látigo

PROBLEMA Calcular velocidad y desplazamiento de un extremo de una cuerda de longitud L, que reacciona un impulso que se le imprime en el otro extremo. los látigos son una cuerda inextensible de masa variable $m_0 >> m_L$.

1 Cuerda de misma masa por unidad de longitud; extremo fijo.

CONDICIONES
$\psi(x,0) = f(x)$
$\psi(L,t) = 0$
$\psi(0,t) = 0$
$\dot{\psi}(x,0) = \dot{f}(x)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

T → tensión
m → densidad lineal

Usando $\psi(x,t) = A(x)B(t)$

$$\rightarrow A(x)\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 B(t)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{c^2}{A(t)}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \lambda = -w^2 \quad ; \quad \lambda = -w^2$$

Ahora resolviendo:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -w^2 B \quad \rightarrow \quad B(t) = C\cos(wt) + D\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{-w^2}{c^2} A \quad \rightarrow \quad A(x) = E\cos\left(\frac{w}{c}x\right) + F\,\mathrm{sen}\left(\frac{w}{c}x\right)$$

↳ usando las condiciones: $\psi(0,t) = 0$ y $\psi(L,t) = 0$
se obtiene:

$$A(0) = E = 0$$
$$A(L) = \mathrm{sen}\left(\frac{w}{c}L\right) = 0 \quad \rightarrow \quad w_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Entonces:

$$A_n(t) = \mathrm{sen}\left(\frac{w_n}{c}L\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

En consecuencia, la solución para el modo n es:

$$\psi_n(x,t) = A(x)B(t) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}c\,t\right) + D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

Por tanto,

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[C_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + D_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right]$$

Ahora por las otras condiciones $\psi(x,0) = f(x)$ y $\dot{\psi}_t(x,0) = \dot{f}(x)$ se obtiene:

① $\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$

↳ donde:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

② $\dot{\psi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[-C_n \frac{n\pi c}{L} t\,\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \frac{n\pi c}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right]$

$\rightarrow \dot{\psi}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{n\pi c}{L}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \dot{f}(x).$

↳ donde:

$$D_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \dot{f}(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

En conclusión se tiene:

DESPLAZAMIENTO:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \dot{f}(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

VELOCIDAD:

$$\dot{\psi}_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[-\frac{2n\pi c}{L^2}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{2}{L}\int_0^L \dot{f}(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$