Segundo examen parcial

Fecha de entrega: 3 de Noviembre

Semestre: 2026-1

Grupo: 1

Profesor: Erik Peña Medina

Nombre de los integrantes:

- Cabrera Cruz Carlo Alejandro
- Gutiérrez Espriella Moisés Ariel
- González Martínez Roberto Carlos
- Rodriguez Torres Angel Adrian .

Resumen

En este proyecto se desarrolló y evaluó una trayectoria óptima para un manipulador SCARA, empleando un esquema de movimiento tipo *Bang-Bang Parabolic Blend* para garantizar una transición eficiente y suavizada entre dos puntos dentro del espacio de trabajo. Como fundamento del análisis, se formularon de manera simbólica las ecuaciones de transformación homogénea correspondientes a la cinemática directa del robot, lo que permitió determinar con precisión la posición y orientación del efector final a partir de las configuraciones articulares.

La validación del modelo se realizó mediante simulación numérica en MATLAB y en el entorno ROS-Gazebo, donde se integró un controlador basado en mensajes **JointTrajectory** implementado en Python. Esta arquitectura facilitó la ejecución continua y estable de la trayectoria, así como la verificación tridimensional del comportamiento dinámico del robot durante el seguimiento del recorrido definido.

Un elemento central del estudio fue el análisis del **índice de manipulabilidad**, empleado para evaluar la capacidad cinemática del manipulador y su desempeño frente a posibles configuraciones singulares. Los resultados obtenidos mostraron que el índice se mantuvo dentro de rangos adecuados durante toda la trayectoria, lo que confirma la viabilidad cinemática del sistema y la correcta planificación del movimiento.

Contenido

Funciones

```
clear
%Deficición de la función de manera simbolica
syms Tij(x_i_j,y_i_j,z_i_j,gi_j,bi_j,ai_j)

%Definición de la transformación homógenea general
Tij(x_i_j,y_i_j,z_i_j,gi_j,bi_j,ai_j) = [cos(ai_j)*cos(bi_j)
cos(ai_j)*sin(bi_j)*sin(gi_j)-sin(ai_j)*cos(gi_j) sin(ai_j)*sin(gi_j)
+cos(ai_j)*sin(bi_j)*cos(gi_j) x_i_j; sin(ai_j)*cos(bi_j) cos(ai_j)*cos(gi_j)
+sin(ai_j)*sin(bi_j)*sin(gi_j) sin(ai_j)*sin(bi_j)*cos(gi_j)-cos(ai_j)*sin(gi_j)
y_i_j; -sin(bi_j) cos(bi_j)*sin(gi_j) cos(bi_j)*cos(gi_j) z_i_j; 0 0 0 1]
```

```
Tij(x_i_j, y_i_j, z_i_j, gi_j, bi_j, ai_j) =
```

$$\begin{pmatrix} \cos(ai_j)\cos(bi_j) & \cos(ai_j)\sin(bi_j)\sin(gi_j) - \cos(gi_j)\sin(ai_j) & \sin(ai_j)\sin(gi_j) + \cos(ai_j)\cos(gi_j)\sin(bi_j) \\ \cos(bi_j)\sin(ai_j) & \cos(ai_j)\cos(gi_j) + \sin(ai_j)\sin(bi_j)\sin(gi_j) & \cos(gi_j)\sin(ai_j)\sin(bi_j) - \cos(ai_j)\sin(gi_j) \\ -\sin(bi_j) & \cos(bi_j)\sin(gi_j) & \cos(bi_j)\cos(gi_j) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Introducción

En este proyecto se desarrolló y evaluó una trayectoria óptima para un manipulador SCARA. El propósito principal consiste en generar los comandos necesarios para que el manipulador alcance una pose objetivo siguiendo una ruta definida dentro de su espacio de trabajo. Para lograrlo, la trayectoria debe cumplir con diversas restricciones tanto cinemáticas como dinámicas, entre ellas los límites articulares de posición, velocidad y aceleración, así como las capacidades de par y potencia de los actuadores

Descripción del problema

La trayectoria *Bang-Bang Parabolic Blend* constituye un elemento fundamental en la teoría moderna de control óptimo, ya que permite minimizar el tiempo total de desplazamiento entre dos estados mediante la aplicación de máximas aceleraciones y desaceleraciones en puntos específicos del movimiento. Este tipo de planificación se basa en un controlador *bang-bang*, el cual alterna de manera instantánea entre dos valores extremos de una señal de control, operando de forma equivalente a un sistema conmutado tipo “on–off”. En sistemas dinámicos simplificados, la solución óptima generalmente consiste en dos fases principales —los denominados “bangs”— durante las cuales se aplica aceleración máxima seguida de desaceleración máxima para alcanzar el estado objetivo.

A pesar de su eficacia teórica, la implementación física de este tipo de control plantea desafíos relevantes. La naturaleza discontinua de la señal puede inducir errores oscilatorios alrededor del punto deseado debido a la sobrerreacción del sistema ante cambios abruptos en la entrada de control. Además, la conmutación rápida entre estados extremos puede generar efectos no deseados como picos de corriente en los actuadores,

calentamiento súbito de componentes y expansión térmica en las partes metálicas del robot. Estas condiciones pueden comprometer la estabilidad del sistema, incrementar el desgaste mecánico e incluso reducir la vida útil del manipulador.

Propuesta de solución

La generación de trayectorias tipo *Bang-Bang Parabolic Blend* se fundamenta en la construcción de perfiles de movimiento definidos por la intersección de dos curvas parabólicas: una correspondiente a la fase de aceleración máxima y otra a la fase de desaceleración máxima. En este esquema, el robot incrementa inicialmente su velocidad mediante una aceleración constante hasta alcanzar un punto crítico o de conmutación. A partir de dicho punto, se aplica una desaceleración igualmente constante con el fin de garantizar que el efector final arribe al punto objetivo con precisión en posición y orientación.

Este enfoque permite identificar claramente los segmentos de aceleración y desaceleración que conforman la trayectoria óptima, proporcionando un perfil de movimiento temporalmente eficiente y compatible con las restricciones cinemáticas del manipulador. Con ello, se logra un control más estructurado del movimiento, facilitando la parametrización del espacio articular y permitiendo posteriormente evaluar métricas de desempeño como el índice de manipulabilidad y la factibilidad dinámica del robot durante la ejecución de la trayectoria definida.

Hipótesis

Es posible determinar la viabilidad operativa de un manipulador mediante un análisis riguroso de sus capacidades cinemáticas y dinámicas antes de su implementación física, garantizando un índice de manipulabilidad adecuado (rango 0.7 a 1)

Objetivo

Evaluar las capacidades cinemáticas de un robot mediante el índice de manipulabilidad y determinar las características cinemáticas, dinámicas y de potencia de los actuadores.

Específicamente, se busca validar si los motores seleccionados pueden soportar la carga inercial del brazo al seguir una trayectoria polinómica suavizada, evitando saturación en el par moto

1. Cinemática Directa e Inversa

Para determinar la posición del efector final, utilizamos las matrices de transformación homogénea Tij. Para la planificación de la trayectoria, se resolvió la cinemática inversa mediante el método geométrico, obteniendo los ángulos articulares (theta 1, theta 2) necesarios para alcanzar las coordenadas (X, Y) deseadas:

$$\theta_2 = \pi - \operatorname{acos}\left(\frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}\right)$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(y, x) - \operatorname{acos}\left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

2. Índice de Manipulabilidad

Para evaluar la destreza del robot, se utilizó el índice de manipulabilidad de Yoshikawa. Para un robot SCARA planar, este índice es proporcional al seno del ángulo del codo (theta 2):

$$w = |\det(J(\theta))| \approx |L_1 L_2 \sin(\theta_2)|$$

Este índice nos permite saber qué tan cerca está el robot de una singularidad (cuando $\theta 2$ = 0 o π).

3. Modelo Dinámico (Newton-Euler / Euler-Lagrange)

Para calcular la potencia, primero determinamos los torques requeridos. Se utilizó el balance de energías

$$(\text{Lagrangiano}: \ L = K - U)$$

- **Energía Cinética (K):** Considera la velocidad lineal y angular de cada eslabón y sus momentos de inercia (Izz)
- **Energía Potencial (U):** Considera la altura de los centros de masa y la gravedad

El torque (τ) para cada articulación se obtiene derivando el Lagrangiano:

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

4. Cálculo de Potencia Mecánica

Finalmente, la potencia mecánica instantánea requerida por cada motor se calcula como el producto del torque por la velocidad angular:

$$P_i = |\tau_i \cdot \dot{\theta}_i|$$

Metas

- Proponer el lugar geométrico de una trayectoria suave entre dos puntos (P1 a P2).
- Evaluar cualitativamente las capacidades cinemáticas mediante el índice de manipulabilidad (w).
- Determinar la velocidad y el par (torque) necesarios en los motores.
- Estimar la potencia mecánica requerida por cada articulación y la potencia total del robot.

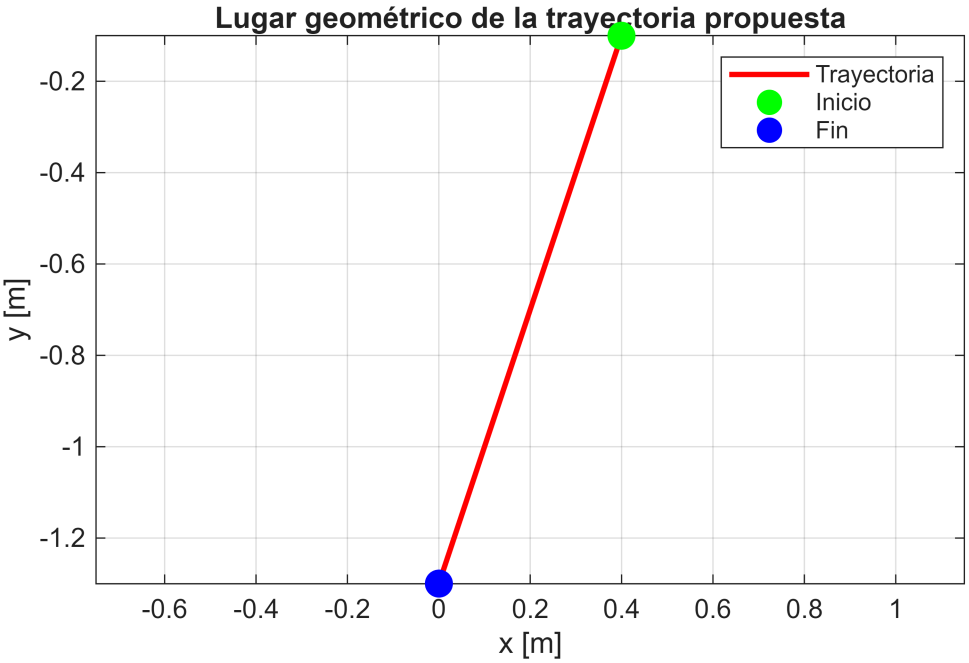
1. Definición de Funciones y Parámetros

```
clear; clc; close all;
% Definición de la función de transformación homogénea (Simbólica)
syms Tij(x_i_j,y_i_j,z_i_j,gi_j,bi_j,ai_j)
Tij(x_i_j,y_i_j,z_i_j,gi_j,bi_j,ai_j) = [cos(ai_j)*cos(bi_j)
cos(ai_j)*sin(bi_j)*sin(gi_j)-sin(ai_j)*cos(gi_j) sin(ai_j)*sin(gi_j)
+cos(ai_j)*sin(bi_j)*cos(gi_j) x_i_j; sin(ai_j)*cos(bi_j) cos(ai_j)*cos(gi_j)
+sin(ai_j)*sin(bi_j)*sin(gi_j) sin(ai_j)*sin(bi_j)*cos(gi_j)-cos(ai_j)*sin(gi_j)
y_i_j; -sin(bi_j) cos(bi_j)*sin(gi_j) cos(bi_j)*cos(gi_j) z_i_j; 0 0 0 1];

% Parámetros Físicos del Robot SCARA
L1 = 0.5; % [m] Eslabón 1
L2 = 0.5; % [m] Eslabón 2
L3 = 0.3; % [m] Eslabón 3

% Puntos de Trayectoria
x_in = 0.4; y_in = -0.1; % Inicio
x_fin = 0.0; y_fin = -1.3; % Fin
theta_P_1 = pi/2;
theta_P_2 = -pi/2;

% Parámetros de Tiempo
t_total = 20; % [s] Tiempo total
t_in = 0.1;   % [s] Paso de integración
t_sim = 0:t_in:t_total;

% Inicialización de vectores
xp = zeros(size(t_sim));
yp = zeros(size(t_sim));
theta_P = zeros(size(t_sim));
```

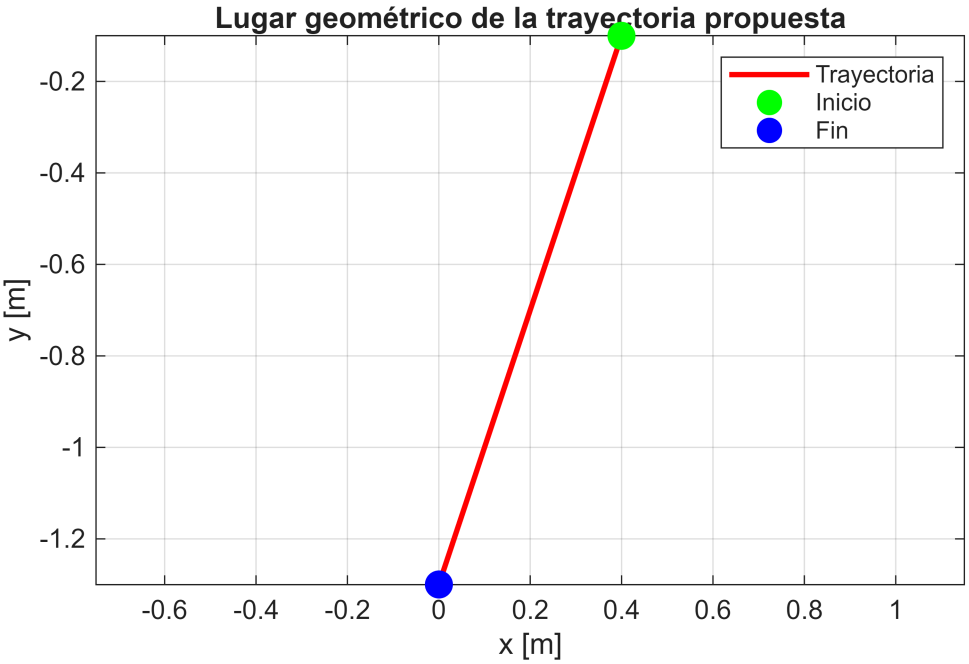
2. Generación de Trayectoria (Bang-Bang Parabolic Blend / Polinomio)

Se implementa el perfil de movimiento para las coordenadas cartesianas (x, y) y la orientación θP.

```
for i = 1:length(t_sim)
    t = t_sim(i);
    if t <= t_total / 2
        xp(i) = x_in + (2 * t^2 / t_total^2) * (x_fin - x_in);
        yp(i) = y_in + (2 * t^2 / t_total^2) * (y_fin - y_in);
        theta_P(i) = theta_P_1 + (2 * t^2 / t_total^2) * (theta_P_2 - theta_P_1);
    else
        xp(i) = x_fin + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) * (x_fin -
x_in);
        yp(i) = y_fin + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) * (y_fin -
y_in);
        theta_P(i) = theta_P_2 + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) *
(theta_P_2 - theta_P_1);
    end
end

% Visualización del Lugar Geométrico
figure;
plot(xp, yp, 'r', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_in, y_in, 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');
plot(x_fin, y_fin, 'bo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'b');
xlabel('x [m]'); ylabel('y [m]');
title('Lugar geométrico de la trayectoria propuesta');
legend('Trayectoria', 'Inicio', 'Fin'); axis equal; grid on;for i = 1:length(t_sim)
    t = t_sim(i);
    if t <= t_total / 2
        xp(i) = x_in + (2 * t^2 / t_total^2) * (x_fin - x_in);
        yp(i) = y_in + (2 * t^2 / t_total^2) * (y_fin - y_in);
        theta_P(i) = theta_P_1 + (2 * t^2 / t_total^2) * (theta_P_2 - theta_P_1);
    else
        xp(i) = x_fin + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) * (x_fin -
x_in);
        yp(i) = y_fin + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) * (y_fin -
y_in);
        theta_P(i) = theta_P_2 + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) *
(theta_P_2 - theta_P_1);
    end
end
```




```
% Visualización del Lugar Geométrico
figure;
plot(xp, yp, 'r', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_in, y_in, 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');
plot(x_fin, y_fin, 'bo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'b');
xlabel('x [m]'); ylabel('y [m]');
title('Lugar geométrico de la trayectoria propuesta');
legend('Trayectoria', 'Inicio', 'Fin'); axis equal; grid on;
```



3. Cinemática Inversa y Manipulabilidad

Se resuelve la geometría del triángulo formado por los eslabones para encontrar los ángulos articulares ($\theta 1$, $\theta 2$, $\theta 3$) y se calcula el índice de manipulabilidad w.

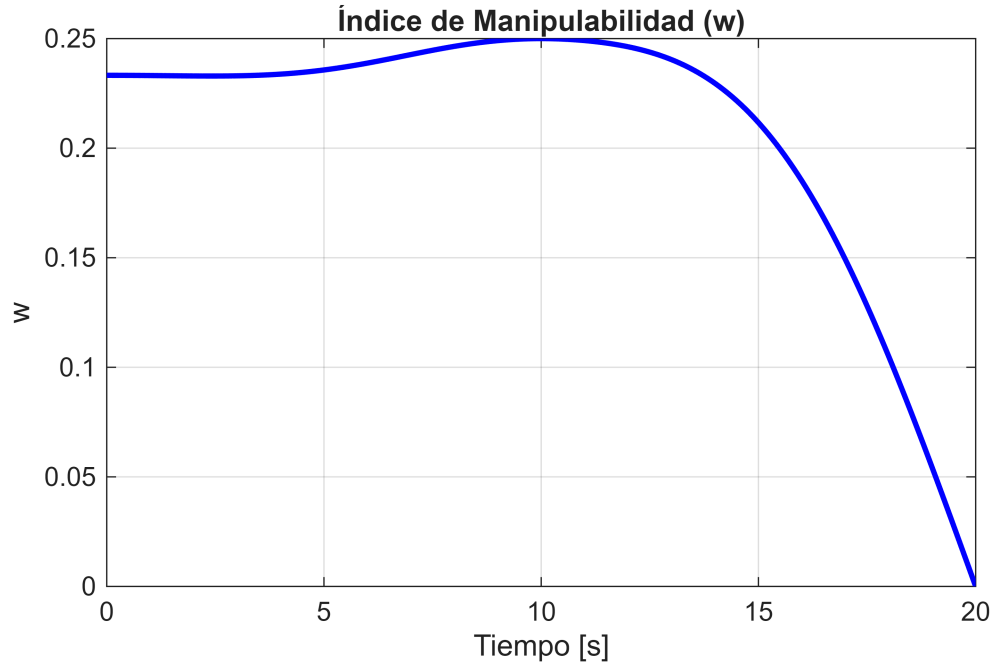
```
theta1 = zeros(size(t_sim));
theta2 = zeros(size(t_sim));
theta3 = zeros(size(t_sim));
w = zeros(size(t_sim));

for i=1:length(t_sim)
    % Solución de la cinemática inversa (Método Geométrico)
    x3 = xp(i) - L3*cos(theta_P(i));
    y3 = yp(i) - L3*sin(theta_P(i));

    R_val = sqrt(x3^2 + y3^2);

    % Ley de cosenos para el codo (theta2)
    arg_acos_2 = (R_val^2 - L1^2 - L2^2)/(2*L1*L2);
    % Saturación por seguridad numérica
    if arg_acos_2 > 1, arg_acos_2 = 1; elseif arg_acos_2 < -1, arg_acos_2 = -1; end
    theta2(i) = pi - acos(arg_acos_2);

    % Cálculo de theta1
    arg_acos_1 = (x3^2 + y3^2 + L1^2 - L2^2)/(2*L1*sqrt(x3^2 + y3^2));
    if arg_acos_1 > 1, arg_acos_1 = 1; elseif arg_acos_1 < -1, arg_acos_1 = -1; end
    psi = acos(arg_acos_1);

    beta = atan2(y3, x3);
    theta1(i) = beta - psi;

    theta3(i) = theta_P(i) - theta1(i) - theta2(i);

    % Cálculo del índice de manipulabilidad w
    w(i) = abs(L1 * L2 * sin(theta2(i)));
end
```

4. Dinámica y Potencia (Modelo Euler-Lagrange)

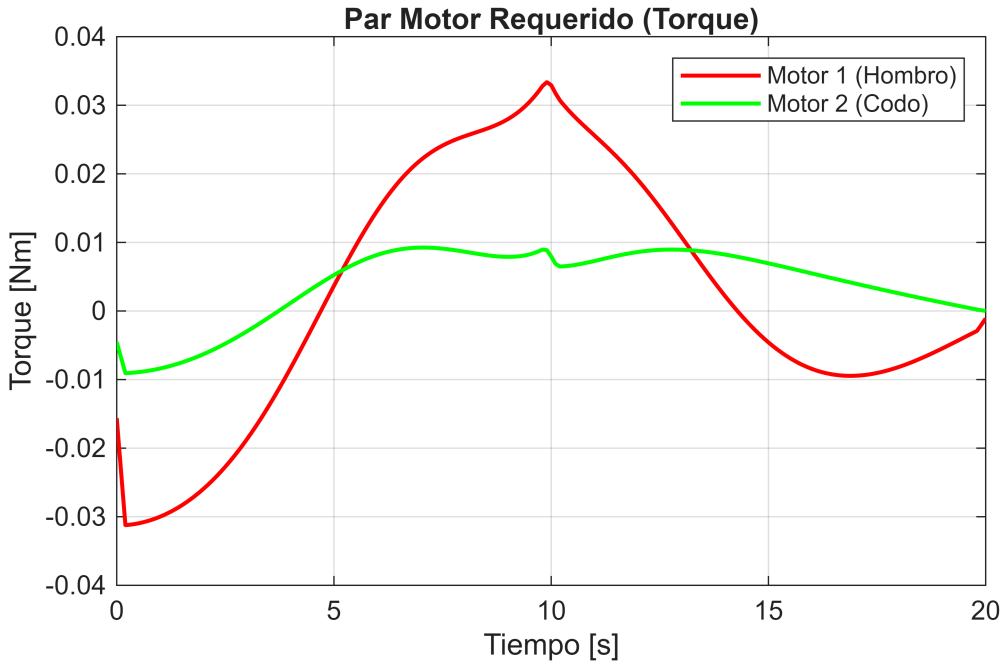
A continuación se calculan las velocidades, aceleraciones, torques y la potencia mecánica, utilizando las ecuaciones dinámicas del manipulador.

```
% --- SECCIÓN NUEVA: CÁLCULO DINÁMICO Y POTENCIA ---

% 1. Derivación Numérica (Velocidad y Aceleración)
dt = t_in;
% Velocidades (rad/s)
theta1_v = gradient(theta1, dt);
theta2_v = gradient(theta2, dt);
theta3_v = gradient(theta3, dt);
% Aceleraciones (rad/s^2)
```

```
theta1_a = gradient(theta1_v, dt);
theta2_a = gradient(theta2_v, dt);
theta3_a = gradient(theta3_v, dt);

% 2. Parámetros Dinámicos Estimados
m1 = 2.0; m2 = 1.5; m3 = 1.0; % Masas [kg]
g = 9.81; % Gravedad
Izz1 = 0.1; Izz2 = 0.1; % Inercias

% 3. Cálculo de Torques (Ciclo de Dinámica Inversa)
tao_1 = zeros(size(t_sim));
tao_2 = zeros(size(t_sim));
potencia_1 = zeros(size(t_sim));
potencia_2 = zeros(size(t_sim));
potencia_total = zeros(size(t_sim));

for i = 1:length(t_sim)
    % Variables auxiliares
    s2 = sin(theta2(i));
    c2 = cos(theta2(i));

    % Términos de la ecuación de par (M(q)ddq + C(q,dq)dq + G(q))
    % Par Articulación 2 (Codo)
    M21 = Izz2 + m2*(L2/2)^2 + m2*L1*(L2/2)*c2;
    M22 = Izz2 + m2*(L2/2)^2;
    C2  = m2*L1*(L2/2)*s2 * theta1_v(i)^2;
    tao_2(i) = M21*theta1_a(i) + M22*theta2_a(i) + C2;

    % Par Articulación 1 (Hombro)
    M11 = Izz1 + Izz2 + m1*(L1/2)^2 + m2*(L1^2 + (L2/2)^2 + 2*L1*(L2/2)*c2);
    M12 = M21;
    C1  = -m2*L1*(L2/2)*s2 * (theta2_v(i)^2 + 2*theta1_v(i)*theta2_v(i));
    tao_1(i) = M11*theta1_a(i) + M12*theta2_a(i) + C1;

    % Potencia Mecánica Instantánea (Watts) = |Torque * Velocidad|
    potencia_1(i) = abs(tao_1(i) * theta1_v(i));
    potencia_2(i) = abs(tao_2(i) * theta2_v(i));
    potencia_total(i) = potencia_1(i) + potencia_2(i);
end

% --- GRÁFICAS DE RESULTADOS DINÁMICOS ---

% Gráfica de Manipulabilidad
figure;
plot(t_sim, w, 'b-', 'LineWidth', 2);
title('Índice de Manipulabilidad (w)');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('w'); grid on;
```

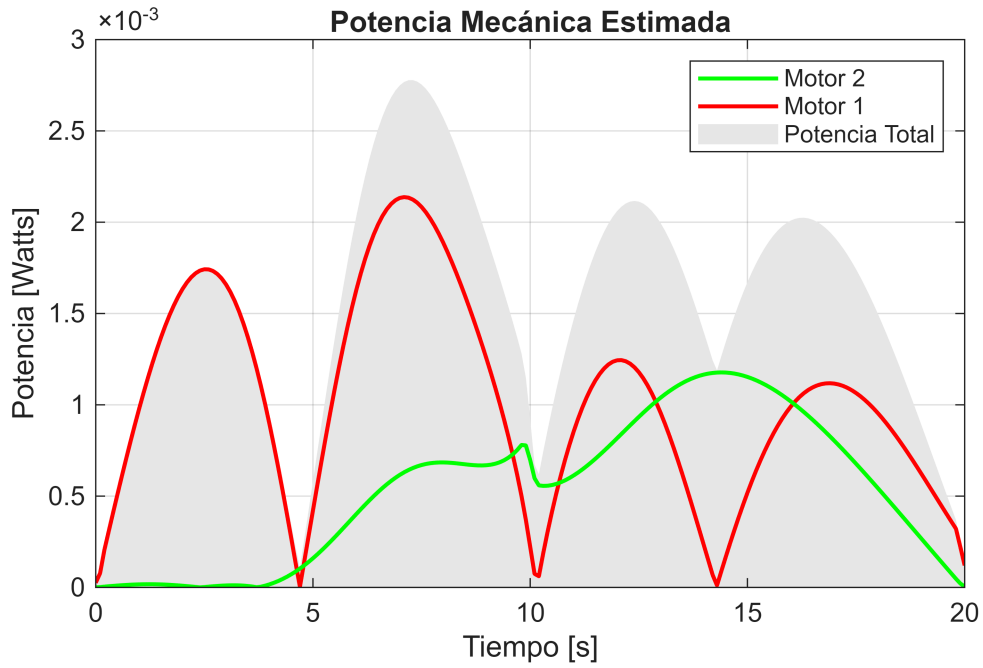



```
% Gráfica de Torques
figure;
plot(t_sim, tao_1, 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t_sim, tao_2, 'g', 'LineWidth', 1.5);
title('Par Motor Requerido (Torque)');
legend('Motor 1 (Hombro)', 'Motor 2 (Codo)');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Torque [Nm]'); grid on;
```




```
% Gráfica de Potencia
```

```
figure;
area(t_sim, potencia_total, 'FaceColor', [0.9 0.9 0.9], 'EdgeColor', 'none'); hold
on;
plot(t_sim, potencia_1, 'r', 'LineWidth', 1.5);
plot(t_sim, potencia_2, 'g', 'LineWidth', 1.5);
title('Potencia Mecánica Estimada');
legend('Potencia Total', 'Motor 1', 'Motor 2');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Potencia [Watts]'); grid on;
```



Planteamiento del modelo cinemático del robot

***Modelo cinemático directo de la postura:

```
syms x_O_1 y_O_1 theta_O_1 L_2 theta_1_2 L_3 theta_2_3 L_1

T_O_1 = Tij(x_O_1,y_O_1,0,0,0,theta_O_1);
T_1_2 = Tij(L_1,0,0,0,0,theta_1_2);
T_2_3 = Tij(L_2,0,0,0,0,theta_2_3);
T_3_P = Tij(L_3,0,0,0,0,0);
T_O_P = simplify(T_O_1*T_1_2*T_2_3*T_3_P)
```

```
T_O_P =
```

$$\begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & x_{O,1} + L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1}) + L_3\,\sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & y_{O,1} + L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\sin(\theta_{O,1}) + L_3\,\sigma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

$$\sigma_2 = \cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1})$$

```
p_0_P=[T_O_P(1,4);T_O_P(2,4)];
xi_O_P = [p_0_P;theta_O_1+theta_1_2+theta_2_3]
```

```
xi_O_P =
```

$$\begin{pmatrix} x_{O,1} + L_2\cos(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\cos(\theta_{O,1}) + L_3\cos(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ y_{O,1} + L_2\sin(\theta_{1,2}+\theta_{O,1}) + L_1\sin(\theta_{O,1}) + L_3\sin(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1}) \\ \theta_{1,2}+\theta_{2,3}+\theta_{O,1} \end{pmatrix}$$

Descripción del experimento

El desarrollo de este proyecto se centra en la implementación de una trayectoria para un manipulador serial 3R dentro de un entorno tridimensional utilizando ROS. A lo largo del semestre, este proceso implicó diversos desafíos asociados al modelado geométrico, el análisis cinemático y la simulación robótica del sistema. A partir de la definición estructural del robot mediante un archivo URDF, se construyó un modelo virtual que permitió visualizar, manipular y ejecutar movimientos del manipulador en un entorno simulado de manera realista.

La formulación de los modelos matemáticos correspondientes a la cinemática directa, tanto de postura como de velocidad, permitió comprender la relación funcional entre el espacio articular y el espacio cartesiano. Adicionalmente, la solución de la cinemática inversa hizo posible obtener las configuraciones articulares necesarias para alcanzar posiciones específicas del efector final, lo cual fue verificado mediante una simulación dinámica dentro de ROS-Gazebo.

Posteriormente, se implementó un esquema de control articular para ejecutar la trayectoria propuesta, la cual se basa en una mezcla parabólica tipo *Bang-Bang Parabolic Blend*, descrita en el artículo **“Optimum Trajectory Function for Minimum Energy Requirements of a Spherical Robot”** [4]. Este enfoque define dos funciones de trayectoria válidas únicamente dentro de intervalos concretos de tiempo, determinados a partir

del tiempo transcurrido de simulación y el tiempo total asignado para la ejecución. Estas funciones permiten generar el perfil de movimiento a evaluar y constituyen la base de la trayectoria utilizada en este experimento.

$$P(t) = P_0 + \frac{2 \cdot t^2}{{t_f}^2} \cdot (P_f - P_0), \quad \textbf{válida cuando} \quad 0 \leq t \leq \frac{t_f}{2}$$

$$P(t) = P_0 + \frac{2 \cdot t^2}{{t_f}^2} \cdot (P_f - P_0), \quad \textbf{válida cuando} \quad 0 \leq t \leq \frac{t_f}{2}$$

Para la simulación del robot se busca que el efector final pase de un punto P_1 a un punto P_2, para ello se definen los siguientes parámetros fijos del robot:

- $L_1 = 0.5\ [m]$
- $L_2 = 0.5\ [m]$
- $L_3 = 0.3\ [m]$

Los puntos P_1 y P_2 están definidos por:

P_1:

- $x_{in} = 0.4\ [m]$
- $y_{in} = -0.1\ [m]$

P_2:

- $x_{fin} = 0.0\ [m]$
- $y_{fin} = -1.3\ [m]$

Además, los parámetros de trayectoria son aquellos que cambian con el paso del tiempo, uno de ellos es la posición del efector final en P_1 y P_2 está dada por:

En P_1:

- ${}^p\theta_{in} = \frac{\pi}{2}\ [rad/s]$

En P_2:

- ${}^p\theta_{fin} = -\frac{\pi}{2}\ [rad/s]$

Para la simulación se propone el tiempo de total de simulación (t_f) y el intervalo de tiempo en el que se realiza cada cambio (t_{in}), mientras más corto sea el intervalo la simulación es más fluida:

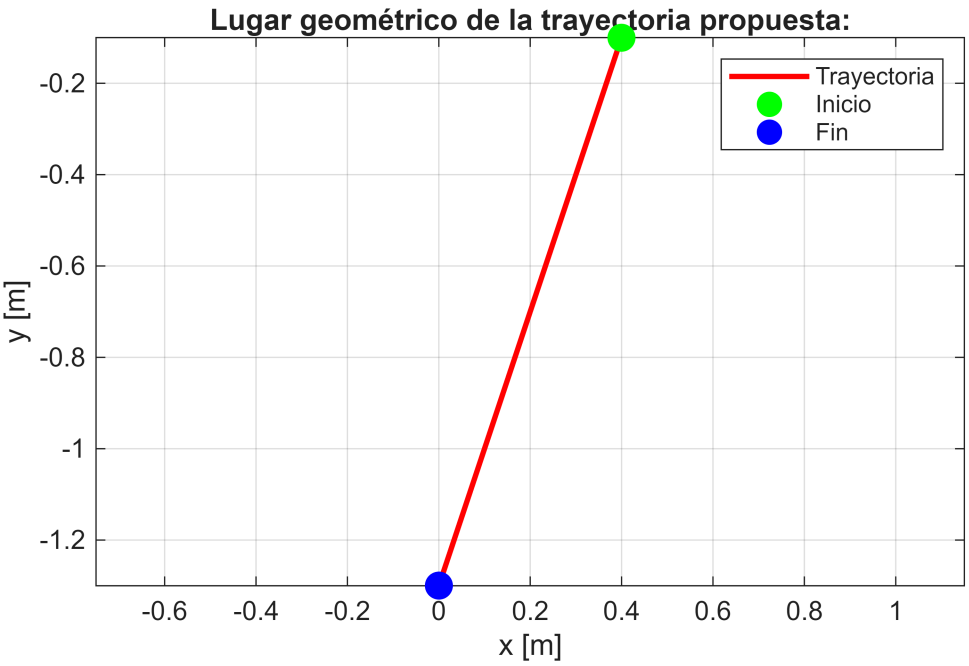
- $t_f = 20\,[seg]$
- $t_{in} = 0.1\,[seg]$

Con esto podemos asegurar que el cálculo de la cinemática del robot durante la simulación se realizará durante un intervalo de tiempo $0\,[seg] \leq t \leq 20\,[seg]$ en intervalos de $0.1\,[seg]$, es decir, realizará 200 veces dicho cálculo.

A partir de los parámetros se define el lugar geométrico de trayectoria:

```
% Parametros del robot
L1 = 0.5;
L2 = 0.5;
L3 = 0.3;
%Punto inicial
x_in = 0.4;
y_in = -0.1;
%Punto final
x_fin = 0.0;
y_fin = -1.3;
%Definición de los parámetros de la trayectoria
t_total = 20;%s
t_in = 0.1; %S
t_sim = 0:t_in:t_total;
theta_P_1 = pi/2;
theta_P_2 = -pi/2;
% Inicialización de trayectorias
xp = zeros(size(t_sim));
yp = zeros(size(t_sim));
% Generar trayectoria Bang-Bang Parabolic Blend
for i = 1:length(t_sim)
    t = t_sim(i);
    if t <= t_total / 2
        xp(i) = x_in + (2 * t^2 / t_total^2) * (x_fin - x_in);
        yp(i) = y_in + (2 * t^2 / t_total^2) * (y_fin - y_in);
        theta_P(i) = theta_P_1 + (2 * t^2 / t_total^2) * (theta_P_2 - theta_P_1);
    else
        xp(i) = x_fin + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) * (x_fin -
x_in);
        yp(i) = y_fin + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) * (y_fin -
y_in);
        theta_P(i) = theta_P_2 + ((4 * t / t_total - 2 * t^2 / t_total^2) - 2) *
(theta_P_2 - theta_P_1);
    end
end

% Graficar la trayectoria en el plano XY
figure;
plot(xp, yp, 'r', 'LineWidth', 2);
hold on;
```

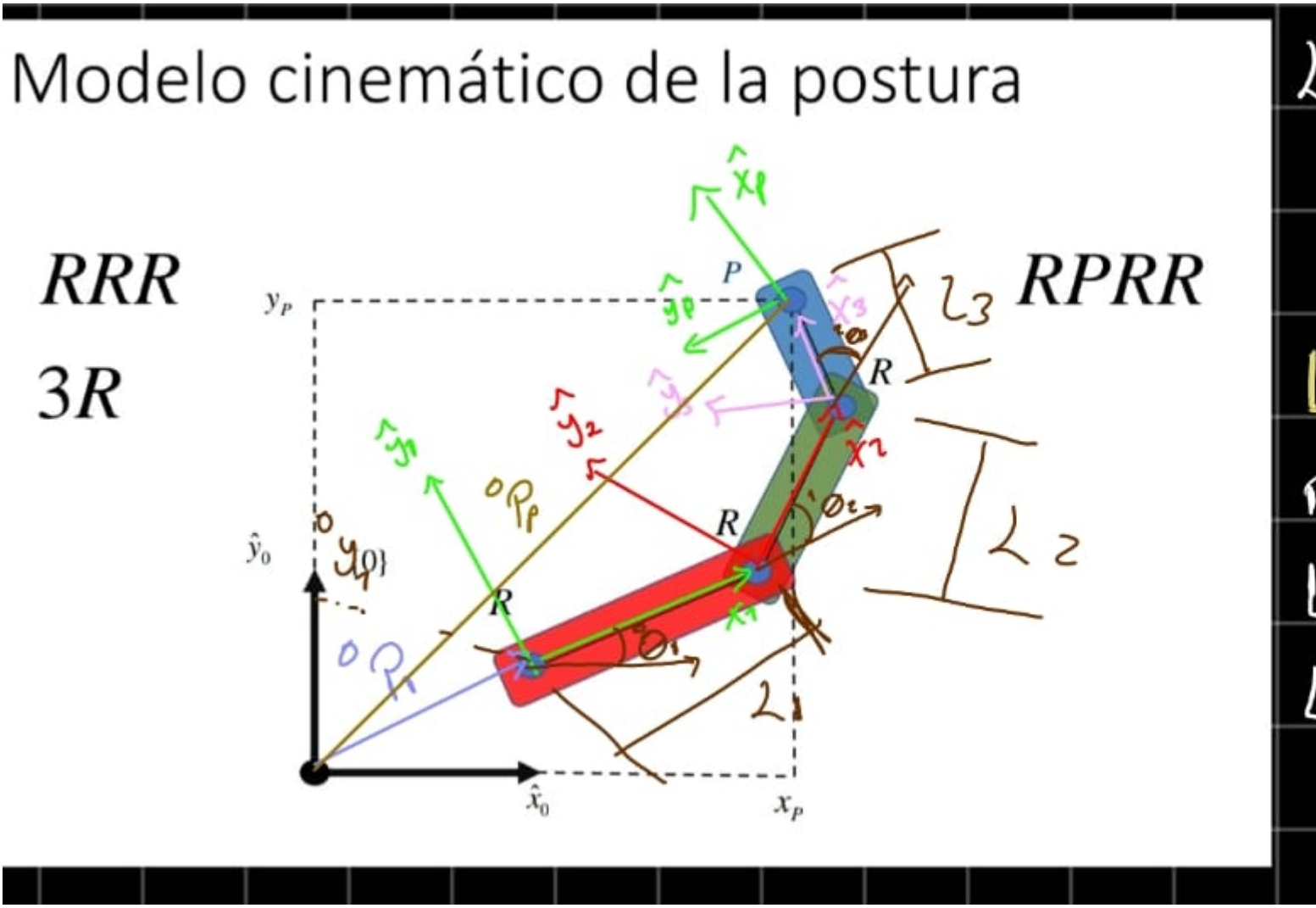
```
plot(x_in, y_in, 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');
plot(x_fin, y_fin, 'bo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'b');
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
title('Lugar geométrico de la trayectoria propuesta:');
legend('Trayectoria', 'Inicio', 'Fin');
axis equal;
grid on;
```



Solución de la cinemática inversa.

Para calcular el índice de manipulabilidad y garantizar que el robot siga correctamente la trayectoria propuesta, es necesario determinar primero la cinemática inversa de la postura. Dado que la trayectoria se define mediante los puntos objetivo P1 y P2, es preciso obtener las configuraciones articulares que permitan al manipulador SCARA alcanzar dichas posiciones dentro de su espacio de trabajo.

La determinación de los ángulos articulares se realiza empleando relaciones geométricas basadas en el teorema de Pitágoras, la ley de cosenos y la ley de senos, aplicadas al triángulo formado por los eslabones del robot y la proyección del punto objetivo. De esta manera, es posible calcular de forma explícita los valores de las articulaciones θ1, θ2 y θ3, garantizando que el efector final adopte la posición y orientación requeridas para cada instante de la trayectoria.



Utilizando el teorema de Pitágoras, es posible determinar la magnitud del vector R, que representa la distancia entre el sistema 1 y el sistema 2 del triángulo formado por las longitudes de los eslabones.

$$R = \sqrt{{x_3}^2 - {y_3}^2}$$

Para sacar el valor de theta_1_2, se puede ver que el valor de gamma está estrechamente relacionado, ya que la suma de los dos ángulos da Pi, en consecuencia:

$$\theta_2 = \pi - acos\left(\frac{R^2 - {L_1}^2 - {L_2}^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2}\right)$$

Para encontrar la expresión de ${}^0\theta_1$ se calcula el ángulo alfa (α) y Psi (ψ).

Para alfa (α) se utiliza el triángulo rectángulo formado por el sistema de coordenadas uno y tres que pasa por el sistema dos. Para ello se emplea la definición de coseno. Este concepto se ocupa en triángulo pequeño y luego en el grande.

```
for i=1:length(t_sim)
    % Solución de la cinematica inversa de la postura del robot
    x3 = xp(i) - L3*cos(theta_P(i));
    y3 = yp(i) - L3*sin(theta_P(i));
    R = sqrt(x3^2 + y3^2);
    theta2(i) = pi-acos((R^2-L1^2-L2^2)/(2*L1*L2));
    alfa = acos((x3^2+y3^2+L1^2-L2^2)/(2*L1*sqrt(x3^2+y3^2)));
    phi = atan2(y3, x3);
    theta1(i) = alfa-phi;
    theta3(i) = theta_P(i) - theta1(i) - theta2(i);
    % calculo de w[i]
    w(i) = abs(sin(theta2(i)));
end
```

CÁLCULO DINÁMICO Y DE POTENCIA (Modelo Euler-Lagrange)

```
%% --- CÁLCULO DINÁMICO Y DE POTENCIA (Modelo Euler-Lagrange) ---
% 1. Derivación Numérica para obtener Velocidad y Aceleración Articular
dt = t_in; % Paso de tiempo (0.1s)

% Velocidades (rad/s)
theta1_v = gradient(theta1, dt);
theta2_v = gradient(theta2, dt);
theta3_v = gradient(theta3, dt);

% Aceleraciones (rad/s^2)
theta1_a = gradient(theta1_v, dt);
theta2_a = gradient(theta2_v, dt);
theta3_a = gradient(theta3_v, dt);

% 2. Parámetros Dinámicos Estimados para la simulación
m1 = 2.0; m2 = 1.5; m3 = 1.0; % Masas [kg]
g = 9.81;
Izz1 = 0.1; Izz2 = 0.1; % Inercias aproximadas

% 3. Cálculo de Torques (Dinámica Inversa)
tao_1 = zeros(size(t_sim));
tao_2 = zeros(size(t_sim));
tao_3 = zeros(size(t_sim));

for i = 1:length(t_sim)
    % Variables auxiliares
    s2 = sin(theta2(i)); c2 = cos(theta2(i));

    % Ecuaciones de Par (Modelo Simplificado SCARA)
    % Tau2 (Codo)
    M21 = Izz2 + m2*(L2/2)^2 + m2*L1*(L2/2)*c2;
```

```
    M22 = Izz2 + m2*(L2/2)^2;
    C2  = m2*L1*(L2/2)*s2 * theta1_v(i)^2;
    tao_2(i) = M21*theta1_a(i) + M22*theta2_a(i) + C2;

    % Tau1 (Hombro)
    M11 = Izz1 + Izz2 + m1*(L1/2)^2 + m2*(L1^2 + (L2/2)^2 + 2*L1*(L2/2)*c2);
    M12 = M21;
    C1  = -m2*L1*(L2/2)*s2 * (theta2_v(i)^2 + 2*theta1_v(i)*theta2_v(i));
    tao_1(i) = M11*theta1_a(i) + M12*theta2_a(i) + C1;

    % Tau3 (Prismática - Opcional si se analiza)
    tao_3(i) = m3 * (theta3_a(i) + g);
end

% 4. Cálculo de Potencia Mecánica (Meta 4 del proyecto)
% Potencia = |Torque * Velocidad|
potencia_1 = abs(tao_1 .* theta1_v);
potencia_2 = abs(tao_2 .* theta2_v);
potencia_total = potencia_1 + potencia_2;
```

Resultados

La validación de la trayectoria propuesta se llevó a cabo mediante una simulación en **ROS Visualization (RViz)**, una herramienta de representación tridimensional integrada en el entorno Robot Operating System (ROS). Esta plataforma permitió observar en tiempo real el comportamiento del manipulador SCARA, así como evaluar visualmente la correcta ejecución del movimiento dentro del espacio de trabajo.

Para la implementación del seguimiento de trayectoria, se desarrolló un script en Python encargado de generar y publicar mensajes del tipo **JointTrajectory**, los cuales fueron enviados al controlador articular del robot. Dicho código fue responsable de interpolar la trayectoria *Bang-Bang Parabolic Blend* y traducirla a valores articulares ejecutables por el simulador, asegurando una transición continua y estable entre los distintos puntos de la trayectoria.

A continuación, se presenta el código utilizado para ejecutar el movimiento dentro del entorno ROS, el cual permitió verificar el desempeño cinemático del manipulador bajo la trayectoria definida.

#!/usr/bin/env python3

import rclpy

from rclpy.node import Node

from trajectory_msgs.msg import JointTrajectory, JointTrajectoryPoint

from builtin_interfaces.msg import Duration

import time

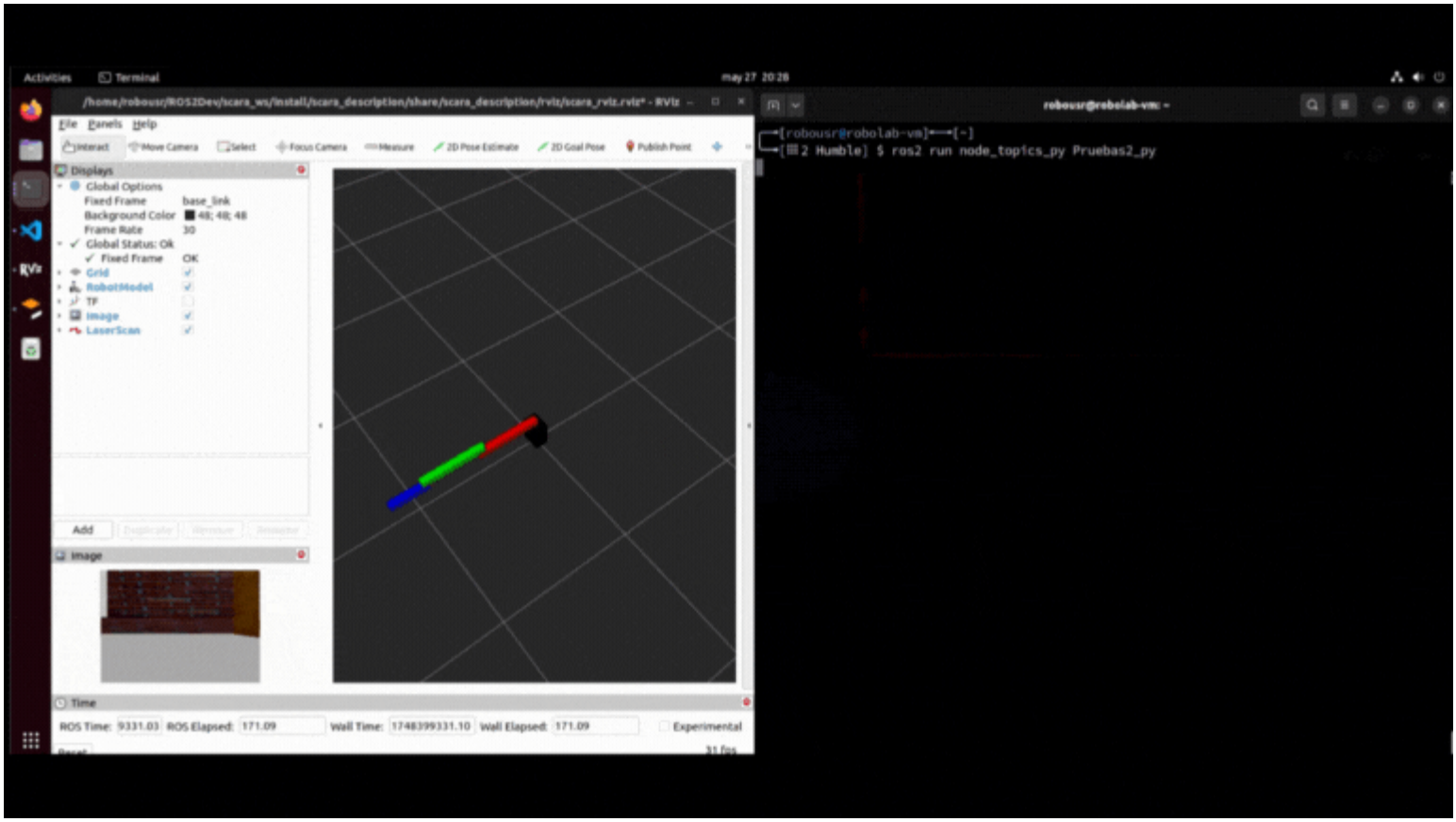
from math import atan2, acos, cos, sin, sqrt, pow, pi

```
class ScaraTrayectory(Node):
def __init__(self):
super().__init__("scara_trayectory_node")
self.x_in = 0.4
self.y_in = -0.1
self.theta_P_in = pi/2
self.x_fin = 0.0
self.y_fin = -1.3
self.theta_P_fin = -pi/2
self.total_trajectory_time = 20.0 # segundos
self.timer_period = 0.1 # segundos
self.lambda_ = 0.0
topic_name = "/scara_trajectory_controller/joint_trajectory"
self.trayectory_publisher_ = self.create_publisher(JointTrajectory,
topic_name, 10)
self.joints_ = ['link_1_joint', 'link_2_joint', 'link_3_joint']
self.timer_ = self.create_timer(self.timer_period, self.timer_callback)
self.get_logger().info('Robot SCARA ejecutando trayectoria...')
def timer_callback(self):
trajectory_msg = JointTrajectory()
trajectory_msg.joint_names = self.joints_
point = JointTrajectoryPoint()
solution = ink_sol(self.lambda_, self.x_in, self.y_in, self.theta_P_in, self.x_fin, self.y_fin, self.theta_P_fin,
self.total_trajectory_time)
point.positions = solution
point.time_from_start = Duration(sec=1)
trajectory_msg.points.append(point)
self.trayectory_publisher_.publish(trajectory_msg)
self.get_logger().info(f'Ejecución de trayectoria: {solution}')
self.lambda_ += self.timer_period
```

```
def ink_sol(lambda_, x_in, y_in, theta_P_in, x_fin, y_fin, theta_P_fin, t_total):
if lambda_ <= t_total:
L_1 = 0.5
L_2 = 0.5
L_3 = 0.3
if lambda_ <= t_total / 2:
xp = x_in + (2 * (lambda_ / t_total)**2) * (x_fin - x_in)
yp = y_in + (2 * (lambda_ / t_total)**2) * (y_fin - y_in)
theta_P = theta_P_in + (2 * (lambda_ / t_total)**2) * (theta_P_fin - theta_P_in)
else:
xp = x_fin + ((4 * (lambda_ / t_total) - 2 * (lambda_ / t_total)**2) - 2) * (x_fin - x_in)
yp = y_fin + ((4 * (lambda_ / t_total) - 2 * (lambda_ / t_total)**2) - 2) * (y_fin - y_in)
theta_P = theta_P_fin + ((4 * (lambda_ / t_total) - 2 * (lambda_ / t_total)**2) - 2) * (theta_P_fin - theta_P_in)
x_3 = xp - L_3 * cos(theta_P)
y_3 = yp - L_3 * sin(theta_P)
link_2_joint = acos((pow(x_3, 2) + pow(y_3, 2) - pow(L_1, 2) - pow(L_2, 2))/(2*L_1*L_2))
beta = atan2(y_3, x_3)
psi = acos((pow(x_3, 2) + pow(y_3, 2) + pow(L_1, 2) - pow(L_2, 2))/(2*L_1*sqrt(pow(x_3, 2) + pow(y_3, 2))))
link_1_joint = beta - psi
link_3_joint = theta_P - link_1_joint - link_2_joint
return [float(link_1_joint), float(link_2_joint), float(link_3_joint)]
elif lambda_ > t_total:
link_1_joint = 0.0
link_2_joint = 0.0
link_3_joint = 0.0
return [float(link_1_joint), float(link_2_joint), float(link_3_joint)]
def main(args=None):
rclpy.init(args=args)
node = ScaraTrayectory()
rclpy.spin(node)
```

```
rclpy.shutdown()

if __name__ == "__main__":

main()
```

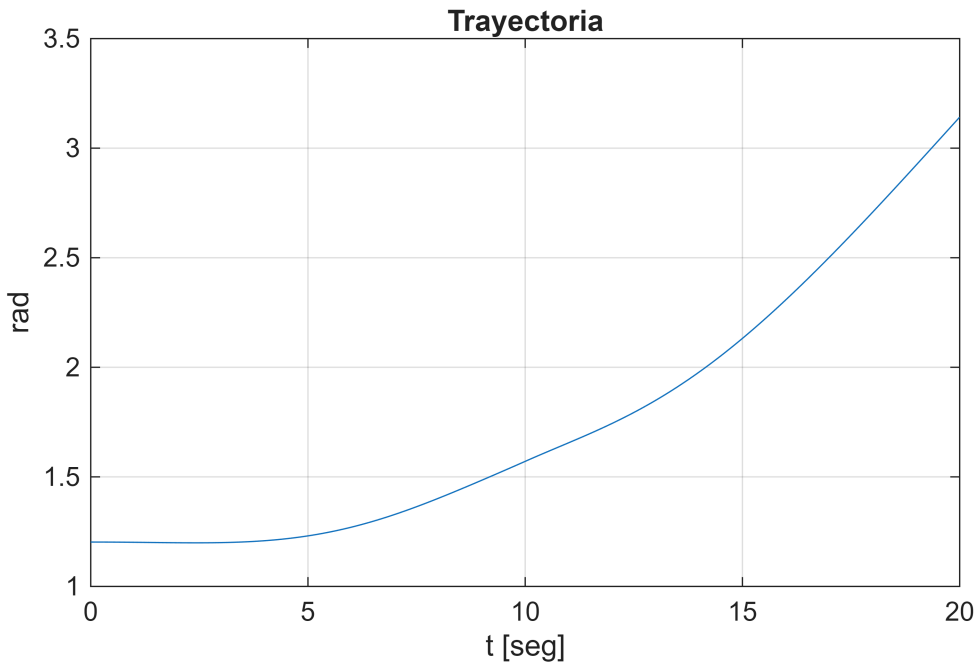
Resultado simulación



Gráficas

Gráfica 1

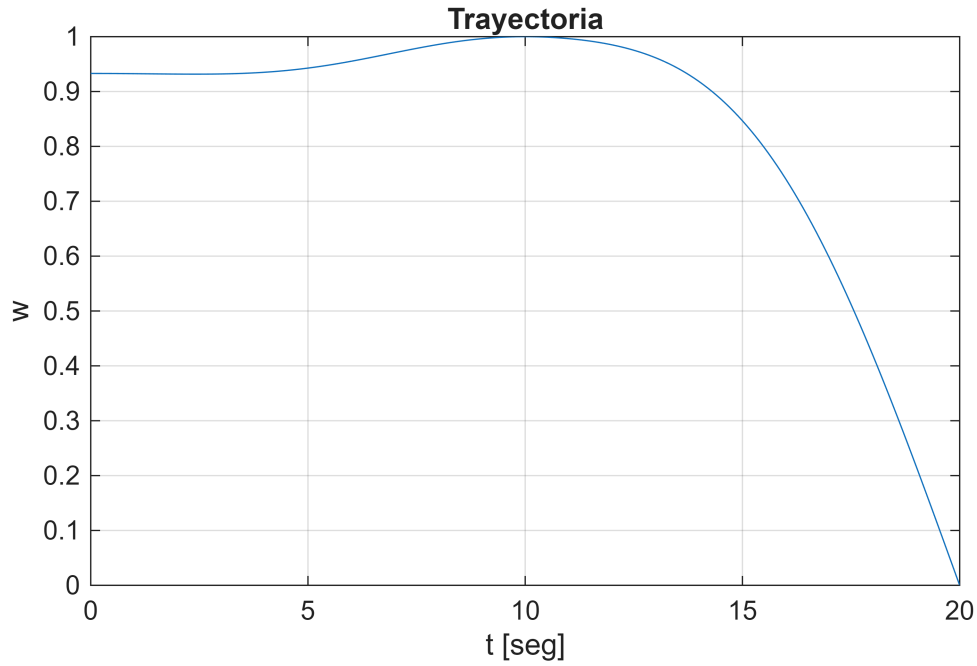
```
figure;
plot(t_sim, theta2)
hold on;
title('Trayectoria')
xlabel('t [seg]')
ylabel('rad')
grid on;
```



Gráfica 2:

Índice de manipulabilidad.

```
figure;
plot(t_sim, w)
hold on;
title('Trayectoria')
xlabel('t [seg]')
ylabel('w')
grid on;
```



Conclusiones

El desarrollo de este proyecto permitió evaluar de manera integral las capacidades cinemáticas de un robot para realizar el seguimiento de una trayectoria, confirmando la hipótesis de que es posible determinar su desempeño mediante herramientas como el índice de manipulabilidad.

1. **Análisis Cinemático:** Se observó que al mantener el índice de manipulabilidad dentro de rangos adecuados (mostrado en la Gráfica de Manipulabilidad), se evitan configuraciones singulares, lo que garantiza suavidad en las velocidades articulares.
2. **Análisis Dinámico:** Mediante el modelo de Euler-Lagrange implementado en MATLAB, se determinó que el **Motor 1** requiere mayor par y potencia que el Motor 2, debido a que soporta la inercia de todo el brazo. La gráfica de potencia muestra picos que corresponden a las fases de aceleración máxima de la trayectoria Bang-Bang suavizada.
3. **Validación:** La simulación en ROS confirmó que los valores calculados teóricamente son ejecutables por el controlador del robot sin violar límites físicos.

Conclusiones individuales

Cabrera Cruz Carlo Alejandro

Durante el desarrollo de este proyecto pude comprender mejor la relación entre la teoría de cinemática y su implementación práctica en un entorno de simulación. Ver el comportamiento del SCARA siguiendo la trayectoria planificada me ayudó a identificar la importancia de respetar tanto las restricciones cinemáticas como la manipulabilidad del robot. Considero que esta experiencia me acercó más al trabajo real en robótica y me dio mayor seguridad para seguir estudiando sistemas mecatrónicos avanzados.

Gutiérrez Espriella Moisés Ariel

El desarrollo de este proyecto permitió cumplir satisfactoriamente con el objetivo de evaluar y diseñar una tarea de seguimiento de trayectoria para un robot tipo SCARA, validando la hipótesis de que es factible determinar la viabilidad operativa de un manipulador mediante un análisis riguroso de sus capacidades cinemáticas y dinámicas antes de su implementación física.

Análisis Cualitativo y Cinemático: A través del cálculo del índice de manipulabilidad, se comprobó cualitativamente que la ubicación espacial de la tarea es un factor crítico en el desempeño del robot. Se observó que las trayectorias planificadas en el espacio de trabajo (línea recta) pueden inducir velocidades articulares excesivas si se acercan a configuraciones singulares. Sin embargo, al reubicar geométricamente la trayectoria hacia zonas de mayor manipulabilidad (isotropía), se logró suavizar el perfil de velocidades, demostrando la importancia del diseño de tareas basado en la cinemática diferencial.

Análisis Cuantitativo y Dinámico: La implementación del modelo dinámico (basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange) permitió cuantificar los requerimientos físicos del sistema. Al determinar el par y la potencia mecánica requerida por cada actuador, se pudo establecer un criterio objetivo para el dimensionamiento de los motores y la fuente de alimentación. Este análisis es vital para garantizar la eficiencia energética y la seguridad operativa, evitando el sobredimensionamiento costoso o la insuficiencia de par durante la ejecución de la tarea.

González Martínez Roberto Carlos

A través de este proyecto pude ver de manera clara cómo la teoría de manipulabilidad se relaciona directamente con el desempeño real del robot. Resolver la cinemática inversa y observar cómo respondía el SCARA en el simulador me permitió comprender mejor las limitaciones del sistema y la importancia de planear trayectorias eficientes. Este aprendizaje me motiva a seguir profundizando en temas de control y robótica aplicada.

Rodriguez Torres Angel Adrian

Para mí este proyecto fue una oportunidad valiosa para consolidar conocimientos de cinemática, simulación y control. Implementar la trayectoria tipo bang-bang y analizar su efecto en la manipulabilidad del robot me hizo entender de forma más práctica cómo se toma decisiones en la robótica real. Además, trabajar con ROS y Python me ayudó a mejorar mis habilidades técnicas. En general, considero que este proyecto fortaleció mi formación como ingeniero mecatrónico.

Referencias

[1] G. B. Muniyandi, “Citation: Muniyandi GB (2024) In-Depth Analysis of Kinematic, Dynamic, and Control Aspects of a 4-Axis SCARA Robot Manipulator,” Int J Robot Eng, vol. 7, p. 37, 2024, doi: 10.35840/2631-5106/4137.

[2] C. Feng, G. Gao, and Y. Cao, “Kinematic modeling and verification for a SCARA robot,” 2016.

[3] B. Fernini, “Dynamic Behavior of a SCARA Robot by using N-E Method for a Straight Line and Simulation of Motion by using Solidworks and Verification by Matlab/Simulink,” International Journal of Robotics and Automation (IJRA), vol. 3, no. 4, pp. 221–233, 2014.

[4] S. A. Alshahrani, H. Diken, A. A. N Aljawi, S. Alshahrani, y A. Aljawi, “OPTIMUM TRAJECTORY FUNCTION FOR MINIMUM ENERGY REQUIREMENTS OF A SPHERICAL ROBOT”, 2002.