TALLER 1

SERIES DE FUNCIONES : MONOMIOS Y TAYLOR

Sección 2.3.9.

7. Ecuación de Airy, pero inhomogéna.

↳ $y'' = xy$.

a) Resuelva la ecuación homogénea de Airy : $y'' - xy = 0$. Muestre que la solución es

$$y(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \dots\right] + y'(0)\left[x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \dots\right]$$

$$y'' - xy = 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' - x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right)' - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) = 0$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) = 0$$

$$n-2 = k \rightarrow n = k+2 \quad ; \quad n+1 = k \rightarrow n = k-1$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k\right) = 0$$

$$(2)(1)a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1}\right]x^k = 0$$

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1}\right]x^k = 0$$

Para cumplir la condición anterior se tiene que:

$$2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \quad (1)$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1} = 0$$

$$\rightarrow a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

ECUACIÓN DE RECURRENCIA ♥

$$k=1 \rightarrow a_3 = \frac{a_0}{(3)(2)}$$

$$k=2 \rightarrow a_4 = \frac{a_1}{(4)(3)}$$

$$k=3 \rightarrow a_5 = \frac{a_2}{(5)(4)} \rightarrow a_5 = \frac{0}{(5)(4)} = 0 \quad \text{por } a_2 = 0 \quad (1)$$

$k=4 \longrightarrow \quad a_6 = \dfrac{a_3}{(6)(5)} = \dfrac{a_0}{(6)(5)(3)(2)}$

$k=5 \longrightarrow \quad a_7 = \dfrac{a_4}{(7)(6)} = \dfrac{a_1}{(7)(6)(4)(3)}$

$\circ \circ \circ$

Entonces, la solución queda

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \overset{0}{\cancel{a_2}}\, x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{6} x^3 + \frac{a_1}{12} x^4 + \circ\circ\circ$$

$$y(x) = a_0 \left[1 + \frac{1}{6} x^3 + \circ\circ\circ \right] + a_1 \left[x + \frac{1}{12} x^4 + \circ\circ\circ \right]$$

Para hallar a_0, se tiene que si $y(0) = a_0$ y luego si derivamos $y(x)$ y realizamos $y'(0) = a_1$.

Por tanto, la solución deseada queda como

$$y(x) = y(0) \left[1 + \frac{1}{6} x^3 + \circ\circ\circ \right] + y'(0) \left[x + \frac{1}{12} x^4 + \circ\circ\circ \right]$$

Comprobando a su vez la solución planteada en el enunciado.

b) Resuelva la ecuación inhomogénea de Airy $y'' - xy = x^2$. Compruebe que la solución es:

$$y(x) = \underbrace{y(0) \left[1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 + \cdots \right] + y'(0) \left[x + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{504} x^7 + \cdots \right]}_{\text{SOLUCIÓN ECUACIÓN HOMOGÉNEA.}} \underbrace{- x}_{\text{solución}}$$

Otra forma de hacer el ejercicio 7b.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, x^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}\, x^k\right) - x^2 = 0$$

$$2a_2 - x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_{k-1} \right] x^k = 0$$

$$2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$k = 2$

$$-1 + (4)(3)\, a_4 - a_1 = 0$$

$$a_4 = \frac{a_1 + 1}{12}$$

$k \neq 2$

$$a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$$

Entonces, la solución queda.

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \cancel{a_2}^{\,0} x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{6} x^3 + \frac{a_1 + 1}{12} x^4 + \ldots$$

Tomando C como $C = a_1 + 1 \longrightarrow a_1 = C - 1$

$$y(x) = a_0 + \underbrace{(C-1)x}_{Cx - x} + \frac{a_0}{6} x^3 + \frac{C}{12} x^4 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 \left[1 + \frac{1}{6} x^3 + \ldots \right] + C \left[x + \frac{1}{12} x^4 + \ldots \right] - x$$

donde $a_0 = y(0)$ y $C = y'(0) - 1$

CamScanner

Sección 2.4.7

4. Suponga conocida la fórmula de reflexión de Euler

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

y a partir de ella muestre que

$$\Gamma\Big(\underbrace{\frac{1}{2}+z}_{z^{\circ}}\Big)\Gamma\Big(\underbrace{\frac{1}{2}-z}_{1-z^{\circ}}\Big) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

grafique ambos lados de la relación.

$$z^{\circ} = \frac{1}{2} + z \longrightarrow 1 - z^{\circ} = 1 - \frac{1}{2} - z = \frac{1}{2} - z$$

$$\Gamma(z^{\circ})\Gamma(1-z^{\circ}) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+z\right)\right)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi z\right)}$$

$$= \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

6. Una forma de calcular numéricamente los valores de la función $\Gamma(x)$ es aproximarla como un polinomio. Una de esas propuestas se le debe a Hastings y puede expresarse de la siguiente manera

$$\Gamma(z+1) = z! = 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + z(a_6 + z(a_7 + z(a_8))))))))) \quad (1)$$

Encuentre esos coeficientes y luego compare esta aproximación con una más estándar.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sum_{k=1}^{8} c_k z^k$$

El valor de esos coeficientes los pueden encontrar la literatura de aproximaciones de funciones matemáticas.

$$(1)\ \Gamma(z+1) = z! = 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + z(a_6 + a_7 z + a_8 z^2))$$

$$= 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + a_6 z + a_7 z^2 + a_8 z^3)$$

$$= 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + a_5 z + a_6 z^2 + a_7 z^3 + a_8 z^4)$$

$$= 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + a_4 z + a_5 z^2 + a_6 z^3 + a_7 z^4 + a_8 z^5)$$

$$= 1 + z(a_1 + z(a_2 + a_3 z + a_4 z^2 + a_5 z^3 + a_6 z^4 + a_7 z^5 + a_8 z^6)$$

$$= 1 + z(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + a_5 z^4 + a_6 z^5 + a_7 z^6 + a_8 z^7)$$

$$= 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + a_6 z^6 + a_7 z^7 + a_8 z^8.$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{8} a_k z^k$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\,dx$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{8} a_k z^k$$

$a_1 = -0.5771$ $\quad a_6 = 0.4821$

$a_2 = 0.9882$ $\quad a_7 = -0.1935$

$a_3 = -0.8970$ $\quad a_8 = 0.0358$

$a_4 = 0.9182$

$a_5 = -0.7567$

(2) $\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sum_{k=1}^{8} C_k z^k$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sum_{k=1}^{8} C_k z^k \approx C_1 z^1 + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4 + C_5 z^5 + C_6 z^6 + C_7 z^7 + C_8 z^8 .$$

$C_1 = 1$

$C_2 = 0,57721$

$C_3 = -0.65587$

$C_4 = -0.04200$

$C_5 = 0.16653$

$C_6 = -0.04219$

$C_7 = -0.00962$

$C_8 = 0.00721$