# TP n°7. Ejercicios Adicionales. (1)

Ejerc. 11. $L$ transf lineal en esp vectorial $V$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ base de $V$. Probar:

a) Si $L(b_i) = 0$ para cada $b_i \in B$ entonces $L$ es la transf nula.

b) Si $L(b_i) = b_i$ para cada $b_i \in B$, entonces $L$ es la transf identidad.

c) Si hay un escalar $r \in \mathbb{R}$ tal que $L(b_i) = r.b_i$ para cada $b_i \in B$, entonces $L(v) = r.v$, $\forall v \in V$.

Demostración:

a) Queremos probar que para cualquier $v \in V$ $L(v) = 0_V$ (es la transformación nula).

Sabemos que $L(b_i) = 0_V$ para cada $b_i \in B$

↓ base elemento

Luego para cualquier $v \in V$, existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tal que $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m$ con lo cual, si aplicamos $L$ a $v$ tenemos:

$$\underline{\underline{L}}(v) = L(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m) = \alpha_1 L(b_1) + \alpha_2 L(b_2) + \dots + \alpha_m L(b_m) = \alpha_1 0_V + \alpha_2 0_V + \dots + \alpha_m 0_V = \underline{\underline{0_V}}$$

↓ es transf lineal

↓ x hipótesis $L(b_i) = 0_V$

Finalmente, $L(v) = 0_V$, $\forall v \in V$ (es transf Nula).

b) Queremos probar que, para cualquier ②

$v \in V$ $L(v) = v$ (transf identidad).

Sabemos que $L(b_i) = b_i$ para $b_i \in B$

Luego para cualquier $v \in V$, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tal que $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m$

Aplicando $L$ a $v$, tenemos:

$L(v) = L(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m) = \alpha_1 L(b_1) + \alpha_2 L(b_2) + \cdots + \alpha_m L(b_m) = \underbrace{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m}_{= v}$ {L es transf lineal.

x hipótesis. $L(b_i) = b_i$

Finalmente, $L(v) = v$ para cualquier $v \in V$

(Transf. identidad).

c) Queremos probar que, para cualquier

$v \in V$, $L(v) = rv$, $\forall v \in V$.

Sabemos $\boxed{L(b_i) = r b_i}$ hip para cada $b_i \in B$

Además, para cualquier $v \in V$, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tal q' $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m$

Aplicando $L$ a $v$, tenemos:

$L(v) = L(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m) \overset{T.L}{=} \alpha_1 L(b_1) + \alpha_2 L(b_2) + \cdots + \alpha_m L(b_m)$

$\underset{hip}{=} \alpha_1 (r b_1) + \alpha_2 (r b_2) \cdots + \alpha_m (r b_m) \underset{V\, esp.\, vect.}{=} r(\alpha_1 b_1) + r(\alpha_2 b_2) + \cdots + r(\alpha_m b_m)$

$= r.(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m) = r.v$

Finalmente $L(v) = r.v$, para cualquier $v \in V$.

Fin

---

Ejerc. 13 Hallar la matriz asociada a la siguiente transformaciones en las bases indicadas:

c) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$L(x, y, z) = (z, x+y)$$

$B_3 = \{(1,1,1); (1,0,1), (0,2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$B_2 = \{(1,2), (0,3)\}$ base $\mathbb{R}^2$.

Resolución: Para construir la matriz de representación (en las bases pedidas $B_3$ y $B_2$) comenzamos aplicando $L$ a los elementos de $B_3$:

- $L(1,1,1) \underset{\substack{\text{Definición} \\ \text{de } L}}{=} (1, 1+1) = (1,2)$
- $L(1,0,1) = (1, 1+0) = (1,1)$
- $L(0,2,1) = (1, 0+2) = (1,2)$

Ahora necesitamos escribir a:

- $L(1,1,1) = (1,2)$
- $L(1,0,1) = (1,1)$
- $L(0,2,1) = (1,2)$

a cada uno como Combinación lineal de los elementos de la base $B_2 = \{(1,2);(0,3)\}$

Cuidado:

$L(1,1,1) = (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

Coordenadas Pero en la base canónica $B_c = \{(1,0);(0,1)\}$

en este caso no nos sirve para hallar la matriz, pues nos piden en otra base $B_2$

Escribamos c/ vector como comb. lineal $B_2$:

- $L(1,1,1) = (1,2) = \boxed{1}.(1,2) + \boxed{0}.(0,3)$
- $L(1,0,1) = (1,1) = \alpha(1,2) + \beta(0,3)$

Busco $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(0,3)$

$(1,1) = (\alpha, 2\alpha + 3\beta)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha & \text{I} \\ 1 = 2\alpha + 3\beta & \text{II} \end{cases}$$

Reemplazo I en II y obtengo

$1 = 2 + 3\beta \to 1 - 2 = 3\beta$

$-1 = 3\beta$

$\boxed{-\frac{1}{3} = \beta}$

$\therefore L(1,0,1) = (1,1) = \boxed{1}(1,2) + \boxed{\left(-\frac{1}{3}\right)}(0,3)$

- $L(0,2,1) = (1,2) = \boxed{1}.(1,2) + \boxed{0}(0,3)$

La matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$