

Proyecto de laboratorio 1

Péndulo masa-resorte

2200801 - Angélica Angarita
2200019 - José David Garavito

21 de junio de 2022

Universidad
Industrial de
Santander



Resumen

Se realizó un análisis del movimiento armónico simple y el movimiento amortiguado, de forma teórica y experimental, calculando la constante elástica del resorte usado. A su vez, se evidenció la dependencia del periodo de oscilación del sistema respecto a la masa, variando las diferentes masas posibles en miras de observar el comportamiento al variar cada uno de los posibles parámetros que afectan el sistema.

1. Introducción

El estudio de las ondas -perturbaciones de propiedades en el espacio- ha tenido un amplio estudio a través de la historia: La civilización griega, representada por sus filósofos, interesados en la música, consideraban posible una relación entre las ondas y el sonido, suponiendo (acertadamente) que tales perturbaciones eran causales de este.

Cerca al 550 AC Pitágoras determinó una relación matemática para encontrar las longitudes de los hilos con tonos distinguibles del ruido. Para tal fin el filósofo implementó un monocordio (instrumento de una sola cuerda) y dividió la cuerda en 12 partes, buscando las secciones de esta donde el sonido era armonioso, observando que en intervalos de quintas perfectas de razón $3/2$ se construyen las frecuencias conocidas actualmente como pitagóricas.

Mucho después, Galileo Galilei, en el S.XVII publica una proclamación de la relación entre las vibraciones de los cuerpos y los sonidos generados por estos, a su vez, Robert Boyle, en 1660 demostró que el soni-

do no puede viajar en el vacío, y de igual forma Newton describió matemáticamente cómo viaja el sonido en su Principia del 1686. Teniendo estos importantes avances preliminares, en el siglo XVIII, Jean Le Rond d'Alembert encontró una forma general de describir el comportamiento de las ondas matemáticamente, siendo esta la piedra angular del estudio actual de tales propagaciones, abarcando gran cantidad de fenómenos físicos, dentro de los cuales está el caso de estudio actual: el sistema masa-resorte.

De esta manera, el correspondiente trabajo de investigación está desarrollado en la siguiente manera: en primera instancia se desarrolla un análisis detallado acerca del movimiento armónico simple y el movimiento amortiguado, luego de esto se genera un procedimiento para la parte experimental, caracterizado principalmente por el uso de herramientas computacionales como **CASSY lab 2** y **Python**, finalizando con un tratamiento de datos donde se obtuvieron los valores correspondientes al periodo y la constante elástica del resorte para cada caso, destacando finalmente, los resultados, limitaciones y posibles desarrollos futuros tanto a la toma de datos, análisis de resultados e investigaciones futuras en las secciones posteriores.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Estudiar el Movimiento armónico simple del sistema masa-resorte analizando las oscilaciones de este mediante la herramienta cassy-lab.

2.2. Objetivos específicos

Comprobar la ley de Hooke que establece la relación entre la fuerza restauradora de un resorte y la deformación ocasionada sobre el resorte por una fuerza aplicada al resorte para deformarlo.

Verificar la dependencia del período de oscilación de un sistema masa-resorte con la masa y la constante del resorte.

Analizar las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración de un sistema masa-resorte con ayuda del sistema de adquisición Cassy Lab.

3. Marco Teórico

Se parte de lo establecido en el proyecto de investigación [1], por ende, con base en el movimiento armónico simple (MAS), se consideran oscilaciones amortiguadas [2], necesarias para el análisis de los datos obtenidos. Con base en lo anterior, es relevante conocer el tipo de montaje realizado: péndulo masa-resorte vertical, de esta manera, al tomar las mediciones se aproximó que el movimiento en el eje horizontal sea cero.

3.1. Movimiento Armónico Simple (MAS)

En este movimiento no hay pérdida de energía y por tanto es de duración infinita, dado que no hay una fuerza externa que lo detenga. Por esta razón, es la mejor teoría de la cual partir. Ahora, para el montaje de masa-resorte vertical (fig. 1) se obtuvo la siguiente ecuación diferencial (ED) que representa movimiento del mismo (eq. 1), la demostración de esta ecuación se evidencia en la sección (sec. 8).

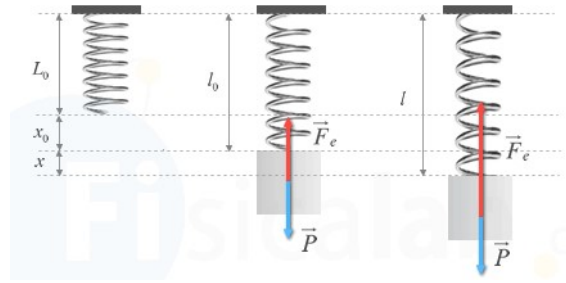


Fig. 1. Dinámica de un resorte orientado verticalmente sometido a una masa [3].

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0, \quad (1)$$

siendo:

- **y** Desplazamiento desde la posición equilibrio con la masa.
- **k** Constante elástica del resorte.
- **m** Masa del objeto suspendido.

La solución a la anterior ED es la posición dependiente del tiempo (eq. 2) y a partir de esa se puede hallar la de velocidad (eq. 3):

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad (2)$$

$$v(t) = A \omega \cos(\omega t + \phi). \quad (3)$$

Debido al tipo de movimiento, se considera la amplitud constante, ϕ es la fase inicial: el ángulo que tiene el vector posición en el tiempo $t=0$ y su frecuencia angular está dada por,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

y a su vez el período es,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

Con ayuda de la definición de período se puede hallar la constante elástica del resorte

a partir de la relación de este con la masa [4]. Se tuvo la ecuación (eq.8), podemos obtener la siguiente expresión:

$$\frac{g}{y_0} = \frac{k}{m} \rightarrow \frac{g}{y_0} = \omega^2,$$

entonces en la ecuación original (eq. 8) se tiene:

$$k = m\omega^2 \rightarrow k = m \frac{4\pi^2}{T^2},$$

Y de esta manera se obtuvo la relación entre la masa y período cuadrado:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m. \quad (4)$$

3.1.1. Diagramas de fase

El movimiento armónico resulta una buena aproximación para el análisis del fenómeno físico (respecto a otros tipos de movimientos) luego es plausible la obtención de gráficas de posición, velocidad y aceleración: periódicas y sin variaciones en la amplitud (fig. 2).

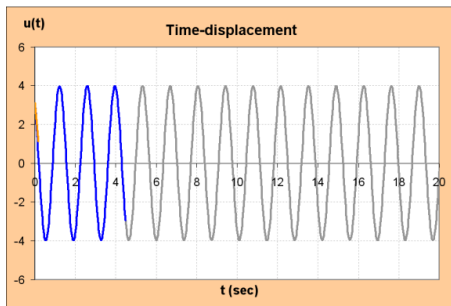


Fig. 2. Posición vs tiempo en un movimiento periodico [5].

De la misma manera, al realizar un diagrama de fase de velocidad vs posición se obtiene una forma elíptica debido a la diferencia de fase del sistema, manteniendo un

mismo periodo, esto implica que cuando se complete una repetición del movimiento se trazara una circunferencia o en su defecto una elipse (fig. 3).

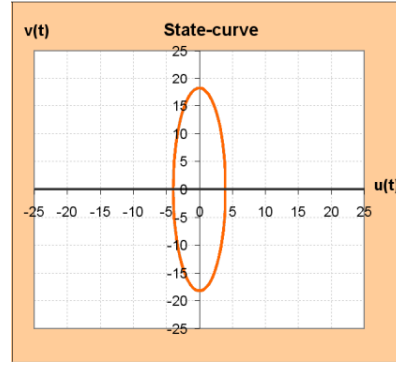


Fig. 3. Diagrama de fase velocidad vs posición, se aprecia la forma de una elipse [5].

3.2. Oscilaciones Amortiguadas

En este tipo de movimiento se consideran pérdidas de energía debido a fuerzas amortiguadoras, y por esto decrece la amplitud de cada oscilación -aspecto diferenciador respecto al MAS-.

Además, estas oscilaciones modifican la ED mostrada para el caso anterior (eq. 1), ahora dada por (eq. 5):

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = 0, \quad (5)$$

siendo:

- $b \frac{dy}{dt}$ La fuerza amortiguadora.
- $\gamma = \frac{b}{2m}$ Forma alterna de representar posterior la constante de amortiguamiento de tal forma que se relacione con la masa.

Ahora, la solución de la ecuación anterior (eq. 5) es nuevamente la posición dependiente del tiempo (eq. 6). Notese que la

amplitud no es constante y por ende se tiene una función en términos del tiempo para hallarla. Al realizar la respectiva derivación respecto al tiempo de la expresión de posición para obtener la de velocidad (eq. 7), se tiene:

$$\begin{aligned} A(t) &= Ae^{-\gamma t}, \\ y(t) &= Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \\ v(t) &= -\gamma Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \\ &\quad + Ae^{-\gamma t} \omega \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

$$(7)$$

Partiendo de esto, intuitivamente se podría apreciar como al cambiar la amplitud es posible un cambio de la frecuencia angular, debido que la amplitud y la frecuencia se hayan relacionadas, con fines de analizar la dinámica del sistema, se aprecian dos frecuencias:

- **Frecuencia angular propia ω_0**

En esta frecuencia se considera la misma expresión del MAS,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- **Frecuencia angular ω**

Esta frecuencia es propia del movimiento cuando empieza la amortiguación, esto es, antes de obtener al menos un período completo. Esta frecuencia esta dada por la siguiente ecuación,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2.$$

Análogamente, para obtener el período de oscilación se obtienen dos valores dependiendo de la frecuencia angular utilizada:

para ω_0 se obtiene el período del movimiento asumiendo que no existen fuerzas amortiguadoras. Debido a que estas fuerzas suelen ser relevantes el resultado anterior puede interpretarse como un cuasiperíodo ya que no llega a completar una oscilación en el mismo punto [6]. Dado esto, para caracterizar el periodo del sistema se obtiene:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0,$$

recordando que $\omega < \omega_0$.

3.2.1. Diagramas de fase movimiento amortiguado

En los posteriores diagramas de fase se evidencia el cambio de la amplitud manifestado en un decrecimiento del movimiento. En el caso presente (fig. 4), se observa el de la posición contra el tiempo.

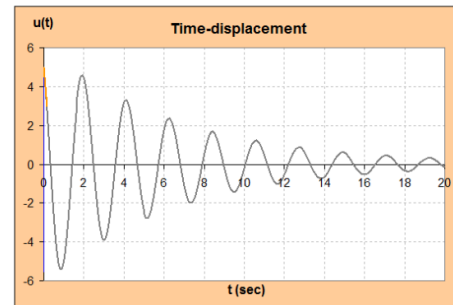


Fig. 4. Posición vs tiempo en un oscilador armonico considerando fuerzas amortiguadoras[5].

Analizando ahora velocidad contra posición (fig. 5) en este caso no se obtuvo una circunferencia o elipse, se obtuvo una espiral que va a hacia el centro debido a la amortiguación, al final el movimiento cesara y tanto posición como velocidad van a estar en un punto específico al que el sistema trata de acercarse, es decir, un atractor.

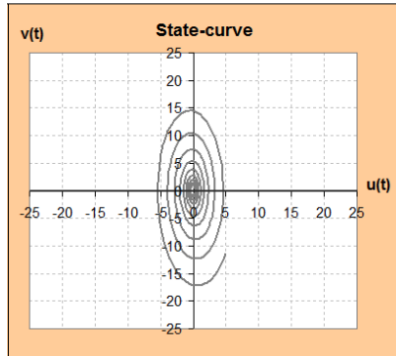


Fig. 5. Diagrama de fase velocidad vs posición, se aprecia la formación de una espiral con un atractor en el origen. [5].

4. Metodología

El montaje para la práctica consiste en un péndulo de masa-resorte, tal como se observa en la figura (Fig. 6). Este contiene un sensor conectado a la aplicación CASSY lab 2 mostrada en el computador del montaje. Se usaron tres masas de 5,165, 9,872 y 20,031 gramos.

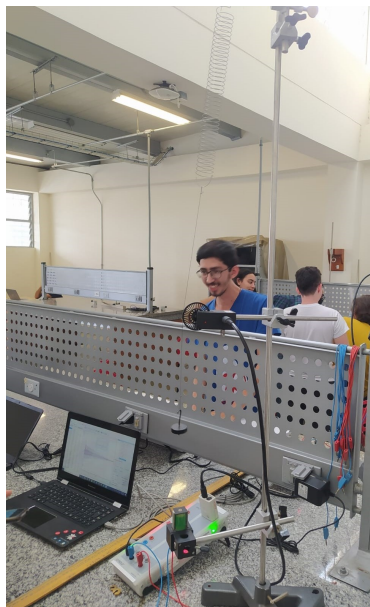


Fig. 6. Montaje básico de la práctica.

En primera instancia, mediante CASSY lab 2 se seleccionó la carpeta de *Física*, entre el menú de opciones se seleccionó la *Oscilaciones armónicas de un péndulo de resorte* como se muestra en la figura (Fig. 7). De allí saldrá el documento de Cassy sobre ese movimiento [7], en este se eligió la opción de *Cargar ejemplo* y de esta manera se abrió la primera interfaz de análisis.

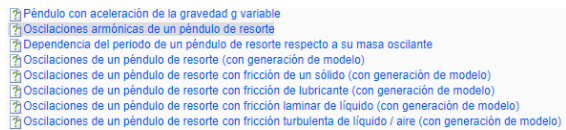


Fig. 7. Menú de elección del movimiento.

Esta interfaz consta de un cuadro en el cual se puede ver la posición del resorte respecto a un punto, para manejar esa posición se dio click derecho a ese cuadro y con ello se abren las configuraciones del mismo. En esos ajustes se puede cambiar el sistema de referencia, cambiar el intervalo de tiempo en el que toma las medidas, y si es necesario un cambio en el sensor que se este usando. Adicionalmente, al lado de esos ajustes la tabla con valores de tiempo, posición, velocidad y aceleración; a su vez con la graficadora de esos mismos datos consignados en la tabla.

4.1. Masas en reposo

Para esta primera fase, se toma la posición del resorte en la figura (Fig. 6) como cero, es decir esa es la posición de equilibrio. Y con ayuda de las tres pesas se arman todas las posibles combinaciones que se den para obtener diferentes masas, de esta manera se obtuvieron masas de 5, 10, 15, 20, 25, 30 y 35 gramos aproximadamente. A partir de cada una de esas masas, al colocarla tal como se muestra en la figura (Fig. 8) se anotaba el valor de elongación obtenido por ca-

da una. Cabe aclarar que después de retirar cada masa se comprobó nuevamente que el punto tomado como cero se encontrará en el mismo lugar, es decir donde el resorte estuviera sin ninguna masa.

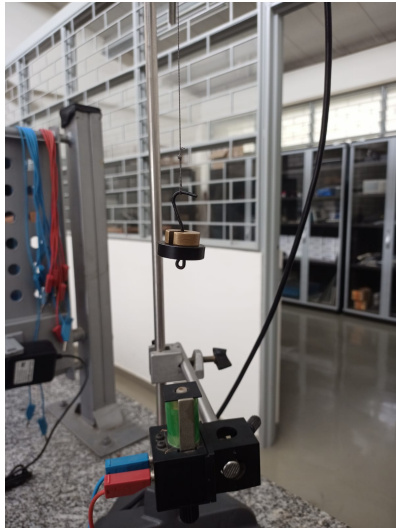


Fig. 8. Forma de colocar las masas.

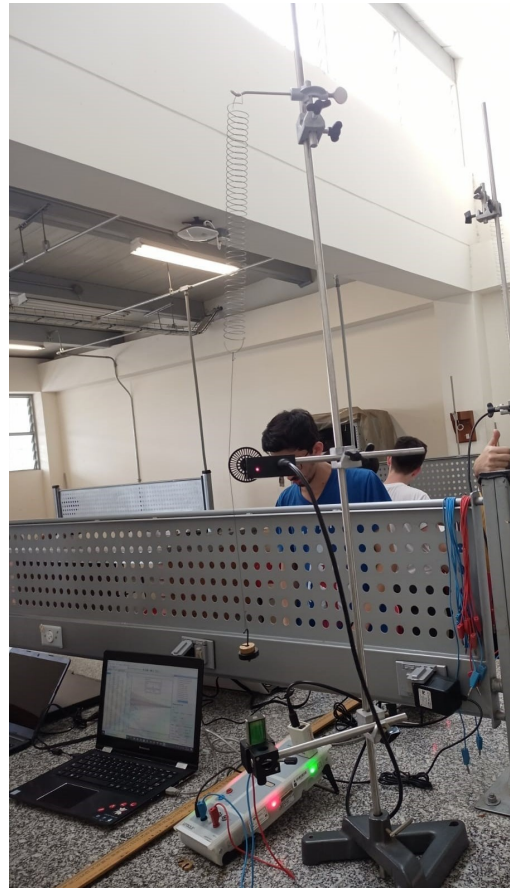


Fig. 9. Segundo montaje del resorte.

Todos esos datos fueron anotados en un excel, el cual más tarde se exportó como csv para mayor facilidad en el manejo de esos datos.

4.2. Masas oscilando

Ahora, para esta fase se colocaron sólo cada masa por separado y cada vez que se colocaba una se modificaba el punto cero, para hacer que quedará hasta donde elongará tal y como se ve en la figura (Fig. 9).

Después de ajustar el cero, se procedió a elongar el resorte hasta 2, 4, 6 y 8 cm cada uno con ayuda del imán en el soporte de abajo del resorte. Ese imán sostiene el resorte junto con la masa hasta encontrar la elongación deseada y a partir de empezar a tomar las medidas ese imán se desactivó para dejarlo oscilar libremente. En esas medidas se puede cambiar el intervalo de tiempo y las gráficas que pueden ser observadas. Entonces lo observado en la aplicación es lo visto en la figura (Fig. 9).



Fig. 10. Vista de las medidas en la aplicación.

Después de obtener las medidas se procede a guardar cada archivo en formato txt. Es bueno mencionar, que en el montaje se tuvo en cuenta que al elongar el resorte y sostenerlo con el imán este que quedará en la misma dirección de la conexión al soporte. También se escogieron los intervalos de tiempo en segundos ya que al tenerlo en microsegundos, toma las mediciones tan seguidas que no se logra obtener los datos de mejor forma.

5. Tratamiento de Datos

Con base en el desarrollo metodológico antes mencionado se realizó el tratamiento de datos en *Jupyter - Python* con el fin de obtener una mayor comprensión del fenómeno físico.

5.1. Situación 1: Masa-resorte en equilibrio.

En esta fase se tomaron los datos almacenados en un archivo .csv y con ayuda de la

librería de *Pandas*, se subió el archivo, graficando los puntos obtenidos por los diferentes conjuntos de masas las cuales se pasaron a *kg*. Cabe resaltar que la ecuación lineal utilizada para esta gráfica corresponde a (eq. 8) que se encuentra en la demostración de (eq. 1). Esto se realizó ya que al no tener movimiento no se produjo todavía el amortiguamiento y se obtuvo peso para compararlo contra la elongación. Para hallar el peso se tomó la constante gravedad dada por Python en su librería *Scipy* que se encuentra a continuación:

```
#Valor de la gravedad estándar utilizada
g
9.80665
```

Fig. 11. Valor de la aceleración gravitacional usado.

Además, con ayuda de la herramienta **curve fit** se halló el parámetro faltante en la ecuación, en este caso la constante elástica del resorte por medio de una regresión lineal sobre los datos graficados.

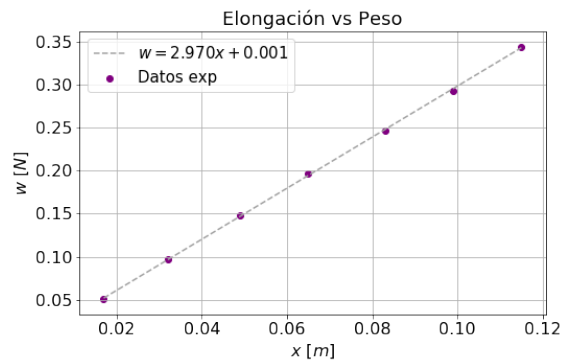


Fig. 12. Comparativa de elongación del resorte en función del peso. La pendiente del arreglo corresponde a la constante elástica del resorte utilizado.

Luego de observar la gráfica se obtiene como resultado que la k constante elástica

ca tiene un valor aproximado de $2,97[\frac{N}{m}]$, además el valor de 0,001 es atribuible al resultado de una fuerza externa que al ser de un valor tan bajo es despreciable, y de igual forma a posibles errores en la experimentación.

5.2. Situación 2: Resorte oscilando.

Para esta fase se tomaron las mediciones para las 3 masas: 5, 10 y 20 gramos aproximadamente y las cuales se van a comparar en los casos de elongaciones de 2, 4, 6, y 8 cm. Mediante la librería *Pandas* se realizó la subida de los archivos para su manejo y posteriormente se realizaron las gráficas de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo, adicionando un diagrama de velocidad contra posición para comprobar las diferentes gráficas con lo mencionado en secciones anteriores (sec. 3).

También en este caso se uso la herramienta **Curve fit** para ajustar los datos a una función en este caso las a las ecuaciones (eq. 6) y (eq. 7) como se muestra en la figura (fig. 13) . Adicionalmente, se anexan las gráficas que van a ser mostradas a continuación en la sección (sec. 9) para un mayor detalle de las mismas.

```
def func1(x, a, b, w, c):
    return a*np.exp(-b*x)*np.sin((w*x)+c)

def func2(x, a, b, w, c):
    return -b*a*np.exp(-b*x)*np.sin((w*x)+c) + a*np.exp(-b*x)*w*np.cos((w*x)+c)

param3, cov = curve_fit(func1, t, n)
param4, cov = curve_fit(func2, t, v)
```

Fig. 13. Funciones de ajuste a los datos de posición y velocidad.

Como se mencionó antes se aproxima esas funciones a los datos y a partir de eso se hallan los parámetros faltantes tales como amplitud inicial, constante de amortiguamiento, frecuencia y fase de cada caso. Para el caso del período con ayuda de los datos

anteriores se pueden hallar los dos valores de este uno con la frecuencia natural y el otro con la frecuencia de movimiento. Para los diagramas hallados se tomó un código para diferenciar los datos graficados y la función aproximada, ese código fue para los datos tener una línea continua y para la función una línea a trozos.

5.2.1. Caso 5g

Ya se había mencionado que las masas con las cuales se realizaron los experimentos fueron medidas en una báscula y se obtuvo su valor real pero para mayor manejo se siguió nombrándolas con un valor entero aproximado .

Ahora, para el caso de esta masa se tiene que su valor real es 5,165 gramos la cual es la utilizada para hallar el valor de frecuencia natural. Después, se realizaron las gráficas obteniendo los siguientes resultados:

■ Elongación 2 cm

Cabe resaltar que en estos movimientos se espera un decrecimiento de la amplitud después de la primera oscilación.

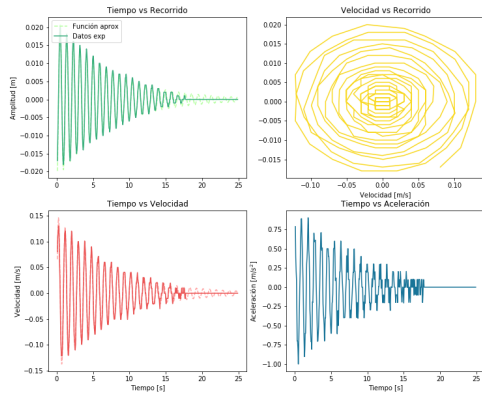


Fig. 14. Según su color: Amplitud(verde), velocidad(rojo), aceleración(azul) vs tiempo. De igual forma, en color amarillo, se muestra un diagrama de fase de velocidad contra tiempo, apreciando la existencia de un punto a donde intenta converger el sistema.

Con ayuda de la aproximación de las funciones a las gráficas de los datos ya señalados se tomaron los valores hallados por la herramienta para los dos arreglos como medio de comparación. Además, como extra el período hallado con la frecuencia natural es decir, $T_0 = 0,262[s]$.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	0.022	0.022
Amortiguamiento	0.142	0.141
Frecuencia	6.949	6.953
Fase inicial	-1.810	-1.831
Período	0.904	0.904

■ Elongación 4 cm

Nuevamente se observan las gráficas halladas, en este caso se empieza a ver menos esa amortiguación, ya que al aumentar la elongación hace que el intervalo de tiempo en el cual se extingue el movimiento sea mayor. Adicionalmente, en todos los casos

se va a analizar en un mismo intervalo de tiempo para hacer más sencilla la comparación entre ellas.

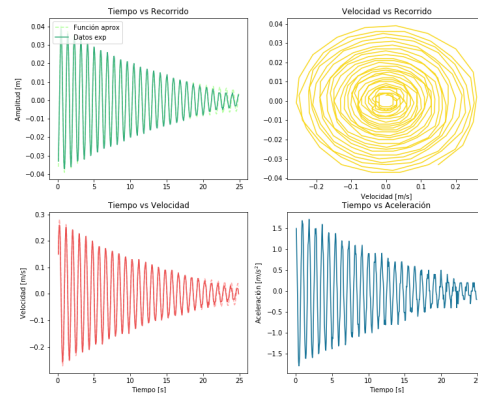


Fig. 15. Según su color: Amplitud(verde), velocidad(rojo), aceleración(azul) vs tiempo. De igual forma, en color amarillo, se muestra un diagrama de fase de velocidad contra tiempo, apreciando la existencia de un punto a donde intenta converger el sistema..

Para este caso se va a obtener un mismo valor de período a partir de la frecuencia natural, ya que esta sólo depende de la masa y la constante elástica del resorte y al ser un caso con la misma masa esta no cambia. De lo anterior se tiene que el período si el movimiento no fuera amortiguado es de $T_0 = 0,262[s]$.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	0.043	0.042
Amortiguamiento	0.080	0.080
Frecuencia	6.912	6.913
Fase inicial	-1.720	-1.73
Período	0.909	0.909

■ Elongación 6 cm

Ahora, para este caso se tienen una mayor cantidad de datos y estos se ven refleja-

dos en el diagrama de velocidad vs posición al observar que el espiral es más continuo. Además, también se puede observar que al no tener el intervalo de tiempo en el cual el movimiento acaba el espiral de ese diagrama no llega al centro.

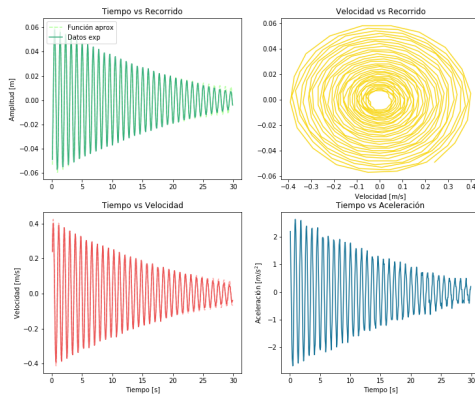


Fig. 16. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Tanto en las elongaciones anteriores como en esta se presentan valores similares entre los parámetros hallados a partir de las dos diferentes aproximaciones de las funciones correspondientes.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	0.064	0.062
Amortiguamiento	0.060	0.060
Frecuencia	6.901	6.901
Fase inicial	-1.685	-1.690
Período	0.910	0.910

■ Elongación 8 cm

Para el caso de esta elongación, por cambios en los intervalos de tiempo se tomó un tiempo muy pequeño en este caso microsegundos. Al no comprobarse que este caso era

diferente, terminó en las mediciones de esa manera este tipo de intervalo. Para este tipo de datos es complejo hallar sus parámetros ya que como es usual se maneja el sistema internacional (SI) y este se encuentra en segundos. Cabe mencionar que las limitaciones de la herramienta utilizada son causadas por esa condición.

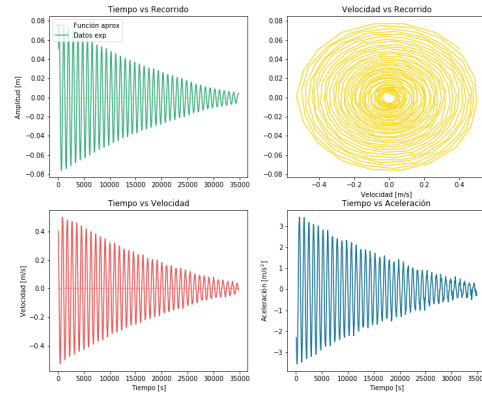


Fig. 17. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

5.2.2. Caso 10g

■ Elongación 2 cm

En este caso se aproxima la masa a 10 gramos siendo su masa real $m = 9,872g$ y sabiendo que es el mismo resorte, se tiene que la constante elástica es la misma por tanto con esos datos puede hallarse la frecuencia natural del movimiento para este caso.

Adicionalmente podemos ver que al final de la gráfica se pudo observar cierta inexactitud en la forma usual de la aceleración, ya que se ven varios picos seguidos. Lo anterior solo afecta al análisis de esa gráfica ya que en esos datos no se realizó una aproximación con una función ya que era compleja.

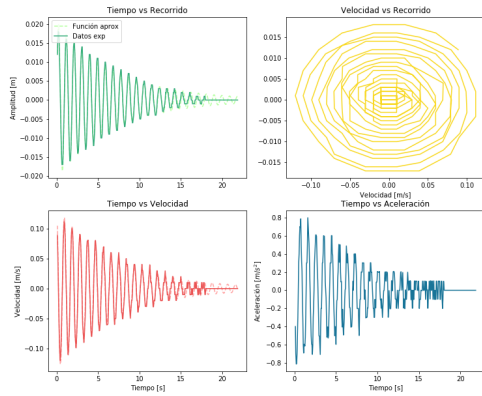


Fig. 18. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Para un el análisis correcto de la tabla a continuación, se deben aclarar varios factores importantes: primero, la fase inicial es comúnmente dada en radianes pero al pasar esto a ángulos se tuvo un mejor punto de vista sobre todo de estos casos en los que que la amplitud tienen la misma magnitud pero diferente signo. Para el caso anterior se debe tener en cuenta que si hay esa diferencia de signo, la fase va a tener una diferencia de 180° . La cual es explicada por ser la función posición un seno (eq. 6), es impar y en consecuencia se obtiene lo anterior.

En adición, en este caso se presenta un período hallado con la frecuencia natural de valor $T_0 = 0,362[s]$.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	-0.021	0.020
Amortiguamiento	0.142	0.142
Frecuencia	6.698	6.689
Fase inicial	-9.446	-0.022
Período	0.938	0.910

■ Elongación 4 cm

En este caso se tiene el mismo valor de masa mencionado en el caso anterior. Además para observar mejor el movimiento se aumento el intervalo de tiempo a $35[s]$, de esta manera se pudo tener la parte final del mismo y observar la amortiguación al final. Por lo anterior, se obtiene que el diagrama de velocidad vs posición, el espiral si va hacia el centro, aunque es clave mencionar que con este intervalo de tiempo se obtuvo una parte del movimiento donde el montaje ya estaba en reposo.

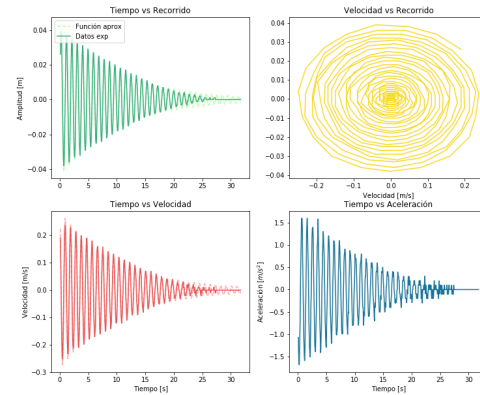


Fig. 19. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Como se vino mencionando desde el caso anterior, la diferencia en el signo de la amplitud genera que la fase inicial presente una diferencia de 180° , situación que también se presenta en este caso. Adicionalmente, se tiene el mismo valor de período a partir de la frecuencia natural siendo este $T_0 = 0,362[s]$

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	-0.044	0.043
Amortiguamiento	0.098	0.098
Frecuencia	6.667	6.667
Fase inicial	-3.159	-0.018
Período	0.942	0.942

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	-0.063	0.062
Amortiguamiento	0.065	0.065
Frecuencia	6.662	6.662
Fase inicial	-9.413	0.012
Período	0.943	0.943

■ Elongación 6 cm

Mientras en el caso anterior se aumento el intervalo de tiempo respecto al anterior, en este no se realizó ese cambio y se obtuvo el movimiento hasta sus penúltimas oscilaciones pero no se llegó al reposo. De lo anterior, se explica el leve agujero en el centro del diagrama velocidad vs posición.

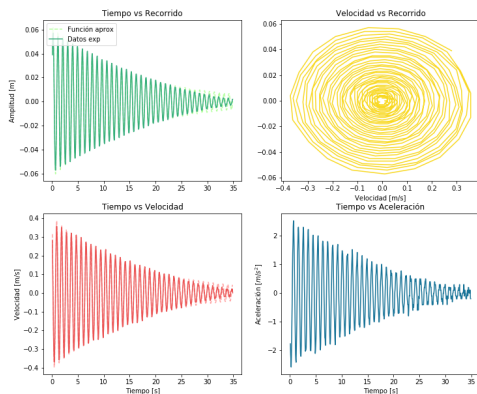


Fig. 20. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Ya es común al ver la tabla y ver la amplitud con diferente signo pasar a observar la fase para ver si se presenta esa diferencia de 180° , en este caso también se presenta esa diferencia. Además, al tratar de un mismo valor de masa se obtiene el mismo valor de período a partir de la frecuencia natural de los casos anteriores $T_0 = 0,362[s]$.

■ Elongación 8 cm

Para este caso tampoco se realiza un cambio de intervalo de tiempo, pero al obtener más datos en este movimiento se observa como el diagrama de velocidad vs posición obtuvo una forma de espiral más continua. Adicionalmente, al observar las demás gráficas debido a lo anterior se presentan más continuas y es más visible el amortiguamiento de forma exponencial.

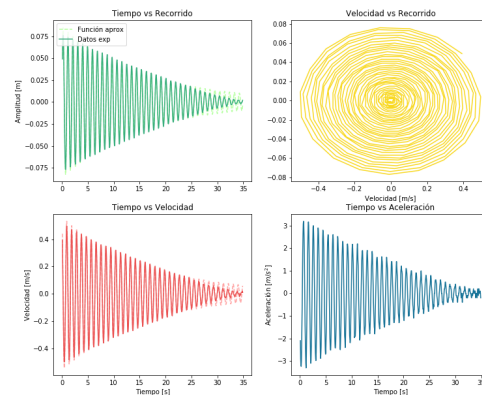


Fig. 21. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Al observar la tabla a continuación, nuevamente se obtuvo el valor de la amplitud con el mismo signo eso nos indica que la fase ser igual, eso lo podemos observar al pasar esos valores de radianes a grados. Al igual que los demás casos de esta masa, sin

importar las diferentes elongaciones se obtuvo el mismo valor de período a partir de la frecuencia natural $T_0 = 0,362[s]$.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	0.086	0.085
Amortiguamiento	0.062	0.062
Frecuencia	6.650	6.665
Fase inicial	-6.275	0.007
Período	0.945	0.945

5.2.3. Caso 20g

■ Elongación 2 cm

Como mencionó con anterioridad se aproximo esta masa a 20 gramos para el manejo en este informe pero siendo su masa real $m = 20,031[g]$. En este caso se comenzó con un intervalo de tiempo de $20[s]$, en el cual se pudo observar con normalidad los diagramas hallados, cabe aclarar que el gráfico de velocidad vs posición es un espiral de no vista continua ya que no hay datos suficientes para realizarlo de esa manera y el programa une los puntos de los datos graficados.

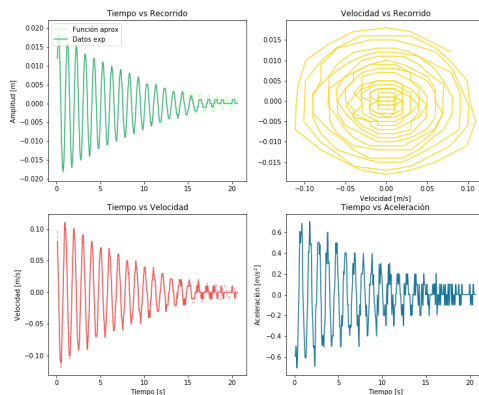


Fig. 22. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Partiendo de una nueva masa se obtuvo la frecuencia natural de esta, al ser el mismo resorte y por esto la misma constante elástica se tuvo que solo en la expresión se cambia la masa y se obtuvo como resultado un valor de $T_0 = 0,516[s^2]$. Adicionalmente, también se tiene la diferencia de signo en la amplitud y por tanto una diferencia de 180° en la fase.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	-0.021	0.020
Amortiguamiento	0.127	0.128
Frecuencia	6.234	6.234
Fase inicial	-3.107	0.034
Período	1.008	1.008

■ Elongación 4 cm

Se cambió el intervalo de tiempo para este caso, ahora siendo $25[s]$ aunque se obtuvo la mayoría de datos con este intervalo, se observó que el movimiento no llegó a decrecer lo suficiente hasta llegar al reposo. Por lo anterior se observó un agujero en el centro del espiral del diagrama de velocidad vs posición.

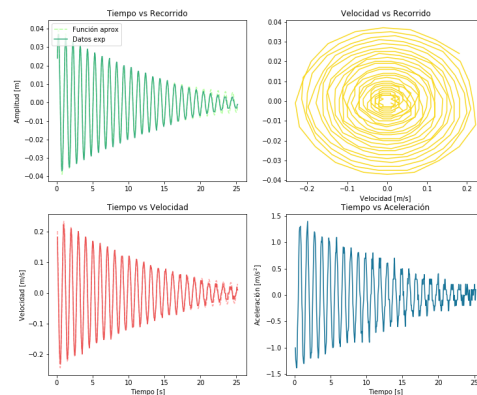
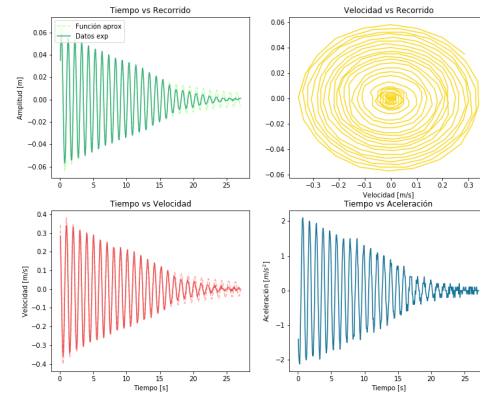


Fig. 23. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

En este caso nuevamente se presenta la amplitud con diferente signo y se volvió a obtener la diferencia de 180° en la fase inicial presentada en la tabla. Además se conservó el mismo valor de período a partir de la frecuencia natural siendo este $T_0 = 0,516[s^2]$.



	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	-0.041	0.041
Amortiguamiento	0.082	0.082
Frecuencia	6.219	6.219
Fase inicial	-9.419	0.005
Período	1.010	1.010

Fig. 24. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Nuevamente, se observó la diferencia de signo en la magnitud la cual produjo una diferencia de 180° en los valores de fase inicial. Y se conserva el mismo valor de período a partir de la frecuencia natural $T_0 = 0,516[s^2]$.

■ Elongación 6 cm

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	-0.069	0.068
Amortiguamiento	0.090	0.090
Frecuencia	6.208	6.209
Fase inicial	-9.454	0.032
Período	1.012	1.012

■ Elongación 8 cm

Respecto al caso anterior, en este no se realizó un cambio de intervalo de tiempo, pero al tener más datos del movimiento se obtuvo unas gráficas más continuas, siendo el espiral mayor diferencia tiene con las vistas anteriormente en esta masa pero diferente elongación. Aunque se observa en las gráficas contra el tiempo que las oscilaciones del movimiento se amortiguaron más rápido al final del intervalo de tiempo.

En este último caso de la última masa estudiada, se cambió el intervalo de tiempo respecto al anterior ahora siendo de $40[s]$. Adicionalmente, el intervalo de tiempo elegido no alcanzó a capturar todo el movimiento ya que no alcanzó el reposo. Lo anterior pudo observarse en el gráfico de velocidad vs tiempo con un espiral el cual tuvo un agujero en su centro.

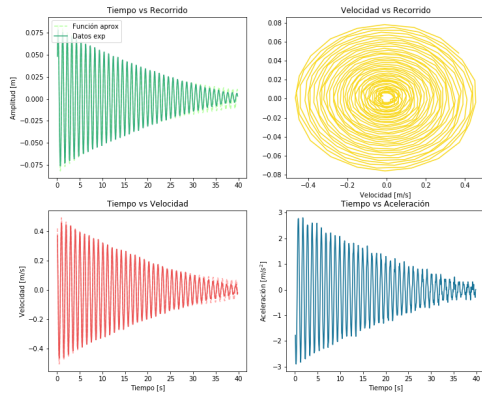


Fig. 25. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

En este caso no se presenta el cambio de signo en la amplitud, por esa razón los valores de la fase son iguales esto es más fácil de observar cuando son expresados en grados pero debido a la ecuación el resultado debió darse en radianes. En adición, se obtuvo el mismo período a partir del valor de frecuencia natural $T_0 = 0,516[s^2]$.

	Posición	Velocidad
Amplitud Inicial	0.085	0.084
Amortiguamiento	0.052	0.052
Frecuencia	6.201	6.202
Fase inicial	-6.298	-0.016
Período	1.013	1.013

5.3. Situación 3: Cte elástica a partir de la masa y el período cuadrado

Usando las masas de aproximadamente 5, 10 y 20 g, se halló el período de cada una a partir de su frecuencia natural y se graficaron esos datos. Luego se realizó una regresión lineal a partir de la función lineal presentada anteriormente (eq. 4) y se obtuvo como resultado el siguiente gráfico.

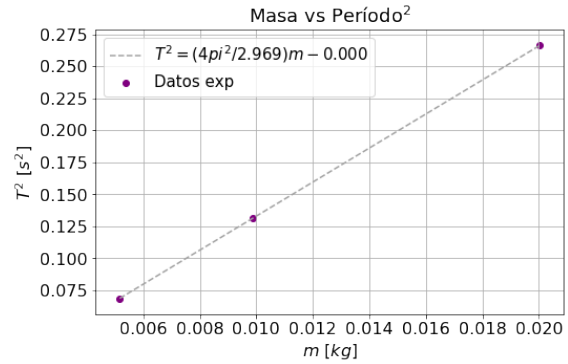


Fig. 26. Regresión lineal de los datos de masa y período al cuadrado, donde se halló el valor aproximado de la constante elástica.

A partir de la anterior figura se obtuvo un valor aproximado de la constante elástica de $2,969[N/m]$, el cual puede ser comparado con el valor que fue hallado con anterioridad en otra de las fases.

6. Análisis de Resultados

Finalizado el análisis del movimiento armónico simple, en su caso ideal y mas a profundidad en el caso amortiguado, primeramente, de forma teorica, luego, mediante la metodología experimental detallada anteriormente, se permitió el cálculo de la constante elástica del resorte. A su vez, se evidencio la dependencia del periodo de oscilación con la masa del sistema, complementada con un análisis y generación de diagramas de fase, comparando la posición y sus derivadas respecto al tiempo, entre otros aspectos.

De esta manera, se observo como al aumentar la elongación del resorte la amplitud del movimiento aumenta mientras que, relativamente, el efecto de amortiguamiento disminuye significativamente. Las anteriores mediciones permiten llegar a conclusiones

acerca del fenómeno conforme la cantidad de datos (posiciones, velocidades, aceleraciones) existan, a su vez, entre más cercano a la posición de reposo sea el intervalo usado el fenómeno podrá ser caracterizado en mejor forma.

Sin embargo, en miras de tener una comprensión del fenómeno adecuada y a su vez una optimización en las tomas de datos y su posterior análisis se seleccionó un intervalo de tiempo dado para cada medición buscando que este finalizara cuando el movimiento tendiera al reposo.

Respecto a los diagramas de fase realizados, se observó la existencia de un atractor que existe en concordancia con el principio de mínima energía, y por supuesto, con las observaciones experimentales, es decir, el resorte tiende a buscar un punto donde la energía del sistema sea mínima, en este caso, cuya velocidad relativa respecto al laboratorio donde se realizó la medición sea nula. A su vez, es relevante observar que, dado que la velocidad es derivada de la posición, y estas están basadas en funciones trigonométricas se observa un desfase entre estas de $\frac{\pi}{2}$.

Finalmente, es importante recalcar como en los distintos análisis de posición, velocidad y aceleración se observaron divergencias respecto a lo esperado teóricamente, es decir, la existencia de picos que no concuerdan con la continuidad esperada, estos errores experimentales son atribuidos primeramente, a la incertidumbre propia de los instrumentos de obtención de datos usados, además de errores humano en la toma de muestras, por lo que es recomendable, para futuras investigaciones de este fenómeno,

realizar una mayor cantidad de tomas de datos, además de automatizar el montaje al momento de soltar la masa del sistema, con fines de aumentar la confiabilidad de los datos obtenidos.

7. Conclusiones

Se logró calcular la constante elástica del resorte con un valor de $2,969[N/m]$, comprobando experimentalmente la ley de Hooke.

Se comprobó experimentalmente la dependencia del periodo del sistema masa-resorte con la masa.

El diagrama de fase del sistema permite la identificación de puntos a los que el sistema tiende a recorrer, conocidos como atractores, para el sistema estudiado en el presente informe, se obtuvo un solo atractor, presente cuando la velocidad de la masa es nula.

References

- [1] Flores M, Sánchez M (2016) Proyecto i1. estudio del m.a.s del sistema masa-resorte y análisis de las oscilaciones con cassy-m., .
- [2] (2022) Oscilaciones amortiguadas, . URL <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.htm>.
- [3] Fernández J (2022) Movimiento armónico simple en muelles, . URL <https://www.fisicalab.com/apartado/mas-y-muelles>.
- [4] (2022) Estudio de un muelle real, . URL <https://fisquiweb.es/Laboratorio/Muelle2Bach/calculos.htm>.
- [5] Oliveira MC, Nápoles S (2010) Using a spreadsheet to study the oscillatory

- movement of a mass-spring system. *J Spreadsheets in Education* 3:2.
- [6] (2017) Oscilaciones amortiguadas (gie), . URL [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_amortiguadas_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_amortiguadas_(GIE)).
- [7] *Oscillations of a spring pendulum - Recording the path, velocity and acceleration with CASSY*, . URL <https://www.ld-didactic.de/literatur/hb/e/p1/p1521cle.pdf>.

Anexos

Se muestran los datos tomados en la práctica, en sus debidos formatos. Además se deja el link del repositorio en *Git Hub* donde se encuentran tanto el código realizado para la práctica como los datos de la misma <https://github.com/Angel21Fairy/LabFisicaII.git>.














 2 cm 10 g.txt
 2 cm 20 g.txt
 4 cm 10 g.txt
 4 cm 20 g.txt
 4 cm 5 g.txt
 6 cm 10 g.txt
 6 cm 20 g.txt
 6 cm 5 g.txt
 8 cm 10 g.txt
 8 cm 20 g segunda.txt
 8 cm 5 g.txt
 DatosLab.csv
 bien 2 cm 5 g.txt

Fig. 27. Datos de la práctica.

8. Apéndice A: Demostración ed MAS 1

A partir de la fig. (1), en la mitad de la misma se realizó la segunda ley de Newton manteniendo los ejes de la forma común (x: positivo hacia la derecha ; y: positivo hacia arriba), se obtuvo (8):

$$\begin{aligned}\vec{F}_e - m\vec{g} &= 0, \\ ky_0 &= mg.\end{aligned}\tag{8}$$

En la misma figura mencionada anteriormente (fig. 1) pero esta vez en la parte derecha, se puede realizar un análisis análogo, obteniendo a su vez eq. (11).

$$\begin{aligned}\vec{F}_e - m\vec{g} &= -m\vec{a}, \\ ky_0 - mg &= -m\frac{d^2y'}{dt^2},\end{aligned}\tag{9}$$

donde: $y' = y_0 + y$, a su vez y' representa el desplazamiento total del resorte, y_0 es la longitud hasta la posición de equilibrio con la masa y y la distancia desde ahí. Entonces, se observa que eq.(10) y con lo anterior se reemplazó en eq.(9).

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2},\tag{10}$$

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + ky + ky_0.\tag{11}$$

Luego, se tiene que se cancelan términos a partir de eq. (8) y con eso se obtiene el resultado final mostrado en la sección (3):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0,$$

9. Apéndice B: Gráficas de los casos.

Caso de masa 5g aproximadamente

■ Elongación 2 cm

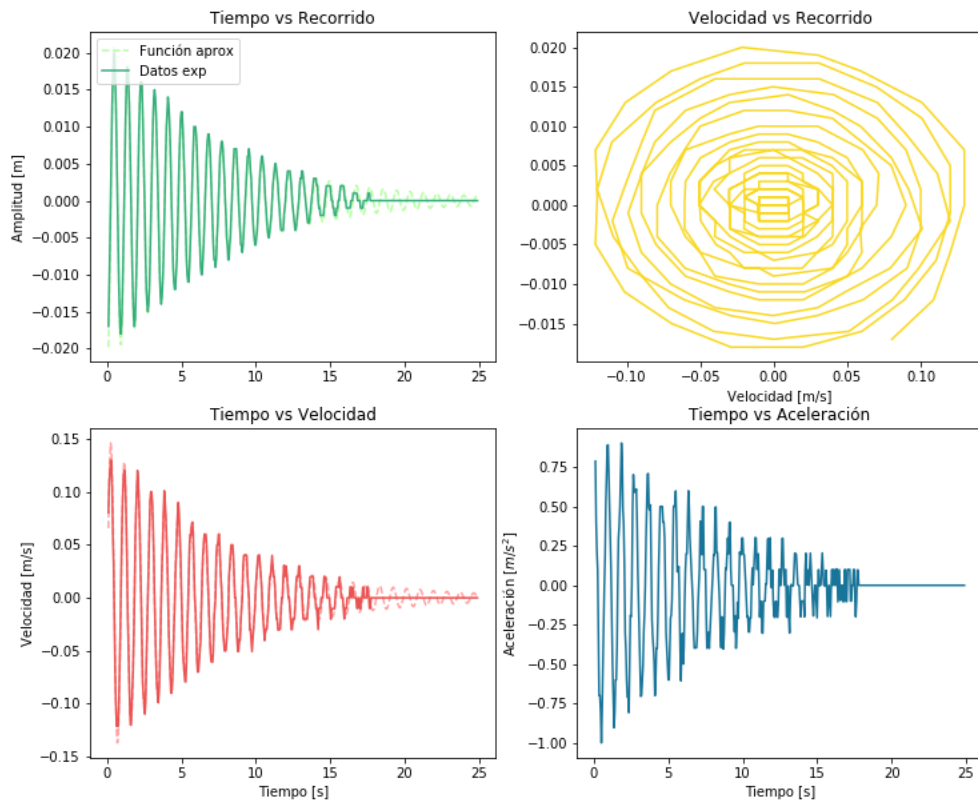


Fig. 28. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 4 cm

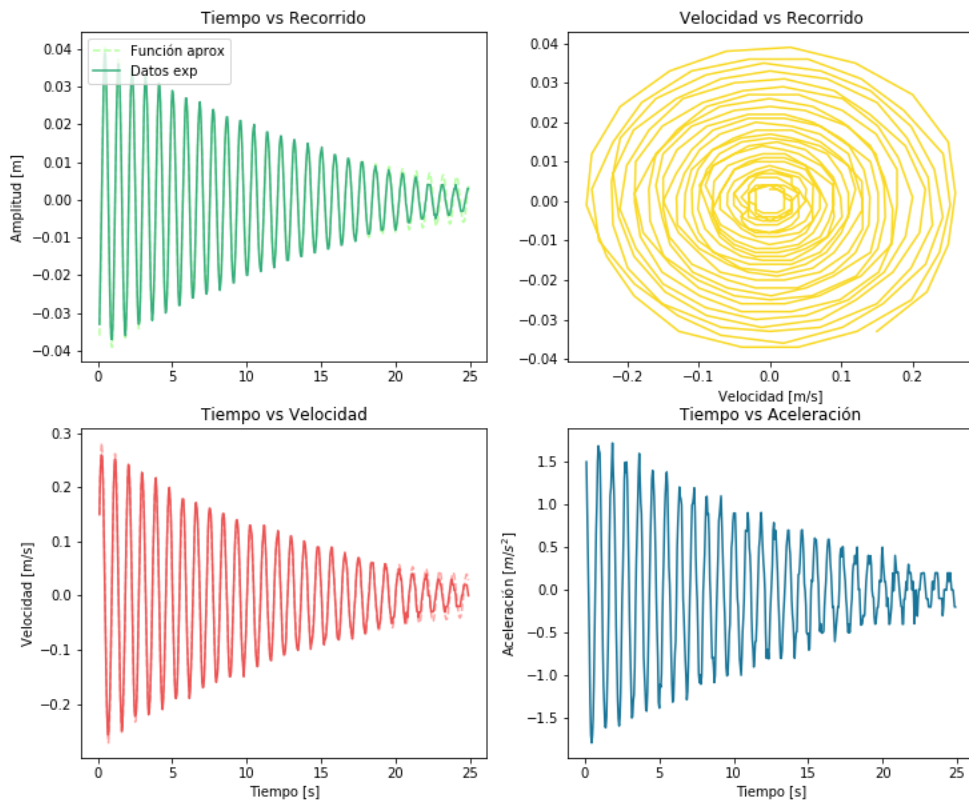


Fig. 29. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 6 cm

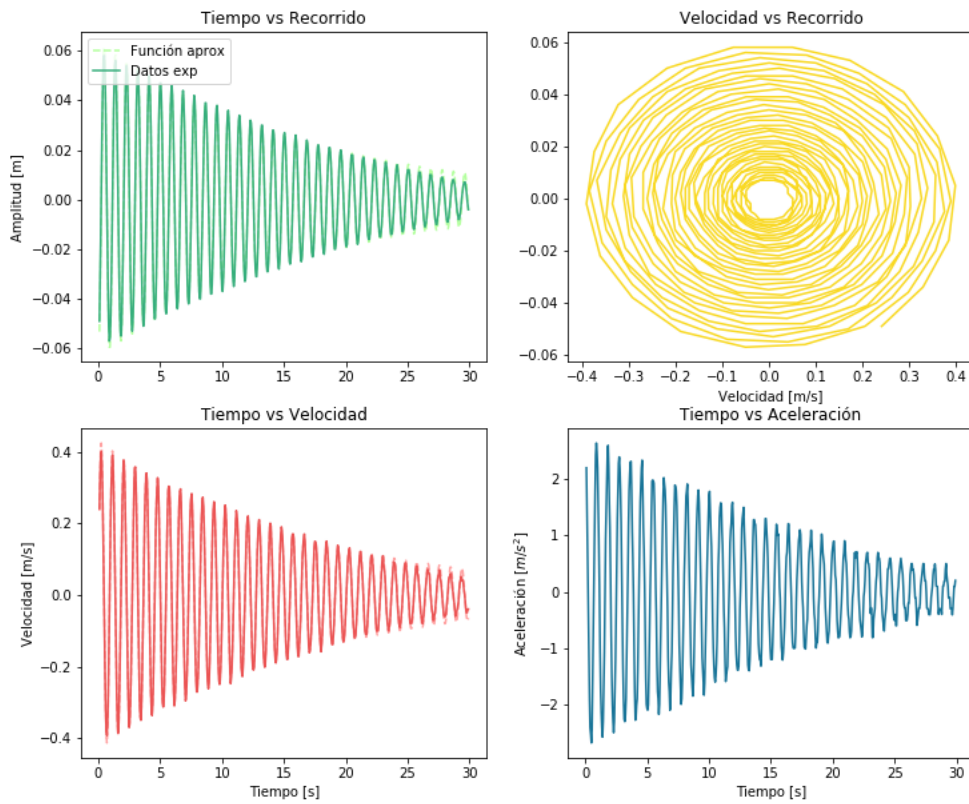


Fig. 30. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 8 cm

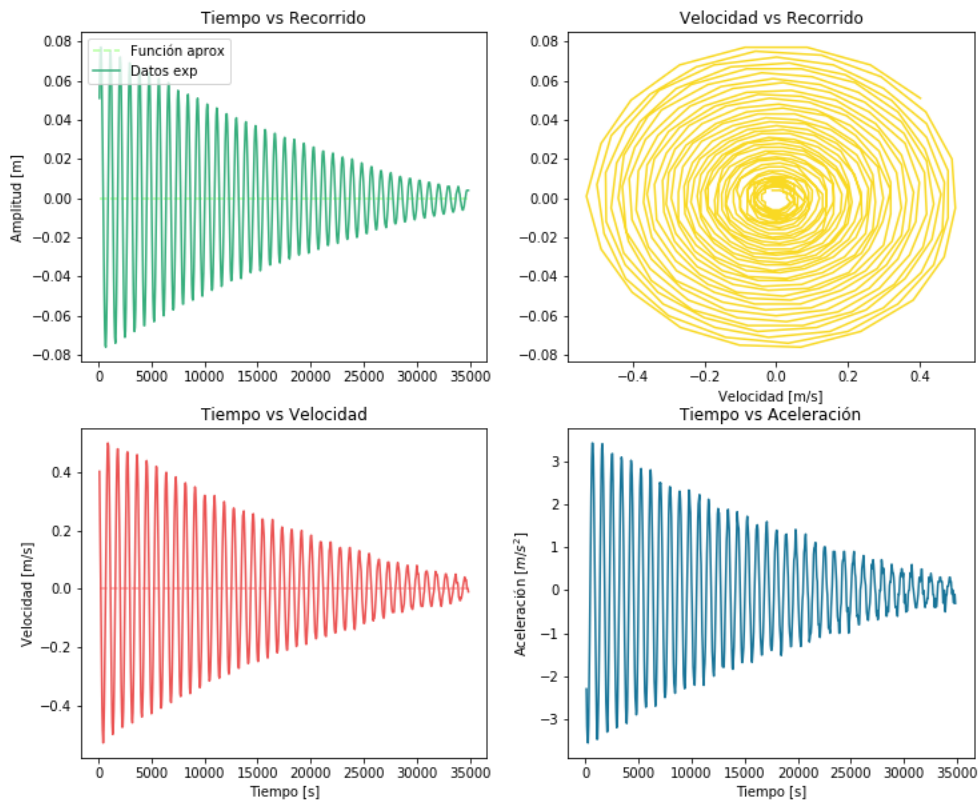


Fig. 31. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Caso de masa 10g aproximadamente

- Elongación 2 cm

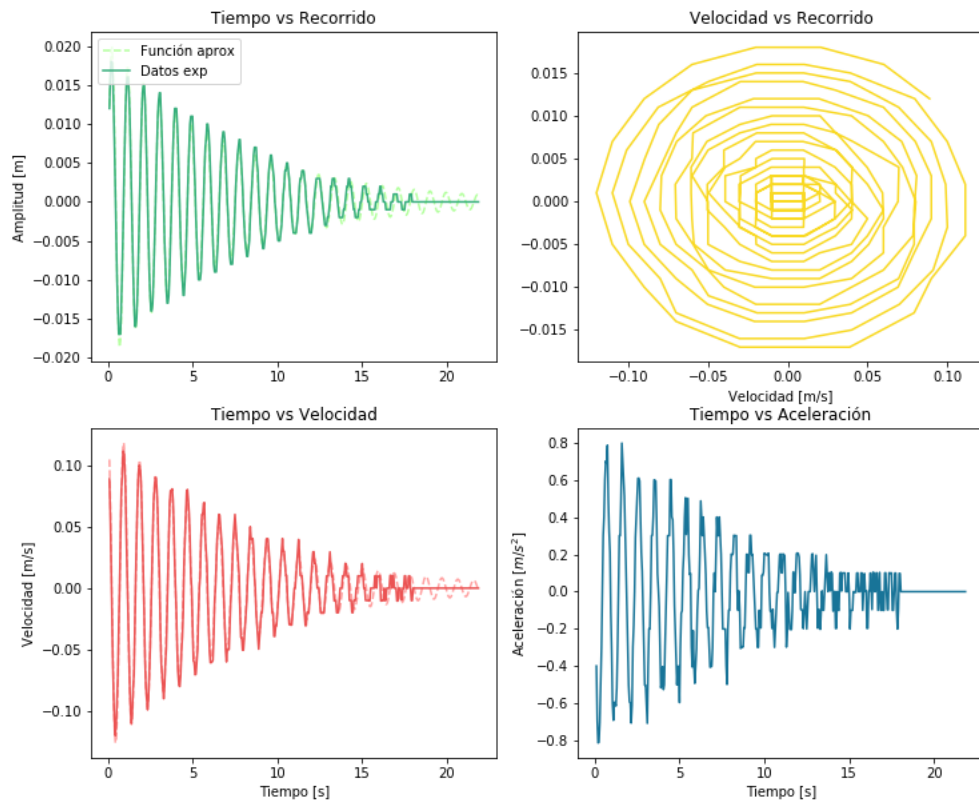


Fig. 32. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 4 cm

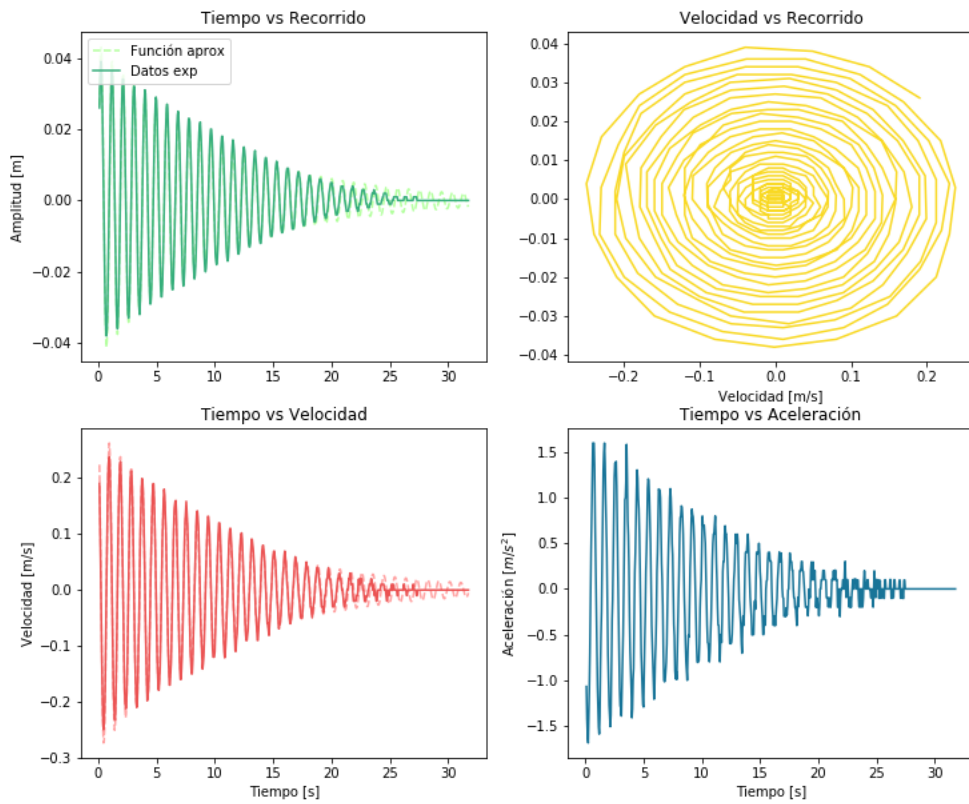


Fig. 33. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 6 cm

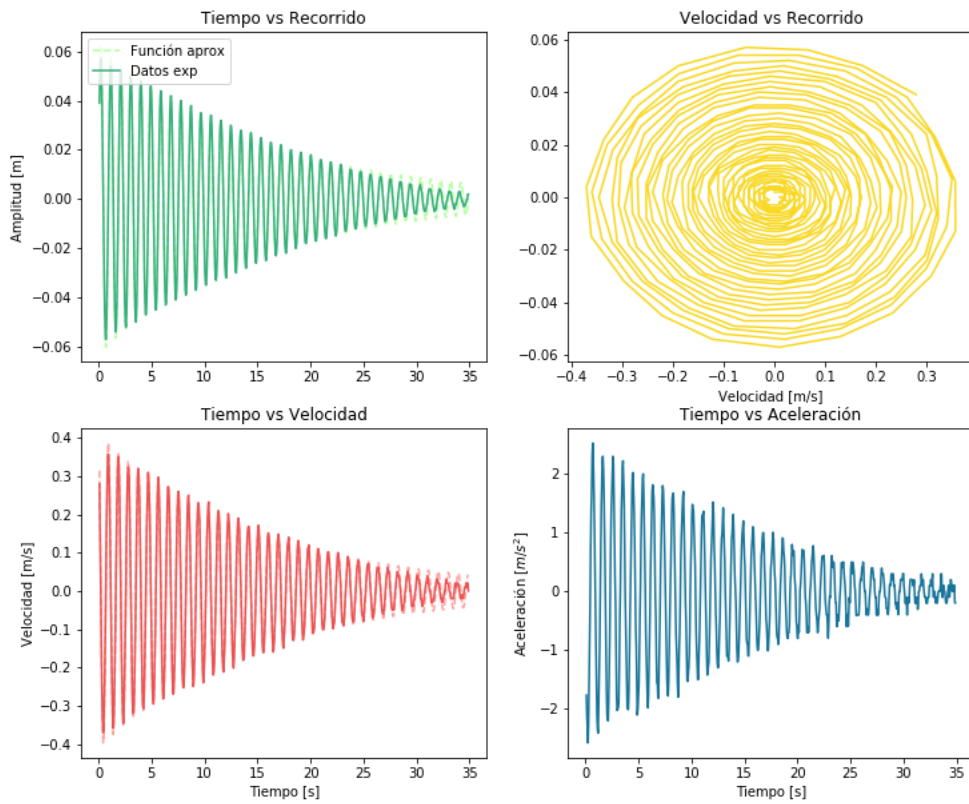


Fig. 34. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 8 cm

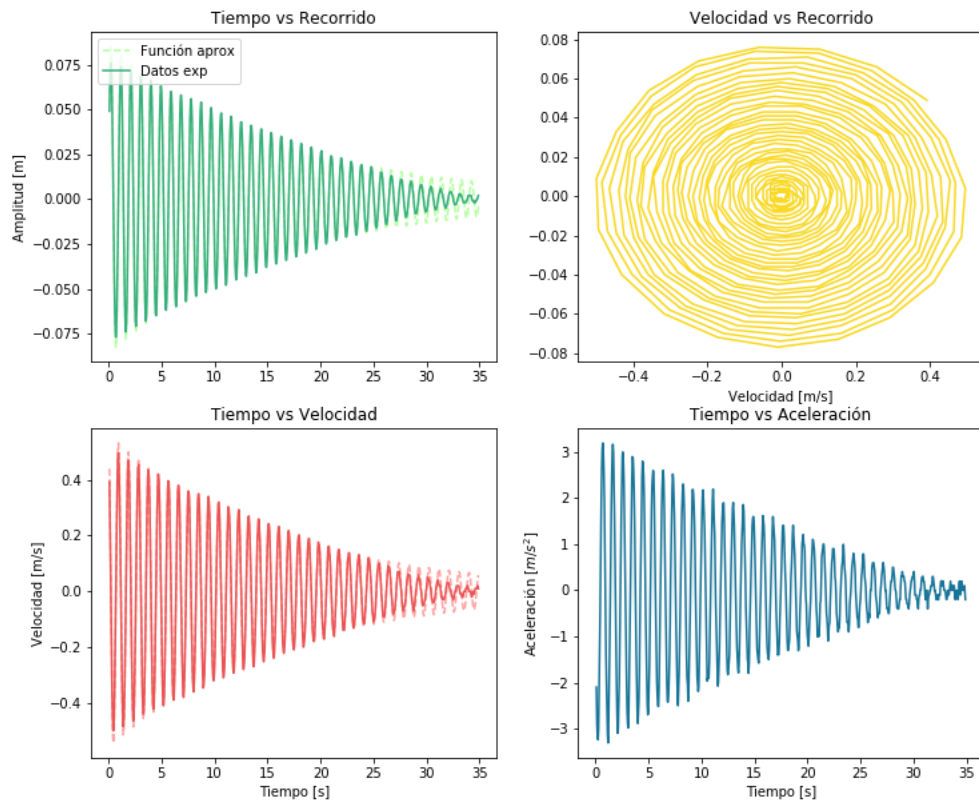


Fig. 35. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

Caso de masa 20g aproximadamente

- Elongación 2 cm

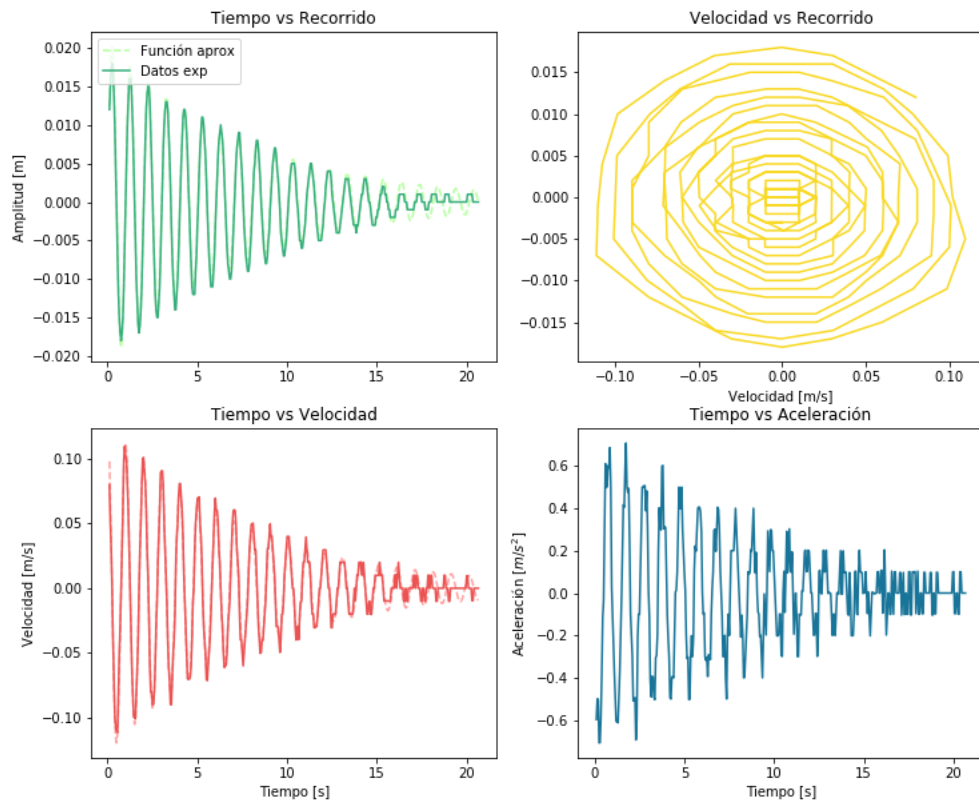


Fig. 36. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 2 cm

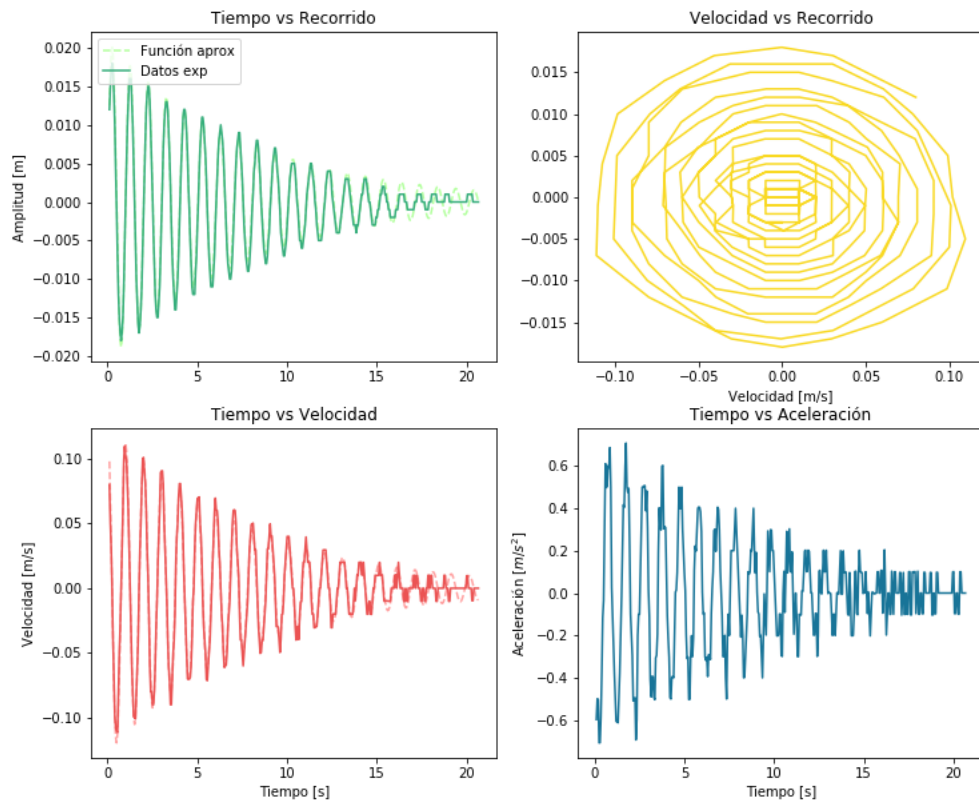


Fig. 37. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 4 cm

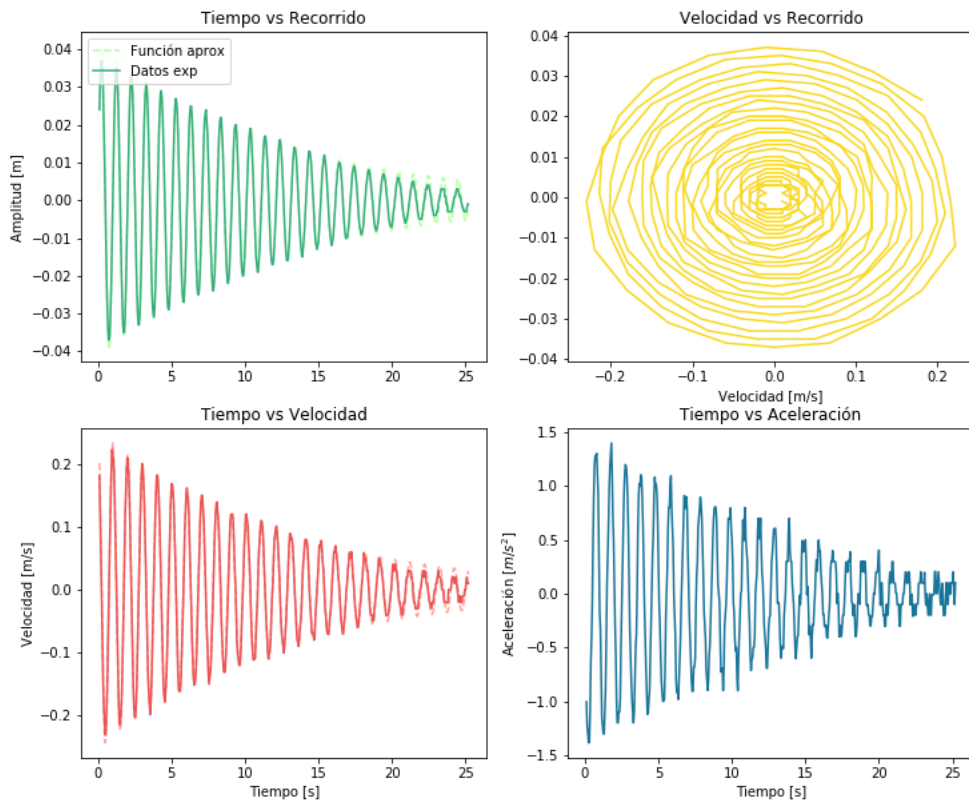


Fig. 38. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ Elongación 6 cm

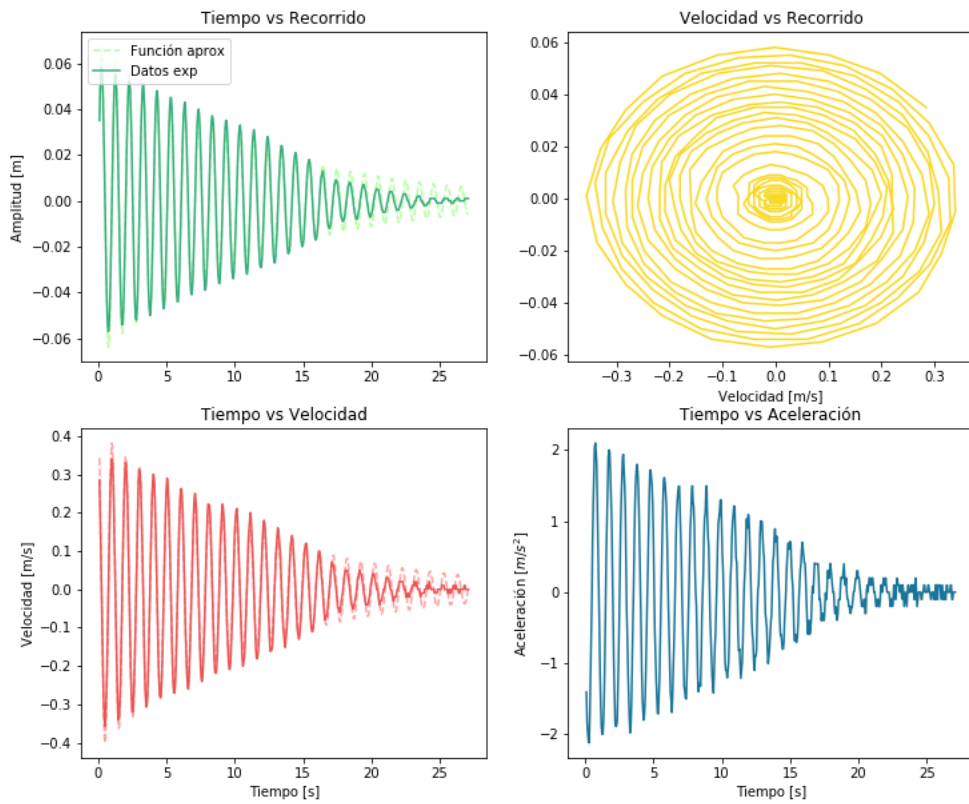


Fig. 39. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.

■ **Elongación 8 cm**

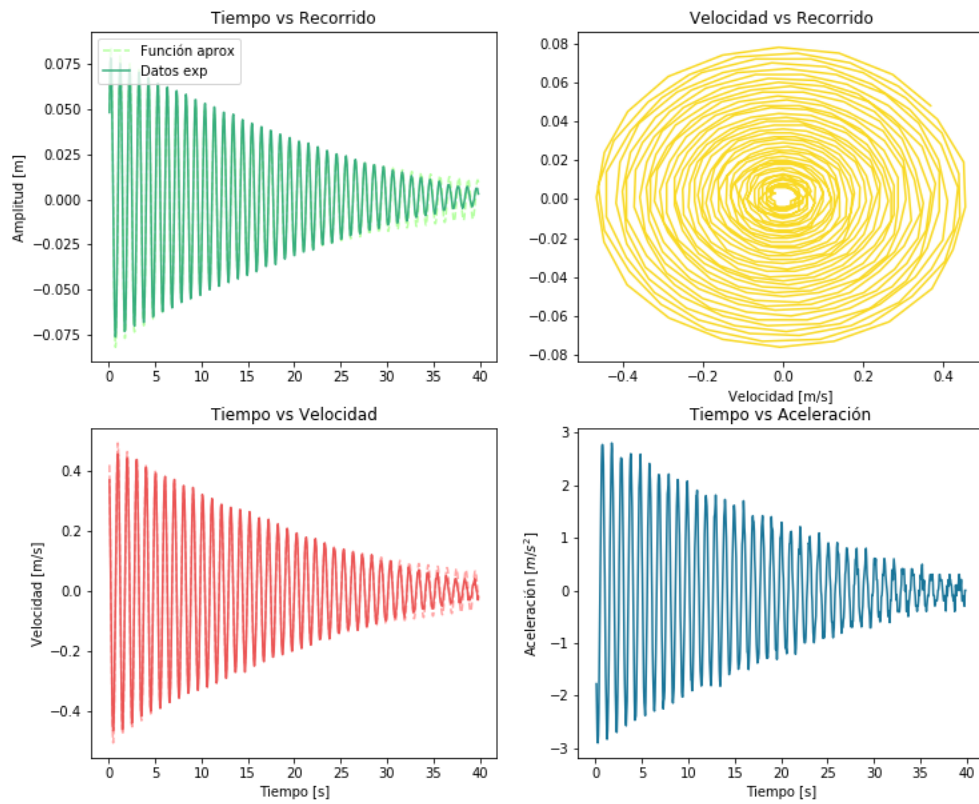


Fig. 40. Se muestran las gráficas mencionadas con anterioridad y en las cuales se puede ver el amortiguamiento.