hallar el dominio de las siguientes funciones:

    1. $f(x,y) = \log\left(4 - x^2 - y^2\right)$
    2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
    3. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$

- Analizar los siguientes límites:

    1. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{2x^2y^3}{x^2+y^4})$
    2. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{x(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}})$
    3. $lim_{(x,y)\to(0,1)} \quad (\frac{2xy-2x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}})$
    4. $lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad (\frac{yx^3-xy^3}{x^2+y^2})$
    5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \quad \frac{xye^x}{x^2 + y^2}$

- Dada la función $f(x,y) = xy.\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$ definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen y demostrarlo.

- Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)+x^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ probar que:

  1. Existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
  2. f no es continua en $(0,0)$.

- Para interpretar intuitivamente el cálculo de las derivadas por definición genere un código similar al que realizó anteriormente que muestre como los límites se van acercando a las derivadas parciales (calculadas por regla) evaluadas en un punto.

- Analizar en qué región del plano las siguientes funciones son diferenciables:

  1. $f(x,y) = 3x^2y + y^3$
  2. $f(x,y) = xy$
  3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}$
  4. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
  5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Hallar, en caso que exista, una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

  1. $f(x,y) = xy$ en $(0,0)$
  2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,2)$
  3. $f(x,y) = e^y(x^2+y^2)$ en $(1,0)$
  4. $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ en $(1,1)$
  5. $f(x,y) = e^x \cos(xy)$ en $(0,0)$

- Encontrar, si existe, la linealización $L(x,y)$ de la función en el punto indicado:

  1. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2.y^2}$ en $(0,2)$
  2. $f(x,y) = \frac{y}{x+y}$ en $(1,2)$

- Encontrar la dirección de máximo crecimiento de función $f(x,y) = xe^y + y^2$ en el punto $p = (1,1)$

- Para interpretar la idea de derivada direccional (y su cálculo por definición), generar un código que calcule la derivada direccional "‘acortando"’ la distancia entre los puntos (calcular el límite con t cada vez más chico).

Ejercicios de la Entrega 1 2020

1. Sea $f : D \subset R^2 \to R$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Dar el dominio de f y analizar su continuidad.
   (b) Analizar si f es diferenciable en todo su dominio.
   (c) Hallar, si existe, el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-3, 4, f(-3, 4))$. Dibujar (con ayuda de software) el plano y la función en un mismo gráfico .

2. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x,y) = e^{x^2}.\,(sen(y) + cos(y))$

   (a) Analizar la diferenciabilidad de g
   (b) Encontrar la aproximación lineal de la función g en $(-1, \frac{\pi}{2})$ y utilizarla para estimar aproximadamente $g(-0.98, 1.55)$. Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.
   (c) Encontrar la dirección de máximo crecimiento de g en el punto $(2, \pi)$

3. (a) Calcular la siguiente integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(\theta)} r^3(\sin(\theta))drd\theta$

   (b) Calcular el área, si existe, de la región plana acotada por la curva *cos(x)* en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y los ejes coordenados.

   (c) Hallar el volumen del sólido bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región limitada por T, donde T es el triángulos de vértices $(-4, 1)$, $(1, 4)$ y $(4, 1)$

Ejercicios de la Entrega 1 2021

1. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x,y) = sen(x^2) + cos(y^2)$, analizar la diferenciabilidad en todo su dominio

2. Sea $f : D \subset R^2 \to R$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m.y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Analizar la diferenciabilidad en todo R^2 para $m = 1$ y $m = 2$
- Hallar, si existe, el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1, f(1, 1))$ para $m = 1$.
  Dibujar (con ayuda de software) el plano y la función en un mismo gráfico .

3. Sea $g : D \subset R^2 \to R$ dada por: $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   - Analizar la diferenciabilidad de g en todo R^2
   - Encontrar, de ser posible, la dirección de máximo crecimiento de g en el punto $(4, 3)$
   - Encontrar, de ser posible, la aproximación lineal de la función g en $(3, -4)$ y utilizarla para estimar aproximadamente $g(2.998, -4.003)$.
     Graficar con ayuda de software, la función y su aproximación lineal.