2.1.6 EJERCICIOS

3. Considere un triángulo que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro ★ y, reflexiones respecto a planos, X_A, X_B, X_C, que dejan invariante la figura del triángulo. El lector puede consultar ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3 para fijar ideas.

Ahora bien, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como lo mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:

$$(A\alpha,\ B\beta,\ C\gamma) \quad \overrightarrow{R}_{\frac{2\pi}{3}} \quad (A\gamma,\ B\alpha,\ C\beta)$$

$$\overrightarrow{X}_{A} \quad (A\gamma,\ B\beta,\ C\alpha).$$

a) Construya la tabla de multiplicación para G_Δ, vale decir $G_\Delta = \{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_k\}\}$. y la operación es concatenación tal y como lo mostramos en la figura 2.1.
Donde:

- $I \rightarrow$ operación identidad
- $\{R_i\} \rightarrow$ conjunto de rotaciones en sentido horario
- $\{\bar{R}_j\} \rightarrow$ conjunto de rotaciones en sentido antihorario.
- $\{X_k\} \rightarrow$ conjunto de reflexiones que dejan invariante el triángulo.

$I \longrightarrow$ operación identidad

$\{R_i\} \longrightarrow \{R_{-2\pi/3} \quad R_{-4\pi/3}\}$ — sentido horario

equivalen a los mismos 2 elementos

$\{\overline{R_j}\} \longrightarrow \{\overline{R}_{2\pi/3}, \overline{R}_{4\pi/3}\}$ + sentido antihorario

$\{X_k\} \longrightarrow \{X_A, X_B, X_C\}$

$\triangle$	I	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	X_A	X_B	X_C
I	I	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	X_A	X_B	X_C
$R_{2\pi/3}$	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	I	X_C	X_A	X_B
$R_{4\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	I	$R_{2\pi/3}$	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$
X_B	X_B	X_C	X_A	$R_{4\pi/3}$	I	$R_{2\pi/3}$
X_C	X_C	X_A	X_B	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	I

b) Muestre que el conjunto de esas operaciones forman el grupo : G_Δ

1. CERRADA RESPECTO A LA OPERACIÓN

Por la tabla de multiplicación, es decir la fig. 1 se puede observar que todas las operaciones realizadas dan como resultado otro elemento del mismo conjunto. Por esta razón, se comprueba que el conjunto G_Δ es CERRADO RESPECTO A Δ.

2. ASOCIATIVA RESPECTO A LA OPERACIÓN

$$X_A \,\Delta\, (R_{2\pi/3} \,\Delta\, R_{4\pi/3}) = (X_A \,\Delta\, R_{2\pi/3}) \,\Delta\, R_{4\pi/3}$$

$$X_A \,\Delta\, I = X_C \,\Delta\, R_{4\pi/3}$$

$$X_A = X_A$$

De esta manera se demuestran los demás casos, ya que es propiedad extensa. Pero se prueba en traslaciones y rotaciones a la vez, debido a que en el caso del conjunto de ellos es más complicado de observar por tener resultados NO CONMUTATIVOS.

3. EXISTENCIA DE UN ELEMENTO NEUTRO.

En este caso se tiene a I, es un elemento que altera ninguna operación del conjunto.

4. EXISTENCIA DE UN ELEMENTO INVERSO.

$\triangle$	I	$R_{-2\pi/3}$	$R_{-4\pi/3}$	X_A	X_B	X_C
I	A	F	E	B	D	C
$R_{2\pi/3}$	F	E	A	C	B	D
$R_{4\pi/3}$	E	A	F	D	C	B
X_A	B	D	C	A	F	E
X_B	D	C	B	E	A	F
X_C	C	B	D	F	E	A

$A = I$
$B = X_A$
$C = X_C$
$D = X_B$
$E = R_{4\pi/3}$
$F = R_{2\pi/3}$

Se puede observar que cada elemento tiene al menos otro elemento que lo lleva al neutro, es decir tiene al menos un elemento inverso.

Al probarse estas cuatro propiedades se puede concluir que $G_\triangle$ ES GRUPO, pero no es abeliano ya que no es CONMUTATIVO.

c) Identifique cada una de las R_i y $\overline{R_j}$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad $\{ I, X_i \}$, forman también un grupo cíclico, pero de orden 2.

① $R_i = \{ R_{-2\pi/3}, R_{-4\pi/3}, I \}$

$R_{-2\pi/3} = R_{4\pi/3} \quad \wedge \quad R_{-4\pi/3} = R_{2\pi/3}$

$R_j = \{ R_{2\pi/3}, R_{4\pi/3}, I \}$

Único miembro $\rightarrow R_{2\pi/3}$.

$G = \{ I, R_{2\pi/3}, R_{4\pi/3} \} \rightarrow$ GRUPO CICLICO ORDEN 3.

↳ $R_{2\pi/3} \triangle R_{2\pi/3} = R_{4\pi/3} \triangle R_{2\pi/3} = I$

② I

$X_i = \{ X_A, X_B, X_C \}$

I $\quad G = \{ I, X_A \} \rightarrow$ GRUPO CICLICO ORDEN 2

↳ $I \triangle X_A = X_A \triangle X_A = I$

II $\quad G = \{ I, X_B \} \rightarrow$ GRUPO CICLICO ORDEN 2

↳ $I \triangle X_B = X_B \triangle X_B = I$

III $\quad G = \{ I, X_C \} \rightarrow$ GRUPO CICLICO ORDEN 2

↳ $I \triangle X_C = X_C \triangle X_C = I$

d) Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a G_Δ.

ESTAS PRIMERO

□	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Tabla multiplicación matrices

Δ	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Tabla multiplicación 6Δ

Como se puede observar los grupos tienen tablas equivalentes de multiplicación

e) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.3.

¿Es ese grupo isomorfo a G_Δ? Justifique su respuesta.

Δ	I	C	D	E	B	A
I	I	C	D	E	B	A
C	C	I	A	B	E	D
D	D	B	I	A	C	E
E	E	A	B	I	D	C
B	B	D	E	C	A	I
A	A	E	C	D	I	B

Tabla multiplicación G_Δ con los elementos movidos

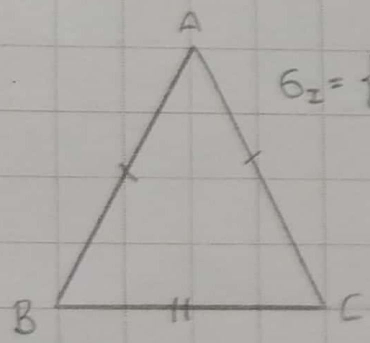
Δ	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_5	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

Indices mudos

Si es isomorfo ya que su tablas de multiplicación son equivalentes, aunque tenga que moverse los elementos para ver claramente la diferencia

f) ¿ Qué puede decir de las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles ? ¿ formarán un grupo? ¿ y si el triángulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetría que lo dejan invariante ?

- ISÓSCELES



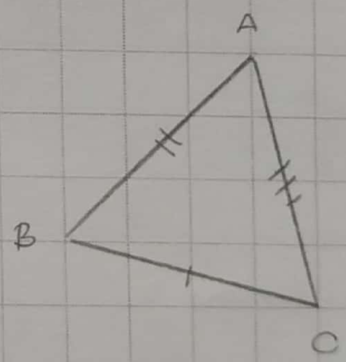
$G_I = \{ I, \chi_A \}$

↓

grupo cíclico orden 2

$X_A \rightarrow$ Reflexión desde el punto A

- ESCALENO



No existen operaciones de simetría que lo dejen invariante

$G_E = \{ 1 \}$

Scanned with CamScanner

10. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|P_n\rangle \rightleftarrows p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

(a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real)

Anteriormente se definió el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales, con la suma ordinaria entre polinomios y la multiplicación ordinaria de polinomios con números, es un ESPACIO VECTORIAL

Entonces podemos probar que P_n es un subespacio vectorial y de esta manera se demuestra que es un espacio vectorial

$\longrightarrow$ ESPACIO VECTORIAL SOBRE LOS POLINOMIOS GRADO N

1 P_n NO VACIO

$0(x) = 0 \rightarrow$ Polinomio cero

$0(x) \in P_n \longrightarrow P_n \neq \phi$

2. P_n CERRADO BAJO LA SUMA

Si $|p\rangle, |q\rangle \in P_n$, por lo tanto $|p\rangle + |q\rangle \in P_n$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^i \quad ; \quad q(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i = \sum_{i=0}^{b-1} c_i x^i + \sum_{i=b}^{m-1} c_i x^i$$

$$b \leq m < n$$

$$\longrightarrow p(x) + q(x) = p+q\,(x) = |p+q\rangle$$

3. P_n CERRADO BAJO LA MULTIPLICACIÓN

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|p\rangle \in P_n$

$$\longrightarrow \alpha|p\rangle = (\alpha p)(x) = \alpha p(x) = |\alpha p\rangle$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot |p\rangle \in P_n$

$\therefore$ Con lo anterior, P_n es un subespacio de P sobre $\mathbb{R}$ y por tanto, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

(b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿ P_n será un espacio vectorial? ¿Porqué?

NO, ya que el campo en el cual se esta trabajando es los $\mathbb{R}$ y estos tienen elementos que al multiplicarlos con los a_i no estarían en los $\mathbb{Z}$ ya que el conjunto $\mathbb{Z}$ no es cerrado bajo la multiplicación.

CONTRAEJEMPLO

Si $\alpha = \sqrt{2}$ y $|p\rangle \in P_n$

$$\longrightarrow \sqrt{2}\,|p\rangle = \sqrt{2}\,p(x) = \sqrt{2}\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{2}\,a_i) x^i \quad \text{donde} \quad \sqrt{2}\,a_i \notin \mathbb{Z}$$

(c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

$A = \{ 0(x), \{ P_{n-1} \} \}$

i. A NO VACIO

$0(x) \in A \rightarrow A \neq \emptyset$

ii. A CERRADO BAJO LA SUMA

Si $|A_1\rangle\ |A_2\rangle \in A$, entonces $|A_1\rangle + |A_2\rangle \in A$

$$|A_1\rangle = \sum_{i=0}^{b-2} a_i x^i \quad ; \quad |A_2\rangle = \sum_{i=0}^{b-2} c_i x^i + \sum_{i=b-1}^{m-2} c_i x^i$$

$$|A_1\rangle + |A_2\rangle = A_1(x) + A_2(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{b-2} (a_i x^i) + \sum_{i=0}^{b-2} (c_i x^i) + \sum_{i=b-1}^{m-2} c_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{b-2} (a_i + c_i) x^i + \sum_{i=b-1}^{m-2} c_i x^i$$

$$= (A_1 + A_2)(x)$$

$$= |A_1 + A_2\rangle \longrightarrow |A_1 + A_2\rangle \in A$$

iii. A CERRADO BAJO LA MULTIPLICACIÓN

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|A_1\rangle \in A$

$$\alpha |A_1\rangle = \alpha A(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha a_i x^i$$

$$= (\alpha A)(x)$$

$$= |\alpha A\rangle \rightarrow |\alpha A\rangle \in A$$

$\therefore$ Por lo tanto, A subespacio vectorial de P_n.

Scanned with CamScanner

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

$$B = \{ 0(x), \{ B(x) = \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i} \}$$

i. B NO VACÍO.

$0(x) \in B \longrightarrow B \neq \emptyset$

ii B CERRADO BAJO LA SUMA

Si $|B_1\rangle, |B_2\rangle \in B$, entonces $|B_1\rangle + |B_2\rangle \in B$

$$|B_1\rangle = \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i} \quad ; \quad |B_2\rangle = \sum_{i=0}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} d_i x^{2i} + \sum_{i=b}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$|B_1\rangle + |B_2\rangle = B_1(x) + B_2(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i} + \sum_{i=0}^{b-1} d_i x^{2i} + \sum_{i=b}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} (a_i + d_i) x^{2i} + \sum_{i=b}^{c-1} d_i x^{2i}$$

$$= (B_1 + B_2)(x)$$

$$= |B_1 + B_2\rangle \in B$$

Scanned with CamScanner

iii B CERRADO BAJO LA MULTIPLICACIÓN

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|B_1\rangle \in B$

$$\alpha |B_1\rangle = \alpha B_1(x) = \alpha \sum_{i=0}^{b-1} a_i x^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} (\alpha a_i) x^{2i}$$

$$= (\alpha B_1)(x)$$

$$= |\alpha B_1\rangle \in B.$$

$\therefore$ Si $\frac{b}{2} \leq n-1$, B es un subespacio vectorial de P_n

Scanned with CamScanner

III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).

$$c = \{ c(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \}$$

ii C CERRADO BAJO LA SUMA

Si $|c_1\rangle, |c_2\rangle \in c$ entonces $|c_1\rangle + |c_2\rangle \in c$

$$|c_1\rangle = \sum_{i=1}^{b} a_i x^i \quad ; \quad |c_2\rangle = \sum_{i=1}^{b} - a_i x^i$$

$$|c_1\rangle + |c_2\rangle = \sum_{i=1}^{b} a_i x_i + \sum_{i=1}^{b} - a_i x^i$$

$$= \sum_{i=1}^{b} a_i x_i - a_i x_i \;;$$

$$= 0(x)$$

$$= |0\rangle \notin c$$

$\therefore$ Por lo tanto, c no es subespacio vectorial de Pn

IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

$$D = \left\{ d(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i \right\}$$

ii. D CERRADO BAJO LA SUMA.

Si $|d_1\rangle, |d_2\rangle \in D$, entonces $|C_1\rangle + |C_2\rangle \in D$

$$|d_1\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i \quad ; \quad |d_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i (x-1) x^i$$

$$|d_1\rangle + |d_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i + \sum_{i=0}^{n-1} -a_i (x-1) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x-1) x^i - a_i (x-1) x^i$$

$$= 0(x)$$

$$= |0\rangle \notin D.$$

$\therefore$ Por lo tanto, D NO es subespacio vectorial de P_n.