

Lista de ejercicios de Álgebra

Jonathan Reyes González

Cecyt “Juan de Dios Bátiz”

Agosto 2011

Resumen

Este documento es una recopilación de problemas y ejercicios de Álgebra, correspondiente al primer semestre en el Cecyt “Juan de Dios Bátiz”.

Índice

1. Aritmética	1
1.1. Operaciones Elementales.	1
1.2. Exponentes y Radicales	2
2. Álgebra	5
2.1. Expresiones algebraicas	5
2.2. Productos notables	7
2.3. Binomio de Newton.	8
2.4. Factorización	9
2.5. Ecuaciones lineales	11
2.6. Ecuaciones cuadráticas	12
2.7. Sistemas de ecuaciones	16
2.7.1. Lineales	16
2.7.2. Cuadráticas	18
3. Problemas Complementarios	20

1. Aritmética

1.1. Operaciones Elementales.

Ejercicio 1. Realiza las siguientes operaciones (sin calculadora).

- a) $5\{4 - 3[2 \times 6 + 7(2 + 6 \div 3 - 2 \times 2)] + 8\}$
- b) $1 - \{7 + 2 \div [4 - 2 \times (8 \div 4 + 2 \times 1 - 2)] + 6 - 7 \times 2\} + 7$
- c) $1 + 3 - [-7 + 8 - (3 \times 7 - 72 \div 8) \div 4] + 8$
- d) $\{6 + 121 \div [7 \times 3 - 5 \times 2 - 1 - 8 \div (-8)]\} - 17$
- e) $6 + 7 \times 1 - 3[4^2 - 8 + 4 \times (-2) + 4]$
- f) $3^2 + 6[7 \cdot 2^2 - 6 + 11(-1)] \div (5 \cdot 6) - 10$
- g) $2 + 8\{6 - 3[4 + 2(-2)] + (-2) - (-8 + 6)\}$
- h) $(5 + 7(9/3 - 3 \cdot 2 - 6(-2) - 2^3) - 10)^2$
- i) $\frac{8(4 - 6 + 3(2 - 1))^3}{\left(\left(6 + \frac{4}{2}\right) \div 2\right)^2}$
- j) $2 - \frac{9}{3} \left(\frac{4(8 - 6(-2))}{8}\right)$

Ejercicio 2. Realiza las siguientes operaciones (sin calculadora) y presenta el resultado en forma de fracción.

- a) $\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + \frac{8}{3}$
- b) $3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{7}$
- c) $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$
- d) $5 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{6}{5}$
- e) $\frac{3}{7} \div \frac{7}{27} + 1$
- f) $\frac{6}{-5} \div \frac{-3}{10}$
- g) $\left[\left(\frac{3}{2} - 57\right) \frac{2}{11}\right] \div \left(1 + \frac{-6}{7}\right)$
- h) $\left[3 - 2 \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{15}\right) \frac{15}{4}\right]^2 - 12$
- i) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$

$$\text{j) } \frac{-2 + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{-4 + \frac{1}{2}}{\frac{9}{10}}$$

Ejercicio 3. Calcula los siguientes valores.

a) $|8|$

b) $|22|$

c) $|-2|$

d) $|3 - 5|$

e) $|-\sqrt{2}|$

f) $|-6| - |-4|$

g) $-|-(\sqrt{20} - 8)|$

h) $||-7| - |10||$

i) $\left| \frac{-7 + 8}{7 - 10} \right|$

j) $-\frac{|3 - 7|}{-2}$

1.2. Exponentes y Radicales

Ejercicio 4. Realiza las operaciones indicadas, simplificando los resultados cuando sea posible:

a) $\frac{49^2}{14^3}$

b) $\frac{98^2}{14^4}$

c) $\frac{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4)^3}{(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7)^3}$

d) $\frac{(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^3}{(2^7 \cdot 3^4)^2}$

e) $\frac{1024^3}{64^4}$

f) $\frac{343^2}{98^3}$

g) $\frac{(144 \cdot 98)^3}{(256 \cdot 343)^2}$

Ejercicio 5. Realiza las operaciones indicadas, simplificando los resultados cuando sea posible:

a) $49^{\frac{1}{2}}$

b) $(-125)^{\frac{1}{3}}$

c) 23^0

d) 13^{-1}

e) $64^{\frac{1}{6}}$

f) $4^{\frac{3}{2}}$

g) $9^{-\frac{1}{2}}$

h) $\left(\frac{125}{216}\right)^{\frac{2}{3}}$

i) $\left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

j) $\frac{2^{-4} - 3^{-3}}{4^{-2}}$

k) $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$

Ejercicio 6. Racionaliza los denominadores de las fracciones siguientes y simplifica.

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$

d) $\frac{10}{\sqrt[3]{25}}$

e) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

g) $\frac{12}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

h) $\frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{\sqrt{13} + \sqrt{11}}$

i) $\frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{14}}$

j) $\frac{1}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

k) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

l) $\frac{149}{3\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{5}}$

$$\text{m)} \frac{\sqrt{15} - \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

Ejercicio 7. Simplifica las siguientes expresiones y reduce los términos semejantes:

$$\text{a)} 73\sqrt{17} - 84\sqrt{17} + 2\sqrt{17}$$

$$\text{b)} 27\sqrt{3} - 3\sqrt{27}$$

$$\text{c)} \sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{12}$$

$$\text{d)} 6\sqrt[6]{125} + 5\sqrt[5]{125} + 4\sqrt[4]{25} - 2\sqrt{125}$$

$$\text{e)} \sqrt{64} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{64} + \sqrt[5]{64} - \sqrt[6]{64}$$

$$\text{f)} \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27}$$

$$\text{g)} \sqrt[3]{3000} - \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$$

$$\text{h)} \sqrt{729} + \sqrt[3]{729} + \sqrt[4]{729} + \sqrt[5]{729} + \sqrt[6]{729}$$

$$\text{i)} \sqrt{50} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \sqrt[6]{8} + \sqrt[4]{2500}$$

Ejercicio 8. Realiza las operaciones indicadas, simplificando los resultados cuando sea posible:

$$\text{a)} \sqrt{14} \cdot \sqrt{21}$$

$$\text{b)} \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$$

$$\text{c)} \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{4}$$

$$\text{d)} \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$$

$$\text{e)} \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{5}$$

$$\text{f)} (\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})$$

$$\text{g)} (\sqrt{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt{2} - \sqrt[3]{4})$$

$$\text{h)} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{4})^2$$

$$\text{i)} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[4]{6})^2$$

Ejercicio 9. Realiza las operaciones indicadas, simplificando los resultados cuando sea posible:

$$\text{a)} \sqrt{91} \div \sqrt{13}$$

$$\text{b)} \sqrt{92} \div \sqrt{23}$$

$$\text{c)} \sqrt[3]{198} \div \sqrt[3]{33}$$

$$\text{d)} \sqrt[3]{18} \div \sqrt[3]{4}$$

$$\text{e)} \sqrt{11} \div \sqrt[4]{11}$$

$$\text{f)} \sqrt[3]{6} \div \sqrt{2}$$

$$\text{g)} \sqrt[4]{12} \div \sqrt[3]{2}$$

$$\text{h)} (3 + \sqrt{7}) \div (2 - \sqrt{7})$$

2. Álgebra

2.1. Expresiones algebraicas

Ejercicio 10. Calcula los siguientes productos:

- a) $8a \cdot 2x$
- b) $7p \cdot (-9q)$
- c) $9xt^2 \cdot 3x^3t^3$
- d) $-5a^3b^2 \cdot (-6ab^2c)$
- e) $32axy \cdot 8bxy$
- f) $(-3uv)(-2u^3v^2)(-9v^4)$
- g) $12m^2n^2 \cdot (-2mns)(-3s^2t^4)$

Ejercicio 11. Calcula las siguientes potencias:

- a) $(x^3)^5$
- b) $(3a^3)^3$
- c) $(a^2b^3)^4$
- d) $(-3r^3s^5)^4$
- e) $(10x^{10})^5$
- f) $(9m^9n^3)^3$

Ejercicio 12. Calcula los siguientes productos:

- a) $5a^2b^2 \cdot (2ab^2c^3)^3$
- b) $(-2u^2v^3)^5 \cdot (5u^3v)^3$
- c) $(-7x^5y^4z^3 \cdot 3xy^2z^3)^2$
- d) $(-5uv^4)^4 \cdot (4u^5v^2)^3$
- e) $(2xy)^5 \cdot (-3x^2y^3)^4 \cdot (-5x^3y^4)^3$

Ejercicio 13. Calcula los siguientes cocientes:

- a) $a^8 \div a^3$
- b) $14x^5 \div (-2x^2)$
- c) $-36t^2 \div (-9t)$
- d) $72x^6y^4z^4 \div 18xy^3z^2$
- e) $(3a^2b^3c^4)^7 \div (3a^2b^3c^4)^4$
- f) $6m^3n^5 \cdot 2m^2n^3 \div (-4mn^6)$
- g) $(-27x^2y^3)^2 \cdot (-5x^2y^4z^6)^3 \div (-3xyz)^5$

Ejercicio 14. Suprime los paréntesis y reduce términos semejantes:

- a) $a(b + c - d) - b(a - c + d)$
- b) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$
- c) $3(a - 5b) - \{7a - [3(a + b - 2) + 4]\}$
- d) $x(x - 4) + 8(3x - 2x(x + 5y - (3x - (x - 2))))$
- e) $9\{a - [2b - 7(a - c)]\} - 6[3(a - b) - 4(a - c)]$

Ejercicio 15. Encierra los últimos tres términos entre paréntesis, precedidos de un signo menos:

- a) $a - 2b - 3d + 4d$
- b) $3x - y + z - 10$
- c) $5p + 6q - 7r + 8s$
- d) $m^2 + n^2 + 3mn - 2 - 4n$
- e) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$

Ejercicio 16. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

- a) $5(2x - 3y + 7) - 4\{x - 2y[2x - 3 + 4(1 - x)] - xy\}; x = 2; y = 3$
- b) $8\{a - [3b - 5(a - 2c)]\} - 7[4(a - b) - 3(a - c)]; a = 3; b = -2; c = 5$
- c) $5\{2a - b + c - 3[2a - |b - c| - 2(a - c)]\}; a = 1; b = 2; c = 3$
- d) $x^2 - y(x - z)[3x - 2(y - z)^2 - 7x^3y^2z]; x = 4; y = -3; z = 7$

Ejercicio 17. Calcula los siguientes productos:

- a) $(3x^2 + 6x - 5)(x + 7)$
- b) $(6x^2 - x + 12)(3x - 5)$
- c) $(x^2 + 9x + 10)(x^2 + x + 4)$
- d) $(5x^2 - 8xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 3y^2)$
- e) $(2x^4 - 3x^2 + 5x - 4)(2x^3 - 5x - 1)$

Ejercicio 18. Realiza las siguientes divisiones:

- a) $(x^3 + 5x^2 - 8x - 12) \div (x - 2)$
- b) $(12x^4 - 25x^3 + 18x^2 + 7x - 20) \div (3x - 4)$
- c) $(a^3 - b^3) \div (a - b)$
- d) $(a^3 - b^3) \div (a + b)$
- e) $(x^3 - 7x^2 + 2x + 4) \div (x - 5)$
- f) $(x^4 + 5x^3 - 13x^2 + 10x - 8) \div (x^2 + 7x + 3)$
- g) $(5x^4 - 13x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 - 7y^4) \div (x^2 - 3xy + 2y^2)$
- h) $(x^3 - x^4 + x^2 - x + 2688) \div (x + 7)$
- i) $(8x^5 - 6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 17x + 15) \div (2x^3 + 3x^2 + 5x - 2)$

2.2. Productos notables**Ejercicio 19.** Calcula los siguientes productos.

- a) $(m+n)(m-n)$
- b) $(x+5)(x-5)$
- c) $(x+3y)(x-3y)$
- d) $(2x^2+3a)(2x^2-3a)$
- e) $(abc+d)(abc-d)$
- f) $(m^3+n^3)(m^3-n^3)$
- g) $[(a+b)+c][(a+b)-c]$
- h) $(p+q+7r)(p+q-7r)$
- i) $[5(p-q)+6(r-s)][5(p-q)-6(r+s)]$

Ejercicio 20. Calcula los siguientes productos.

- a) $(u+v)^2$
- b) $(2a+7b)^2$
- c) $(3x-2y)^2$
- d) $(9mn-8p^2q^2)^2$
- e) $(4ab^3-11d^2e)^2$
- f) $(u+3v)^3$
- g) $(2a-b)^3$
- h) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^3$
- i) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$
- j) $(\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{4x^2}-\sqrt[3]{6xy}+\sqrt[3]{9y^2})$
- k) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$
- l) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^4$

Ejercicio 21. Calcula los siguientes productos.

- a) $(x+7)(x+11)$
- b) $(x+10)(x-5)$
- c) $(x-13)(x+7)$
- d) $(x-15)(x-3)$
- e) $(x-8y)(x-4y)$

- f) $(x + y)(x + 2y)$
- g) $(x + 2b)(x + 3b)$
- h) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$
- i) $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$
- j) $(x + 2)(x + 4)(x + 8)(x - 1)$
- k) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$

2.3. Binomio de Newton.

Ejercicio 22. Calcula la expansión de los siguientes binomios:

- a) $(x + y)^6$
- b) $(a - 2x)^7$
- c) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10}$
- d) $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x}\right)^6$
- e) $\left(3a - \frac{2}{3a}\right)^5$

Ejercicio 23. Simplifica las siguientes expresiones:

- a) $(a + \sqrt{a^2 - 1})^7 + (a - \sqrt{a^2 - 1})^7$
- b) $(x + \sqrt{2})^4 + (x - \sqrt{2})^4$
- c) $(\sqrt{2} + 1)^6 - (\sqrt{2} - 1)^6$
- d) $(\sqrt{x^2 - a^2} + x)^5 - (\sqrt{x^2 - a^2} - x)^5$
- e) $(2 - \sqrt{1 - x})^6 + (2 + \sqrt{1 - x})^6$

Ejercicio 24. Encuentra los siguientes términos.

- a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{15}$, término 14.
- b) $\left(2x - \frac{y}{x}\right)^{20}$, término 18.
- c) $\left(1024x^5 - \frac{1}{2x}\right)^{30}$, término 4.
- d) $\left(\sqrt[3]{2x} - \frac{6y}{x}\right)^7$, término 2.

Ejercicio 25. Encuentra el coeficiente de x^{18} en

- a) $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{14}$

b) $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^{15}$

c) $(ax^4 - bx)^9$

Ejercicio 26. Encuentra el término independiente de

a) $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$

b) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{2n}$

2.4. Factorización

Ejercicio 27. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $8x^3 - 12x^2y$

b) $2a^2 + 4ab - 8a^2x$

c) $6a^4 + 24a^3b - 216a^5b^2$

d) $r(p + q) - 3(p + q)$

e) $6xyz + 9abx$

f) $7(a - b) + 3x(a - b)$

g) $(a + 2b)(x - 3y) + (3c + 4d)(x - 3y)$

Ejercicio 28. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $36p^2 - 49q^2$

b) $(m + n)^2 - 25$

c) $25a^2b^4 - 64c^6$

d) $a^3b - ab^3$

e) $8x^3 + y^3$

f) $343a^3 - 125b^3$

g) $x^8 - y^8$

h) $x^7 - y^7$

i) $36p^2 - 49(r + s)^2$

j) $x^3 + 8$

k) $a^4 + 4b^4$

Ejercicio 29. Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 - 5x - 24$

b) $x^2 - 10x + 24$

c) $x^4 - 13x^2 + 36$

- d) $6x^2 - 11x - 10$
- e) $18x^2 + 19x - 12$
- f) $a^2 + 16ab - 36b^2$
- g) $x^2 + 13xy + 40y^2$
- h) $6a^2 - 92ab - 98b^2$
- i) $5x^2 + 26xy + 5y^2$
- j) $8a^4 - 24a^2b + 18b^2$

Ejercicio 30. Factoriza las siguientes expresiones.

- a) $b(ax^2 - c) + x(b^2 - ac)$
- b) $ab(x^2 + 1) + (a^2 + b^2)x$
- c) $x^3 + 2x^2 + x + 2$
- d) $6ax + 4ay - 9bx - 6by$
- e) $a^2 - b^2 + a - b$
- f) $12abm + 27bm - 8acn - 18cn$
- g) $4xy + 9z^2 - x^2 - 4y^2$
- h) $x^3 - 2x - 4$
- i) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$
- j) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x + 8$
- k) $x^2z - x^2y + y^2x - y^2z + z^2y - z^2x$

Ejercicio 31. Simplifica las siguientes fracciones.

- a) $\frac{91a^3b^2c^5}{441a^5bc^2}$
- b) $\frac{153x^7yz^2}{187(xyz)^6}$
- c) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 2x - 24}$
- d) $\frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 9}$
- e) $\frac{(x - y)(u - v)}{(x + y)(v - u)}$
- f) $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{6a^2 + 7ab - 24b^2}$
- g) $\frac{a^3 + 8b^3}{a^3 - 4ab^2}$
- h) $\frac{x^4 + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$

$$\text{i)} \quad \frac{x^3 - 3x^2 - 50}{x^3 - 3x - 110}$$

$$\text{j)} \quad \frac{x^3 + y^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$$

$$\text{k)} \quad \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^3 + 4x^2 - 32x}$$

$$\text{l)} \quad \frac{x^3 - 4x^2 - 11x + 30}{x^3 + 6x^2 - x - 30}$$

2.5. Ecuaciones lineales

Ejercicio 32. Resuelve las siguientes ecuaciones.

$$\text{a)} \quad 4x - 5 = x + 1$$

$$\text{b)} \quad \frac{3}{4}x - 1 = 2x + 9$$

$$\text{c)} \quad 7x + 42 = 0$$

$$\text{d)} \quad 5x - 8 = 2x + 7$$

$$\text{e)} \quad 3x + 2 - 4(x - 3) = 2(5x - 4)$$

$$\text{f)} \quad (x - 2)(x - 4) = (x - 3)(x + 6)$$

$$\text{g)} \quad 3ax - 2 = 5bx + 7$$

$$\text{h)} \quad (ax + c)(bx + d) = (bx + c)(ax + d)$$

$$\text{i)} \quad (3x - 2)^2 - 9x^2 = a(1 - 3x)$$

$$\text{j)} \quad x^2 + a(a - 2x) = (x - 2a)^2$$

$$\text{k)} \quad (x - 5)(5 - x) = 5(2x - 3) - x^2$$

Ejercicio 33. Realiza los siguientes despejes.

$$\text{a)} \quad \text{Despeja } r: P(1 + rn) = A$$

$$\text{b)} \quad \text{Despeja } l: S = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$\text{c)} \quad \text{Despeja } d: p + gh d + \frac{1}{2}v^2 d = c$$

$$\text{d)} \quad \text{Despeja } r: V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

Ejercicio 34. Resuelve los siguientes problemas

Problema 34.1. ¿Cuántas libras de agua deberán evaporarse de 50 libras de una solución de sal al 3 % de manera que la solución resultante tenga un contenido de sal de 5 %.

Problema 34.2. Dos aviones salieron de aeropuertos distantes 600 millas y volaron hasta encontrarse. Un avión voló 20 millas por hora mas aprisa que el otro. Si se encontraron después de 1 hora y 12 minutos, ¿cuáles fueron sus velocidades respectivas?

Problema 34.3. La diferencia de dos números es 17 y su suma es 125 ¿cuáles son estos números?

Problema 34.4. Encuentra tres enteros consecutivos tales que su suma sea 378.

Problema 34.5. El largo de un rectángulo es 13cm más grande que su ancho. El perímetro es de 96 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de dicho rectángulo?

Problema 34.6. Un hombre tiene tres veces la edad de su hijo. Hace cuatro años tenía cuatro veces la edad de su hijo. ¿Qué edad tiene el hijo?

Problema 34.7. Un avión voló en línea recta desde su base a la velocidad de 300 km por hora y regreso por la misma ruta a una velocidad de 250 km por hora, en el viaje de regreso tardó 15 minutos más que en el de ida. ¿A qué distancia de su base viajó?

Problema 34.8. Un poste vertical se quebró por el viento. La parte superior aún adherida, alcanzó un punto en el suelo plano a 15 metros de la base. Si la parte superior tiene 9 metros más que la parte inferior. ¿Cuál era la altura del poste?

Problema 34.9. Una bala se dispara hacia un blanco y el ruido del impacto se escucha 6 segundos después. Si la bala viaja a una velocidad de 670 metros por segundo y el sonido viaja a una velocidad de 335 metros por segundo. ¿A qué distancia se encuentra el blanco?

Problema 34.10. ¿En qué momento después de las 6, las manecillas del reloj se vuelven a juntar?

Problema 34.11. María tiene 24 años. Tiene dos veces la edad que Ana tenía cuando María tenía la misma edad que tiene Ana ahora. ¿Qué edad tiene Ana?

2.6. Ecuaciones cuadráticas

Ejercicio 35. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

b) $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = x - a$

c) $300x^2 - 750x + 625 = 0$

d) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} = 3$

e) $x - \frac{16}{x} = 6$

f) $\frac{5x}{4x-3} - \frac{3x+4}{x-8} = 6$

g) $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-4) = 0$

h) $3x^2 - 4x - 7 = 0$

i) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

j) $6x^2 + 10x + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = -1$

k) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

l) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{2} = 0$

Ejercicio 36. Resuelve los siguientes problemas.

Problema 36.1. Un lado de un rectángulo tiene 12 pulgadas. Al reducir el otro lado en 4 pulgadas, la diagonal se reducirá en 2 pulgadas. Encuentra el largo del otro lado.

Problema 36.2. Una escalera mide 7 pies más que otra. Las dos se colocan en un piso plano con las patas inferiores a 8 pies de la base de un muro vertical. La escalera más larga alcanza 9 pies de más en el muro que la otra. ¿Cuánto mide cada escalera?

Problema 36.3. Un hombre maneja 156 kilómetros a velocidad constante. Si hubiera manejado a una velocidad 5 km por hora mayor, hubiera hecho el viaje en 12 minutos menos. ¿A qué velocidad estaba manejando?

Problema 36.4. Un tanque puede llenarse en 12 minutos por medio de dos tuberías abiertas simultáneamente. Con la tubería grande, puede llenarse en 10 minutos menos que con la tubería chica. Calcula el tiempo necesario para llenar el tanque con cada una de las tuberías.

Problema 36.5. Un jardín de flores circular está rodeado por un camino de 3 metros de ancho. La superficie del camino es $\frac{7}{9}$ de la del jardín. ¿Cuál es el radio del jardín?

Problema 36.6. La suma de los cuadrados de 3 números consecutivos es 245. Encuentra los números.

Problema 36.7. Una charola con una base cuadrada y un volumen de 648 centímetros cúbicos se construye a partir de una lámina cuadrada de estaño cortando 4 centímetros cuadrados en las esquinas y doblando los lados. ¿De qué tamaño es la lámina que debe usarse?

Problema 36.8. Una hoja de cartón es dos veces más larga que ancha. Se elabora con ella una caja sin tapa que tiene una capacidad de 168 pulgadas cúbicas, cortando 9 pulgadas cuadradas en las esquinas y doblando los lados. ¿De qué tamaño es la hoja de cartón?

Problema 36.9. Un grupo de pescadores alquiló una lancha por \$240. Dos de los hombres tuvieron que renunciar al viaje y, por lo tanto, la cooperación de cada uno de los demás aumentó en \$10. ¿Cuántos pescadores se habían organizado originalmente?

Ejercicio 37. Determina el carácter de las raíces de las ecuaciones siguientes sin resolverlas:

a) $x^2 - 7x - 12 = 0$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 3 = 0$

e) $14x^2 - 22x + 13 = 0$

f) $7x^2 - 8x - 10 = 0$

g) $6x^2 + 19x + 15 = 0$

h) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

i) $8x^2 - 7x - 9 = 0$

j) $12x^2 - 19x - 18 = 0$

Ejercicio 38. Encuentra la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones sin resolverlas:

a) $x^2 + 7x + 12 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $5x^2 - 22x - 17 = 0$

d) $8x^2 - x + 22$

e) $(5x + 4)^2 = 18$

f) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{2} = 0$

g) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) + (x - 3)(x - 4) = 0$

Ejercicio 39. Determinar k en las ecuaciones siguientes de manera que una de las raíces sea 0.

a) $3x^2 - 7x + 11 = k$

b) $x^2 + k^2 - 2(x^2 - 1) + 3(x - k) = 0$

c) $(kx - 3)^2 - (k - 3)(x - 3)^2 = 0$

d) $\frac{x - 1}{k - 1} + \frac{k + 2}{x + 2} = 1$

Ejercicio 40. Determinar los valores de k para los cuales las raíces de las ecuaciones siguientes son iguales.

a) $x^2 + kx + k = 0$

b) $kx^2 + 2x - 3 = 0$

c) $16x^2 - 8x + 3 = k$

d) $(k + 3)x^2 + (x - 3)k^2 = 0$

e) $(x + 1)(x - 2) + (k - 2)(x + 1) + (k - 1)(x + 2) = 0$

Ejercicio 41. Determinar k de manera que una raíz sea la negativa de la otra en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + k^2 + x + k + kx = 0$

b) $(x + k)^2 + 3(x + k) + 7 = 0$

c) $\frac{kx^2}{5} + \frac{5x}{k} - \frac{kx}{5} - \frac{5}{k} = 0$

d) $(x + k)^2 + 3(x + k) + 7 = 0$

e) $\frac{x^2 - 4}{k^2 - 4} = \frac{x + k}{k - 2} + \frac{x - k}{k + 2}$

f) $(7x + k)^2 - 7(7k + x) + 7kx = 0$

Ejercicio 42. Determina el valor de k en las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + kx + 18 = 0$ si una raíz es el doble de la otra.

b) $x^2 + kx + 5 = 0$ si una raíz es 4.

c) $2x^2 - 9x + k = 0$ si una raíz es el doble de la otra.

d) $3x^2 - kx + 6 = 0$ si una raíz es 3.

e) $4x^2 + kx + 7 = 0$ si la diferencia entre las raíces es de 3.

f) $7x^2 + kx - 4 = 0$ si el cociente de las raíces es $-\frac{9}{28}$.

Ejercicio 43. Encuentra las ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros cuyas raíces son:

- a) 7 y 9
- b) 0 y 35
- c) -4 y 8
- d) $2 + \sqrt{17}$ y $2 - \sqrt{17}$
- e) $5 - \sqrt{3}$ y $5 + \sqrt{3}$
- f) $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$

Ejercicio 44. Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$, encuentra los valores de las siguientes expresiones.

- a) $\alpha^2 + \beta^2$
- b) $\alpha^3 + \beta^3$
- c) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$
- d) $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$
- e) $\alpha^4\beta^7 + \alpha^7\beta^4$

Ejercicio 45. Si α y β son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, encuentra la ecuación cuyas raíces sean las siguientes.

- a) $\frac{\alpha}{\beta}$ y $\frac{\beta}{\alpha}$
- b) $(\alpha - \beta)^2$ y $(\alpha + \beta)^2$
- c) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ y $\alpha^2 + \beta^2$

Ejercicio 46. Encuentra el valor máximo o mínimo de cada una de las funciones siguientes y el valor correspondiente de x . Indica si es un valor máximo o mínimo.

- a) $f(x) = x^2 - 8x + 2$
- b) $f(x) = x^2 - 6x + 12$
- c) $f(x) = x^2 + 4x + 11$
- d) $f(x) = 13 - 2x - x^2$
- e) $f(x) = 10 + 6x - x^2$
- f) $f(x) = 3x^2 - 4x - 12$
- g) $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{9}x^2$
- h) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$
- i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 2$

j) $f(x) = 6 - \sqrt{3}x - 2\sqrt{2}x^2$

Ejercicio 47. Resuelve los siguientes problemas.

Problema 47.1. Se necesita cercar un terreno rectangular, en uno de sus lados hay una pared de piedra muy larga, por lo que se requiere cercar sólo tres de sus lados. Su dueño dispone de 400m de cerca. ¿Cuál es la superficie máxima que puede cercar?

Problema 47.2. Un hombre quiere cercar un terreno rectangular, del cual un lado es la línea divisoria de su propiedad. Tiene \$600 para gastar en la cerca, que cuesta \$2 el metro. Tiene que pagar por los tres lados del terreno que son suyos y por la mitad del lado que comparte con su vecino. ¿Cuál es la superficie máxima que puede cercar?

Problema 47.3. Un cine tenía un promedio diario de 1500 entradas pagadas, luego redujo el precio de admisión de \$80 a \$75. El resultado fue un incremento de 100 en el promedio diario de entradas pagadas. Si por cada \$5 de reducción en el precio de admisión el número de entradas pagadas aumenta en 100, encuentra el precio que permitirá obtener el máximo de ingresos.

Problema 47.4. Se desea doblar un alambre de 20cm de longitud para formar un rectángulo. ¿Cuál es el área máxima que puede abarcar dicho rectángulo?

2.7. Sistemas de ecuaciones

2.7.1. Lineales

Ejercicio 48. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a)

$$\begin{aligned} 3x + y &= 44 \\ 2x + y &= 31 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 32 \\ 2x + y &= 14 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3x - y &= 40 \\ x - 2y &= 30 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2x + 8y &= 79 \\ 2x - 5y &= -38 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 3x - 6y &= -38 \\ 6x - 9y &= 44 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - (x-1)^2 &= 4y \\ 3x - y &= 8\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\frac{5}{x} - \frac{2}{y} &= 29 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} &= 37\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} - \frac{7}{y} &= \frac{53}{2} \\ \frac{5}{x} + \frac{8}{y} &= 29\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}4x + \frac{2}{y} &= 3 \\ 7x + \frac{3}{y} &= 5\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}\frac{12}{x} + 7y &= \frac{17}{2} \\ \frac{18}{x} - 13y &= -15\end{aligned}$$

Ejercicio 49. Resuelve los siguientes problemas.

Problema 49.1. Un fabricante de dulces tiene dos clases de dulces que se venden a 75 centavos y 90 centavos la libra, respectivamente. ¿Cuántas libras de cada clase deberá emplear para tener una mezcla de 150 libras que se venda a 78 centavos la libra?

Problema 49.2. Un frutero vendió 9 docenas de limones y 16 docenas de naranjas por \$17.40. Al día siguiente vendió, a los mismo precios, 11 docenas de limones y 20 docenas de naranjas por \$21.60. Encuentra el precio de los limones y las naranjas.

Problema 49.3. Si el largo de un rectángulo se aumenta 8cm y su ancho 3cm, su superficie aumentará 200cm². Cuando se aumenta su largo 3cm y su ancho 8cm, su superficie aumentará 255cm². ¿Cuánto miden el largo y ancho del rectángulo?

Problema 49.4. Un recipiente contiene x onzas de ácido. Un segundo recipiente contiene x onzas de agua. Se extraen del ácido y onzas, se colocan en el agua y se mezcla la solución. Después se extraen y onzas de la mezcla y se vierten en el ácido. Encuentra (a) la concentración de ácido en el segundo recipiente y (b) la concentración de agua en el primer recipiente.

2.7.2. Cuadráticas

Ejercicio 50. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 3 \\2x + y &= 8\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}y^2 &= 9x \\y &= -9x\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x^2 + -8y &= 0 \\x - 3y + 2 &= 0\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 16 \\3x + 2y &= 9\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x^2 - xy - 28 &= 0 \\2x - 5y - 1 &= 0\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}xy - 12 &= 0 \\x - y + 1 &= 0\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}2xy - 3y^2 + 1 &= 0 \\2x - 3y + 1 &= 0\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 &= 0 \\7x - y - 6 &= 0\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 9 \\x - y &= 9\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 119 &= 0 \\x - y - 3 &= 0\end{aligned}$$

Ejercicio 51. Resuelve los siguientes problemas.

Problema 51.1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 13cm. Su perímetro es de 30cm. Encuentra la longitud del lado más corto.

Problema 51.2. La superficie de un triángulo rectángulo es de 210cm^2 . Su perímetro es de 70cm. Encuentra la longitud de la hipotenusa.

Problema 51.3. La superficie total de las caras de dos cubos es de 312cm^2 . La suma total de las longitudes de sus aristas es de 120cm. Encuentra las magnitudes de las aristas de cada cubo.

Ejercicio 52. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)

$$\begin{aligned}4x^2 + 3y^2 &= 127 \\5x^2 - 4y^2 &= 89\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x^2 + 2y^2 &= 17 \\x^2 - y^2 &= 5\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}3x^2 - 5y^2 &= -5 \\4x^2 + y^2 &= 116\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}5x^2 - 26y^2 &= 111 \\7x^2 + 8y^2 &= 0\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy &= 16 \\xy &= 6\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}x^2 + xy &= -2 \\2x + y^2 &= 3\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}8x^2 + xy &= 6 \\2xy + y^2 &= 7\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25 \\xy &= 12\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 35 \\x + y &= 5\end{aligned}$$

3. Problemas Complementarios

Ejercicio 53. Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{4x-1}{2}$
- b) $\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 1}{2x^3 - 3x^2 - x - 1} = \frac{3x^3 - x^2 + 5x - 13}{3x^3 - x^2 - 5x + 13}$
- c) $\frac{3x^4 + x^2 - 2x - 3}{3x^4 - x^2 + 2x + 3} = \frac{5x^4 + 2x^2 - 7x + 3}{5x^4 - 2x^2 + 7x + 3}$
- d) $\frac{(m+n)x - (a-b)}{(m-n)x - (a+b)} = \frac{(m+n)x + a + c}{(m-n)x + a - c}$

Ejercicio 54. Resuelve las siguientes ecuaciones

- a) $8x^{\frac{3}{2n}} - 8x^{-\frac{3}{2n}} = 63$
- b) $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$
- c) $(x-7)(x-5)(x+6)(x+4) = 504$
- d) $x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$
- e) $\sqrt{x^2 - 7ax + 10a^2} - \sqrt{x^2 + ax - 6a^2} = x - 2a$
- f) $\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9$
- g) $12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$
- h) $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$
- i) $(1 - a^2)(x + a) - 2a(1 - x^2) = 0$

Ejercicio 55. Resuelve las siguientes ecuaciones

- a) $x^{-2} - 2x^{-1} = 8$
- b) $2\sqrt{x} + 2x^{-\frac{1}{2}} = 5$
- c) $5\sqrt{\frac{3}{x}} + 7\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{68}{3}$
- d) $3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x$
- e) $2^{2x+8} + 1 = 32 \cdot 2^x$
- f) $\frac{3}{\sqrt{2x}} - \frac{\sqrt{2x}}{5} = \frac{59}{10}$
- g) $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$
- h) $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1) = 1680$
- i) $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5) = 385$
- j) $x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63$

k) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 6x} = 24 - 6x$

l) $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$

m) $3x^2 - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 16x$

n) $\frac{3x-2}{2} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \frac{(x+1)^2}{3}$

o) $7x - \frac{\sqrt{3x^2 - 8x + 1}}{x} = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^3$

p) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

q) $x^4 + \frac{8}{9}x^2 + 1 = 3(x^3 + x)$

r) $x^4 + 1 - 3(x^3 + x) = 2x^2$

s) $10(x^4 + 1) - 63x(x^2 - 1) + 52x^2 = 0$

t) $\sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{x^2 + bx - 1} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

u) $\frac{a+2x+\sqrt{a^2-4x^2}}{a+2x-\sqrt{a^2-4x^2}} = \frac{5x}{a}$

v) $x^4 - 2x^3 + x = 380$

Ejercicio 56. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a)

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ bcx + cay + abz &= (b-c)(c-a)(a-b) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 7z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 0 \\ 3x^3 - y^3 + z^3 &= 18 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x + y &= z \\ 3x - 2y + 17z &= 0 \\ x^3 + 3y^3 + 2z^3 &= 167 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 7yz + 3zx &= 4xy \\ 21yz - 3zx &= 4xy \\ x + 2y + 3z &= 19 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 + 5z^2 &= 0 \\ 7x^2 - 3y^2 - 15z^2 &= 0 \\ 5x - 4y + 7z &= 6 \end{aligned}$$