№1

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz -$$

$$-2yz - 4x + 8y + z + 4$$

$$f'_x = -4x - 2y + 3z - 4 = 0$$

$$f'_y = -2y - 2x - 2z + 8 = 0$$

$$f'_z = 4z + 3x - 2y + 1 = 0$$

$$-y - x - z + 4 = 0$$

$$x = 4 - y - z.$$

$$\begin{cases} -4(4-y-z) - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 4z + 3(4-y-z) - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 + 4y + 4z - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 4z + 12 - 3y - 3z - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20 + 2y + 7z = 0 \\ 13 + z - 5y = 0 \end{cases}$$

$$z = -13 + 5y \qquad -20 + 2y + 7(-13 + 5y) = 0$$

$$-20+2y+7(-13+5y)=0$$

$$-20+2y-91+35y=0$$

$$-111+37y=0$$

$$37y=111$$

$$y=111/37=3$$

$$z=-13+5\cdot\frac{111}{37}=2$$

$$x=4-2-\frac{111}{37}=-1$$

$$\underbrace{M(-1;3;2)}$$

М-ца Гессе

$f''_{xx}=-4$ $f''_{xy}=-2$ $f''_{zx}=3$

$f''_{yy}=-2$ $f''_{zy}=-2$

$f''_{zz}=4$

$\Delta_1=-4$

$\Delta_2=4$

$$Q=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 3\\ -2 & -2 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\Delta_3=-4\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-4\cdot(-12)+2\cdot(-2)+3(4+6)=48-4+30=$$

$= 74 > 0$

$\longrightarrow$ экстремума нет.

$f(x,y,z) = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz$
$+ 2yz + 11x + 2y + 18z + 10.$

$f'_x = -2x + y - 2z + 11 = 0$

$f'_y = -10y + x + 2z + 2 = 0$

$f'_z = -6z - 2x + 2y + 18 = 0$

$f''_{xx} = -2 \qquad f''_{xz} = -2$

$f''_{yy} = -10 \qquad f''_{yz} = 2$

$f''_{zz} = -6 \qquad f''_{xy} = 1.$

крамер.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = A$$

$$B = \begin{bmatrix} -11 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix} =$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -2 \\ -2 & -10 & 2 \\ -9 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -148$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & -11 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \end{vmatrix} = -37$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -11 \\ 1 & -10 & -2 \\ -1 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -74$$

$\Delta = -37$ $\Delta_1 = -2$ $\Delta_2 = 19$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-56) - \ldots < 0$$

Точка максимума

Посчитать зн-е ф-ии

$$f(4, 1, 2) = 51$$

Поиск min max с огранич.

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$g_i(x) = 0$ – ограничение

$$G(x, p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

p_i – множители Лагранжа

x_i

$$= f(x) + p_1 g_1(x) + p_2 g_2(x) + \ldots + p_n g_n(x)$$

Чтобы найти min

$$G(x;p) = \underbrace{f(x) + \langle p, g(x)\rangle}_{\text{в краткой форме}}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x_i}\right|_{(x_i^*, p^*)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x^*} + \langle p^*, \frac{\partial g}{\partial x^*} \rangle$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial p_j}\right|_{(x_i^*, p^*)} = g_j(x^*) = 0$$

Идея в том, что если $g(x) = 0$ составляем ф-ию Лагранжа

Ищем min ф-ии Лагранжа

ex.

$z = 5 - 3x - 4y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 = 25$ должно быть $=0$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$

Составляем ф-ию Лагранжа

$G = f + pg$

$G = 5 - 3x - 4y + p(x^2 + y^2 - 25)$

$G'_x = -3 + 2px$

$G'_y = -4 + 2py$

$$\begin{cases} G'_x = 0 \\ G'_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 + 2px = 0 \\ -4 + 2py = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2px = 3 \\ 2py = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \qquad x = \frac{3}{2p} \quad y = \frac{4}{2p}$$

$$\left(\frac{3}{2p}\right)^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \frac{9+16}{4p^2} = 25$$

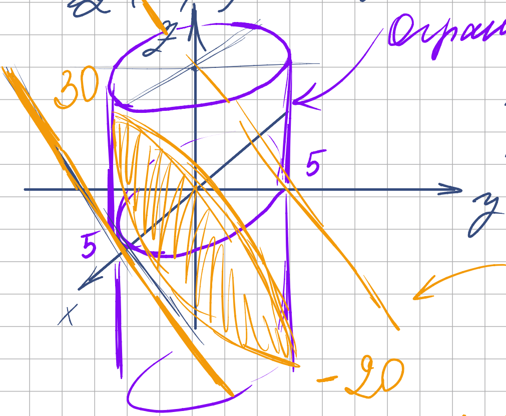
$$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{4} \qquad p = \pm\frac{1}{2}$$

$M_1(-3; -4)$

$M_2(3; 4)$

$Z_1(-3; -4) = 5 - 3(-3) - 4(-4) = 30$

$Z_2(3; 4) = -20$



1) метод графич.

$\Rightarrow Z_1 = 30$ MAX

$Z_2 = -20$ MIN

2) метод через нахождение вторых производных

$$d^2G = G''_{xx}(dx)^2 + 2G''_{xy}\,dx\,dy + G''_{yy}(dy)^2$$

$d^2G < 0$ MAX

$d^2G > 0$ MIN

$G''_{xx} = 2p$

$G''_{yy} = 2p$

$G''_{xy} = 0$

$$\boxed{d^2G = 2p(dx)^2 + 2p(dy)^2}$$

30 MAX.

$p_1 = -\frac{1}{2}$

$p_2 = \frac{1}{2}$

-20 MIN

MAX < 0

$d^2G = -dx^2 - dy^2$

$d^2G = dx^2 + dy^2$

> 0

MIN

$d G^2 = 2(dx)^2 - 4(dy)^2$

Брать дифф-л от исх огр.

$d(x^2+y^2) = d(25)$

$d(x^2) + d(y^2) = 0$

$2x\,dx + 2y\,dy = 0.$

$dy = -\frac{x}{y}dx$

подставить.

и тогда получаем $dG^2 \gtrless 0$

III Дост. в матричной форме

$g'_x = (x^2+y^2-25)'_x = 2x$

$g'_y = (x^2+y^2-25)'_y = 2y$

!

$$A = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & G''_{xx} & G''_{xy} \\ g'_y & G''_{yx} & G''_{yy} \end{vmatrix}$$

$|A| < 0$ MIN

$|A| > 0$ MAX

это верно внимательно

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2p & 0 \\ 2y & 0 & 2p \end{vmatrix}$$

Для каждой точки считаем определитель.

M_1

$$p = -\frac{1}{2}$$

$$x = -3$$

$$y = -4$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -8 \\ -6 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 100 > 0$$

$\Rightarrow$ точка MAX

M_2

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = 3$$

$$y = 4$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -100 < 0$$

MIN