a) Comprobar si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial. (esp. vect)

Para saber si los cuaterniones forman un esp. vect. se deben hacer 10 pruebas

1) cerradura de la suma

$|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^2$ $\quad a^i \in \mathbb{R}$

Demostración: $\alpha = 0, 1, 2, 3$ $\quad i = 1, 2, 3$

$|a\rangle \oplus |b\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle \oplus b^\alpha |q_\alpha\rangle = (a^0 \cdot 1 + a^1 q_1 + a^2 q_2 + a^3 q_3)$
$+ (b^0 \cdot 1 + b^1 q_1 + b^2 q_2 + b^3 q_3)$

$= a^0 + b^0 + (a^1 + b^1)(q_1) + (a^2 + b^2)(q_2) + (a^3 + b^3)(q_3)$

$a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$

$= c^0 + c^1 q_1 + c^2 q_2 + c^3 q_3 = c^\alpha q_\alpha =$ cuaternion.

$\oplus$ es conmutativa.

$|a\rangle \oplus |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

$a^\alpha |q_\alpha\rangle \oplus b^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + a^i |q_i\rangle \oplus b^0 + b^i |q_i\rangle$

como a^0 y b^0 son escalares y a^i b^i son complejos significa que cumplen sus prop.

$\rightarrow b^0 + b^i |q_i\rangle \oplus a^0 + a^i |a_i\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

$\oplus$ es asociativa $\quad c \in \mathbb{C}^2$

$|a\rangle \oplus |b\rangle \oplus |c\rangle = (|a\rangle \oplus |b\rangle) \oplus |c\rangle$

$|a\rangle \oplus |b\rangle = a^0 + b^0 + (a^i + b^i)(q_i)$. como ya se demostro anteriormente la suma de dos cuaterniones es otro cuaternion.

① $|D\rangle \oplus |C\rangle = D^0 + C^0 + (D^i + C^i)(q_i)$

② $|D\rangle \oplus |C\rangle = D^0 + C^0 + (D^i + C^i)(q_i) = D^0 |D^i\rangle(q_i) + C^0 (C^i)(q_i)$ ✓

• Existe un elemento neutro.

$$|\,|0\rangle + |a\rangle\,| = 0^0 + 0^i q_i + a^0 + a^i q_i = (a^0 + 0^0) + (a^i + 0^i) q_i$$
$$= a^0 + a^i q_i . \checkmark$$

• Existe un elementro simetrico.

$$|\,|a\rangle + |-a\rangle\,| = a^0 + a^i q_i + (-a^0 - a^i q_i)$$
$$= (a^0 - a^0) + (a^i - a^i) q_i$$
$$= 0^0 + 0^i q_i \checkmark$$

• Es cerrado bajo un escalar.

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$|\alpha a\rangle = \alpha a^0 + \alpha a^i q_i = \alpha(a^0 + a^i q_i) = \alpha |a\rangle \in \mathbb{C}^2$$

• $(\alpha(\beta |\,|a\rangle)) = (\alpha\beta)(|a\rangle)$ $\qquad \alpha$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(\beta a^0 + \beta a^i q_i) = \alpha\Big(\beta(a^0 + a^i q_i)\Big) = (\alpha\beta)\Big(a^\alpha q_\alpha\Big)$$

• $(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

$$(\alpha + \beta)(a^0 + a^i q_i) = (\alpha+\beta)a^0 + (\alpha+\beta)a^i q_i = (\alpha a^0 + \beta a^0 + \alpha a^i + \beta a^i) q_i.$$

$$= (\alpha a^0 + \alpha a^i q_i) + (\beta a^0 + \beta a^i q_i) = \alpha a^\alpha q_\alpha + \beta a^\alpha q_\alpha$$

• $\alpha(|a\rangle + |B\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|B\rangle$

$$= \alpha((a^0 + a^i q_i) + (b^0 + b^i q_i)) = \alpha(a^0 b^0 + (a^i b^i) q_i)$$
$$= \alpha(a^0 b^0) + \alpha(a^i b^i) q_i = \alpha a^0 \alpha b^0 + (\alpha a^i \alpha b^i) q_i$$
$$= \alpha a^0 + \alpha a^i q_i + \alpha b^0 + \alpha b^i q_i = \alpha a^\alpha q_\alpha + \alpha b^\alpha q_\alpha . \checkmark$$

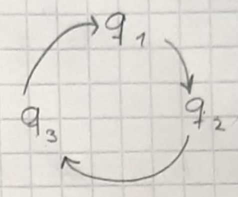
$1 \cdot |a\rangle = |a\rangle$

se cumple, porque anteriormente se demostro que $\alpha|a\rangle = |\alpha a\rangle$ y en este caso $\alpha = 1$.

B) $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \leftrightarrow (d^0, d) = (b^0 r^0 - b \cdot r,\ r^0 b + b^0 r + b \times r)$

Para demostrar esto se utilizara la tabla de multiplicación.

$\|b\rangle \odot \|r\rangle$	r^0	$r^1 q_1$	$r^2 q_2$	$r^3 q_3$
b^0	$b^0 r^0$	$r^1 b^0 q_1$	$r^2 b^0 q_2$	$r^3 b^0 q_3$
$b^1 q_1$	$r^0 b^1 q_1$	$-b^1 r^1$	$b^1 r^2 q_3$	$-b^1 r^3 q_2$
$b^2 q_2$	$r^0 b^2 q_2$	$-b^2 r^1 q_3$	$-b^2 r^2$	$b^2 r^3 q_1$
$b^3 q_3$	$r^0 b^3 q_3$	$r^1 b^3 q_2$	$-r^2 b^3 q_1$	$-b^3 r^3$



$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = -1$

→ organizando:

$|d\rangle = (br - b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3) + (br_1 + rb_2 + b_2 r_3 - b_3 r_2)\hat{\imath}$
$+ (rb_2 + br_2 + b_3 r_1 - b_1 r_3)\hat{\jmath} + (rb_3 + br_3 - b_2 r_1 + b_1 r_2)\hat{k}$

$|d\rangle = b^0 r^0 - b \cdot r,\ r^0 b + b^0 r + b \times r.$

C) Con indices. $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + \int^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle + \ldots$
$\ldots A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle.$

→ $a = br$ → $\mathbb{R}$. $|q_0\rangle = 1$.

$a|q_0\rangle = br|q_0\rangle$

$\int^{(\alpha i)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle = \begin{cases} \int^\alpha \delta^0_\alpha \int^j |q_j\rangle \\ A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle \end{cases}$

$\alpha = 1$ $\quad j = 1$

$\begin{cases} \int^1 \delta^0_1 + \int^1 q_1 = b^1 r_1^0 + b^1 r^1 q_1 \\ \vdots \\ \text{Da parte del Cuaternario } \mathbb{R} \text{ e imaginaria} \end{cases}$

$j = 1 \quad k = 2 \quad i = 3$

$A^{[12]3} b_1 r_2 |q_3\rangle \ldots$ etc

D) ¿a? $a = r^{\circ} b^{\circ} \rightarrow \mathbb{R}$

¿$S^{(ij)}$? $S^{(ij)} = b^{i} r^{j}$

D). ¿$A^{[jk]i}$? $A^{[jk]i}$ = La matriz de posiciones de los cuaterniones en la tabla de multiplicación.

e). Base en terminos de Matices 2x2.

$S = \{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$

• $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1.$

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & c \\ c & -d \end{pmatrix}$$ } De esta manera se puede representar un complejo en M_{2x2}.

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas Matrices son las de Pauli y la identidad.

Ademas, si $w = a + bi$ y $z = c + d\hat{j}$.

$$\rightarrow H = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ -c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bi & di \\ di & -bi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bi & 0 \\ 0 & -bi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & di \\ di & 0 \end{bmatrix}$$ (Reorganizando

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega & z \\ -z & \bar{z} \end{bmatrix}$$ ✓

f) $s\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle\}$ en $M_{4\times 4}$

$q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d k$

Según la tabla de multiplicación de los cuaterniones:

$$= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) $\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$

$|a\rangle^* = a^0 - a^i q_i$

$|b\rangle = b^0 + b^i q_i$

Para saber si sirve como producto interno hay que comprobar 5 propiedades:

1) $\| |a\rangle \, |a\rangle \| \in K$

$a^* \odot a$	a	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
a	a^2	$a\hat{i}$	$a\hat{j}$	$a\hat{k}$
$-a\hat{i}$	$-a^2\hat{i}$	a^2	$-a^2 k$	$a^2\hat{j}$
$-a\hat{j}$	$-a^2\hat{j}$	$a^2 k$	a^2	$-a^2\hat{i}$
$-ak$	$-a^2 k$	$-a^2\hat{j}$	$-\hat{i}$	a^2

Según la tabla solo quedan las componentes de la mitad que son $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow a^2 \in \mathbb{R} \rightarrow K.$

si cumple de manera

2) $\langle a|b\rangle = (-2ab) + (ab_1 + ba_2 + a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} + (ba_2 + ab_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{j} + (ba_3 + ab_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}.$

Volviendo hacer la tabla de multiplicaciones queda lo siguientes:

$\langle b|a\rangle = ba + 3ba + (ba_1 - ab_2 - b_2 a_3 + b_3 a_2)\hat{i} + (ab_2 - ba_2 - b_3 a_1 + b_1 a_3)\hat{j} + (-ab_3 - ba_3 - b_1 a_2 + b_2 a_1)\hat{k}$

de esta manera queda demostrado.

$\langle |a\rangle | \gamma|b\rangle + \beta|c\rangle\rangle$ $\quad \gamma$ y $\beta \in K$

$= a^* \odot (\gamma|b\rangle + \beta|c\rangle)$

$a^* \odot (\gamma+\beta)(|b\rangle + |c\rangle)$ → cumple las prop de un esp. vectorial

ya que este producto se puede representar como

$$a\, S^{(\alpha j)} \delta^{0}_{\alpha} |q_j\rangle + A^{[jk]i} a_j b_k |q_i\rangle$$

$$= (\gamma+\beta)d\, |q_0\rangle + (\gamma+\beta) S^{(\alpha j)} \delta^{0}_{\alpha} |q_j\rangle + A^{[jk]i} a_j [\gamma|b\rangle + \beta|c\rangle]_k |q_i\rangle$$

$$= (\gamma+\beta)d\, |q_0\rangle + (\gamma+\beta) S^{(\alpha j)} \delta^{0}_{\alpha} |q_j\rangle + A^{[jk]i} a_j \underbrace{[(\gamma+\beta)|b\rangle |c\rangle]_k}_{\text{prop. esp. vecto.}} |q_i$$

$$(\gamma+\beta)d\, |q_0\rangle + (\gamma+\beta) S^{(\alpha j)} \delta^{0}_{\alpha} |q_j\rangle + A^{[jk]i} (\gamma+\beta)\, a_j (b \cdot c)_k |q_i\rangle$$

$$= (\gamma+\beta)\left[d|q_0\rangle + S^{(\alpha j)} \delta^{0}_{\alpha} |q_j\rangle + A^{[jk]i} a_j (b \cdot c)_k |q_i\rangle \right]$$

↓ cumplen las prop de $\mathbb{R}$

- $\langle \gamma a + \beta b | c\rangle$ → Esta se demuesta de manera analoga a la anterior, teniendo en cuenta que la multiplicación No es conmutativa por tanto al momento de hacer la tabla los signos quedan invertidos, y la rta sería el conjugado del anterior punto.

- $\langle a|0\rangle = \langle 0|a\rangle = 0$

$a \otimes 0$	0	$0\hat{i}$	$0\hat{j}$	$0k$
a	0	$0\hat{i}$	$0\hat{j}$	$0k$
i	$0\hat{i}$	0	$+0k$	$-0\hat{j}$
j	$0j$	$-0\hat{k}$	-0	$0\hat{i}$
k	$0k$	$0\hat{j}$	$-0\hat{i}$	0

=

$0 \odot a$	a	ai	aj	ak
0	0	0	0	0
$0i$	0	0	$-0k$	$-0\hat{j}$
$0j$	0	$0k$	0	$-0\hat{i}$
$0k$	0	$-0j$	$+0\hat{i}$	0

h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a|b}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|b}\rangle \odot |q_1\rangle\right]$

• $\langle \widetilde{a|b}\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$ $\quad a^0 - a^i q_i\ ,\ b^0 + b^i q_i$

$(a, -a_1, -a_2, -a_3)(b, b_1, b_2, b_3)$

$= (ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (ab_1 - a_1b - a_2b_3 + a_3b_2)\hat{i}$
$+ (ab_2 - a_2b - a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (ab_3 - a_3b - a_1b_2 + a_2b_1)\hat{k}$

$\underbrace{|q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|b}\rangle}_{H} = (ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\hat{i} - (ab_1 - a_1b - a_2b_3 +$
$a_3b_2) + (ab_2 - a_2b - a_3b_1 - a_1b_3)\hat{k}$
$- (ab_3 - a_3b - a_1b_2 + a_2b_1)\hat{j}$.

$\underbrace{H \odot |q_1\rangle}_{g} = -(ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) - (ab_1 - a_1b - a_2b_3 + a_3b_2)\hat{i}$
$- (ab_2 - a_2b - a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j}$
$- (ab_3 - a_3b - a_1b_2 + a_2b_1)\hat{k}$

$\langle a|b\rangle - |g\rangle = [(ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)]$
$\ldots$
$= [2(ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + 2(ab_1 - a_1b - a_2b_3 + a_3b_2)]$

$\frac{1}{2}[\langle a|b\rangle - g] = \frac{1}{\cancel{2}}[\cancel{2}(ab + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)] + [2(\ldots)\hat{i}]$

$\langle a|b\rangle = ab + a_1b_1 + a_2b_2 + (a_3b_3 + ab_1 - a_1b - a_2b_3 + a_3b_2)\hat{i}$

$= f_0 + f^1 |q_1\rangle \rightarrow$ complejo en 1 dimensión

→ Los complejos de 1 dimensión son esp. vect. con producto interno.

→ Este cumple todas las propiedades.

(i). $n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

¿cumple con las 3 prop. de la norma?

Demostración:

$a^* \odot a$	a	$a\hat{i}$	$a\hat{j}$	$a\hat{k}$
a	a^2	$a^2\hat{i}$	$a^2\hat{j}$	$a^2\hat{k}$
$-a\hat{i}$	$-a^2\hat{i}$	a^2	$-a^2\hat{k}$	$a^2\hat{j}$
$-a\hat{j}$	$-a^2\hat{j}$	$a^2\hat{k}$	a^2	$-a^2\hat{i}$
$-a\hat{k}$	$-a^2\hat{k}$	$-a^2\hat{j}$	$a^2\hat{i}$	a^2

Se puede observar que solo nos queda la diagonal que son $\mathbb{R}$

1) $\| |a\rangle \| \geq 0$

$\sqrt{a^* \odot a} \geq 0$

$\sqrt{a^* \odot a} = \sqrt{4a^2} = |2a| \geq 0$

2) $\| \alpha |a\rangle \| = |\alpha| \, \|a\| : \sqrt{(\alpha a^* \odot \alpha a)} = \sqrt{\alpha^2 (a^* \odot a)}$

$\alpha \sqrt{a^* \odot a} = |\alpha| \|a\|$

3) $\| |a\rangle + |b\rangle \| \leq \|a\| + \|b\|$ $\qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$

$= \sqrt{(a^\alpha + b^\alpha)^2} \leq (\sqrt{a^\alpha})^2 + (\sqrt{b^\alpha})^2$

$= \sqrt{a^{\alpha 2} + 2a^\alpha b^\alpha + b^2} \leq a^\alpha + b^\alpha$

$= \sqrt{|a^\alpha\rangle^2 + 2|a\rangle|b\rangle + |b\rangle^2} \leq |a\rangle + |b\rangle$

Así queda demostrado que cumple todas las propiedades
∴ si es un espacio normado.

J). $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2} \rightarrow \dfrac{a^0 - a^i q_i}{\sqrt{|a\rangle}^{\,2}} \rightarrow \dfrac{a^0 - a^i q_i}{a^0 + a^i q_i} = -1$

$|\tilde{a}\rangle = 1$

Así se puede ver que si es su elemento simetrico.

K) ¿son un grupo?

Debe cumplir ciertas propiedades:

1) Es cerrada respecto a la suma (ya se demostro anteriormente.

- Es asociativa respecto a la suma.
- Su elemento Neutro es $|0\rangle$.
- Su elemento inverso es $|-a\rangle$
- Es conmutativa respecto a la suma.

Si es un grupo y es un grupo abeliano.

1) $|v\rangle = v^j |q_j\rangle$ ¿conserva la norma?

$$|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle \geq 0$$

$$\| |v'\rangle \| = \| |\tilde{a}\rangle \overset{1}{\odot} |v\rangle \odot |a\rangle \| \geq 0$$

$$\| |v\rangle \odot |a\rangle \|^2 \geq 0^2$$

$$| |v\rangle \odot |a\rangle | \geq 0.$$

2) $\| \alpha |v'\rangle \| = |\alpha \tilde{a}\rangle \odot |\alpha v\rangle \odot |\alpha a\rangle.$

$$= \| \alpha 1 \odot \alpha |v\rangle \odot |\alpha| a\rangle \|$$

$$= \| \alpha (1 \odot |v\rangle \odot |a\rangle) \|$$

$$= \alpha \| |v'\rangle \|$$

3) $\| |v'\rangle + |h'\rangle \| \leq \| |v'\rangle \| + \| |h\rangle \|$

$$\| |v'\rangle + |h'\rangle \|^2 \leq \| |v'\rangle \|^2 + \| h' \|^2$$

$$\| |v'\rangle^2 + 2|v'\rangle |h'\rangle + |h'\rangle^2 \leq |v'\rangle^2 + |h\rangle^2$$

Si conserva la norma.