

Matemática IV- 2022

TP4 - Relaciones entre conjuntos

- Sean los conjuntos $A = \{1, 0, -1\}$ y $B = \{2, 3, 1\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B . Justifica.
 - $R = \{(1; 2), (0; 3)\}$
 - $R = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$
 - $R = \{(3; 1)\}$
 - $R = \emptyset$
- Sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{Z}$ y la relación de A en B que viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x .
Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.
- Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $V = \{vocales\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones. Justifica.
 - $R = \{(a, a, a); (a, b, c); (b, c, d)\}$ en $A \times A \times A$
 - $R = \{(a, a, a); ((c, e, 2); (a, b, 1)\}$ en $A \times V \times B$
 - $R = \{(a, b, 1); (e, c, 2) : (i, j, 3)\}$ en $V \times A \times B$
 - $R = \{(a, z, 3); ((b, i, 2); (c, x, 1)\}$ en $A \times V \times B$
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación R en $A \times A \times A$ definida en la forma: $(x, y, z) \in R$ si y sólo si $x < y$ & $y < z$. Escribe R por extensión
- Para cada una de las siguientes relaciones: dar tres pares que pertenezcan y tres pares que no; indicar si son reflexivas, simétricas, antisimétricas, y/o transitivas.
 - En el conjunto de los números reales
 - xRy si y sólo si $x \geq 4$ & $y \geq 5$.
 - xRy si y sólo si $y \leq x \leq y + 3$.
 - Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $P(A)$ el conjunto de partes de A
 - en $P(A)$, XY si y sólo si $X \cap Y = \emptyset$
 - en $P(A)$, XY si y sólo si $X \subset Y$

6. Determinar si las siguientes relaciones definidas en $A = \{a, b, c, d\}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:
- $R_0 = \emptyset$
 - $R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (c, d)\}$
 - $R_2 = \{(a, a); (b, b); (b, c); (c, b); (d, d); (c, c)\}$
 - $R_3 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)\}$
 - $R_4 = A \times A$
7. Sea $A = \{a, b, c\}$
- (a) Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A
 - (b) Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A
 - (c) Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A
 - (d) Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A
 - (e) Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A
8. Demostrar que si R es simétrica y transitiva y aRb para ciertos a y b , entonces aRa y bRb .
9. Sea A un conjunto arbitrario. Sea $R = \Delta_A$ (diagonal de A). Analizar qué propiedades tiene R .
10. Para evitar corazones rotos por amores no correspondidos, ¿cómo debería ser la relación xRy si y sólo si x ama a y definida en el conjunto de los seres humanos?
11. Proponer una relación en el conjunto de los números naturales. Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)
12. Proponer una relación en el conjunto de los *alumnos de Informática*. Mostrar que propiedades tiene (reflexividad, simetría, etc...)
13. Dada una relación binaria R sobre un conjunto A , se define la relación *complemento de R* , \bar{R} por: $a\bar{R}b$ si y sólo si a no está relacionada con b por R
- Dar un ejemplo de una relación R y su complemento
 - Probar que si $R \subset S$ entonces $\bar{S} \subset \bar{R}$
14. Dada R una relación binaria sobre A , probar que:
- (a) R es reflexiva si y sólo si R^{-1} también lo es
 - (b) R es simétrica si y sólo si $R^{-1} = R$

- (c) R es simétrica si y sólo si R^{-1} y \bar{R} también lo son
- (d) R es antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} \subset \Delta_A$
15. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones en H el conjunto de los seres humanos:
- (a) Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hermano de y
- (b) Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hijo de y
- (c) Se dice que una persona a es descendiente de una persona b si es hijo, nieto, bisnieto, etc..
 R es la relación en H definida por xRy si y sólo si x es descendiente de y
16. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:
- (a) Sea N el conjunto de los números naturales.
 \leq la relación en N dada por $x \leq y$ si y sólo si x es menor o igual a y
- (b) Sea N el conjunto de los números naturales.
 $|$ la relación en N dada por $x|y$ si y sólo si x divide a y
- (c) Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.
17. Analizar si es un orden parcial la relación sobre los números enteros dada por:
- $$aRb \quad \text{si y sólo si} \quad a^2 \leq b^2$$
18. Dado un conjunto de números reales A probar que la relación sobre $A \times A$ dada por $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$ es un orden.
 Es total?
19. Determinar si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es una partición para el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $\{\{4, 5, 6\}; \{1, 8\}; \{2, 3, 7\}\}$
 - $\{\{4, 5\}; \{1, 3, 4\}; \{6, 8\}; \{2, 7\}\}$
 - $\{\{1, 3, 4, 7\}; \{2, 6\}; \{5, 8\}\}$
20. Considerando el conjunto A de los alumnos que cursan Mate 4, indicar cuáles de las siguientes son particiones de A .
- (a) $P = \{\{\text{alumnos que aprobaron CADP}\}; \{\text{alumnos que aprobaron Organización}\}; \{\text{alumnos que no aprobaron ISO ni Redes}\}\}$
- (b) $P = \{\{\text{alumnos que realizaron las dos entregas}\}; \{\text{alumnos que sólo realizaron la entrega 1}\}; \{\text{alumnos que sólo realizaron la entrega 2}\}; \{\text{alumnos que no ninguna entrega}\}\}$

(c) $P = \{\{\text{alumnos que están cursando Ciberseguridad}\}; \{\text{alumnos que cursan Sistemas y Organizaciones}\}; \{\text{alumnos que están cursando Lógica e Inteligencia Artificial}\}\}$

21. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
Mostrar que R es una relación de equivalencia y hallar las clases de equivalencia.
¿Cuál es la partición que induce R sobre A ?
22. Dados el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y una partición $P = \{\{a, b\}; \{c, d\}; \{e\}\}$.
Escribir por extensión la relación de equivalencia sobre A inducida por P .
23. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.
Mostrar que R es una relación de equivalencia y determinar las clases $\bar{1}$, $\bar{2}$ y $\bar{3}$.
¿Qué partición de A induce R ?

Ejercicios Adicionales

1. Se dice que una relación R sobre un conjunto A es *asimétrica* si cada vez que a está relacionado con b no se da que b esté relacionado con a .
Dar un ejemplo de una relación asimétrica.
2. Probar que dada una relación R sobre un conjunto A , R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
3. Sean R y S dos relaciones en A . Probar que:
 - (a) Si $R \subset S$ entonces $R^{-1} \subset S^{-1}$
 - (b) Si R y S son reflexivas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son
 - (c) Si R y S son simétricas entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son
4. Escribir un código que dado un conjunto y una relación, determinar si la relación cumple con las propiedades de simetría, reflexividad, transitividad y antisimetría.
5. Dados dos relaciones de orden R y S , analizar si $R \cup S$ y $R \cap S$ también lo son.
6. Probar que el orden lexicográfico es un orden total.

7. Para cada una de las siguientes relaciones: demostrar si es de equivalencia y en caso afirmativo dar 3 elementos de $\overline{(3,4)}$ (la clase del $(3,4)$); si la relación no es de equivalencia, dar un contraejemplo de alguna de las propiedades.

(a) $A = N \times N, \quad (a,b) \sim (c,d) \quad \text{si y sólo si } a.d = b.c$

(b) $A = N \times N, \quad (a,b) \sim (c,d) \quad \text{si y sólo si } a + c = b + d$

(c) $A = Z, \quad a \sim b \quad \text{si y sólo si } a - b \text{ es múltiplo de } 4$

¿alguna te resulta familiar?