Objetivo

El alumno comprenderá el uso de los grupos, semigrupos y monoides como operaciones binarias con el fin de ayudarles a desarrollar su capacidad para pensar de manera abstracta y rigurosa, así como para comprender mejor las estructuras matemáticas fundamentales.

En este tutorial se tratará de comprender el método algebraico para operaciones binaria, así como sus propiedades de uso que ayuden al alumno a implementarlo de una mejor forma y con mayor facilidad en las situaciones necesarias.

Introduccion

Los grupos, semigrupos y monoides son conceptos matemáticos que se utilizan en la ingeniería en computación para modelar y resolver problemas en diferentes áreas, tales como la teoría de la computación, la criptografía, la teoría de lenguajes formales, la inteligencia artificial, entre otras, son conceptos matemáticos fundamentales en la ingeniería en computación, que permiten modelar y resolver problemas complejos en diferentes áreas de aplicación de la computación.

Definiciones y conceptos

**3. Antecedentes.**

**3.1 Algebra básica**

El álgebra es una rama de las matemáticas que estudia las estructuras y las relaciones entre las variables y las operaciones. Se ocupa de las propiedades y las operaciones que pueden ser realizadas sobre números, símbolos y expresiones matemáticas para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. El álgebra se puede dividir en varias ramas, tales como álgebra elemental, álgebra abstracta, álgebra lineal, álgebra booleana, entre otras.

El álgebra es una rama importante de las matemáticas que se utiliza en muchas áreas de la ciencia y la tecnología para modelar y resolver problemas de manera eficiente y precisa. En resumen, el algebra nos ayudara a entender y resolver los temas abstractos de los grupos, semigrupos y monoides como también poder ejecutar los problemas de lógica en la materia de Estructuras Discretas.

**3.2 Sistemas algebraicos**

Los sistemas algebraicos son estructuras matemáticas que se utilizan para estudiar las propiedades de las operaciones algebraicas y las relaciones entre las variables. Estos sistemas pueden ser finitos o infinitos, y pueden ser representados mediante símbolos, fórmulas y ecuaciones.

**4. GRUPOS, SEMIGRUPOS Y MONOIDES**

**4.1 Operaciones Binarias**

Un concepto que nos ayudará mucho a entender el tema de grupo, sé mi grupo y monoide es la estructura básica que los conforma la cual es la operación binaria que en conceptos algebraicos se le denomina como una operación básica de números considerados naturales dentro de una binariedad ya que asocian un par de números con un resultado genérico el cual cumple con dos condiciones básicas.

• Se aplicará un par de elementos con una naturaleza determinada.

• Asocia a dicho par con otro único elemento de la misma naturaleza determinada.

En términos matemáticos, se le denomina como conjunto *S* no vacío es una función *S x S* que relaciona a un par de elementos (a,b) dónde a,b son una imagen *c* que pertenece a *S*

**4.2 GRUPOS**

En matemáticas se le conoce particularmente a un grupo como una estructura algebraica formada por un conjunto A no vacío y una ley de composición interna, la misma se denota por la escritura *(A\*)* por lo mismo como identidad algebraica tiene una serie de puntos que cumplir que es este caso. serían:

• 1. La ley y operación \* interna, esto es para cada par de elementos (x) e y de A, la composición *x\*y* debe ser un elemento de *A*, se conoce también como propiedad clausuraría.

• 2. Asociatividad para la ley \*, esto es para cualquier terna,*x,y y z*debe cumplir que \*(y\*z) = *(x\*y)\*z.*

• 3. Existencia de un elemento neutro e para \*, esto es para cualquier *z de A*, se cumple *x\*e= x*y *e\*x=x*. Este elemento neutro es único en la operación interna.

• 4. Todo elemento *x de A* tiene simétrico y; esto es, para todo elemento *x de A* existen un elemento y tal que *x\*y= e= y\*x*. El elemento simétrico dentro de la operación es único asimismo

**4.2.1 Grupos Abelianos**

Un grupo abeliano, también conocido como grupo conmutativo, es un tipo de grupo en el que el orden de las operaciones no afecta el resultado. Esto significa que, para cualquier par de elementos en el grupo, el producto de esos elementos es el mismo independientemente del orden en que se realice la operación.

• Conmutatividad: para cualquier par de elementos a y b en el grupo, se cumple que ab = ba.

Asociatividad: para cualesquiera tres elementos a, b, y c en el grupo, se cumple que (ab)c = a(bc).

•Identidad: hay un elemento en el grupo, denotado como "e", que no cambia el valor de otro elemento cuando se multiplica por él. En otras palabras, para cualquier elemento a en el grupo, se cumple que *ae = ea = a.*

•Operación binaria: la operación que combina dos elementos del grupo para producir un tercer elemento también es un elemento del grupo.

•Distributivita: la multiplicación de un elemento a por la suma de dos elementos b y c es igual a la suma de las multiplicaciones de a por b y a por c. En otras palabras, *a\*(b+c)* = ab + ac.

**4.2.2 Grupos Permutables**

Otro punto de interés para el estudio de los grupos en las matemáticas discretas sería la permutación dentro de los grupos, lo cual podemos definirlo como el conjunto A de rolas las permutaciones sobre un conjunto no vacío S bajo la operación binaria \* de composición derecha de permutaciones en un grupo *(A,\*)* llamado el grupo de permutaciones.

**4.2.3 Grupos Dihedrales**

Otro tipo de grupo dihedral el cual se entiende como la transformación debidas a todos los movimientos rígidos de un polígono regular de n lados que resulta en polígonos idénticos pero con diferentes nombres de vértice bajo la operación binaria de composición derecha \* es un grupo llamado grupo dihedral denotado por *( Dn, \*).*

El grupo diédrico se puede representar como un conjunto de elementos, cada uno de los cuales es una combinación de una reflexión y una rotación de un polígono o un poliedro regular. Por ejemplo, el grupo diédrico D4 se puede representar como el conjunto de las siguientes operaciones:

•La identidad *(no se realiza ninguna operación).*

•Una rotación de 90 grados en el sentido de las agujas del reloj.

•Una reflexión diagonal *(que refleja el objeto a lo largo de una línea que conecta dos vértices opuestos).*

**4.2.4 Grupos Cíclicos**

Se conoce como grupo (A,\*) será cíclico si existe un elemento a qué pertenece a A tal que cada elemento x de A puede expresarse como *x = a^n*para algún entero n, en tal caso se dice que el grupo cíclico será generado por a o a en un generador de *A*.8 A también se denota por medio de *(a)*

Más formalmente, si G es un grupo cíclico generado por un elemento a, entonces cada elemento de G puede escribirse como a^k, donde k es un número entero. La multiplicación en el grupo se realiza de la siguiente manera: *a^k \* a^j = a^(k+j)*. Además, se puede demostrar que todos los grupos cíclicos finitos son isomorfos a los grupos *Z, n*, el grupo de enteros módulo n con la operación suma modular.

**4.3 Semigrupo**

Semigrupos en el ámbito algebraico relacionado directamente en las matemáticas discretas, tomando como concepto de investigación a un semigrupo cómo un sistema matemático sencillo que consta de un conjunto y una operación binaria y que tiene muchas aplicaciones importantes.

En otras palabras, dado cualquier conjunto *S* y una operación binaria \* en *S*, si \* satisface la propiedad asociativa, entonces *(S, \*)* es un semigrupo. Por ejemplo, el conjunto de números naturales con la operación de multiplicación forma un semigrupo, ya que la multiplicación es una operación binaria que es asociativa.

La propiedad *asociativa* es la única propiedad que se requiere para un semigrupo. Por lo tanto, un semigrupo no necesita tener elementos identidad ni elementos inversos. Si un semigrupo tiene un elemento identidad y todos sus elementos tienen inversos, entonces se le llama "grupo".

**4.4 Monoides**

Se conoce como monoide a una rama de los semigrupos, para comenzar a hablar sobre los monoides tomaremos como concepto la estructura que nos denomina el libro de matemáticas abstractas el cual se refiere a los monoides como una estructura algebraica con una operación binaria, que es asociativa y tiene elemento neutro por lo tanto es un semigrupo con elemento neutro.

Como concepto equivalente un monoide es un conjunto equipado con una operación binaria asociativa y un elemento de identidad, los enteros no negativos con suma forman un monoide siendo el elemento identidad 0, cómo síntesis los monoides son semigrupos con identidad.

Un conjunto *S* por pláticas equipado con una operación binaria *S x S* tiende a *S* que denotaremos \*, es un monoide si cumple los siguientes dos axiomas:

1. Tiene elementos idénticos, existe un elemento e dentro *S* tal que por cada elemento a dentro de *S*, las iguales *e.a = a y a °e = a.*

2. Es asociativa:para todos *a, b y c dentro S*, la ecuación (a.b)c ° a.b.c