④

Ahora, para el caso de una cuerda con densidad variable como lo es un látigo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{donde} \qquad c^2(x) = \frac{T_0 \rightarrow \text{Tensión}}{\mu(x) \rightarrow \text{Densidad linear de masa}}$$

Con las condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Considerando una densidad de masa de la forma $\underbrace{\mu(x) = \frac{T_0}{(1+x)^2}}$

Entonces $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (1+x)^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

De aquí se tiene que L será considerado =1 sin pérdida de generalidad

Separación de variables:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)\ddot{T}(t) = (1+x)^2 \ddot{X}(x)T(t)$$

Separación de variables:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

De aquí se tiene que L será considerado = 1 sin pérdida de generalidad

$$X(x)\ddot{T}(t) = (1+x)^2\,\ddot{X}(x)\,T(t)$$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = (1+x)^2\,\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = -\lambda$$

EDOs:

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{\lambda}{(1+x)^2}X = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{T} + \lambda T = 0$$

Escaneado con CamScanner

Proponiendo $X(x) = (1+x)^a$ como una forma de solución, tenemos:

$$\dot{X}(x) = a(1+x)^{a-1}, \quad \ddot{X}(t) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

$$a(a-1)(1+x)^{a-2} + \frac{\lambda}{(1+x)^2}(1+x)^a = 0$$

$$a(a-1)(1+x)^{a-2} + \lambda(1+x)^{a-2} = 0$$

Entonces $a(a-1) = -\lambda \longrightarrow a(a-1)+\lambda = 0$

Por lo tanto $a = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4\lambda}\right)$

Ahora, para satisfacer la condición $X(0)=0$; elegimos:

$$X(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda}\right)} - (1+x)^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda}\right)}$$

Para la condición de frontera $X(1) = 0$:

$$(*) \quad 2^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\lambda}\right)} - 2^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\lambda}\right)} = 0 \implies 2^{\sqrt{1-4\lambda}} = 1$$

Para los posibles autovalores λ se tiene que:

$$X(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\lambda})} - (1+x)^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\lambda})}$$

Para la condición de frontera $X(1) = 0$:

$$(*) \quad 2^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\lambda})} - 2^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\lambda})} = 0 \implies 2^{\sqrt{1-4\lambda}} = 1$$

Para los posibles autovalores λ se tiene que:

- Si $\lambda < 1/4$ entonces $\sqrt{1-4\lambda}$ es un real. La ec. no tiene solución.
- Si $\lambda = 1/4$, las soluciones no serán linealmente independientes (ver $(*)$)
- Si $\lambda > 1/4$, entonces $\sqrt{1-4\lambda}$ es imaginario. Entonces podemos escribir:

$$X(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{4\lambda-1})} = (1+x)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} i\sqrt{4\lambda-1}\, Ln(1+x)}$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{2}}\left[Cos\left(\sqrt{\lambda-\tfrac{1}{4}}\, Ln(1+x)\right) + i\, Sen\left(\sqrt{\lambda-\tfrac{1}{4}}\, Ln(1+x)\right)\right]$$

$$= X_1(x) + iX_2(x) = Z(x)$$

Escaneado con CamScanner

Para satisfacer $X(0)=0$, se establece:

$$X(x) = (1+x)^{1/2}\ \text{Sen}\left(\sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ \text{Ln}(1+x)\right)$$

Y la condición $X(1)=0$ nos da:

$$2^{\frac{1}{2}}\ \text{Sen}\left(\sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ \text{Ln}(2)\right) = 0$$

Por lo tanto

$$\sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ \text{Ln}(2) = n\pi, \text{ o sea que } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\text{Ln}^2(2)} + \frac{1}{4},\quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Llegando así a las autofunciones $X_n(x)$

$$X_n(x) = C_n (1+x)^{1/2}\ \text{Sen}\left(n\pi \frac{\text{Ln}(1+x)}{\text{Ln}(2)}\right)$$

Sabiendo que $f(x) = X(x)\,T(0)$, eso significa que

$$f(x) \sim \sum X_n(x)$$

Sabiendo que $f(x) = X(x)T(0)$, eso significa que

$$f(x) \sim \sum X_n(x)$$

De modo que los coeficientes C_n se pueden obtener expandiendo en series de Fourier.

$$C_n = \frac{2}{Ln(2)} \int_0^1 f(x)\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\, Sen\left(n\pi \frac{Ln(1+x)}{Ln(2)}\right) dx$$

Ahora, la otra EDO: $\ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0$.

Escribiendo su solución como combinación de senos y cosenos y buscando satisfacer las condiciones dadas, vemos que se cumple si

$$T_n(t) = Cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, t\right)$$

Por lo tanto llegamos a

$$U_n(x,t) = X_n(x) + T_n(t)$$

$$U_n(x,t) = C_n(1+x)^{1/2}\,\mathrm{Sen}\left(n\pi\,\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{\mathrm{Ln}(2)}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\lambda_n}\,t\right)$$

Llegando a

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(1+x)^{1/2}\,\mathrm{Sen}\left(n\pi\,\frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{\mathrm{Ln}(2)}\right)\mathrm{Cos}\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\mathrm{Ln}^2(2)}+\frac{1}{4}}\;t\right)$$

Y para hallar la velocidad, simplemente se ha de derivar la expresión anterior respecto a t.