Preliminares - Cálculo

1 Ecuaciones importantes

En Matemática I y II han estudiado gráficas que consistían en curvas (rectas, parábolas, elipses, senoidales, cosenoidales, exponenciales, logarítimicas, y otras más), y en todos los casos estas representaciones se realizaron a partir de ecuaciones, que en forma sencilla, son igualdades con incógnitas.

Con el fin de refrescar la memoria, a continuación se mencionan algunas formas generales de ecuaciones cuyas representaciones gráficas son curvas en el plano $\mathbb{R}^2$

- Rectas

$x = a$	$a \in \mathbb{R}$	(recta paralela al eje Y)
$y = b$	$b \in \mathbb{R}$	(recta paralela al eje X)
$y = mx + b$	$m, b \in \mathbb{R}$	(recta con pendiente m, $m \neq 0$)

- Prábolas

$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$	$a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	(parábola con eje paraleo al eje Y y vértice en $\mathrm{V}(\alpha, \beta)$
$x = b(y-\gamma)^2 + \delta$	$b, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$	(parábola con eje paraleo al eje X y vértice en $\mathrm{V}(\gamma, \delta)$
$y = ax^2$	$a \in \mathbb{R}$	(parábola con eje paralelo al eje Y y vértice en el origen de coordenadas)

- Circunferencias

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$	$r, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	(circunferencia con centro en el punto $\mathrm{C}(\alpha, \beta)$ y radio r)
$x^2 + y^2 = r^2$	$r \in \mathbb{R}$	(circunferencia con centro en origen de coordenadas y radio r)

- Elipses

  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $h, k, a, b \in \mathbb{R}$ (elipse con centro en el punto C(h, k))

  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a, b \in \mathbb{R}$ (elipse con centro en el origen de coordenadas)

Las siguientes son ecuaciones cuyas gráficas corresponden a superficies en el espacio $\mathbb{R}^3$:

- Planos

  $z = 0$ (Plano coordenado XY)

  $y = 0$ (Plano coordenado XZ)

  $x = 0$ (Plano coordenado YZ)

  $\alpha.y + \beta.z + d = 0$ (Plano paralelo al eje coordenado X)

  $\gamma.y + \beta.z + d = 0$ (Plano paralelo al eje coordenado Y)

  $\gamma.x + \alpha.y + d = 0$ (Plano paralelo al eje coordenado Z)

  $\gamma.x + \alpha.y + \beta.z + d = 0$ (Otros planos)

- Esferas

  $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$ (esfera con centro en $C(h, k, l)$ y radio r)

  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (esfera con centro en en $C(0, 0, 0)$ y radio r)

- Elipsoides

  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$ (elipsoide con centro en C(h, k, l) y semiejes a, b, c)

  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (elipsoide con centro en $C(0, 0, 0)$)

- Paraboloides

  $z = (x-h)^2 + (y-k)^2 + l$ (paraboloide con vértice en $V(h, k, l)$ y eje de simetría paralelo a Z)

  $z = x^2 + y^2$ (paraboloide con vértice en $V(0, 0, 0)$ y eje de simetría Z)

2 Límites (una variable)

Definición 2.1. Definición intuitiva de límite

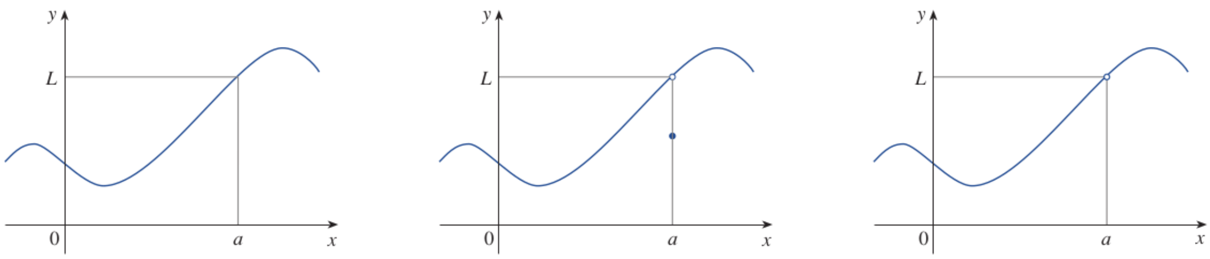
Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo S alrededor del valor x_0, exceptuando posiblemente a x_0 (definida cuando x está "cerca" de x_0). Entonces se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y se dice que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0, es igual a L" si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos como se quiera), tomando valores de x lo suficientemente cerca de x_0 (por ambos lados de x_0), pero no iguales a x_0

En términos generales esto quiere decir que los valores de la función $f(x)$ se aproximan al valor L cuando x se acerca cada vez más al número x_0, pero $x \neq x_0$. En la siguiente figura se muestran 3 casos que reflejan el significado de la definición intuitiva de límite, en los cuales

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

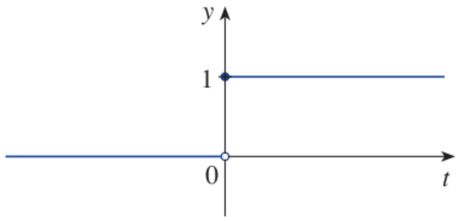


Notemos que no es necesario que la función esté definida en el punto para poder afirmar que el límite existe. Veamos un caso en el que la función está definida en el punto pero donde el límite no existe:

Ejemplo 2.2. *La función Heaviside H se define como*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica es



Veamos que cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se acerca a 0. En cambio, cuando t se aproxima a 0 por la derecha $H(t)$ toma valores cada vez más cercanos a 1. Al no haber un único número al que se aproxime $H(t)$ cuando $t \to 0$, decimos que el límite de la función cuando t tiende a 0 no existe

$$\nexists \lim_{t\to 0} H(t)$$

En este caso notamos que la función se acerca a valores distintos cerca del punto en cuestión dependiendo si se toman valores mayores o menores a 0. Esta situación se indica simbólicamente como

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad\qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

El $+$ indica que solo se consideran valores de t mayores a 0 y el $-$ solo valores menores.

A raíz de este ejemplo definimos el concepto de **límites laterales**:

Definición 2.3. Límites laterales

Dada una función $f(x)$ y una constante x_0, cuando se escribe

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

*se expresa que el **límite de f(x) cuando** x **tiende a** x_0 **por derecha** es igual a L si se puede hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen arbitrariamente a L, tanto como uno quiera, tomando valores de x lo suficientemente cercanos a x_0, pero mayores que x_0.*

De forma análoga se define

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

*y se expresa que el **límite de f(x) cuando** x **tiende a** x_0 **por izquierda** es igual a L si se puede hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen arbitrariamente a L, cuando se toman valores cercanos a x_0, pero menores que x_0.*

De esta forma, uniendo esta definición con la Definición 2.1 se satisface el siguiente teorema:

Teorema 2.4. *El límite* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe si y sólo si ambos límites laterales* $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *existen y son iguales*

A continuación presentaremos las denominadas *leyes de los límites* que, a partir del conocimiento de límites de funciones simples, nos permiten calcular los límites de funciones más complejas:

Propiedades 2.5. Leyes de los límites

Suponiendo c una constante y que los límites

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

existen. Entonces,

1. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 - L_2$
3. $\lim_{x \to x_0} [cf(x)] = c. \lim_{x \to x_0} f(x) = c.L_1$
4. $\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1.L_2$
5. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

2.1 Límites clásicos

Los siguientes son algunos límites importantes para los cuales daremos su resultado:

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{kx} - 1}{x} = k$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^{kx} - 1}{x} = kln(a)$
- $\lim_{x \to 0} ln \left(\dfrac{1 + x}{x}\right) = 1$
- $\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$

3 Continuidad

Como han visto en Matemática I y II, toda función está *definida* para un conjunto de elementos. Si pensamos a la función como una "máquina", la palabra *definida* significa ésta sólo acepta un conjunto (puede ser infinito) de elementos de entrada que podrán serán "transformados". Este conjunto recibe el nombre de **dominio**.

> **Definición 3.1.** *Dada* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, se llama* ***dominio de*** f*, y se anota* $Dom(f)$*, al subconjunto* D *de* $\mathbb{R}$ *en donde está definida la función* f*.*

Además, cuando observamos la curva que forma la gráfica de una función sobre el plano $\mathbb{R}^2$, buscamos que en cierta forma sea lo más "bonita" posible, es decir, sin interrupciones ni saltos. A partir de esto definimos la siguiente propiedad que pueden cumplir las funciones:

> **Definición 3.2.** Continuidad en un punto
>
> *Dada una función* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, decimos que es* ***contínua*** *en un punto* x_0 *si se cumple*
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Observemos que la definición requiere implícitamente tres condiciones para que f sea contínua en el punto x_0

1. $f(x_0)$ está definida, es decir, $x_0 \in Dom(f)$
2. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

De esta forma, si una función es continua en todo un intervalo de puntos de su dominio, tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce solo un pequeño cambio en $f(x)$ en dicho intervalo (no hay saltos bruscos ni interrupciones).

Si alguna de las 3 condiciones anteriores no se cumple se dice que la función presenta una **discontinuidad** en el punto x_0, o que la función es **discontinua** en x_0. Este es el caso de $H(t)$ vista en el Ejemplo 2.2, donde no se cumple la condición (2) y menos aún la (3).

El siguiente es un resultado que nos facilitará determinar si una función, posiblemente compleja, es continua en un punto.

Teorema 3.3. *Si c es un número real y f y g son funciones continuas en x_0, entonces las funciones siguientes son continuas en x_0:*

1. *Múltiplo escalar: cf*
2. *Suma (y diferencia): $f + g$*
3. *Producto: fg*
4. *Cociente: $\frac{f}{g}$, si $g(x_0) \neq 0$.*

En general, cuando debemos hallar el intervalo donde una función $f(x)$ es continua, utilizamos tanto el Teorema 3.3 como los siguientes dos resultados:

Teorema 3.4. *Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo punto de su dominio:*

- *Polinómicas*
- *Trigonométricas*
- *Exponenciales*
- *Racionales*
- *Radicales*
- *Logarítmicas*

Teorema 3.5. *Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en x_0*

Con ayuda de estos tres teoremas podemos tomar una función relativamente compleja y determinar el intervalo de continuidad con bastante facilidad, pero siempre cuidando y prestando atención al dominio de la función. Usualmente, en los puntos donde la función no esta definida hay que hacer un análisis detenido utilizando la definición de continuidad y las tres condiciones mencionadas.

4 Derivación en una variable

El elemento central del Cálulo Diferencial, como el que veremos en esta materia, es la denominada **derivada**. Esta herramiente del cálculo nos permite determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado.

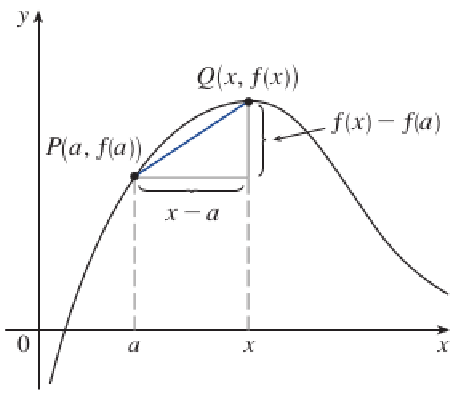
Haciendo memoria, la *pendiente* de una recta es una razón de cambio entre los valores de x e y. Determina la cantidad de unidades que aumenta o disminuye el valor de y cuando x cambia en una unidad.

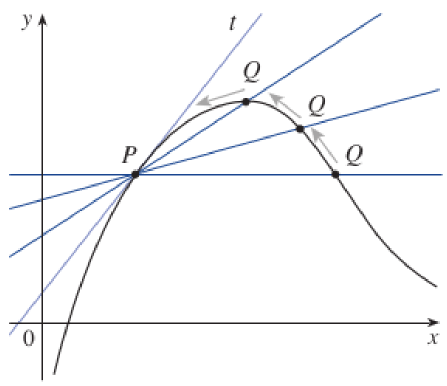
Como sabemos, la pendiente de una recta es única a lo largo de toda su extensión. Este no es el caso cuando tratamos con una curva, la cual puede sufrir cambios constantes en su concavidad y crecimiento. Cuando queremos hallar la razón de cambio instantánea en un punto no resulta tan directo.

Si queremos hallar la recta tangente a la curva C en el punto $P(a, f(x))$ debemos comenzar considerando un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta *secante* (corta en dos puntos a la gráfica) PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

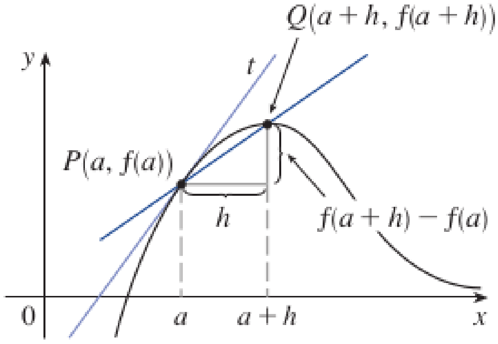
Luego, acercamos Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces se define la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. Gráficamente





Otra expresión para la pendiente m_{PQ} (que resulta más sencilla de utilizar) se construye utilizando a $h = x - a$. De esta forma $x = a + h$ y la pendiente de la recta secante queda

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Observemos que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0. Es así cómo obtenemos la definición que conocemos de **derivada** o **razón de cambio instantánea**, que representa la pendiente m de la recta tangente t.

Definición 4.1. Cociente incremental de Newton

Sea f una función, y sea x un número en el dominio de f. Llamamos ***derivada*** *de f en x al límite del cociente incremental de f en x cuando el incremento tiende a 0, siempre que ese límite exista. a la derivada la indicamos $f'(x)$. Entonces:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Muchas veces deberemos analizar si una función es derivable en un intervalo, es decir, tendremos que ver si existe la derivada de la función para cada punto del intervalo. Es claro que, si tenemos que calcular el cociente incremental para cada punto, es posible que nunca terminemos (si el intervalo es infinito). Por ello presentamos las siguientes *reglas de derivación* que permiten calcular la forma genérica de la derivada para los puntos de la función de una forma más sencilla:

Propiedades 4.2. REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Sean $g(x)$ y $f(x)$ funciones de una variable derivables, entonces tenemos las siguientes propiedades:

- *Si* $g(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R} \to g'(x) = 0$.
- *Si* $g(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \to g'(x) = nx^{n-1}$.
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *si* $g(x) \neq 0$ *en algún intervalo real.*

Por otro lado, cabe mencionar que tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades:

Teorema 4.3. *Sea f una función, si f es derivable en un punto x_0, entonces f es continua en x_0*

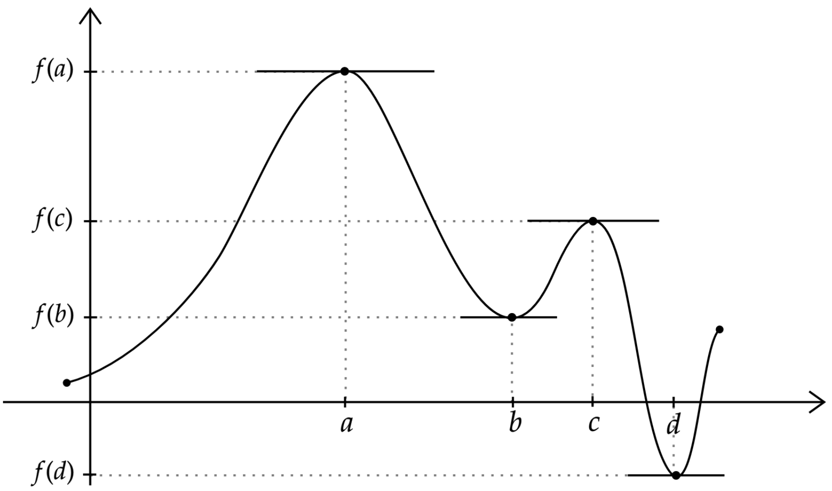
5 Máximos y Mínimos

Uno de los usos de la primera derivada de una función es el cálculo de los valores máximos y mínimos absolutos y relativos a lo largo de su dominio. Veamos cómo definimos a estos extremos:

Definición 5.1. Máximos y Mínimos

- *Se dice que el punto $x_0, f(x_0)$ es un* ***máximo absoluto de f*** *si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f*
- *Se dice que el punto $x_0, f(x_0)$ es un* ***máximo relativo o local de f*** *si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en un intervalo alrededor de x_0*
- *Se dice que el punto $x_0, f(x_0)$ es un* ***mínimo absoluto de f*** *si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f*
- *Se dice que el punto $x_0, f(x_0)$ es un* ***mínimo relativo o local de f*** *si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo alrededor de x_0*

Podemos ver gráficamente estos cuatro casos en la siguiente figura:



La función presenta máximo y mínimo relativo (o local) en los valores b y c respectivamente. Luego sus extremos absolutos se encuentran en a y d, dando un valor $f(a)$ máximo y $f(d)$ mínimo.

Teniendo en cuenta la definición de derivada y su significado como la "pendiente" que presenta la curva en un punto (más precisamente la pendiente de la recta tangente a la curva), notemos que en los cuatro valores de x de la figura anterior, la pendiente es 0. Es decir, si trazamos las rectas tangentes a la curva en estos puntos, éstas tienen pendiente 0 y resultan ser rectas horizontales. Esto nos aporta un leve indicio de que la derivada es una herramienta que nos permite detectar máximos y mínimos, determinando los puntos donde ésta toma el valor 0.

Definición 5.2. *Se dice que x_0 es un **punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$ o si $f'(x_0)$ no existe*

Notamos que $f'(a) = f'(b) = f'(c) = f'(d) = 0$ por lo que, según la definición, son **puntos críticos** de la función graficada. El siguiente teorema muestra que este valor de la derivada no es mera coincidencia.

Teorema 5.3. *Si f tiene un máximo local o un mínimo local en un punto c interior de su dominio, y suponiendo que la derivada de f está definida en ese punto, entonces $f'(c) = 0$*

De este resultado obtenemos que los únicos lugares donde la función f posiblemente tiene un valor extremo (local o global) son los puntos críticos de f. Por otro lado, si tratamos con una función continua y definida en un intervalo cerrado, los extremos de éste también cuentan como puntos candidatos a tener un máximo o mínimo. Este último tipo de las funciones siempre alcanzarán sus valores máximo y mínimo absolutos en el intervalo.

Esta última afirmación se basa en uno de los teoremas fundamentales del cálculo diferencial en una variable:

Teorema 5.4. TEOREMA DE WEIERSTRASS
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, ésta alcanza un valor máximo absoluto (M) y un valor mínimo absoluto (m) en valores de $x \in [a, b]$.

Por definición de máximos y mínimos absolutos en $[a, b]$ debe cumplirse

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall\ x \in [a, b]$$