8. Suponga un sistema de coordenadas ortogonales generalizadas (q_1, q_2, q_3) las cuales tienen las siguiente relación funcional con las coordenadas cartesianas:

$$q^1 = x + y \quad ; \quad q^2 = x - y \quad ; \quad q^3 = 2z$$

(a) Compruebe que el sistema (q_1, q_2, q_3) conforma un sistema de coordenadas ortogonales.

$$|q^1\rangle \cdot |q^2\rangle = 1 - 1 = 0 \qquad |q^1\rangle \cdot |q^3\rangle = 0 \qquad |q^2\rangle \cdot |q^3\rangle = 0$$

(b) Encuentre los vectores base para este sistema de coordenadas.

$$\alpha(x+y) + \beta(x-y) + \gamma(2z)$$

$$= (\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)y + 2\gamma z$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Encuentre el tensor métrico y el elemento de volumen en estas coordenadas.

$$g_{ij} \equiv g_{ji} = g[\,|q_i\rangle, |q_j\rangle\,] \equiv \langle q^i | q_j \rangle$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} q_1 q_1 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2 q_2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3 q_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V = q_1 \cdot (q_2 \times q_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 1(2) = -4$$

(d) Encuentre las expresiones en el sistema (q^1, q^2, q^3) para los vectores:

$$A = 2\hat{j} \quad , \quad B = \hat{\imath} + 2\hat{j} \quad , \quad C = \hat{\imath} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$p^{i'} = \frac{\partial x^{i'}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} p^j$$

$$\frac{\partial x^{i'}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y} & \frac{\partial(x+y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(x-y)}{\partial x} & \frac{\partial(x-y)}{\partial y} & \frac{\partial(x-y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(2z)}{\partial x} & \frac{\partial(2z)}{\partial y} & \frac{\partial(2z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- $A = 2\hat{j}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $B = \hat{i} + 2\hat{j}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $C = \hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(e) Encuentre el sistema (q_1, q_2, q_3) las expresiones para las siguientes relaciones vectoriales:

$A \times B$; $A \cdot C$, $(A \times B) \cdot C$

- $A \times B$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [(2)(-1) - (-2)(3)]\hat{k} = [-2 + 6]\hat{k} = 4\hat{k}$$

NORMALES
$-2\hat{k}$

- $A \cdot C$

$(2, -2, 0) \cdot (8, -6, 6) = 16 + 12 = 28$

NORMALES
14

- $(A \times B) \cdot C$

$= (0, 0, 4) \cdot (8, -6, 6) = 24$

NORMALES
12

¿Qué puede decir si compara esas expresiones en ambos sistemas de coordenadas?

El sistema de coordenadas es la mitad que la del sistema (q^1, q^2, q^3) y en producto cruz además tiene diferente dirección

(d) Considere los siguientes vectores y tensores en coordenadas cartesianas:

$$R^i_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix} ; \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y encuentre sus expresiones para el nuevo sistema de coordenadas (q_1, q_2, q_3).

$$T^{k'}_{m'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{m'}} T^{i}_{j} = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}}\right)\left(T^{i}_{j}\right)\left(\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{m'}}\right)$$

①

$$q^1 = x + y$$
$$q^2 = x - y$$
$$q^3 = 2z$$

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

②

$$a^1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$
$$a^2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$$
$$a_3 = \frac{1}{2} q_3$$

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{m'}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{k'}_{m'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & 9/4 \\ -3/2 & 0 & -3/4 \\ 15/2 & -1/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$T^{k'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{k'm'} = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}}\right)\left(g^{ij}\right)\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^{j}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$g_{k'm'} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{inversa de } g^{k'm'} = (g^{k'm'})^{-1}$$