1 Punto 1

Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto no vacío y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas uniformemente convergentes en K. Demostrar que $(f_n)_n$ es equicontinua.

Como cada f_n es continua y K es un compacto, entonces, f_n es uniformemente continua, por lo tanto, para cada n, y dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_n > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \text{ si } |x - y| < \delta_n$$

Para $\epsilon > 0$, debe existir un natural N tal que si $n \geq N$,

$$|f_n(x) - f_N(x)| < \epsilon$$

Luego,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_n(y)| \\ &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| \end{aligned} \tag{1}$$

A partir de ahora, consideramos $\delta = \min \delta_i, i = 1, ..., N-1$, entonces la condición de equicontinuidad se verfica para las $N - 1$ primeras funciones, y para $n \geq N$, retomamos la inecuación demostrada anteriormente, entonces, si $|x - y| < \delta$, entonces $|f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon$, luego,

$$|f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\epsilon$$

Concluyendo así que $(f_n)_n$ es equicontinua.

2 Punto 2

Considerar la sucesión $(f_n)_n$ de funciones Riemann integrables y uniformemente acotadas en $[a, b]$ y sea

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, x \in [a, b]$$

Demuestre que existe una subsucesión de esta sucesión que converge uniformemente en $[a, b]$.

Primero vemos que $|F_n(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)|\, dt \leq M(b - a)$, es decir, la sucesión es acotada puntualmente. Ahora consideramos lo siguiente:

$$|F_n(x) - F_n(y)| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq M|x - y|$$

Es decir, cada F_n es de tipo Lipchitz, y como el M vale para toda la sucesión $(f_n)_n$, concluimos que para $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{M}$.

Con lo anterior, sabemos que la sucesión es equicontinua y acotada, de modo que por el teorema de completitud de funciones visto en clase, concluimos que existe una subsucesión de F_n que converge uniformemente en $[a, b]$.

3 Punto 3

Sea $(f_n)_n$ una sucesión equicontinua y puntualmente convergente en un compacto $K \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ que cumple la condición de equicontinuidad, además de que para cada x existe un N_x que satisface la condición de convergencia puntual. Tomamos la familia $B_x = (x-\delta, x+\delta)$ es un cubrimiento por abiertos de K, por lo tanto existe una cantidad finita de elementos $x_i, i = 1, ..., n$ tal que B_{x_i} sigue cubriendo a K.

Elegimos $N = \max N_{x_i}, i = 1, ..., n$, entonces, para $m \geq N$ tenemos que

$$|f_m(x) - f(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f(x)| \tag{2}$$

Siempre que $|x - x_i| < \delta$, $|f_m(x) - f_m(x_i)| < \epsilon$ y como $N > N_{x_i}$, entonces $|f_m(x_i) - f(x)| < \epsilon$, luego,

$$|f_m(x) - f(x)| < 2\epsilon$$

4 Punto 4

Determinar completamente las series de Fourier de las siguientes funciones y dado el caso explicar en qué sentido se tiene la convergencia hacia $f(x)$. Verificar la identidad de Parseval.

4.1 Punto a

$$f(x) = 3\cos^3(x),\ |x| \leq \pi$$

Primero que todo, $\cos^3(x) = \frac{1}{2}\cos(x)(1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}(\cos(x)+\cos(x)\cos(2x))$, y recordando que $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$, llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\cos(x) + \cos(x)\cos(2x)) &= \frac{1}{2}(\cos(x) + \frac{1}{2}(\cos(3x) + \cos(x))) \\ &= \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x)) \\ &= \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)\end{aligned} \tag{3}$$

Es decir, $f(x) = \frac{9}{4}\cos(x) + \frac{3}{4}\cos(3x)$. Por la paridad de la función $\cos(\cdot)$, concluimos que f es una función par, por lo tanto los coeficientes b_n son nulos.

Ahora determinemos una forma para $f(x)\cos(nx)$.

$$\begin{gathered}\frac{9}{4}\cos(x)\cos(nx) + \frac{1}{4}\cos(3x)\cos(nx) = \\ \frac{9}{8}\cos((n+1)x) + \frac{9}{8}\cos((n-1)x) + \frac{1}{8}\cos((n-3)x) + \frac{1}{8}\cos((n+3)x)\end{gathered} \tag{4}$$

Analizando los valores cuando $n = 1$ y cuando $n = 3$ se obtine un resultado concluyente, ya que el segundo y tercer término no resultan en 0 cuando se efectua la integral, entonces los hayamos explícitamente:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{9}{8} \cos(2x) + \frac{9}{8} + \frac{1}{8} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) \right) dx = \frac{9}{8\pi} \cdot 2\pi = \frac{9}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{8} \, dx = \frac{1}{4}$$

Por inspección, los demás términos son nulos. La serie de Fourier resulta en

$$f(x) \sim \frac{9}{4} \cos(x) + \frac{3}{4} \cos(3x)$$

Que resulta siendo una de las formas que dimos arriba.

Sabemos que la función f es continua y periodica, con periodo de 2π, y además su derivada, $f'(x) = -9\cos^2(x)\sin(x)$ es una función Riemann integrable, entonces su serie de Fourier converge uniforme y absolutamente a f (caso trivial).

Ahora vemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{81}{16} + \frac{9}{16} = \frac{45}{8}$, y por otro lado $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$ que resulta en

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{81}{16} \cos^2(x) + \frac{27}{8} \cos(x)\cos(3x) + \frac{9}{16} \cos^2(3x) \right) dx \tag{5}$$

el primer sumando es $\frac{81}{16}$, el segundo es 0 y el tercero $\frac{9}{16}$, que son los mismos coeficientes presentados antes, por lo tanto sus sumas coinciden.

4.2 Punto b

$$f(x) = \sqrt{\pi}, \text{ si } |x| \leq \frac{1}{2}, \ 0 \text{ si } \frac{1}{2} < |x| \leq \pi$$

Esta función es una función par, entonces los coeficientes b_n son nulos.

Hallamos los coeficientes a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi} n} \sin(nx)|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi} n} \sin\left(\frac{n}{2}\right)$$

Y es fácil ver que $a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

Entonces

$$f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi} n} \sin\left(\frac{n}{2}\right) \cos(nx)$$

Por el criterio de Jordan, como f es variación acotada sobre todo intervalo de la forma $[x - \delta, x + \delta]$, $0 < \delta < \pi$, entonces la serie de Fourier converge hacia

$s(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$, entonces veamos qué apariencia tiene $s(x)$

Si $|x| < \frac{1}{2}$, entonces $s(x) = \sqrt{\pi}$, y si $\frac{1}{2} < |x| < \pi$, $s(x) = 0$. Por último, si $x = \frac{1}{2}$, $s(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} + 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, si $x = -\frac{1}{2}$, tenemos un caso análogo, entonces

$$s(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} < |x| \leq \pi \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & \text{si } |x| = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6}$$

Ahora verifiquemos la identidad de Parseval. Para ello verifiquemos el valor de $||f||^2$:

$$||f||^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = 1$$

Y como $||f||^2 < \infty$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\left(\frac{n}{2}\right) = 1$$

4.3 Punto c

$$f(x) = x^2, \text{ si } |x| \leq \pi$$

De nuevo, esta es una función par, entonces los coeficientes b_n son 0. Los coeficientes a_n vienen dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)x\, dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}(-\frac{2}{n}\cos(n\pi)\pi) \\ &= \frac{4}{n^2}(-1)^n \end{aligned} \tag{7}$$

y es sencillo verificar que $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$, concluyendo que

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

De nuevo usamos el lema de Jordan, como x^2 es de variación acotada en el intervalo $[x-\delta, x+\delta], 0 < \delta < \pi$, para todo x, entonces la serie converge hacia $s(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = x^2$ ya que f es continua.

De nuevo, como $||f||^2 < \infty$ entonces se cumple la identidad de Parseval, y como
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4\, dx = \frac{2}{5}\pi^5$$

Entonces
$$\frac{2}{5}\pi^4 = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

5 Punto 5

Sea $f(x) = \pi - x, 0 < x \leq \pi$. Determine los coeficientes de Fourier de la extención impar a $[-\pi, \pi]$.

f estaría determinada como

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, \text{ si } 0 < x \leq \pi \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ -(x+\pi), \text{ si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Como extendimos a f en su forma impar, entonces los coeficientes a_n son 0. Para determinar los coeficientes b_n resolvermos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\, dx$$

Empezamos resolviendo la primera integral:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin(nx)\, dx = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\, dx\right) = \frac{1}{n}$$

Y la segunda resulta en:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\, dx\right) = \frac{1}{n}$$

Es decir, $b_n = \frac{2}{n}$ y su serie de Fourier asociada es:

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

Ahora análizamos la convergencia de esta serie hacia la función original. De nuevo, usamos el lema de Jordan; como f es de variación acotada en cada intervalo de la forma $[x-\delta, x+\delta]$, para $\delta < \pi$, entonces la serie coverge a $s(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$. Vemos que cuando $x > 0$ o $x < 0$, $s(x) = f(x)$ y cuando $x = 0$, $s(x) = 0$, es decir, $s(x) = f(x)$. Ahora determinemos el valor de $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)^2\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)^2\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{(\pi+x)^3}{3}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\frac{(\pi-x)^3}{3}\Big|_{0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{3}\pi^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

Entonces $\frac{2}{3}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$, siendo esta la identidad de Parseval. De esto último se concluye el problema de Basilea

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

6 Punto 6

Sea $f(x) = \sin(x),\ \text{si } x \in [0, \pi]$

6.1 Punto a

Determine una serie de cosenos de f en $[-\pi, \pi]$ y describir los tipos de convergencia hacia f en $[0, \pi]$.

Extendemos a f como una función par en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para que los coeficientes a_n no se anulen.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx$$

Determinemos el valor de $\int \sin(x)\cos(nx)\,dx$. Si $n \geq 2$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int \sin(x)\cos(nx)\,dx &= -\cos(x)\cos(nx) - n\int \cos(x)\sin(nx)\,dx \\
&= -\cos(x)\cos(nx) - n\left(\sin(x)\sin(nx) - n\int \sin(x)\cos(nx)\,dx\right) \\
\int \sin(x)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{n^2-1}\left(\cos(x)\cos(nx) + n\sin(x)\sin(nx)\right)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Con esto podemos determinar los siguientes valores cuando $n > 1$

$$\int_{-\pi}^{0}\sin(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2-1}(1+(-1)^n)$$

$$\int_{0}^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2-1}((-1)^{n+1}-1)$$

Entonces $a_n = \frac{2}{\pi(n^2-1)}((-1)^{n+1}-1)$, si $n > 1$. Si $n = 1$, $\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)$, entonces $a_1 = 0$, y $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin(x)\,dx + \int_0^{\pi}\sin(x)\,dx\right)$, por lo tanto, $a_0 = \frac{4}{\pi}$, con todo esto en mente, determinamos

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}\cos(nx)$$

Analizando el término $((-1)^{n+1}-1)$, es 0 cuando n es impar y -2 cuando es par, entonces el término $a_n = \frac{-4}{\pi(2n-1)(2n+1)}, n > 1$, luego, la serie se puede escribir como

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$$

6.2 Punto b

Ahora determinemos la identidad de Parseval, para ello, hallemos el valor de $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \int_0^{\pi}\cos(2x)\right) = 1$$

Es decir que

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

Despejando la serie se concluye que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

7 Punto 7

Sea f una función Riemann integrable T-periódica, $T > 0$. Muestre que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es T-periódica sii $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

$F(x+T) = F(x) \iff \int_0^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt \iff \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt \iff \int_x^{x+T} f(t)\,dt = 0 \iff \int_0^T f(t)\,dt = 0$

8 Punto 8

Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ no puede ser la serie de Fourier de ninguna función.

Si fuera la serie de Fourier de alguna función, se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty$, en esa serie se hace notar que $a_n = 0$ y $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, pero esto es una contradición porque sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

9 Punto 9

Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$ no puede ser la serie de Fourier de de una función continua y periodica.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$ fuera la serie de Fourier de alguna función, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$, lo que contradice que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \infty$.