

# Cálculo Diferencial

Erick Asiain De la Luz  
Cecyt 9 "Juan de Dios Bátiz"

## Problemario. Desigualdades

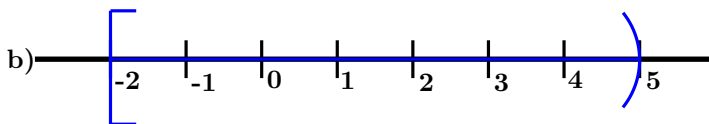
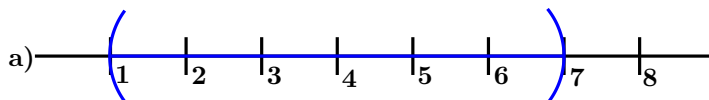
1. Expresa cada desigualdad como notación de intervalos y dibuje su gráfica.

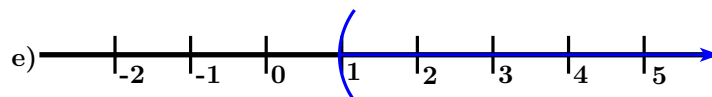
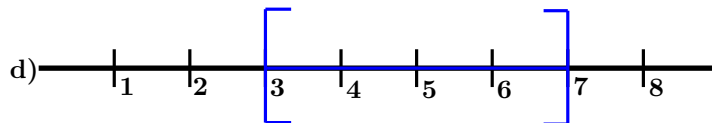
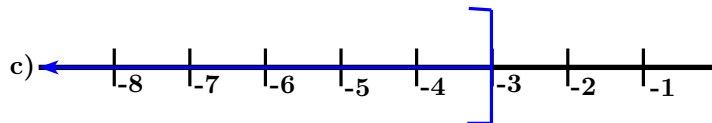
- a)  $5 > x$
- b)  $x \geq -1$
- c)  $-2 \leq x < 5$
- d)  $0 < x \leq 3$
- e)  $-3x \geq -\frac{3}{2}$

2. Utilice notación de conjuntos para describir los siguientes intervalos y dibuje su gráfica.

- a)  $[-1, 1]$
- b)  $(-4, 1)$
- c)  $[-1, +\infty)$
- d)  $(-4, 1]$
- e)  $[1, 4]$
- f)  $(-3, 2) \cup (3, 5)$
- g)  $[0, \frac{1}{2}) \cup [1, +\infty)$
- h)  $(-\infty, 1] \cup [2, 3]$
- i)  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
- j)  $(\frac{3}{4}, 1) \cup [2, 3)$

3. Utilice la notación de conjuntos e intervalos para describir las gráficas siguientes.





4. En cada problema exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

a)  $x - 7 < 2x - 5$

b)  $3x - 5 < 4x - 6$

c)  $7x - 2 \leq 9x + 3$

d)  $5x - 3 > 6x - 4$

e)  $-4 < 3x + 2 < 5$

f)  $-3 < 4x - 9 < 11$

g)  $5x < \frac{4x+2}{2} \leq x$

h)  $2x - 1 < \frac{3x}{2} < x + 1$

i)  $x^2 + 2x - 12 < 0$

j)  $x^2 - 5x - 6 > 0$

k)  $2x^2 + 5x - 3 > 0$

l)  $4x^2 - 5x - 6 < 0$

m)  $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$

n)  $\frac{3x-2}{x-1} \geq 0$

o)  $\frac{2}{x} < 5$

p)  $\frac{7}{4x} \leq 7$

q)  $\frac{1}{3x-2} \leq 4$

r)  $\frac{3}{x+5} > 2$

s)  $(x+2)(x-1)(x-3) > 0$

- t)  $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$
- u)  $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$
- v)  $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$
- w)  $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$
- x)  $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$
- y)  $\sqrt{2x - 1} < 3$
- z)  $\sqrt{5 - 3x} \geq 1$

5. Suponga que  $a > 0, b > 0$ . Demuestre cada proposición. *Sugerencia: cada parte requiere de dos demostraciones: una para  $\Rightarrow$  y otra para  $\Leftarrow$ .*

- a)  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
- b)  $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

6. Demuestre las siguientes proposiciones.

- a)  $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$
- b)  $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$
- c) Si  $a > 0$  y  $b > 0 \leq \frac{1}{2}(a+b)$

7. Encuentre todos los valores de  $x$  que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

- a)  $3x + 7 > 1$  y  $2x + 1 < 3$
- b)  $3x + 7 > 1$  y  $2x + 1 > -4$
- c)  $3x + 7 > 1$  y  $2x + 1 < -4$
- d)  $3 + 5x < 7x + 4$  y  $3(x - 2) < 4x - 9$
- e)  $(x + 1)^2 + 7 > (x - 4)^2$  y  $(1 + x)^2 + 3x^2 < (2x - 1)^2 + 7$

8. Resuelva para  $x$ , exprese su respuesta en notación de intervalos.

- a)  $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$
- b)  $x^4 - 2x^2 \geq 8$
- c)  $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$
- d)  $(6x + 2)(x - 1) \leq (2x - 3)(3x - 2)$
- e)  $x^2 + 1 \geq x(x - 3)$
- f)  $x^3 - 2x^2 < x^2(x - 2) - 3(x - 1)$
- g)  $\frac{3x^2 - x - 2}{3x + 2} \leq 0$
- h)  $\frac{2x - 1}{2x - 3} + 1 < 0$
- i)  $\frac{2}{2x - 1} \geq \frac{3}{3x - 4}$
- j)  $\frac{x - 1}{4x + 5} < \frac{x - 3}{4x - 3}$

9. Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

a)  $1,99 < \frac{1}{x} < 2,01$

b)  $2,99 < \frac{1}{x+2} < 3,01$

c)  $9x^2 - 4 < 0$

d)  $(3x - 1)^2 - 4(2 - x)^2 > 0$

e)  $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} < 0$

10. En los problemas siguientes determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

a)  $|x - 2| \geq 5$

b)  $|x + 2| < 1$

c)  $|4x + 5| \leq 10$

d)  $|2x - 1| > 2$

e)  $|\frac{2x}{7} - 5| \geq 7$

f)  $|\frac{x}{4} + 1| < 1$

g)  $|5x - 6| > 1$

h)  $|2x - 7| > 3$

i)  $|\frac{1}{x} - 3| > 6$

j)  $|2 + \frac{5}{x}| > 1$

k)  $|x - 1| < 2|x - 3|$

l)  $2|2x - 3| < |x + 10|$

m)  $|2x - 1| \geq |x + 1|$

n)  $|3x - 1| < 2|x + 6|$

o)  $\frac{1}{|x - 3|} > 0$

p)  $|4x - 2| \geq 3x + 1$

q)  $2x + 1 \geq |x|$

r)  $|\frac{3x - 1}{x + 1}| < 2$

s)  $|\frac{2x + 1}{1 - x}| \leq 3$

t)  $|\frac{x + 1}{3x + 4}| \geq 5$

u)  $|\frac{4x + 9}{1 - 2x}| \geq 3$

v)  $|2x - 1| \geq |1 - 4x|$

w)  $|8 - x| \geq |2x + 1|$

x)  $|9x - 1| \geq |3 - x|$

y)  $7x^2 - 12|x| - 4 \geq 0$

$$z) |2x^2 - 11x - 1| < 0$$

11. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas.

- a)  $|ab| \leq |a||b|$
- b)  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- c)  $|a - b| \leq |a| + |b|$
- d)  $|a - b| \geq |a| - |b|$
- e)  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- f)  $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
- g)  $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
- h)  $|x| \leq 2 \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1} \right| \leq 15$
- i)  $|x| \leq 1 \Rightarrow \left| x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16} \right| < 2$
- j)  $b \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

12. Resuelva los siguientes problemas.

- a) Armando puede vender todas las unidades que produce a \$80 cada una. Tiene costos fijos de \$15000 al mes; y además, le cuesta \$30 producir cada artículo. ¿Cuántas unidades puede producir y vender la compañía para obtener utilidades?
- b) El triple de un entero más cuatro, menos el doble de este entero está entre 10 y 15. Determine todos los enteros que satisfagan la expresión anterior.
- c) Una empacadora produce tapas rectangulares que tienen el largo de dos unidades mayores que el triple del ancho.
  - a) Si el largo de las tapas esta entre 35 y 50cm, ¿En qué intervalo está el ancho?
  - b) ¿En qué intervalo está el área de las tapas?
- d) Resuelva  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} \leq 0$ .
- e) La fórmula  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$  proporciona la resistencia total  $R$  en un circuito eléctrico debida a tres resistencias,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , conectadas en paralelo. Si  $10 \leq R_1 \leq 20$ ,  $20 \leq R_2 \leq 30$  y  $30 \leq R_3 \leq 40$ . Determine el rango de valores de  $R$ .
- f) En una hacienda, 10 recolectores recogen entre 150 y 180kg de un producto al día; si la mitad de ellos recogen el doble de los demás, ¿Entre qué valores están los kg que recoge un trabajador rápido?.
- g) En Estados Unidos, para obtener un promedio  $B$  (en calificación con letra, siendo  $A$  la máxima) en un curso de Cálculo Diferencial, un estudiante debe obtener un promedio mínimo de 82, pero menor de 90. Si las calificaciones del estudiante en los primeros tres parciales fueron 84, 87 y 92, ¿Qué calificación en el cuarto parcial le garantizará un promedio final de  $B$ ?