$$\mathcal{H} = V + \lambda' f + \lambda_{n+1} \{g^2 H(g)\}$$

Гамильтониан

функция Хевисайда

- Ограничения при минимизации времени
- Ограничения по упр-ю

Min времени

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt = t_f - t_0$$

$$|u(t)| \le 1$$

Система:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

Из $\forall$ состояния в $(0,0)$

$$\dot{x} = Ax + B$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Может быть одно переключение

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

Без ограничений:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^* - ?$$

Есть огр.: $H(x^*, \lambda^*, u^*, t)$

не зависит от u

$$\leq H(x^*, \lambda^*, u, t)$$

$$\underbrace{1 + \lambda_1^* x_2^*}_{\text{не зависит от } u} + \lambda_2^* u^* \leq 1 + \lambda_1^* x_2^* + \lambda_2^* u$$

$$\lambda_2^* u^* \leq \lambda_2^* u$$

для $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \lambda_2^* > 0, \ t \in [t_0, t_f] \\ 1 & \lambda_2^* < 0, \ t \in [t_0, t_f] \end{cases}$$

$|u(t)| \leq 1$

$\lambda_2^* > 0$ $\quad$ $\lambda_2^* < 0$

$u^* \leq u$ $\quad$ $u^* \geq 0.$

$$\dot{\lambda}_1^* = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \lambda_1^* = C_1$$

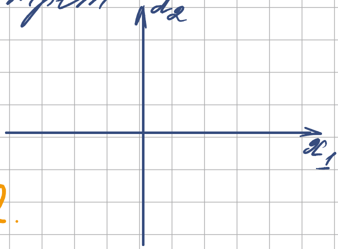
$$\dot{\lambda}_2^* = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \Rightarrow \dot{\lambda}_2^* = -C_1$$

$$\lambda_2^* = -C_1 t + C_2$$

$t \in [t_0, t_f]$

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & t \in [t_0, t_f) \\ -1, & t \in [t_0, t_f] \\ +1, & t \in [t_0, t_1) \text{ и } t \in [t_1, t_f] \\ -1, & t \in [t_0, t_1) \text{ и } t \in [t_1, t_f] \end{cases}$$

Чтобы понять как переключ-ся упр-е нужно построить фазовый портрет



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u = \pm 1 \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = \pm 1$$

$$(x_2 = \pm t + C_3)^2.$$

$$\dot{x}_1 = \pm t + C_3$$

$$\boxed{x_1 = \pm \frac{1}{2} t^2 + C_3 t + C_4}$$

$$x_2^2 = t^2 + 2tC_3 + C_3^2$$

$$\frac{1}{2} x_2^2 = \frac{t^2}{2} + tC_3 + \frac{C_3^2}{2}$$

$$\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} x_2^2 + tC_3 + C_3^2/2$$

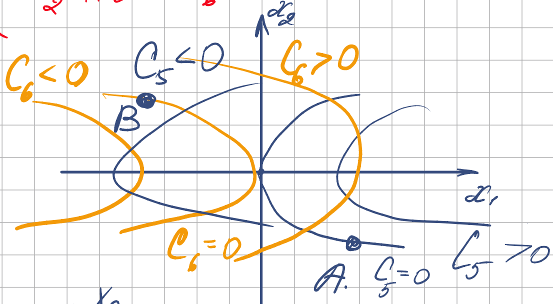
$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + tC_3 + C_3^2/2 + $$

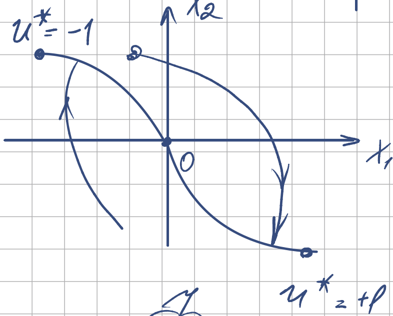
$$+ C_3 t + C_4$$

$$x_1 \begin{cases} \frac{1}{2}x_2^2 - \underbrace{C_3^2\frac{1}{2} + C_1}_{C_5} \\ \quad + C_5 \\ -\frac{1}{2}x_2^2 + C_6 \end{cases}$$

$u = 1$ $\quad y = x^2$

$u = -1$





$C_5 = C_6$:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|$$

Уравнение кривой переключения

Функция переключения

$$S(x(t)) \triangleq x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|$$

$S(x(t)) > 0$ $\quad x(t)$ выше A-B

$S(x(t)) < 0$ $x(t)$ ниже A-B

$S(x(t)) = 0$ $x(t)$ лежит на A B

Получаем оптимальное упр-е:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & S(x(t)) > 0 \\ 1, & S(x(t)) < 0 \\ -1, & S(x(t)) = 0 \\ & x(t) \text{ лежит на } AB \end{cases}$$