2 Cuerda de misma masa por longitud ; extremo libre.

Del caso anterior se obtienen las mismas soluciones de la EDs:

$$B(t) = C \cos(\omega t) + D \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$A(x) = E \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + F \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

usando la condición $\psi(0,t) = 0$ se tiene

$$A(0) = E = 0$$

$$\rightarrow A(x) = F \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

CONDICIONES.

$\psi(0,t) = 0$

$\psi(x,0) = f(x)$

$\psi_t(x,0) = \dot{f}(x)$.

$\psi_x(L,t) = 0$

la fuerzas verticales en los extremos vienen dadas por:

$$T\dot{\psi}_x(0,t) \quad \wedge \quad -T\dot{\psi}_x(L,t)$$

Si la cuerda en su extremo móvil se desliza verticalmente sin fricción se tiene: $\psi_x(0,t) = 0$.

$$\dot{A}(x) = F \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

$$\dot{A}(L) = \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} L\right) = 0 \quad \rightarrow \frac{\omega_n L}{c} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\rightarrow \omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{L}$$

Entonces,

$$A_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_n}{c} x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2} x\right)$$

En consecuencia, la solución para el modo n es:

$$\psi_n(x,t) = A(x)B(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2} x\right)\left[C_n \cos\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2} ct\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2} ct\right)\right]$$

Por tanto,

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)\left[C_n \cos\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}ct\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}ct\right)\right]$$

Ahora, por las otras condiciones $\psi(x,0) = f(x)$ y $\dot{\psi}_t(x,0) = \dot{f}(x)$ se obtiene:

① $$\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right) = f(x)$$

↳ donde:

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

② $$\dot{\psi}_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}c\right]\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)\left[-C_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}ct\right) + D_n \cos\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}ct\right)\right]$$

$$\dot{\psi}_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\left[\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}c\right]\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right) = \dot{f}(x)$$

↳ donde:

$$D_n = \frac{4}{(2n-1)\pi c}\int_0^L \dot{f}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)dx.$$

En conclusión se tiene:

DESPLAZAMIENTO:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)dx \cos\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}ct\right) + \frac{4}{(2n-1)\pi c}\int_0^L \dot{f}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}x\right)dx \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{L}\frac{\pi}{2}ct\right)\right]$$

VELOCIDAD:

$$\psi_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)}{L}\frac{\pi}{2}c\right]\psi(x,t).$$