Cálculo Estocástico

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente

Pablo Ángel Mendoza Aguirre

Índice general

1 Primer Parcial: Introducción 5

1.1 Espacio de Probabilidad 5

1.2 Axiomas de Kolmogorov 6

1.3 Variable Aleatoria 6

1.4 Funciones de Densidad y Distribución 7

1.5 Variables Aleatorias Independientes 8

1.6 Esperanza Matemática entre Variables Aleatorias 9

1.7 Covarianza y Varianza 10

1.8 Suma de Variables Aleatorias 11

1.9 Esperanza Condicional 11

1.10 Convergencia de Variables Aleatorias 14

1.11 Tareas 16

2 Segundo Parcial: Procesos Estocásticos 23

2.1 Procesos Estocásticos 23

2.2 Movimiento Browniano 23

2.3 Procesos de Weiner 24

2.4 Límites de Procesos Estocásticos 24

2.5 Variación Cuadrática de un Proceso Estocático 25

2.6 Diferenciales Estocásticos 26

2.6.1 Fórmula de Ito 27

2.6.2 Fórmula de Ito Multivariable 29

2.7 Procesos de Difusión de Ito 29

2.8 Tareas 30

3 Tercer Parcial: Integral Estocástica 37

3.1 La Integral Estocástica 37

3.1.1 Procesos No Anticipatorios 38

3.1.2 Propiedades de la Integral de Ito 38

3.1.3 Integral de Weiner 39

3.2 Técnicas de Integración 39

3.2.1 Integración por Partes 41

3.2.2 Regla de Sustitución para Integrales Definidas 43

3.3 Tareas 46

4 Cuarto Parcial: E.D. Estocásticas 53

4.1 Solución de E.D.E. por Técnica de Integración 53

4.2 E.D.E. Exactas 55

4.3 Solución de E.D.E. por Integración por Inspección 56

4.4 Solución de E.D.E. por Variación de Parámetros 58

4.5 Solución de E.D.E. por Factor Integrante 60

4.6 Tareas 62

5 **Bibliografía** 67

Bibliografia . . . .

1. Primer Parcial: Introducción

1.1 Espacio de Probabilidad

Un experimento aleatorio es aquel que puede producir resultados diferentes aún cuando se repita siempre de la misma manera. Ejemplos:

1. Lanzar una Moneda
2. Observar el precio de una acción
3. Lanzar un dado

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, se le llama espacio muestral del experimento y se denota con Ω.

1. $\Omega = \{s, c\}$
2. $\Omega = \{0 < x \leq 10000\}$
3. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cada elemento del Ω se denota con una ω, por ejemplo $\omega_1 = s$ y $\omega_2 = c$. Un evento, es un subconjunto del espacio muestral (Ω) de un experimento aleatorio. En el caso del experimento lanzar una moneda:

- Evento $A =$ al menos ocurre una cara $= \{cs, cc, sc\} = A$
- Evento $B =$ el segundo lanzamiento es un sello $= \{sc, cc\} = B$

Un sigma álgebra $(\sigma - algebra)F$, sobre Ω es una colección de subconjuntos de Ω que satisfacen las siguientes ecuaciones:

1. No estar vacía, contiene al menos un elemento
2. Si el evento $A \in F \therefore A^c \in F$
3. Si $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in F \therefore \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$ y $\cap_{i=1}^{n} A_i \in F$
4. Si $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in F \therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$; $z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Nota: $\bigcup =$ unión, $\bigcap =$ intersección, $A|B =$ probabilidad de A dado que B ocurrió, $\underline{c} =$ subconjunto o contiene a..., $c =$ complemento y $I =$ conjunto vacío.

Ejemplo: Verificar que $z = \{I, \Omega\}$ es un $\sigma - algebra$

1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
2. $A_1 = I \to A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = \Omega \to A^c = I$ y $I \in z$
3. $A_1 \bigcup A_2 = I \bigcup \Omega = \Omega \therefore \Omega \in z$
4. $A_1 \bigcap A_2 = I \bigcap I = I \therefore I \in z$

Ejemplo: Considerar el experimento lanzar un dado, verifique que $z = \{I, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega, 1\}$ no es un $\sigma - algebra$.

1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
2. Segunda condición
   - $A_1 = I \to A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$
   - $A_2 = \{1, 3, 5\} \to A^c = \{2, 4, 6\}$ y $\{2, 4, 6\} \in z$
   - $A_3 = \{2, 4, 6\} \to A^c = \{1, 3, 5\}$ y $\{1, 3, 5\} \in z$
   - $A_4 = \Omega \to A^c = I$ y $I \in z$
   - $A_5 = 1 \to A^c = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\{2, 3, 4, 5, 6\} \ni z$, no es un $\sigma - algebra$)

La pareja (Ω, F) se llama espacio medible. Se llama así, porque es posible definir una medida de probabilidad sobre dicho espacio. Dicha medida está definida sobre (Ω, F) es una función $P : F \to [0, 1]$ que satisface los axiomas de Kolmogorov.

1.2 Axiomas de Kolmogorov

Primer axioma: $P(A) \geq 0 \ \forall \ A \ \in \ F$
Segundo axioma: $P(\Omega) = 1$
Tercer axioma: Si $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ...$, son eventos mutuamente excluyentes:
$(A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall \ i \neq j)$entonces$P \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} P \ A_n$
Teoremas que se comprueban con los axiomas de Kolmogorov:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. $Si \ A \leq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
5. $P(A|B) = P(A) - P(A \cap B)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo: Para el experimento aleatorio "Lanzamiento de una moneda", el espacio de probabilidad (Ω, F, P) tiene los siguientes elementos:

- $\Omega = \{C, S\}$
- $F = 2^{\Omega} = \{\emptyset, C, S, \Omega\}$
- $P(A) = (\sharp A / \sharp \Omega)$ Donde $\sharp A$ son el número de elementos de A y $\sharp \Omega$ son el número de elementos de Ω

Para el Primer y Segundo Axioma: Si $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \Omega$, $A_3 = C$, $A_4 = S$

- $P(A_1) = 0/2 = 0$
- $P(A_2) = 2/2 = 1$
- $P(A_3) = 1/2 = 0{,}5$
- $P(A_4) = 1/2 = 0{,}5$

Para el Tercer Axioma:

- $P(A_1 \cup A_2) = P(\Omega) = 1 \ \ y \ \ P(A_1) + P(A_2) = 1$
- $P(A_1 \cup A_3) = P(A_3) = 0{,}5 \ \ y \ \ P(A_1) + P(A_3) = 0{,}5$
- $P(A_1 \cup A_4) = P(A_4) = 0{,}5 \ \ y \ \ P(A_1) + P(A_4) = 0{,}5$
- $P(A_3 \cup A_4) = P(\Omega) = 1 \ \ y \ \ P(A_3) + P(A_4) = 1$
- $P(A_1 \cup A_3 \cup A_4) = P(\Omega) = 1$ y $P(A_1) + P(A_3) + P(A_4) = 1$
- $P(A_2 \cup A_3) = P(\Omega) = 1 \ \ y \ \ P(A_2) + P(A_3) = 1{,}5$
- $P(A_2 \cup A_4) = P(\Omega) = 1 \ \ y \ \ P(A_2) + P(A_4) = 1{,}5$
- $P(A_1 \cup P(A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(\Omega) = 1 \ \ y \ \ P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 2$

1.3 Variable Aleatoria

Una variable aleatoria, es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral de un experimento aleatorio, es decir: $X : \Omega \longrightarrow \Re$.
Ejemplo: Se lanza un par de dados equilibrados, si la variable aleatoria X asigna a cada resultado la suma de sus números:

- a) Establecer el espacio muestral (Ω): $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, ..., 66\}$
- b) Expresa la variable aleatoria matematicamente: $X(w) = a + b$
- c) ¿Cúal es el conjunto ímagen de la variable aleatoria?: $\{2, 3, 4, 5, ..., 12\} \longrightarrow \Re$

Ejemplo 2: Se lanza un par de dados equilibrados. Si $X(ab) = max(a, b)$, ¿cúal es el conjunto imagen? $R_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Una V.A. X es una función $F - medible$ si se cumple lo siguiente:

$$\{w \in \Omega; a \prec X(w) \prec b\} \in F$$

donde a y b son números reales.
Ejemplo 3: Considerando el experimento aleatorio "lanzar 2 monedas al aire", la V.A. X representa el número de caras obtenidas. Demostrar que X es función $2^{\Omega} - medible$.

- $\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$
- $F = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \Omega, CC, CS, SC, SS\}$
- $\{w \in \Omega;\ X(w) = 0\} = \{SS\} \in F$
- $\{w \in \Omega;\ X(w) = 0\} = \{CS, SC\} \in F$
- $\{w \in \Omega;\ X(w) = 0\} = \{CC\} \in F$

1.4 Funciones de Densidad y Distribución

Considere un espacio muestral (Ω, F, R) y una V.A. $X\Omega \rightarrow R$. En este caso cuando la V.A. es finita, la función de masa de probabilidad es:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = P[(\omega \in \Omega : X(\omega)] = x_i$$

Ejemplo: Considere el experimento "lanzar un dado". Tabule y grafique la función de masa de probabilidad.

$$\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Tabla

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Gráfica Para la misma V.A. la función de distribución se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x \leq x} F(x_i)$$

Ejemplo: "Lanzar un dado"
Tabla

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

Gráfica NOTA: $y = u(x - a) \rightarrow$ escalón Heaviside.

$$F(x) = \frac{1}{6}u[(x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5) + (x-6)]$$

Otra forma de obtener la función de masa de probabilidad:

$$f(x_i) = \frac{dF(x)}{d(x)}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{6}\delta[(x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5) + (x-6)]$$

Sea X una V.A. continua sobre el espacio muestral. Entonces, la función de distribución de X es la función: $F(x) = P[(\omega \in \Omega : X(\omega)] \leq X$ La función de densidad de X es:

$$(x) = \frac{d}{d(x)}F(x)$$

Ejemplo:
Densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp^{\frac{-x^2}{2}}$$

Distribución

$$\int_{-\infty}^{x} exp^{\frac{-x^2}{2}}$$

NOTA: No tiene una solución en forma cerrada, por lo tanto se usan tablas.

1.5 Variables Aleatorias Independientes

Definición: Si X y Y son V.A. continuas, se dice que son independientes entre sí; los eventos $X \leq x$ y $Y \leq y$, son eventos independientes para toda x y y. En tal caso:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

o equivalentemente:

$$(F(x,y) = F(x)F(y)$$

Donde $F(x)$ y $F(y)$ son funciones de distribución (marginales).
Ejemplo: La función de densidad de probabilidad conjunta de 2 V.A. X y Y está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2exp^{-x}exp^{-2y} & si \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1) Obtener las funciones de densidad de probabilidad marginal
2) Demostrar que las v.a. son independientes

1. Respecto de x:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

Primera parte de la integral:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dy = 0$$

Segunda parte de la integral:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} 2exp^{-x}exp^{-2y}dy = exp^{-x}$$

Respecto de y:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Primera parte de la integral:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0$$

Segunda parte de la integral:

$$f(y) = \int_{0}^{\infty} 2exp^{-x}exp^{-2y}dx = 2exp^{-2y}$$

2. Si: $F(x,y) = F(x)F(y)$ cuando $x > 0$ y $y > 0$:

$$2exp^{-x}exp^{-2y} = (exp^{-x})(2exp^{-2y})$$

$$2exp^{-x}exp^{-2y} = 2exp^{-x}exp^{-2y}$$

Cuando se cumple que $(x < 0)$ y que $(y < 0)$ entonces:

$$0 = (0)(0)$$

Por lo tanto, X y Y son V.A. independientes.

1.6 Esperanza Matemática entre Variables Aleatorias

Sea X una V.A. $F(x)$ su función de probabilidad acumulada y suponiendo que esta posee una función $f(x)$. El valor esperado o $E(X)$ existe y es finita si y sólo si la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x \,|\, f(x)dx$$

La integral anterior finita y en este caso $E(x)$ se define mediante la fórmula:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Ejemplo: Sea X una V.A. continua, cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} exp^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sqrt{2D}}}$$

Calcular la $E(x)$ de la función de densidad de probabilidad.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi D}} exp^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sqrt{2D}}} dx$$

Se integra mediante u y du donde:

- $u = \frac{(x-m)}{\sqrt{D}} dx$
- $du = \frac{1}{\sqrt{D}} dx$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u\sqrt{D}+m}{\sqrt{2\pi D}} \frac{\sqrt{D}}{1} exp^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$E(x) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u\sqrt{D}+m}{1} exp^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u\sqrt{D}) exp^{\frac{-u^2}{2}} du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (m) exp^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Se sabe que

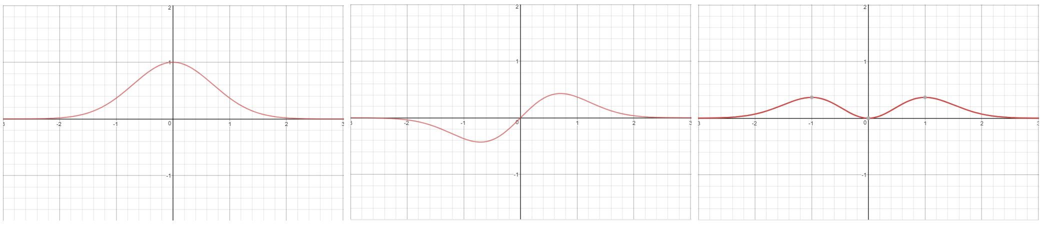
$$\int_{-\infty}^{\infty} exp^{\frac{-u^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

entonces:

$$E(x) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{1}$$

$$E(x) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2\pi}} [0-0] + m = m$$

Nota:



(a) $f(x) = e^{-a(x^2)}$ *con área de* $\sqrt{\pi/a}$

(b) $f(x) = xe^{-a(x^2)}$ *con área de* 0

(c) $f(x) = x^2 e^{-a(x^2)}$ *con área de* $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^3$

Figura 1.6.1: *Esperanza Matemática entre V.A.*

1.7 Covarianza y Varianza

La covarianza de dos V.A. se define como:

$$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$$

La varianza de X se define como:

$$Var(X) = Cov(X,X)$$

Ejercicio: Si X y Y son V.A. integrables e independientes, demostrar que $E[XY]$ es igual $E[X]E[Y]$.
Si son independientes, entonces: $f(x,y) = f(x)f(y)$, por tanto

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = E(x)E(y)$$

Ejercicio: Si X y Y son variables independientes, comprobar que la covarianza de X y Y es igual a cero.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

Por el ejemplo anterior se sabe que $E(X,Y) = E(X)E(Y)$ y por lo tanto:

$$Cov(X,Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

Nota: Si la covarianza de dos variables aleatorias es igual a cero, no quiere decir que sean independientes. Sin embargo, cuando las dos variables aleatorias tienen distribución gaussiana, se cumple que $Cov(X,Y) = 0 \leftrightarrow Y$ y X son independientes.
Ejemplo: Calcular la varianza de una variable aleatoria X que está normalmente distribuida.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-u^2/2}$$

$Var(X) = Cov(X,X) = E(XX) - E(X)E(X)$ donde se sabe de antemano que $E(X) = m$, por tanto:

$$Cov(X,X) = E(XX) - E(X)E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{\frac{(x-m)^2}{2D}} dx - m^2$$

Se integra mediante u y du donde:

- $u = \frac{x-m}{\sqrt{D}}$
- $du = \frac{dx}{\sqrt{D}} dx$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} (m + u\sqrt{D})^2 e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

$$E[X^2] = \frac{m^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} + \frac{2m\sqrt{D}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} + \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2) e^{\frac{-u^2}{2}}$$

Recordando la **Figura 1.6.1**:

$$E[X^2] = m^2 + 0 + \frac{D}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{8}}{1} = m^2 + D$$

1.8 Suma de Variables Aleatorias

Sea X y Y dos V.A. independientes con función de densidad f y g respectivamente, si h es la función de densidad X y Y, entonces $h(z) = \int f(x)g(z-x)dx$, donde $Z = X + Y$.
Ejemplo: Si $X \sim N(0,1)$ y $Y \sim N(0,4)$, calcular la función de densidad de la suma.

$$f(x) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$g(x) = \frac{e^{-u^2/2}}{2\sqrt{2\pi}}$$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u^2/2}}{2\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-x)^2}{8} - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-z^2}{8} - \frac{5}{8}x^2 + \frac{2zx}{4}} dx$$

$$h(z) = \frac{e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2zx}{8} - \frac{5x^2}{8}} dx = \frac{e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5}{8}(\frac{2zx}{5} + x^2)} dx = \frac{e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5}{8}(\frac{2zx}{5} + x^2 + \frac{z^2}{25} - \frac{z^2}{25})} dx$$

$$h(z) = \frac{e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5}{8}((x-\frac{z}{5})^2 - (\frac{z}{5})^2)} dx = \frac{e^{\frac{5z^2}{200}} e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5}{8}((x-\frac{z}{5})^2} dx$$

Haciendo un cambio de variable $w = x - \frac{z}{5}$ y $dw = dx$ tenemos:

$$\frac{e^{\frac{5z^2}{200}} e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5}{8}((w)^2} dw = \frac{e^{\frac{5z^2}{200}} e^{\frac{-z^2}{8}}}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{5}{8}}} = \frac{e^{\frac{-z^2}{10}}}{\sqrt{10\pi}}$$

De esta última ecuación se puede inferir que $Z \sim N(0,5)$ Nota: La función de densidad de la suma de 2 V.A. independientes con media m_1 y m_2; y varianza D_1 y D_2 respectivamente, es de nuevo una función de densidad normal: $N(m_1 + m_2, D_1 + D_2)$.

1.9 Esperanza Condicional

Sean X y Y variables aleatorias, la esperanza matemática de X dado que Y toma un valor específico y, se define como:

$$E(X|Y = y) = E(X|\mathscr{G})$$

donde $\mathscr{G}$ es un $\sigma - algebra$ contenido en un $\sigma - algebra\mathscr{F}$. El análisis se puede dividir en dos casos:

- Caso continuo:

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx$$

d Donde $f(x|y)$ se define como:

$$\frac{f(x|y)}{f(y)}$$

- Caso discreto:

$$E(X|Y=y) = \sum_{x \subset R_X} xP(X=x|Y=y)$$

Donde R_x es el conjunto imagen de la variable aleatoria X condicionada por Y.
Si se compara con el $E(X)$, entonces:

$$E(x) = \sum_{x \subset R_X} xP(X=x) = \sum_{k \geq 1} x_k P(X=x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k)$$

Ejercicio: Considere el experimento "lanzar dos dados", el espacio muestral, $\sigma - algebra$ y la medida de probabilidad para el experimento son:

$$\Omega = \{\omega = (i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$$

$$\mathscr{F} = 2^{\Omega} = \sigma - algebra$$

$$P(\{\Omega\}) = \frac{1}{36};\ \omega \in \Omega$$

Con la variable aleatoria X definida como $X(\omega) = i + j$ y $Y(\omega) = min(i,j)$.

- a) Calcule el valor esperado de la variable aleatoria X

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 12 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\}$$

Dado que $X(\Omega) = i + j$, entonces:

$$R_x = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Por lo que, la esperanza de X sería:

$$E(x) = \sum_{k=1}^{11} x_k P(X=x_k)$$

$$E(X) = x_1 P(X=x_1) + x_2 P(X=x_2) + \cdots + x_{11} P(X=x_{11})$$

$$E(X) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + \cdots + 11\frac{10}{36} = 7$$

$$E(X) = 7$$

- b) Calcular el valor esperado de la variable aleatoria X dado que Y es igual a 3
Para nuestro caso:

$$E(X|Y=3)$$

Lo que quiere decir, que el mínimo de (i,j) debe ser igual a tres. El conjunto de eventos que puede lograr eso sería:

$$A = \{33,34,35,36,43,53,63\}$$

Esta clase de eventos, formalmente se describen como:

$$A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}, i = 1,2,3,...$$

Entonces:

$$E(X|Y=3) = \sum_{x \in R_x|Y=3} xP(X=x|Y=y)$$

Donde

$$(R_x|Y=3) = \{6,7,8,9\}$$

Por lo tanto:

$$E(X|Y=3) = 6\frac{1}{7} + 7\frac{2}{7} + 8\frac{2}{7} + 9\frac{2}{7}$$

$$E(X) = \frac{54}{7}$$

- c) Calcular el valor esperado de las siguientes condiciones para la variable aleatoria:

$$E(X|Y=1), E(X|Y=2), E(X|Y=4), E(X|Y=5), E(X|Y=6)$$

Para $E(X|Y=1)$:

$$E(X|Y=1) = \sum_{x \in R_X|Y=1} xP(X=x|Y=1)$$

$$A_y = \{11,12,13,14,15,16,21,31,41,51,61\}$$

$$|A_y| = 11$$

$$(R_X|Y=1) = \{2,3,4,5,6,7\}$$

$$E(X|Y=1) = 2\frac{1}{11} + 3\frac{2}{11} + 4\frac{2}{11} + 5\frac{2}{11} + 6\frac{2}{11} + 7\frac{2}{11}$$

$$E(X|Y=1) = \frac{52}{11}$$

Para $E(X|Y=2)$:

$$E(X|Y=2) = \sum_{x \in R_x|Y=2} xP(X=x|Y=2)$$

$$A_y = \{23,24,25,26,22,32,42,52,62\}$$

$$|A_y| = 9$$

$$(R_X|Y=2) = \{4,5,6,7,8\}$$

$$E(X|Y=2) = 4\frac{1}{9} + 5\frac{2}{9} + 6\frac{2}{9} + 7\frac{2}{9} + 8\frac{2}{9}$$

$$E(X|Y=2) = 6$$

Para $E(X|Y=4)$:

$$E(X|Y=4) = \sum_{x \in R_x|Y=4} xP(X=x|Y=4)$$

$$A_y = \{44,45,46,54,64\}$$

$$|A_y| = 5$$

$$(R_X|Y=4) = \{8,9,10\}$$

$$E(X|Y=4) = 8\frac{1}{5} + 9\frac{2}{5} + 10\frac{2}{5} = \frac{46}{5}$$

Para $E(X|Y=5)$:

$$E(X|Y=5) = \sum_{x\in R_x|Y=5} xP(X=x|Y=5)$$

Entonces:

$$E(E(X|Y=y_i)) = \sum_{y=R_x} E(X|Y)P(Y=y_i)$$

Donde

$$R_Y = \{1,2,3,4,5,6\} = \{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$$

Como se hablan de todas las variables, se puede generalizar:

$$E(E(X|Y=y_i)) = E(E(X|Y))$$

Al trabajarlo, se observa que:

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

El resultado obtenido, no es sólo para el caso del experimento de "lanzar dos dados", el resultado es una identidad y pasa para toda variable independiente X y Y.

1.10 Convergencia de Variables Aleatorias

Sean X y $X_n, n=1,2,...$ V.A. defenidas en (Ω, f, P); la convergencia de la sucesión $(X_n)n \geq 1$, hacia $\overline{X}$ se puede definir de varias formas, dependiendo de como se mida la diferencia entre X_n y X
Límite se la secuencia:

- Sentido casi seguro: $P(w : \text{lím}_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)) = 1$
- En probabilidad: $\text{lím}_{n\to\infty} P(w : |X_n(w) - X_n| \leq \varepsilon) = 1$
- Distribución: $\text{lím}_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$
- Promedio cuadrático: $\text{lím}_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$

Sea $(X_n)n \geq 1$ una sucesión tal que las V.A. de la sucesión tienen valor esperado μ, la misma varianza α^2 con varianza 0 entre ellos. El término genérico de la sucesión es:

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{n}^{1} X_i$$

Evaluar $\text{lím}_{n\to\infty} E[(\bar{X_n} - X)]$ siendo $\mu = X$:

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n-\mu)^2] = E[X_n] = E[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}E[\sum_{1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{n}^{1} E(X_i) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

$$Var(\bar{X_n}) = E\left\lfloor(\bar{X_n} - E(\bar{X_n})^2\right\rfloor = Var(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i)$$

$$Var(aX) = a^2 Var(X) = \frac{1}{n^2} Var(\sum_{1}^{n} X_i)$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{1}^{n}\Theta^2 = \frac{\Theta^2}{n}$$

$$\therefore \text{lím} E\left[(\bar{X_n}-\mu)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\Theta^2}{n} = 0$$

Proposición 2.14.1(Ejercicio)
Sea X_n una sucesión de una V.A. tal que hay una constante k con $E\lfloor X_n \rfloor \to k$ y $Var\lfloor X_n \rfloor \to 0$, cuando $n \to \infty$ demuestra que $ms - \text{lím}_{n\to\infty} = k$:

$$\lim_{n\to\infty} E\left\lfloor (X_n - X)^2 \right\rfloor = 0$$

$$X = k$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left\lfloor (X_n - X)^2 \right\rfloor$$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = k$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\lfloor E(X_n^2) - E(X_n)^2 \right\rfloor = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\lfloor E(X_n^2) - 2E(X_n)E(X) + E(X^2) \right\rfloor$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\lfloor E\left\lfloor X_n^2 \right\rfloor - 2kE(X_n) + k^2 \right\rfloor$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\lfloor E(X_n^2) - E(X_n)^2 + E(X_n)^2 - 2kE(X_n) + k^2 \right\rfloor$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\lfloor E(X_n^2) - E(X_n)^2 \right\rfloor + \lim_{n\to\infty} \left\lfloor E(X_n)^2 + 2kE(X_n) + k^2 \right\rfloor$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\lfloor (E(X_n) - k)^2 \right\rfloor$$

$$(\lim_{n\to\infty} E(X_n) - k)^2 = (k-k)^2 = 0$$

Desigualdad de Jensen

$$\varnothing(E(X)) \leq E(\varnothing(X)))$$

$$(E(X_n) - E(X))^2$$

$$(E\lfloor X_n - X \rfloor)^2$$

$$0 \leq E(X_n - X)^2 \leq E\left\lfloor (X_n - X)^2 \right\rfloor = 0$$

Entonces:

$$E(X_n - X)^2 = 0$$

1.11 Tareas

Tarea 1

Ejercicio: Proponer 3 experimentos aleatorios y 3 no aleatorios.

- Aleatorios
  - Juego de ruleta (casino)
  - Lanzar un dado
  - Lanzar una moneda
- No Aleatorios
  - Meter la mano al fuego
  - Tirar una pelota de un edificio
  - Combinar amarillo con azul y obtener verde

Ejercicio: Lance una moneda tres veces y observe la secuencia de caras (c) y sellos (s). Establezca el espacio muestral del experimento aleatorio.

$$\Omega = \{ccc, ccs, csc, css, ssss, ssc, scs, scc\}$$

Ejercicio: Considere el experimento aleatorio "Lanzar una moneda y un dado".

- ¿Cúal es el espacio muestral del experimento?

$$\Omega = \{c1, c2, c3, c4, c5, c6, s1, s2, s3, s4, s5, s6\}$$

- Exprese explícitamente el evento $A_1 =$ aparece cara y un número par.

$$A_1 = \{c2, c4, c6\}$$

- Exprese explícitamente el evento $A_2 =$ aparece un número menor que tres.

$$A_2 = \{c1, c2, s1, s2\}$$

- Exprese explícitamente el evento $A_3 =$ aparece sello y un número impar.

$$A_3 = \{s1, s3, s5\}$$

Ejercicio: Considere el experimento "Lanzar una modena". Se observa que el espacio muestral es $\Omega = \{c, s\}$.

- Verifique que $\{I, \Omega\}$ es un $\sigma - algebra$
  1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
  2. $A_1 = I \rightarrow A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = \Omega \rightarrow A^c = I$ y $I \in z$
  3. $A_1 \bigcup A_2 = I \bigcup \Omega = \Omega \therefore \Omega \in z$
  4. $A_1 \bigcap A_2 = I \bigcup I = I \therefore I \in z$
- Verifique que $\{I, c, s, \Omega\}$ es un $\sigma - algebra$
  1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
  2. $A_1 = I \rightarrow A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = \Omega \rightarrow A^c = I$ y $I \in z$
     $A_3 = c \rightarrow A^c = s$ y $s \in z$ y $A_4 = s \rightarrow A^c = c$ y $c \in z$
  3. $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup A_4 = I \bigcup c \bigcup s \bigcup \Omega = \Omega \therefore \Omega \in z$
  4. $A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4 = I \bigcap c \bigcap s \bigcap \Omega = I \therefore I \in z$
- Proponga un conjunto que no sea un $\sigma - algebra$ y explique:

$$z = \{I, c, s, 1, \Omega\}$$

  1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
  2. $A_1 = I \rightarrow A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = c \rightarrow A^c = \{I, s, 1, \Omega\}$ y $\{I, s, 1, \Omega\} \notin z$

Ejercicio: Escriba cada uno de los posibles eventos del siguiente espacio muestral $\Omega = \{a,b,c,d\}$.

$$F = 2^{\Omega} = \{I,a,b,c,d,\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\}$$

$$\{\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\},\Omega\}$$

Ejercicio: Se lanza un dado. Considere que $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5\}$ y que $C = \{1,2,3,5\}$. Demostrar que $\{I,A,B,\Omega\}$ es un $\sigma - algebra$ y que $\{I,A,\Omega\}$ y $\{I,A,B,C\Omega\}$ no son $\sigma - algebra$.

- Para: $\{I,A,B,\Omega\}$
  1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
  2. $A_1 = I \rightarrow A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = \Omega \rightarrow A^c = I$ y $I \in z$
     $A_3 = A \rightarrow A^c = B$ y $B \in z$ y $A_4 = B \rightarrow A^c = A$ y $A \in z$
  3. $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup A_4 = I \bigcup c \bigcup s \bigcup \Omega = \Omega \therefore \Omega \in z$
  4. $A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4 = I \bigcap c \bigcap s \bigcap \Omega = I \therefore I \in z$
- Para: $\{I,A,\Omega\}$
  1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
  2. $A_1 = I \rightarrow A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = \Omega \rightarrow A^c = I$ y $I \in z$
     $A_3 = A \rightarrow A^c = B$ y $B \notin z$
- Para: $\{I,A,B,C\Omega\}$
  1. z no esta vacía, contiene al menos un elemento
  2. $A_1 = I \rightarrow A^c = \Omega$ y $\Omega \in z$ y $A_2 = \Omega \rightarrow A^c = I$ y $I \in z$
     $A_3 = C \rightarrow A^c = \{4,6\}$ y $\{4,6\} \notin z$

Tarea 2

Ejercicio: Se lanza una moneda al aire hasta que aparezca cara. Sea $X(w)$ el número de veces que se lanza la moneda, determine el espacio muestral del experimento aleatorio y el conjunto imagen de la variable aleatoria discreta.

$$\Omega = \{c, s\Omega\}$$

$$R(x) = \{1,2,3,4,5,.....\Omega\}$$

Ejercicio: Un lote de 500 piezas contiene 10 piezas que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se seleccionan piezas sucesivamente sin remplazo, hasta que se obtiene la primera pieza que no cumple. Determine el conjunto imagen de la variable aleatoria, si $x(w)$ es el número de piezas seleccionadas.

$$R(x) = \{1,2,3,4,5,.....,491\}$$

Ejercicio: Verificar los axiomas de Kolmogorov para el lanzamiento de un dado considerando el $\sigma - algebra\ F$ como $\{I,\{1,3,5\},\{2,4,6\},\Omega\}$

- Axioma 1: $A_1 = I$, $A_2 = \{1,3,5\}$, $A_3 = \{2,4,6\}$ y $A_4 = \Omega \therefore$
  $P(A_1) = 0/2, 0$, $P(A_2) = 1/2, ,5 > 0$, $P(A_3) = 1/2, 0 > 0$ y $P(A_4) = 2/2, 1 > 0$
- Axioma 2: $P(A_4) = 2/2 = 1 = P(\Omega)$
- Axioma 3:
  - A_1 y A_2: $P(A_1 \cup A_2) = ,5$ y $P(A_1) + P(A_2) = ,5$
  - A_1 y A_3: $P(A_1 \cup A_3) = ,5$ y $P(A_1) + P(A_3) = ,5$
  - A_1 y A_4: $P(A_1 \cup A_4) = 1$ y $P(A_1) + P(A_4) = 1$
  - A_2 y A_3: $P(A_2 \cup A_3) = 1$ y $P(A_2) + P(A_3) = 1$

Ejercicio: Usando los axiomas de Kolmogorov, comprobar los siguientes teoremas de probabilidad.

- $P(I) = 0 \therefore A \cup I = A; A \cap I = I \therefore P(A) = P(A \cup I) = P(A) + P(I) \therefore P(A) = P(A) + P(I) \therefore P(A) - P(A) = P(I) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A) \therefore P(\Omega) = 1; P(\Omega) = P(A^c \cup A) = 1 \therefore P(\Omega) = P(A^c) + P(A) = 1 \therefore P(A^c) = 1 - P(A)$
- $0 \leq P(A) \leq 1 \therefore P(A) \geq 0; P(\Omega) = 1 \therefore P(I) \leq P(A) \leq P(\Omega) \therefore 0 \leq P(A) \leq 1$

- Si AcB entonces $P(A) \leq P(B) \therefore B = A \cup (A|B) \therefore P(B) = P(A) + P(A|B) \therefore siP(A|B) \geq 0 \therefore$ $P(A) \leq P(B)$
- Para 2 eventos cualquiera A y B, se tiene que $P(A|B) = P(A) - P(A \cap B) \therefore A = (A|B)cup(A \cap B) \therefore P(A) = P(A|B) + P(A \cap B) \therefore P(A|B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Para 2 eventos cualquiera A y B, se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \therefore A \cup B = (A|B) \cup B \therefore P(A \cup B) = P(A|B) + P(B) \therefore P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) \therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Tarea 3

Ejercicio: Para el experimento aleatorio "Lanzar dos dados equilibrados", considerar la variable aleatoria $X(w)$ como el valor máximo de las caras superiores de los dados. Escriba el espacio de probabilidad del experimento, además represente la función de densidad de probabilidad y la función de distribución $X(w)$ (Tablas, gráficas y utilizar la función Heaviside y Delta de Dirac).

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$$

$$\{31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46\}$$

$$\{51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

Tabla

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Tabla

x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{36}$

$$F(x) = \frac{1}{36}u[1(x-1) + 4(x-2) + 9(x-3) + 16(x-4) + 25(x-5) + 36(x-6)]$$

$$f(x_i) = \frac{1}{36}\delta[3(x-1) + 5(x-2) + 7(x-3) + 9(x-4) + 11(x-5) + (x-6)]$$

Ejercicio: Una variable aleatoria se llama de Rayleigh si su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Determinar la función de distribución de x:

$$\int_0^x \frac{y}{\sigma^2} e^{\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = (-e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}) - (-e^{\frac{0^2}{2\sigma^2}}) = 1 - e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Ejercicio: Sea $\alpha, \beta \in R$ demostrar que si X está normalmente distribuida $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Y = \alpha x + \beta$ también está normalmente distribuida con $Y \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha\sigma^2)$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \therefore f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(Y) = P(X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\frac{y-\beta}{\alpha}=h} f(x)dx = \int_{-\infty}^{h} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Se hace un cambio de variable:$z = \alpha x + \beta$ y $dz = \alpha dx$, finalmente resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\alpha^2}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z-(\alpha\mu+\beta)^2}{2\sigma^2\alpha^2}} dx$$

$$Y \sim N(\alpha\mu+\beta, \alpha\sigma^2)$$

Ejercicio: Considere dos variables aleatorias X y Y independientes cuyas funciones de distribución son $f(t) = g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$ respectivamente. Calula la función de distribución $X+Y$.

$$h(z) = \int_0^z f(x)g(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx$$

$$h(z) = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x}e^{-\lambda(z-x)}dx = \lambda^2 e^{-\lambda z}\int_0^z dx$$

$$h(z) = \lambda^2 e^{-\lambda z}z$$

Ejercicio: Comprobar que $\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{(z-x)^2}{8}}dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{10}}}{\sqrt{10\pi}}$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{(z-x)^2}{8}}dx = \frac{1}{4\pi}e^{\frac{-z^2}{8}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{5x^2-2xz}{4}}dx$$

$$\frac{1}{4\pi}e^{\frac{-z^2}{10}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{3/4}x-\sqrt{5}/5\sqrt{4}z]}dx$$

$$u = (\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}(x-z/5)); du = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}dx$$

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{10}}}{\sqrt{10\pi}}$$

Ejercicio: Demostrar que la $Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$, dodne $\mu_x = E[X]$ y $\mu_y = E[Y]$

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = E[XX] - E[X]E[Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

$$Cov(X,Y) = E[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Ejercicio: Demostrar que $Var[x] = E[(X-\mu_x)^2] \therefore$.

$$Var[x] = Cov[XX] = E[XX] - E[X]E[X] = E[x^2 - 2x\mu_x - \mu_x^2] = [(X-\mu_x)^2]$$

Tarea 4

Ejercicio 2.12.8 de Ovidiu: Se lanza 4 veces una moneda equilibrada. Cada lanzamiento da como resultado cara (c) o sello (s).

- ¿Cuantos elementos tiene Ω ? $2^\Omega = 16$
- Considera los eventos A: 2 de los 4 lanzamientos son cara, B: el primer lanzamiento es sello, y C: tres de los 4 lanzamientos son cara. Calcule $P(A), P(B)$ y $P(C)$. $P = 3/8, P(B) = 1/2$ y $P(C) = 1/4$
- Calcule $P(A \cap B)yP(B \cap C)$: $P(A \cap B) = 3/16yP(B \cap C) = 3/16$
- ¿Los eventos A y B son indepedientes? Si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \rightarrow 3/16 = 3/16$$

- ¿Los eventos B y C son indepedientes? No

$$P(C \cap B) = P(C)P(B) \rightarrow 3/16 = 1/8$$

- Considere los siguientes $\sigma - algebras$: F se conocen lo resultados de los primeros 2 lanzamientos, G se conocen los resultados de los lanzamientos pero no el orden. ¿Cómo podría expresarse en palabras el conjunto $F \cap G$?
  Se conocen los resultados de los primeros 2 lanzamientos, pero no el orden de los últimos 2.
- Pruebe que $A \in G$, $B \in F$ y $c \in G$: Son verdaderos en base a la descripsión de A, B y C.
- Defina las variables aleatorias x: número de caras - número de sellos y y: número de sellos antes de la primera cara. Muestre que x es $G - medible$, mientras que y no lo es.

$$x = C - S = \{4, 2, 0, -2, -4\}$$

$$y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

  Y no es medible porque no se conoce el orden de los resultados de los lanzamientos, por lo que no es $G - medible$. x es $G - medible$, dado que se conocen los valores del resultado y se puede colocar un número en ese rango.
- Encuentre $E[x], E; [y]$ y $E[X|G]$
  $E[x] = 0, E; [y] = 15/16$ y $E[X|G] = x$, dado que no es $G - medible$

Ejercicio: Sean X y Y variables aleatorias sobre (Ω, F, P) con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{\frac{-(x^2-2xy+y^2)}{2}}; x, y \in R$$

La densidad marginal de y es una función de densidad normal con media cero y varainza $\frac{4}{3}$. Calcule la función de densidad condicional $f(x|y)$ para toda $x, y \in R$ y también la esperanza condicional $C[X|Y = y]$.

$$F(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \therefore$$

$$F(x|y) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{\frac{-(x^2-2xy+y^2)}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{4}{3}}} e^{\frac{-y^2}{2(4/3)}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(x-(y/2))^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(x-(y/2))^2}$$

$$u = x - \frac{y}{2}, du = dx \therefore$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(x-(y/2))^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u - \frac{y}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}u^2} dx = 0 + \frac{y}{2} = \frac{y}{2}$$

Ejercicio: Una persona está atrapada en una mina que tiene tres caminos. El primer camino conduce a la salida después de un trayecto de 3 horas, el segundo y tercer camino llevan a la persona al punto de partida después de 5 y 7 horas respectivamente. Sea X el tiempo requerido para salir de la mina y X el camino elegido por la persona la primera vez. Determine:

- El conjunto imagen de X: $R_X = \{3, 8, 10, 15\}$
- El conjunto imagen de Y: $R_Y = \{1, 2, 3\}$
- Espacio muestral de X: $\Omega = \{1, \{2,1\}, \{3,1\}, \{2,3,1\}, \{3,2,1\}\}$
- $E[X|Y = 1] = 3(1) = 3$
- $E[X|Y = 3] = 12{,}5$
- $P(Y = 1) = 1/3$
- $E[E[X|Y]] = 3(1/3) + 23/2(1/3) + 25/2(1/3) = 9$
- $E[X] = 3\frac{1}{3} + 8\frac{1}{3}\frac{1}{2} + 10\frac{1}{3}\frac{1}{2} + 15\frac{1}{3}\frac{1}{2}(1) + 15\frac{1}{3}\frac{1}{2}(1) = 9$

Tarea 5

Ejercicio: Si X_n tiende a X en promedio cuadrático, demostrar que $E[X_n|H]$ tiende a $E[X_n|H]$ tiende a $E[X|H]$ en promedio cuadrático.

$$ms - X_n \to X \therefore ms - E[X_n|H] \to E[X|H]$$

$$\lim_{n\to\infty} E[(E[X_n|H] - E[X|H])^2]$$

$$\lim_{n\to\infty} E[(E[X_n - X|H])^2] \leq \lim_{n\to\infty} E[(E[(X_n - X)^2|H]] = 0$$

Ejercicio: Si $ms - \lim_{n\to\infty} X_n = 0$ y $ms - \lim_{n\to\infty} Y_n = 0$, demostrar que: $ms - \lim_{n\to\infty} X_n - Y_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n + Y_n)^2] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^2 + 2X_nY_n + Y_n^2]$$

$$\lim_{n\to\infty} E[2X_nY_n] = 2\lim_{n\to\infty} E[X_n]E[Y_n] = 2(0) = 0$$

Ejercicio: Si las sucesiones de variables aleatorias X_n y Y_n convergen en promedio cuadrático, demuestre que:

- $ms - \lim_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = ms - \lim_{n\to\infty} X_n + ms - \lim_{n\to\infty} Y_n$ Se sabe que:

$$ms - \lim_{n\to\infty} X_n = 0$$

$$ms - \lim_{n\to\infty} Y_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n + Y_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n + Y_n)^2] = 0 \therefore$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n + Y_n)^2] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^2 + 2X_nY_n + Y_n^2 - 2X_nY_n$$

$$ms - \lim_{n\to\infty} X_n + ms - \lim_{n\to\infty} Y_n$$

- $ms - \lim_{n\to\infty} cX_n = cms - \lim_{n\to\infty} X_n$, donde $c \in R$

$$\lim_{n\to\infty} E[(cX_n)^2] = \lim_{n\to\infty} E[c^2X_n^2]$$

$$\lim_{n\to\infty} E[c^2]E[X_n^2] = 0$$

$$c\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = c\lim_{n\to\infty}[0] = c[0] = 0$$

2. Segundo Parcial: Procesos Estocásticos

2.1 Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico es una familia de V.A. definidas en un espacio de probabilidad (Ω, F, P).
Los procesos estocásticos tienen realixaciones, es decir cada una de las trayectorias obtenidas.
Ejemplo: En el experimento lanzar una moneda se define el proceso estocástico como:

$$X(\omega,t) = \begin{cases} sen(t) & si \quad \omega = \text{cara} \\ \\ 2t & si \quad \omega = \text{sello} \end{cases}$$

2.2 Movimiento Browniano

Si $X_t = -B_r$ entonces X_t es un movimiento browniano.
Nota: $X_r = -B_r$ y $X_s = -B_s$

- Condición 1: En $t = 0, X_0 = -B_0 = -0 = 0$
- Condición 2: $Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = 0$ es decir, independientes para $0 \leq r \leq s$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = E[X_s - X_r, X_r - X_0] - E[X_s - X_r]E[X_r - X_0]$$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = E[X_sX_r - X_r^2] - E[X_s - X_r]E[X_r]$$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = E[X_sX_r] - E[X_r^2] - E[X_s - X_r]E[X_r]$$

$$E[X_r] = E[-B_r] = -E[B_r] = -0 = 0$$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = E[X_sX_r] - E[X_r^2]$$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = E[(-B_s)(-B_r)] - r$$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = E[B_sB_r] - r$$

Propiedad: si $r \leq s$ entonces $E\left[B_sB_r\right] = r$

$$Cov(X_s - X_r, X_r - X_0) = r - r = 0$$

- Condición 3: Continuidad, si B_r es continuo, entonces$-B_r$ también, por tanto,$X_t = -B_r$ es continuo.
- Condición 4: $X_t = -B_r \sim N(0, |s-r|)$

$$E[X_s - X_r] = E[-B_s + B_r]$$

$$E[X_s - X_r] = E[-B_s] + E[B_r] = -0 + 0 = 0$$

$$Var[X_s - X_r] = E[X_s - X_r, X_s - X_r] - E[X_s - X_r]^2$$

$$Var[X_s - X_r] = E[(-B_s + B_r)^2] - E[-B_s + B_r]^2$$

$$Var[X_s - X_r] = E[(B_s)^2] - 2E[B_sB_r] + E[(B_r)^2] - E[-B_s + B_r]^2$$

$$Var[X_s - X_r] = S + R - 2E[(B_s)B_r] - 0$$

Propiedad: si $r \leq s$ entonces $E[B_sB_r] = r$

$$Var[X_s - X_r] = s + r - 2r = s - r = |s - r|$$

2.3 Procesos de Weiner

Un proceso de Wiener W_t adaptado a la filtración F_t tal que:

1. El proceso inicia en $W_0 = 0$
2. W_t es cuadrado integrable $F_t - martingala$ con:

$$E(x) = [(W_t - W_s)^2] = t - s, s \leq t$$

3. El proceso W_t es continuo en t.

Procesos relacionados con W_t:

1. Movimiento Browniano Geométrico:

$$X_t = exp^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

   Usos: Black-Scholes-Merton
2. Movimiento Exponencial Browniano:

$$X_t = exp^{(W_t)}$$

3. Movimiento Integrado Browniano:

$$Z_t = \int_0^t (W_s) ds$$

   para $t \geq 0$
4. Movimiento Exponencial Integrado Browniano

$$V_t = exp^{\int_0^t W_s ds}$$

5. Proceso de Bessel:

$$R_t = dist[0, W(t)] = \sqrt{W_1(t)^2 + W_2(t)^2}$$

Propiedades de W_t

$$P(T_a < t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int exp^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

Ejemplo: Si $a = 1$ y $t = 10$:

$$P(T_a < 10) = 2(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0{,}316} exp^{\frac{-y^2}{2}} dy)$$

$$P(T_a < 10) = 2(1 - 0{,}6217) = 0{,}7566)$$

2.4 Límites de Procesos Estocásticos

Límite en Promedio Cuadrático para sucesiones:

$$ms - \lim_{n \to \infty} X_n = X$$

Límite en Promedio Cuadrático para Procesos Estocásticos:

$$ms - \lim_{n \to \infty} E[(X_t - X)^2] = 0$$

Proposición 4.9.1: Sea X_t un proceso estocástico, definido en $(\Omega, F.P)$ tal que $E[X_t] \to k$, un valor constante y $Var[X_t] = 0$ cuando $t \to \infty$, entonces:

$$ms - \lim_{t \to \infty} X_t = k$$

Ejercicio: Sea $X_t = \int_0^t W_s ds$ el movimiento Browniano Integrado cuya media es 0 y varianza $\frac{t^3}{3}$. Demostrar que $ms - \lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^\beta} = 0$, donde $\beta > \frac{3}{2}$

$$Y_t = \frac{X_t}{t^\beta}$$

$$\lim_{t\to\infty} E[Y_t] = \lim_{t\to\infty} E[\frac{X_t}{t^\beta}] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^\beta} E[X_t] = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[Y_t] = \lim_{t\to\infty} E[Y_t^2] - (E[Y_t])^2 = \lim_{t\to\infty} E[Y_t^2]$$

$$\lim_{t\to\infty} E[(\frac{X_t}{t^\beta})^2] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2\beta}} E[X_t^2] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2\beta}} \frac{t^3}{3} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{3-2\beta}}{3}$$

Si $\beta > \frac{3}{2}$, entonces $t = 0$ y por tanto:

$$\lim_{t\to\infty} Var[Y_t] = 0$$

2.5 Variación Cuadrática de un Proceso Estocático

$$< x,x >_t^{(2)} (w) = p - lim_{max_i|T_{i+1}-T_i|} \sum_{i=0}^{n-1} |X_{T_{i+1}} - X_{T_i}|^2$$

Donde se sabe que el $p - lim$ es el límite en probabilidad. Así mismo se tiene que:

$$ms - lim_{T\to\infty} X_t = k$$

Entonces

$$p - lim_{T\to\infty} X_t = k$$

Esto se determina ya que la convergencia en sentido casi seguro y en promedio cuadrático implican convergencia en probabilidad.

Ejercicio: Calcule la Variación cuadrática $< W,W >_t^{(2)} (w)$ del movimiento browniando W_t en un intervalo cerrado de 0 a T; $W_t = [0,T]$

Nota: La variación Cuadrática del Movimiento Browniano es finita, es decir:
$ms - lim_{n\to\infty} X_n = X$ donde $Xn = \sum_{i=0}^{n-1} |W_{T_{i+1}} - W_{T_i}|^2$ y $X = K$ por lo que se supone que es finito.

$$E[X_n] = E[\sum_{i=0}^{n-1} |W_{T_{i+1}} - W_{T_i}|^2] \to K$$

$$Var(Xn) = Var(\sum_{i=0}^{n-1} |W_{T_{i+1}} - W_{T_i}|^2) \to 0$$

Para la media:

$$lim_{n\to\infty} E[\sum_{i=0}^{n-1} |W_{T_{i+1}} - W_{T_i}|^2] = K$$

$$lim_{n\to\infty} E[\sum_{i=0}^{n-1} |W_{T_{i+1}} - W_{T_i}|^2] = lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (T_{i+1} - T_i) = T$$

Para la varianza:

$$lim_{n\to\infty} var(\sum_{i=0}^{n-1} |W_{T_{i+1}} - W_{T_i}|^2) = 0$$

La Variación Cuadratica T:
Proposición 5.2.1:

$$Var((w_t - w_s)^2) = 2(t-s)^2$$

Recordando que $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i=j}^{n} Cov(X_i, X_j)$ Entonces

$$lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Var((W_{T_{i+1}} - W_{T_i})^2) = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2(T_{i+1} - T_i)^2 = 2lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{T}{n})^2$$

$$= lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (2n(\frac{T}{n})^2) = 0$$

Finalmente, $ms - lim(X_n) = T$ y $p - lim(Xn) = T$

$$\therefore < W, W >_t^{(2)} (w) = T$$

Obteniendo la siguiente expresión:

$$ms - lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{T_{i+1}} - W_{Ti})^2 = T$$

Análogamente se llega a la conclusión de que

$$\int_0^t (dW_T)^2 = \int_0^t dT$$

$$\therefore (dW_T)^2 = dT$$

2.6 Diferenciales Estocásticos

El proceso browniano no es derivable por lo que no se habla de derivadas, sino que se tratan sólamente diferenciales.
Reglas básicas de diferenciación estocástica:

1. $(dW_t)^2 = dt$ Esta es la regla central de cálculo estocástico que hace la diferencia con el cálculo newtoniano. El cuadrado de una cantidad infinitesimal normal es significativa.
2. $(dt)^2 = 0$ En calculo newtoniano si T es una variable independiente se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal es una cantidad despreciable. En otras palabras, si algo es pequeño, entonces un cuadrado es todavía mucho más pequeño. De hecho $(dt)^a = 0$ si $a > 1$
3. $dW_t dt = 0$ Esto se demuestra debido a que $(dW_t)^2 = dt$, entonces despejando se tiene que

$$dt^{\frac{3}{2}} = 0$$

4. $d(cX_t) = c(dX_t)$ donde c es constante.
5. Sean X_t y Y_t dos procesos estocásticos, entonces:

$$d(X_t + Y_t) = d(X_t) + d(Y_t)$$

6. Sea $Z_t = \int_0^t W_u du$ el movimiento Browniano Integrado, entonces el $d(Z_t) = W_t dt$
7. $d(X_t Y_t) = d(X_t)d(Y_t) + d(X_t)Y_t + d(Y_t)X_t$

$$SiZ_t = X_t Y_t$$

$$SiZ_{t+dt} = X_{t+dt} Y_{t+dt}$$

$$dZ_t = Z_{t+dt} - Z_t$$
$$dZ_t = X_{t+dt}Y_{t+dt} - X_tY_t$$
$$dZ_t = d(X_t)d(Y_t) + d(X_t)Y_t + d(Y_t)X_t + X_tY_t - X_tY_t$$
$$dZ_t = d(X_t)d(Y_t) + d(X_t)Y_t + d(Y_t)X_t$$

Ejercicio: Sea $A_t = \frac{1}{t}Z_t$, donde Z_t es el Movimiento Browniano Integrado, calcular $d(A_t)$.
Al utilizar la fórmula del producto, se tiene que:

$$d(A_t) = d\left(\frac{1}{t} \cdot Z_t\right) = \frac{1}{t} \cdot dZ_t + Z_t \cdot d\left(\frac{1}{t}\right) + dZ_t \cdot d\left(\frac{1}{t}\right)$$

Calculando las respectivas diferenciales, se tiene

$$d(Z_t) = W_t dt$$

y

$$d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} \cdot dt$$

Por lo que:

$$d(A_t) = \frac{1}{t} \cdot W_t dt + Z_t \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \cdot dt\right) + W_t dt \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \cdot dt\right)$$

Haciendo que la solucíon sea:

$$d(A_t) = \frac{1}{t}\left(W_t - \frac{Z_t}{t}\right) dt$$

2.6.1 Fórmula de Ito

Se sabe que:

1. $y = m(x - x_1) + y_1$ y $y' = m$
2. $y = y_1 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + \ldots$ y $y' = 0 + c_1 + 2c_2(x - x_1)$

Debido a lo anterior:

$$f(x) = f(x_1) + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!}(x - x_1)^n$$
$$f(x) - f(x_1) = f'(x_1) + \cdots + \frac{f^n}{n!}(x_1)(x - x_1)^n$$
$$\Delta f(x) = f'\Delta x + \cdots + \frac{f^n}{n!}(\Delta x)^n$$
$$df(x) = f(x)'dx + \cdots + \frac{f^n(x)}{n!}(dx)^n$$
$$f(x) \Rightarrow F(x_t) = F_t$$

Formula de Ito:
$$F_t = f'(x_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(x_t)(dx_t)^2 \tag{2.6.1}$$

Ejemplo: Calcular $d(W_t^2)$

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f''(x) = 2$$
$$x_t = w_t$$

$$d(w_t^2) \Rightarrow d(w_t \cdot dw_t)$$

$$d(w_t^2) = 2w_t dw_t + \frac{1}{2} \times 2(dw_t)^2$$

$$d(w_t^2) = 2w_t dw_t + d_t$$

$$d(w_t \cdot w_t) = w_t dw_t + w_t dw_t + d_t$$

$$= 2w_t dw_t + dt$$

Ejemplo: Calcular el incremento $d(w_t)^5$:

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$x_t = w_t$$

$$d(w_t^5) = dF_t = 5w_t^4 dw_t + \frac{1}{2} \times 20w_t^3 d_t$$

$$= 5w_t^4 dw_t + 10w_t^3 d_t$$

Ejemplo: Calcular el incremento $d(sen(w_t))$

$$f(x) = sen(x_t)$$

$$f'(x) = cosx$$

$$f''(x) = -sen(x)$$

$$d(senw_t) = cosw_t dw_t - \frac{1}{2} senw_t d_t$$

Ejemplo: Calcular el incremento $d(e^{t+w_t^2})$

$$d(e^{t+w_t^2}) = d(e^t e^{w_t^2}) = e^t d(e^{w_t^2}) + e^{w_t^2} d(e^t) + d(e^t) d(e^{w_t^2})$$

$$\frac{d}{d_t}(e^t) = e^t d_t$$

$$d(e^{t+w_t^2}) = e^t d(e^{w_t^2}) + e^{w_t^2} e^t dt + e^t d(e^{w_t^2}) dt$$

$$d(e^{w_t^2}) = 2w_t e^{w_t^2} dw_t + \frac{1}{2}(4w_t^2 e^{w_t^2} + 2e^{w_t^2}) d_t$$

$$d(e^{w_t^2}) = 2w_t e^{w_t^2} dw_t + 2w_t^2 e^{w_t^2} d_t + e^{w_t^2} d_t$$

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} dx$$

$$d(e^{t+w_t^2}) = 2w_t^2 e^{t+w_t^2} dw_t + 2w_t^2 e^{t+w_t^2} d_t + e^{t+w_t^2} d_t + e^{t+w_t^2} d_t + 2w_t e^{t+w_t^2} dw_t d_t + 2w_t^2 e^{t+w_t^2} d_t^2$$

$$d(e^{t+w_t^2}) = (2w_t^2 e^{t+w_t^2} + e^{t+w_t^2} + e^{t+w_t^2}) d_t + 2w_t e^{t+w_t^2} dw_t + 2e^{t+w_t^2}(1+w_t^2) d_t + 2w_t e^{t+w_t^2} dw_t$$

$$d(e^{t+w_t^2}) = 2e^{t+w_t^2}[W_t dW_t + W_t^2 dt + dt]$$

2.6.2 Fórmula de Ito Multivariable

$$\textit{Fórmula de Ito Multivariable:} \quad d(\frac{X_t}{Y_t}) = \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t - dX_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{X_t}{Y_t^3}(dY_t)^2 \tag{2.6.2}$$

2.7 Procesos de Difusión de Ito

Un proceso de difución de Weiner en 3 dimesiones cumple que:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

donde

- $b(t, X_t)dt$ es la tendencia.
- $\sigma(t, X_t)$ es la volatilidad.
- dW_t es el modelo con parámetros.

2.8 Tareas

Tarea 1

Ejercicio 1: Para cualquier $t_0 \geq 0$, mostrar que el proceso $X_t = W_{t+t0} - W_0$ es un movimiento Browniano.

1.
$$X_{t0} = 0$$

2.
$$Cov(W_{t2+t0} - W_{t0}, W_{t+to} - W_0 = E[(W_{t2+t0} - W_0)(W_{t1+to} - W_0)]$$
$$Cov(W_{t2+t0} - W_0, W_{t+to} - W_{t0} = E[(W_{t2+t0} - W_0)(W_{t1+to} - 0)]$$
$$Cov(W_{t2+t0} - W_0, W_{t+to} - W_{t0} = E[(W_{t2+t0} W_{t+to})] - E[(W_{t+to})^2]$$
$$Cov(W_{t2+t0} - W_0, W_{t+to} - W_{t0} = (t + t_0) - (t + t_0) = 0$$

3. Son continuas
4.
$$E[W_{t+t0} - W_{t0}] = E[W_{t+t0}] - E[W_{t0}] = 0 - 0 = 0$$
$$Var[W_{t+t0} - W_{t0}] = E[(W_{t+t0} - W_{t0})^2] - E[W_{t+t0} - W_0]^2$$
$$Var[W_{t+t0} - W_{t0}] = E[(W_{t+t0} - W_{t0})^2]$$
$$Var[W_{t+t0} - W_{t0}] = E[(W_{t+t0}^2] + 2E[W_{t+t0} W_{t0}] - E[W_{t0})^2]$$
$$Var[W_{t+t0} - W_{t0}] = t + t_0 - 2t_0 + t_0 = t$$

Ejercicio 2: Para cualquier $\lambda_0 > 0$, mostrar que el proceso $X_t = \frac{1}{\sqrt{x}} W_t$ es un movimiento Browniano.

1.
$$X_{t0} = 0$$

2.
$$Cov(\frac{1}{\sqrt{x}} W_{\lambda_2 - \lambda_0} - \frac{1}{\sqrt{x}} W_\lambda, \frac{1}{\sqrt{x}} W_{\lambda + \lambda_0} - \frac{1}{\sqrt{x}} W_\lambda)$$
$$Cov(X_5 - X_1, X_r - X_0) = E[\frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda 5} - W_{\lambda r}) \frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda r} - W_{\lambda 0})]$$
$$E[\frac{1}{x} (W_{\lambda 5} - W_{\lambda r} - W_{\lambda r^2})]$$
$$\frac{1}{x} \lambda r - \frac{1}{x} \lambda r = 0$$

3. Son continuas en el tiempo
4.
$$E[\frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda s} - W_{\lambda r})] = \frac{1}{\sqrt{x}} (0) = 0$$
$$E[\frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda s} - W_{\lambda r})] = E[(\frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda s} - W_{\lambda r}))^2] - E[\frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda s} - W_{\lambda r})]^2$$
$$E[(\frac{1}{\sqrt{x}} (W_{\lambda s} - W_{\lambda r}))^2] - [0]$$
$$E[\frac{1}{x} W_{\lambda s}^2] - E[\frac{1}{x} W_{\lambda s} W_{\lambda r}] + E[\frac{1}{x} W_{\lambda r}^2] = \frac{\lambda}{x} (s - r)$$

Ejercicio 3: Sean W_t y $\bar{W}_t$ son movimientos Brownianos independientes, donde p es una cosnstante tal que $|p| \leq 1$

- Muestre que el proceso $X_t = pW_t + \sqrt{1-p^2}\bar{W}t$ es continuo $\sim N(0,t)$.

$$E[pW_s + \sqrt{1-p^2}\bar{W}s - pW_r + \sqrt{1-p^2}\bar{W}r] = 0 = E[X_s - X_r]$$

$$Var[X_s - X_r] = E[(X_s - X_r)^2] - E[X_s - X_r]^2 = E[(X_s - X_r)^2]$$

$$Var[X_s - X_r] = E[X_s^2] - 2E[X_s X_r] + E[X_r^2]$$

$$[Var[X_s - X_r] = E[(pW_s + \sqrt{1-p^2}\bar{W}s)^2] -$$

$$2E[(pW_s + \sqrt{1-p^2}\bar{W}s)(pW_r + \sqrt{1-p^2}\bar{W}r)] + E[(pW_r + \sqrt{1-p^2}\bar{W}r)^2]]$$

$$= p^2 s + 0 + (1-p^2)s - 2p^2 r + 0 + 0 - 2(1-p^2)r + p^2 r + 0 + (1-p^2)r$$

$$s - r$$

- $X_0 = p(0) + \sqrt{1-p^2}(0)$, continuo en el tiempo.

$$Cov[(X_s - X_r)(X_r - X_0)] = E[(X_s - X_r)(X_r - X_0)] - E[(X_s - X_r)]E[(X_r - X_0)]$$

$$E[(X_s - X_r)(X_r - X_0)] = p^2 + 0 + 0 + r - p^2 r - p^2 r - 0 - r + p^2 r = 0$$

Ejercicio 4: Sea Y una variable distribuida de forma $N \sim (0,1)$, considera el proceso estocástico $X_t = \sqrt{t}Y$. ¿X_t es un proceso Browniano?

1. $X_0 = \sqrt{0}(0) = 0$
2. Continuo en el tiempo
3. $Cov((X_{ts} - X_{tr})(X_{tr} - X_{t0})) = E[(X_{ts} - X_{tr})(X_{tr} - X_{t0})] - E[(X_{ts} - X_{tr})]E[(X_{tr} - X_{t0})]$

$$= E[(X_{ts} - X_{tr})(X_{tr} - X_{t0})] = E[(\sqrt{ts}y - \sqrt{tr}y)(\sqrt{tr}y - \sqrt{t0}y)] = E[\sqrt{tstr}y^2] - E[try^2]$$

$$\sqrt{tstr} - tr \neq 0$$

4. $E[X_s - X_r] = E[\sqrt{ts}y - \sqrt{tr}y] = E[\sqrt{ts}0] - E[\sqrt{tr}0] = 0$

$$Var[X_s - X_r] = E[(X_s - X_r)^2] - E[X_s - X_r]^2$$

$$Var[X_s - X_r] = E[(X_s - X_r)^2] = E[(\sqrt{ts}y - \sqrt{tr}y)^2]$$

$$Var[X_s - X_r] = E[tsy^2] - 2E[\sqrt{tstr}y^2] + E[try^2] = ts - 2\sqrt{tstr} + tr \therefore$$

No es Browniano.

Ejercicio 5: Calcule la media y la varianza del movimiento Browniano exponencial $X_t = e^{W_t}$.

$$E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x}\Theta_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t} + \alpha x} dx \therefore$$

$$\frac{2 + \alpha x - x^2}{2t} = \frac{-1}{2t}(x - t\alpha)^2 - \frac{\alpha^2 t}{2} \therefore$$

$$\frac{e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2t} + \alpha x} dx$$

$$u = \frac{x - t\alpha}{\sqrt{t}}, du = \frac{1}{\sqrt{t}}dx$$

$$E[e^{W_t}] = e^{\frac{t}{2}}$$

$$Var[e^{W_t}] = E[(e^{W_t})^2] - E[e^{W_t}]^2$$

$$Var[e^{W_t}] = e^{\frac{4t}{2}} - e^t = e^{2t} - e^t$$

Tarea 2

Ejercicio 1: Calcule el $ms - \lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t^\alpha}$ donde $\alpha > 1/2$

$$\lim_{t\to\infty} E[\frac{W_t}{t^\alpha}] = \frac{1}{t^\alpha} \lim_{t\to\infty} E[W_t] = \frac{1}{t^\alpha}(0) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[\frac{W_t}{t^\alpha}] = \lim_{t\to\infty} E[(\frac{W_t}{t^\alpha})^2] - E[\frac{W_t}{t^\alpha}]^2$$

$$\lim_{t\to\infty} E[(\frac{W_t}{t^\alpha})^2] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}} E[W_t^2] = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^{2\alpha}} = 0$$

Ejercicio 2: Para $p > 0$ y $c > 1$, calcule el $ms - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{W_t - ct}}{t^p}$ $\therefore$

$$\lim_{t\to\infty} E[\frac{e^{W_t - ct}}{t^p}] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^p e^{ct}} E[e^{W_t}] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^p e^{ct}} e^{t/2}$$

Sustituyendo con $p = 1$ y $c = 1$, se obtiene que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^p e^{ct}} e^{t/2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[\frac{e^{W_t - ct}}{t^p}] = \frac{1}{t^{2p} e^{2ct}} \lim_{t\to\infty} Var[e^{W_t}]$$

$$\frac{1}{t^{2p} e^{2ct}} \lim_{t\to\infty} [e^{2t} - e^t]$$

Sustituyendo con $p = 1$ y $c = 2$ se obtiene que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} (\frac{1}{e^{2t}} - \frac{1}{e^{3t}}) = 0$$

Ejercicio 3: Sea X_t un proceso estocástico, muestre que:

$$ms - \lim_{t\to\infty} X_t = 0 \Longleftrightarrow ms - \lim_{t\to\infty} |X_t| = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} E[X_t] = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[X_t] = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} E[|X_t|] = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[|X_t|] = 0$$

$$X^2 = (|X|)^2$$

Ejercicio 4: Pruebe que la variación cuadrática del movimiento Browniano W_t en $[a, b]$ es igual a $b - a$.

$$\lim_{t\to\infty} E[\sum_{t=0}^{n-1} |W_b - W_a|^2] = \lim_{t\to\infty} \sum_{t=0}^{n-1} E[|W_b - W_a|^2]$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = \lim_{t\to\infty} n(\frac{b-a}{n}) = b - a$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[\sum_{t=0}^{n-1} |W_b - W_a|^2] = \lim_{t\to\infty} \sum_{t=0}^{n-1} Var[|W_b - W_a|^2]$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{t=0}^{n-1} 2(b-a)^2 = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} 2n(\frac{b-a}{n})^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{n}(b-a)^2$$

Ejercicio 5: Resuelve

- $$E[dW_t^2 - dt] = 0 = dE[dW_t^2] - dE[dt] = 0$$

- $$Var[dW_t^2 - dt] = 0$$
$$E[(dW_t^2 - dt)^2] - E[dW_t^2 - dt]^2 = E[(dW_t^2 - dt)^2] - 0$$
$$E[dW_t^4 - 2dW_t^2 dt + dt^2] = E[dt^2 - 2dt^2 + dt^2] = 0$$

- $$\lim_{dt\to 0} E[dW_t^2 - dt] = \lim_{dt\to 0} 0 = 0$$
$$\lim_{dt\to 0} Var[dW_t^2 - dt] = \lim_{dt\to 0} 0 = 0$$

Ejercicio 6: Considere la partición equidistante $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$. Muestre que $ms - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{ti+1} - W_{ti})(t_{i+1} - t_1) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E[(W_{ti+1} - W_{ti})(\frac{T}{n})] = \lim_{n\to\infty} 0(\frac{T}{n}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} Var[(W_{ti+1} - W_{ti})(\frac{T}{n})] = \lim_{n\to\infty} E[((W_{ti+1} - W_{ti})(\frac{T}{n}))^2] =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} E[((W_{ti+1} - W_{ti})^2)(\frac{T^2}{n}^2)] = \lim_{n\to\infty} n\frac{T^2}{n^2}\frac{T}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{t^3}{n^2} = 0$$

$$ms - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{ti+1} - W_{ti}) = sW_t$$
$$t_{i+1} - t_i = dt$$

Tarea 3

Ejercicio 1: Comprobar

- a) $d(X_t - Y_t) = dX_t - dY_t$

$$Z_t = X_t - Y_t \therefore Z_{t+dt} = X_{t+dt} - Y_{t+dt}$$
$$d(Z_t) = Z_{t+dt} - Z_t = (X_{t+dt} - Y_{t+dt}) - (X_t - Y_t)$$
$$d(Z_t) = (X_{t+dt} - X_t) - (Y_{t+dt} - Y_t)$$
$$d(Z_t) = dX_t - dY_t$$

- b) $d(f(t)Y_t) = f(t)dY_t + Y_t df(t)$, cuando Y_t satisface $dY_t = a(t,W_t)dt + b(t,W_t)dW_t$

$$d(f(t)Y_t) = f(t)dY_t + Y_t df(t) + df(t)dY_t + df(t)(a(t,W_t)dt + b(t,W_t)dW_t)$$
$$d(f(t)Y_t) = f(t)dY_t + Y_t df(t)$$

Ejercicio 2: Obtener las siguientes diferenciales estocásticas:

1. $d(W_t^2)$
$$d(W_tW_t)W_t dW_t + W_t dW_t + d_W t^2 = 2W_t dW_t + dt$$
2. $d(W_t^3)$
$$d(W_t^2 W_t) = W_t dW_t^2 + W_t^2 dW_t + dW_t dW_t^2$$
$$W_t(2W_t dW_t + dt) + W_t^2 dW_t + dW_t(2W_t dW_t + dt)$$
$$3W_t^2 dW_t + 3W_t dt$$

3. $d(tW_t)$

$$tdW_t + W_t dt + dtdW_t = tdW_t + W_t dt$$

Ejercicio 3: Sea $G_t = \frac{1}{t}\int_0^t e^{W_s} dW_s$ la media del movimiento Browniano en $[0,6]$. Encuentre dG_t:

$$f(t) = \frac{1}{t}; Z_t = \int_0^t e^{W_s} dW_s \therefore$$

$$d(f(t)Z_t) = f(t)dZ_t + Z_t df(t) + df(t)dZ_t$$

$$d(f(t)Z_t) = \frac{1}{t}e^{W_t}dt + frac{-}1t^2 \int_0^t e^{W_s} dW_s dt + 0$$

$$d(f(t)Z_t) = \frac{1}{t}e^{W_t}dt - \frac{1}{t^2}\int_0^t e^{W_s} dW_s dt$$

$$\frac{1}{t}[e^{W_t} - G_t]dt$$

Tarea 4

Ejercicio 1:

- $d(W_t e^{W_t})$
  - $f(x) = xe^x$
  - $f'(x) = xe^x + e^x$
  - $f''(x) = xe^x + 2e^x$

$$d(W_t e^{W_t}) = (W_t e^{W_t} + e^{W_t})dW_t + \frac{1}{2}(W_t e^{W_t} + 2e^{W_t})dt$$

$$e^{W_t}(W_t + 1)dW_t + e^{W_t}(\frac{W_t}{2} + t)dt$$

- $d(3W_t^2 + 2e^{5W_t})$
  - $f(x) = 3x^2 + 2x^{5x}$
  - $f'(x) = 6x + 10e^{5x}$
  - $f''(x) = 6 + 50e^{5x}$

$$d(3W_t^2 + 2e^{5W_t}) = (6W_t + 10e^{5W_t})dW_t + \frac{1}{2}(6 + 50e^{5W_t})dt$$

$$(6W_t + 10e^{5W_t})dW_t + (3 + 25e^{5W_t})dt$$

- $d(e^{t+W_t^2})$
  - $f(x) = e^{x^2}$
  - $f'(x) = 2xe^{x^2}$
  - $f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}$

$$d(e^{t+W_t^2}) = e^t d(e^{W_t^2}) + e^{W_t^2} d(e^t) + d(e^t)d(e^{W_t^2})$$

$$2e^{t+W_t^2}(1 + W_t^2)dt + 2W_t e^{t+W_t^2} dW_t$$

- $d((t + W_t)^n)$
  - $\frac{\partial}{\partial t} = n(t + X_t)^{n-1}$
  - $\frac{\partial}{\partial x} = n(t + X_t)^{n-1}$
  - $\frac{\partial}{\partial x^2} = n(n-1)(t + X_t)^{n-1}$

$$d((t + W_t)^n) = n(t + X_t)^{n-1}dt + n(t + X_t)^{n-1}dX_t + n(n-1)(t + X_t)^{n-2}(dX_t)^2$$

$$n(t + X_t)^{n-2}[((t + W_t) + \frac{n-1}{2})dt + (t + W_t)dW_t]$$

- $d(\frac{1}{t}\int_0^t W_u du)$

- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-1}{t^2}$
- $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}$
- $\frac{\partial}{\partial x^2} = 0$

$$d(\frac{1}{t}\int_0^t W_u du) = \frac{-1}{t^2}dtZ_t + \frac{1}{t}dZ_t$$
$$\frac{-1}{t^2}[\int_0^t W_u du] + \frac{1}{t}W_t dt$$

- $d(\frac{1}{t^\alpha}\int_0^t W_u du)$
  - $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-\alpha}{t^{\alpha-1}}$
  - $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\alpha}$
  - $\frac{\partial}{\partial x^2} = 0$

$$d(\frac{1}{t^\alpha}\int_0^t W_u du) = \frac{-\alpha}{t^{\alpha-1}}dtZ_t + \frac{1}{t^\alpha}dZ_t$$
$$\frac{1}{t^\alpha}[e^{W_t} - \frac{\alpha}{t}\int_0^t e^{W_u}du]dt$$

Tarea 5

Ejercicio 1:

- $d(tW_t) = W_t dt + t dW_t$
  - $\frac{\partial}{\partial t} = W_t$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t} = t$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t^2} = 0$
- $d(e^t W_t) = e^t W_t dt + e^t dW_t$
  - $\frac{\partial}{\partial t} = W_t e^t$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t} = e^t$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t^2} = 0$
- $d(t^2 cosW_t) = (2t)cosW_t dt - t^2 senW_t dW_t - \frac{1}{2}t^2 cosW_t dt = tcosW_t[2 - \frac{t^2}{2}]dt - t2senW_t dW_t$
  - $\frac{\partial}{\partial t} = 2tcosW_t$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t} = (-t)senW_t$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t^2} = (-t^2)cosW_t$
- $d((sen(t))(W_t^2)) = W_t^2 cos(t)dt + 2W_t sen(t)dW_t + \frac{1}{2}(2sen(t))dt = (W_t^2 cos(t) + sen(t))dt + 2W_t sen(t)dW_t$
  - $\frac{\partial}{\partial t} =$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t} =$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t^2} =$
- $d() =$
  - $\frac{\partial}{\partial t} = W_t^2 cos(t)$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t} = 2W_t sen(t)$
  - $\frac{\partial}{\partial W_t^2} = 2sen(t)$

Ejercicio 2:

- $f(t,x,y) = x^2 + y^2$, encuentre $df(t,x,y)$
  - $\partial_t f(t,x,y) = 0$
  - $\partial_x f(t,x,y) = 2x$
  - $\partial_y f(t,x,y) = 2y$
  - $\partial_{x^2} f(t,x,y) = 2$
  - $\partial_{y^y} f(t,x,y) = 2$

- $\partial^2_{xy} f(t,x,y) = 0$

$$df(t,x,y) = 2xdx + 2ydy + \frac{1}{2}2(dx)^2 + \frac{1}{2}2(dy)^2$$

$$2W_t' dW_t' + 2W_t^2 dW_t^2 + dt + dt$$

$$2W_t' dW_t' + 2W_t^2 dW_t^2 + 2dt$$

- $f(t,x,y) = ln(x^2+y^2)$, encuentre $df(t,x,y)$
  - $\partial_t f(t,x,y) = 0$
  - $\partial_x f(t,x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$
  - $\partial_y f(t,x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$
  - $\partial_{x^2} f(t,x,y) = \frac{2(-x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
  - $\partial_{y^y} f(t,x,y) = \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
  - $\partial^2_{xy} f(t,x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$df(t,x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy + \frac{1}{2}(\frac{2(-x^2+y^2)+2(x^2-y^2)}{x^2+y^2)^2})dt - \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

$$dF_t = \frac{2W_t' dW_t' + 2W_t^2 dW_t^2}{(W_t')^2 (W_t^2)^2}$$

3. Tercer Parcial: Integral Estocástica

3.1 La Integral Estocástica

Se sabe que $F_t = f(X_t)$ y $dF_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''X_t'dX_t^2$ entonces:

$$\int_0^t d(W_s)^2) = \int_0^t 2W_s\,dW_s + \int_0^t ds$$

$$W_t^2 - W_0^2 = 2\int_0^t W_s\,dW_s + s\Big|_0^t$$

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s\,dW_s + t = Integral\,de\,Ito$$

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

La integral estocástica, o integral de Ito, $V_t = \int_a^b F_t\,dW_t$ es el proceso estocástico tal que:

$$ms \sim [\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n-1} F_{ti}(W_{ti+1} - W_{ti})) = V_t]$$

Donde W_t es el movimiento Browniano estándar y $a \le t_0 \le t_i \le ... \le t_n \le b$,en el intervalo $[a,b]$ tal que $t_{i-1} - t_i = \frac{(b-a)}{n}$; $i = 0,1,2,....,n-1$, entonces:

$$S_n = (\sum_{i=0}^{n-1} F_{ti}(W_{ti+1} - W_{ti}))\ \ entonces\ \ ms \sim \lim_{n\to\infty} S_n = V_t$$

$$\lim_{n\to\infty} E[(S_n - V_t)^2] = 0$$

Ejemplo 1: Calcule la integral: $\int_a^b c\,dW_t$ donde c es una constante.

$$S_n = (c)(\sum_{i=0}^{n-1}((W_{t1} - W_{t0}) + (W_{t2} - W_{t1}) + ... + (W_{tn} - W_{tn-1})) = c(W_b - W_a)$$

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} S_n = V_t\ \ entonces\ \ \lim_{n\to\infty} E[(S_n - V_t)^2] = 0$$

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} E[((c(W_b - W_a)) - (V_t))^2]\ \ entonces\ \ c[W_b - W_a] - V_t = 0$$

Para cumplir la igualdad $V_t = c[W_b - W_a]$ por lo que:

$$\int_a^b c\,dW_t = c[W_b - W_a]$$

Ejemplo 2: Calcule la integral: $\int_0^T W_t\,dW_t$ Nota: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ por lo que $xy = \frac{1}{2}[(x+y)^2 - x^2 - y^2]$ Si: $x = W_{ti}$ y $y = (W_{ti+1} - W_{ti})$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti} + W_{ti+1} - W_{ti})^2 - (W_{ti})^2 - (W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1})^2 - (W_{ti})^2 - (W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1}^2 - W_{ti}^2) - (W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1}^2 - W_{ti}^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

Se sabe que:

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} S_n = V_t \;\; entonces \;\; \lim_{n\to\infty} E[(S_n - V_t)^2] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E[((\frac{1}{2}[(W_{ti+1}^2 - W_{ti}^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2]$$

$$\lim_{n\to\infty} E[((\frac{1}{2}[(W_{n-1}^2 - W_0^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2]$$

Proposición 2.15.2: Si X_n y Y_n convergen en promedio cuadrático, entonces:

1. $ms \sim \lim_{n\to\infty} X_n + Y_n = ms \sim \lim_{n\to\infty} X_n + ms \sim \lim_{n\to\infty} Y_n$
2. $ms \sim \lim_{n\to\infty} (c) X_n = (c) ms \sim \lim_{n\to\infty} X_n;\;\; c \in R$

Proposición 4.11.6: Sea $T > 0$:

1. Considerando particiones equidistantes $0 = t_0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_n = T$
2. $ms \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{ti+1} - W_{ti})^2 = T$

Sabiendo lo anterior:

$$S_n = ms \sim \lim_{n\to\infty}[((\frac{1}{2}[(W_{n-1}^2 - W_0^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2]$$

$$S_n = \frac{1}{2} ms \sim \lim_{n\to\infty}(W_{n-1}^2 - W_0^2) - \frac{1}{2} ms \sim \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2$$

$$S_n = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}W_t^2 = \frac{W_t^2 - W_t}{2}$$

Para que la integral de Ito exista, la función $F_T = f(t, W_t)$ debe satisfacer:

1. La realización $t \to F_t(W)$ son continuas en [a,b] para cualquier elemento del espacio muestral $\omega \in \Omega$
2. F_t es un proceso no anticipatorio para t perteneciente a [a,b].

3.1.1 Procesos No Anticipatorios

¿Qué es un proceso no anticipatorio? Un proceso F_t se llama proceso No Anticipatorio si F_t es independiente de cualquier incremento futuro $W_{ti} - W_t$ para cualquier tiempo t y t' con $t \leq t'$
Ejemplo:

1. W_t, $e^(W_t)$, W_t^2; son procesos NO anticipatorios.
2. W_{t+1}, $\frac{1}{2}(W_{t+1} - W_t)$; son procesos anticipatorios.

3.1.2 Propiedades de la Integral de Ito

Proposisción 5.5.1 : Sea $f(t, W_t)$ y $g(t, W_t)$, procesos NO anticipatorios $C \in R$.

1. Aditividad:

$$\int_0^T f(t,Wt) + g(t,Wt) dWt = \int_0^T f(t,Wt) dWt + \int_0^T g(t,Wt) dWt$$

2. Homogeneidad:

$$\int_0^T cf(t,Wt) dWt = c\int_0^T f(t,Wt) dWt$$

3. Partición:

$$\int_0^T f(t,Wt)dWt = \int_0^u f(t,Wt)dWt + \int_u^T f(t,Wt)dWt$$

Proposisción 5.5.2 :

1. Media:

$$E[\int_a^b f(t,Wt)dWt] = 0$$

2. Isometría:

$$E[(\int_a^b f(t,Wt)dWt)^2] = E[\int_a^b f(t,Wt)^2 dWt]$$

3. Covarianza:

$$E[(\int_a^b [f(t,Wt)dWt)(\int_a^b g(t,Wt)dWt)] = E[\int_a^b f(t,Wt)g(t,Wt)dt]$$

3.1.3 Integral de Weiner

La integral de Wiener es un caso particular de la integral de Ito. Se obtiene al reemplazar el proceso estocástico NO anticipatorio $f(t,Wt)$ por una función determinista $f(t)$. Por lo tanto, se define de la siguiente manera:

$$V_t = \int_a^b f(t,Wt)$$

$$ms \sim [\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F_{ti}(W_{ti+1} - W_{ti}) = V_t]$$

3.2 Técnicas de Integración

Sea X_t un Procesos Estocástico cuyos incrementos satisfacen: $dX_t = f(t,Wt)dWt$.

1. $\int_a^b dX_t = \int_a^b f(t,Wt)dWt$

$$\int_a^b dX_t = ms \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (1)(X_{ti+1} - X_{ti})$$

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t1} - X_{t0} + X_{t2} - X_{t2} + \ldots + X_{tn} - X_{tn-1})$$

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{tn} - X_{t0})$$

Sabiendo que $t_n = b$ y $t_0 = a$

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_b - X_a)$$

$$(X_b - X_a) = \int_a^b f(t,Wt)dWt$$

Siendo equivalente a:

$$(X_t = X_a) + \int_a^b f(t,Wt)dWt$$

$$dX_t = f(t,Wt)dWt$$

Comprobando equivalencias:

$$X_t = d[X_a + \int_a^b f(t,Wt)dWt]$$

$$dX_t = d[X_a] + d[\int_a^b f(t,Wt)dWt]$$

$$dX_t = d[\int_a^b f(t,Wt)dWt]$$

$$dX_t = f(t,Wt)dWt$$

$$f(t,Wt)dWt = f(t,Wt)dWt$$

Ejercicio: Verificar que $\int_o^t W_s dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

$$X_t = \int_o^t W_s dW_s$$

$$Y_t = \frac{Wt^2}{2} - \frac{t}{2}$$

$$dY_t = d[\frac{Wt^2}{2} - \frac{t}{2}] = \frac{2Wt}{2}dW_t + \frac{1}{2}\frac{2}{2}dt - \frac{1}{2}dt = WtdWt$$

$$dX_t = d[\int_o^t W_s dW_s]$$

$$dX_t = W_t dW_t$$

$$dX_t = dY_t$$

Ejercicio: Verificar que $\int_o^t sW_s dW_s = \frac{t}{2}(W_t^2 - \frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\int_o^t W_s^2 ds$

$$X_t = \int_o^t sW_s dW_s$$

$$Y_t = \frac{t}{2}(W_t^2 - \frac{t}{2})$$

$$Z_t = -\frac{1}{2}\int_o^t W_s^2 ds$$

$$X_t = Y_t + Z_t$$

$$dX_t = d[Y_t + Z_t]$$

$$dX_t = d[Y_t] + d[Z_t]$$

Obtener dX_t, dY_t, dZ_t:

$$d(X_t) = d[\int_o^t sW_s dW_s] = tW_t dW_t$$

$$d(Z_t) = d(-\frac{1}{2}\int_o^t W_s^2 ds)$$

$$d(Z_t) = \frac{-1}{2}W_t^2 dt$$

$$d(Y_t) = \frac{t}{2}d(W_t^2 - \frac{t}{2}) + (W_t^2 - \frac{t}{2})d(\frac{t}{2}) + d(W_t^2 - \frac{t}{2})d(\frac{t}{2})$$

$$d(Y_t) = \frac{t}{2}[2W_t dW_t + dt - dt] + [W_t^2 - \frac{t}{2}]\frac{dt}{2} + [2W_t dW_t + dt - dt]dt + \frac{1}{2}dt$$

$$d(Y_t) = t[W_t dW_t] + [W_t^2 - \frac{t}{2}]\frac{dt}{2} + [2W_t dW_t]dt + \frac{1}{2}dt$$

$$d(Y_t) = t[W_t dW_t] + [W_t^2 - \frac{t}{2}]\frac{dt}{2} + [0] + \frac{1}{2}dt$$

$$d(Y_t) = t[W_t dW_t] + W_t^2\frac{dt}{2}$$

$$d(X_t) = d(Y_t) + d(Z_t)$$

$$tW_t dW_t = t[W_t dW_t] + W_t^2\frac{dt}{2} + \frac{-1}{2}W_t^2 dt$$

$$tW_t dW_t = t[W_t dW_t]$$

3.2.1 Integración por Partes

De cálculo newtoniano se sabe que la fórmula:

$$\int (u)dv = uv - \int (v)du$$

proviene de la regla de la multiplicación de la derivada, análogamente, se tiene la integración estocástica por partes.
Se analizará el caso dónde se tiene una función determinista $f(t)$ y una función estocástica: $g(W_t)$.

$$dX_t = X_{t+dt} - X_t \rightarrow X_{t+dt} = dX_t + X_t$$

$$f(t+dt)g(W_{t+dt} - f(t)g(W_t) = (df(t) + f(t))(dg(W_T) + g(W_t)) - f(t)g(W_t)$$
$$= df(t)dg(W_t) + f(t)dg(W_t) + df(t)g(W_t)$$

Después utilizando el lema de Ito y cálculo diferencial determinista, se obtiene $dg(W_t)$ y$df(t)$ y se sustituye.

$$= f'(t)dt(g'(W_T)dW_T + \frac{1}{2}g''(W_T)dt) + f(t)(g'(W_T)dW_t + \frac{1}{2}g''(W_T)dt) + g(W_T)f'(t)d$$

$$= f(t)g'(W_T)dW_T + \frac{1}{2}f(t)g''(W_T)dt + g(W_T)f'(t)dt = d(f(t)g(W_T))$$

Integrando esta expresión desde a hasta b se obtiene:

$$\int_a^b f(t)g'(W_T)dW_T + \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_T)dt + \int_a^b g(W_T)f'(t)dt = \int_a^b d(f(t)g(W_T))$$

Ahora despejando para el primer término de la ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\int_a^b f(t)g'(W_T)dW_T = f(t)g(W_T)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_T)dt - \int_a^b g(W_T)f'(t)dt$$

Ejercicio 1: Obtener la fórmula de la integral estocástica cuándo $g(W_t) = W_t$

$$\int_a^b f(t)dW_t = f(t)W_t|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b W_t f'(t)dt$$

Ejercicio 2: Obtener la fórmula de la integral estocástica cuando $f(t) = 1$

$$\int_a^b g'(W_T)dW_T = g(W_T)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}g''(W_T)dt$$

Ejercicio 3: Calcular $\int_a^b W_t dW_t$
Se sabe que $f(t) = 1$ por lo que se puede usar el resultado obtenido anteriormente: $\int_a^b g'(W_T)dW_T = g(W_T)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}g''(W_T)dt$
También se sabe que $g'(W_t) = Wt$ por lo que $g''(W_t) = 1$ y $g(W_t) = \frac{W_t^2}{2}$ Sustituyendo directamente en la ecuación se obtiene que

$$\int_a^b W_t dW_t = \frac{W_b^2 - W_a^2}{2} - \frac{(b-a)}{2}$$

Ejercicio 4: Calcular $\int_0^T W_t^2 dW_t$
Se tiene el mismo caso del ejercicio anterior: $\int_a^b g'(W_T)dW_T = g(W_T)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}g''(W_T)dt$
También se sabe que $g'(W_t) = Wt$ por lo que $g''(W_t) = 2W_t$ y $g(W_t) = \frac{W_t^3}{3}$
Sustituyendo directamente en la ecuación se obtiene que

$$\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{W_t^3 - W_0^3}{3} - \int_0^T W_t dt$$

Ejercicio 5: Calcular $\int_0^T e^{\frac{t}{2}} cos(W_t)dW_t$
Para este ejercicio se debe tomar la forma general ya que el problema no esta simplificado.
se sabe que $f(t) = e^{\frac{t}{2}}$ y por lo tanto $f'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}$, así mismo, se sabe que $g'(t) = cos(W_t)$ por lo que $g(t) = sin(W_t)$ y $g''(t) = -sin(W_t)$
Sustituyendo y simplificando se encuentra fácilmente que

$$\int_0^T e^{\frac{t}{2}} cos(W_t)dW_t = e^{\frac{T}{2}} sin(W_t)$$

Ejercicio 6: Calcular $\int_0^T e^{\frac{t}{2}+iW_t} dW_t$
Se sabe que $e^{iW_t} = cos(W_t) + isin(W_t)$ por lo que:

$$\int_0^T e^{\frac{t}{2}+iW_t} dW_t = \int_0^T e^{\frac{t}{2}}(cos(W_t) + isin(W_t))dW_t = e^{\frac{T}{2}} sin(W_t) + i(1 - e^{\frac{T}{2}} cos(W_t))$$

$$= i(1 - e^{\frac{T}{2}+iW_t})$$

En los siguientes problemas se va a poner en práctica la fórmula de la integral calculada anteriormente para el caso especial de $f(t) = 1$.
Ejercicio 1: Calcular la integral estocástica$\int_0^T \mathrm{e}^{W_t}\, \mathrm{d}W_t$ utilizando la integral por partes.
Se sabe que

$$\int_a^b f(t)g(W_t)\mathrm{d}W_t = f(t)g(W_t)|_b^a - \int_a^b \left[g(W_t)f'(W_t) + \frac{1}{2}f(t)g'(W_t)\right]\mathrm{d}t$$

por lo que

$$f(t) = 1; f'(t) = 0; g'(x) = \mathrm{e}^x = g''(x) = g(x)$$

haciendo que

$$\int_0^T \mathrm{e}^{W_t}\, \mathrm{d}W_t = \mathrm{e}^{W_t}\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{W_t}\mathrm{d}t$$

Por lo que la solución es

$$\int_0^T \mathrm{e}^{W_t}\, \mathrm{d}W_t = \mathrm{e}^{W_T} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{W_t}\mathrm{d}t$$

Ejercicio 2: Calcular la integral estocástica de $\int_0^T W_t\mathrm{e}^{W_t}\, \mathrm{d}W_t$
Entonces

$$f(t) = 1; f'(t) = 0; g'(x) = x\mathrm{e}^x; g''(x) = \mathrm{e}^x(1+x)$$

mientras que para g(x):

$$g(x) = \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$g(x) = \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x (x-1)$$

Por lo que

$$\int_0^T W_t \mathrm{e}^{W_t} \mathrm{d}W_t = \mathrm{e}^{W_t} (W_t - 1) + 1 - \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{W_t} (W_t + 1)\,\mathrm{d}t$$

Ejercicio 3: Calcular la integral estocástica de $\int_0^T \frac{1}{1+W_t{}^2} \mathrm{d}W_t$ Entonces

$$f(t) = 1; f'(t) = 0; g'(x) = \frac{1}{1+x^2}; g''(x) = \frac{-2}{(1+W_t{}^2)^2}; g(x) = \arctan(x)$$

Por lo que

$$\int_0^T \frac{1}{1+W_t{}^2} \mathrm{d}W_t = \arctan(W_t) + int_0^T \frac{W_t}{(1+W_t{}^2)^2} \mathrm{d}t$$

Ejercicio 4: Calcular la integral estocástica de $\int_0^T \frac{2W_t}{1+W_t{}^2} \mathrm{d}W_t$
Entonces

$$f(t) = 1; f'(t) = 0; g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}; g''(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+W_t{}^2)^2}; g(x) = \mathrm{Ln}(1+x^2)$$

Por lo que

$$\int_0^T \frac{2W_t}{1+W_t{}^2} \mathrm{d}W_t = \mathrm{Ln}(1+W_t{}^2) + \int_0^T \frac{W_t{}^2 - 1}{(1+W_t{}^2)^2} \mathrm{d}t$$

3.2.2 Regla de Sustitución para Integrales Definidas

Si g es continua sobre (a,b) yf es continua sobre el rango de $u = g(x)$,entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a))$$

Ejercicio 1: Resolver $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

$$u = 2x + 1\frac{du}{dx} = 2 \rightarrow\ dx = \frac{1}{2}du$$

$$= \int_0^4 \frac{\sqrt{u}}{2}du$$

$$= \int_1^9 u^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(27-1)$$

$$= \frac{26}{3}$$

Ecuación de Calor

$$\partial\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial t}=\alpha\left[\partial^2\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial x^2}+\partial^2\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial y^2}+\partial^2\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial z^2}\right] \tag{3.2.1}$$

Ejercicio 2: Encontrar todas las solouciones a $\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\vartheta(t,x)}{\partial t^2}=0$, mediante la ecuación de calor sin fuente de tipo: $\vartheta(t,x)=a(t)+b(x)$, $\therefore$

$$\vartheta(t,x)=a(t)+b(x)$$

$$\partial\frac{\vartheta(t,x)}{\partial t}=a'(t)$$

$$\partial^2\frac{\vartheta(t,x)}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}(b'(x))=b''(x)$$

$$a'(t)+\frac{1}{2}b''(x)=0$$

$$a'(t)=\frac{-1}{2}b''(x)$$

$$b''(x)=\frac{d}{dx}b'(x)=2c$$

$$b'(x)=\int 2cdx=2cx+c_2$$

$$b'(x)=\frac{db(x)}{dx}=2cx+c_2$$

$$b(x)=\int 2cxdx+\int c_2dx$$

$$b(x)=cx^2+c_2x+c_3$$

$$\begin{aligned}\vartheta(t,x)&=(-ct+c_1)+(cx^2+c_2x+c_3)\\&=c(x^2-t)+c_2x+c_1+c_3\\\vartheta(t,x)&=c(x^2-t)+c_2x+k\end{aligned}$$

Teorema: Sea $\vartheta(t,x)$ una solución de la ecuación de calor sin fuente y $f(t,x)=\partial\vartheta(t,x)$, entonces:

$$\int_a^b f(t,w_t)dw_t=\vartheta(b,w_b)-\vartheta(a,w_a)$$

Demostración:

$$F_t=\theta(t,w_t)$$

$$dF_t=\partial_t\vartheta(t,w_t)dt+\frac{1}{2}\partial_t^2\vartheta(t,w_t)dw_t+\frac{1}{2}\partial$$

$${}_x^2\vartheta(t,w_t)dt$$

$$dF_t=\left[\partial\vartheta(t,w_t)+\frac{1}{2}\partial^2\vartheta(t,w_t)\right]dt+\partial_x\vartheta(t,w_t)dw_t$$

$$dF_t=\partial\vartheta(t,w_t)dw_t$$

$$\int_a^b dF_t = \int_a^b f(t,x)dw_t = F_t \int_a^b$$

Ejercicio: Mostrar que $\int_0^T w_t dw_t = \frac{1}{2}w_t^2 - \frac{1}{2}T$.

$$\vartheta(t,x) = x^2 - t$$

$$f(t,w_t) = w_t$$

$$f(t,x) = \partial_x \nu(t,x)$$

$$f(t,x) = 2x$$

$$f(t,w_t) = 2w_t$$

$$\int_0^T 2w_t dw_t = (w_T - T)$$

$$2) \int_0^T (w_t^2 - t)dw_t = \frac{1}{3}x^3 - tx$$

$$f(t,x) = x^2 - t$$

Utilizando el teorema:

$$\int_0^T (w_t^2 - t)dw_t = (\frac{1}{3}w_t^3 - tw_t) \int_0^T$$

$$= \frac{1}{3}w_t^3 - TW_T$$

Ejercicio: Mostrar que$\int_0^T \lambda e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} cos(\lambda w_t)dw_t = e^{\frac{\lambda^2 T}{2}} Sen(\lambda w_t)$

$$\vartheta(t,x) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} sen(\lambda x)$$

$$f(t,x) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} cos(\lambda x)\lambda$$

$$f(t,w_t) = \lambda cos(\lambda w_t)e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} [sen(\lambda w_t) - sen(\lambda w_0)]$$

$$= e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} sen(\lambda w_t) \int_0^T$$

$$= e^{\lambda^2 \frac{T}{2}} sen(\lambda W_T) - e^0 sen(\lambda w_0) = e^{\lambda^2 \frac{T}{2}} sen(\lambda W_T)$$

3.3 Tareas

Tarea 1

Ejercicio 1: Comprobar que $\int_0^t dW_t = W_t$; $F_t = 1$ y $V_t = \int_0^t dW_t$

$$S_n = (\sum_{i=0}^{n-1} F_{ti}(W_{ti+1} - W_{ti}))\ \ entonces\ \ ms \sim \lim_{n\to\infty} S_n = V_t$$

$$\lim_{n\to\infty} E[((W_t - W_{t0}) - V_t)^2] = 0$$

$$W_t - W_{t0}) - V_t = 0$$

$$W_t - W_{t0}) = V_t$$

$$W_t = V_t = \int_0^t dW_t$$

Ejercicio 1: Comprobar que $\int_0^t W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_b^2 - W_a^2) - \frac{1}{2}(b-a)$, para $a = /0$ y $a < b$. Nota: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ por lo que $xy = \frac{1}{2}[(x+y)^2 - x^2 - y^2]$ Si: $x = W_{ti}$ y $y = (W_{ti+1} - W_{ti})$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti} + W_{ti+1} - W_{ti})^2 - (W_{ti})^2 - (W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1})^2 - (W_{ti})^2 - (W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1}^2 - W_{ti}^2) - (W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

$$Sn = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1}^2 - W_{ti}^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]$$

Se sabe que:

$$ms \sim \lim_{n\to\infty} S_n = V_t\ \ entonces\ \ \lim_{n\to\infty} E[(S_n - V_t)^2] = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E[((\frac{1}{2}[(W_{ti+1}^2 - W_{ti}^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2]$$

$$\lim_{n\to\infty} E[((\frac{1}{2}[(W_{n-1}^2 - W_0^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2]$$

Proposición 2.15.2: Si X_n y Y_n convergen en promedio cuadrático, entonces:

1. $ms \sim \lim_{n\to\infty} X_n + Y_n = ms \sim \lim_{n\to\infty} X_n + ms \sim \lim_{n\to\infty} Y_n$
2. $ms \sim \lim_{n\to\infty}(c)X_n = (c)ms \sim \lim_{n\to\infty} X_n;\ \ c \in R$

Proposición 4.11.6: Sea $T > 0$:

1. Considerando particiones equidistantes $0 = t_0 \leq t_1 \leq ..... \leq t_n = T$
2. $ms \sim \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{ti+1} - W_{ti})^2 = T$

Sabiendo lo anterior:

$$S_n = ms \sim \lim_{n\to\infty}[((\frac{1}{2}[(W_{n-1}^2 - W_0^2)] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2]$$

$$S_n = \frac{1}{2}ms \sim \lim_{n\to\infty}(W_{n-1}^2 - W_0^2) - \frac{1}{2}ms \sim \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}[(W_{ti+1} - W_{ti})^2]) - V_t)^2$$

$$S_n = \frac{1}{2}(W_b^2 - W_a^2) - \frac{1}{2}(b-a)$$

Para $a = /0$ y $a < b$

Tarea 2

Ejercicio 7.1.4 de Ovidiu[1]

- Demuestra que $\int_0^t lnW_s^2 dW_s = W_t(lnW_t^2 - 2) - \int_0^t \frac{1}{W_s} ds$

$$d(\int_0^t lnW_s^2 dW_s) = d(W_t(lnW_t^2 - 2)) - d(\int_0^t \frac{1}{W_s} ds =$$

$$(lnW_t^2 dW_t) - (lnW_0^2 dW_0) = d(W_t(lnW_t^2 - 2)) - (\frac{1}{W_t} dt)$$

$$(lnW_t^2 dW_t) = [lnW_t^2 dW : t + \frac{1}{W_t} dt] - (\frac{1}{W_t} dt)$$

$$(lnW_t^2 dW_t) = [lnW_t^2 dW_t] \therefore$$

$$d(X_t - Y_t - Z_t) = 0 \therefore X_t - Y_t - Z_t = constante$$

$$X_0 - Y_0 - Z_0 = 0 \therefore constante = 0$$

- Demuestra que $\int_0^t e^{s/2} cos[W_s] dW_s = e^{t/2} sen[W_t]$

$$d(\int_0^t e^{s/2} cos[W_s] dW_s) = d(e^{t/2} sen[W_t])$$

$$e^{t/2} cos[W_t] dW_t = d(e^{t/2} sen[W_t])$$

$$e^{t/2} cos[W_t] dW_t = e^{t/2} cos[W_t] dW_t$$

$$e^{t/2} cos[W_t] dW_t = e^{t/2} cos[W_t] dW_t \therefore$$

$$dX_t = dY_t \therefore dX_t - dY_t = 0 \therefore$$

$$X_t - Y_t = constante$$

$$X_0 - Y_0 = 0 \therefore constante = 0$$

- Demuestra que $\int_0^t e^{s/2} sen[W_s] dW_s = 1 - e^{t/2} cos[W_t]$

$$d(\int_0^t e^{s/2} sen[W_s] dW_s) = d(1) - d(e^{t/2} cos[W_t])$$

$$e^{t/2} sen[W_t] dW_t = 0 - d(e^{t/2} cos[W_t])$$

$$e^{t/2} sen[W_t] dW_t = e^{t/2} cos[W_t] dW_t \therefore$$

$$dX_t = dY_t - dZ_t \therefore dX_t - dY_t + dZ_t = 0 \therefore$$

$$X_t - Y_t + Z_t = constante$$

$$X_0 - Y_0 + Z_0 = 0 \therefore constante = 0$$

- Demuestra que $\int_0^t e^{W_t - \frac{s}{2}} dW_s = e^{W_t - \frac{t}{2}} - 1$

$$d(\int_0^t e^{W_t - \frac{s}{2}} dW_s) = d(e^{W_t - \frac{t}{2}}) - d(1)$$

$$e^{W_t - \frac{t}{2}} dW_t = d(e^{W_t - \frac{t}{2}}) - 0$$

$$e^{W_t - \frac{t}{2}} dW_t = e^{W_t - \frac{t}{2}} dW_t$$

$$dX_t = dY_t - dZ_t \therefore dX_t - dY_t + dZ_t = 0 \therefore$$

$$X_t - Y_t + Z_t = constante$$

$$X_0 - Y_0 + Z_0 = 0 \therefore constante = 0$$

- Demuestra que $\int_0^t cos[W_s]dW_s = senW_t + \frac{1}{2}\int_0^t senW_s ds$

$$d(\int_0^t cos[W_s]dW_s) = d(senW_t) + d(\frac{1}{2}\int_0^t senW_s ds)$$

$$cos[W_t]dW_t) = [cosW_t dW_t - \frac{1}{2}senW_t dt] + \frac{1}{2}senW_t dt)$$

$$cos[W_t]dW_t) = cosW_t dW_t$$

$$d(X_t - Y_t - Z_t) = 0 \therefore X_t - Y_t - Z_t = constante$$

$$X_0 - Y_0 - Z_0 = 0 \therefore constante = 0$$

- Demuestra que $\int_0^t senW_s dW_s = 1 - cosW_t - \frac{1}{2}\int_0^t cosW_s ds$

$$d(\int_0^t senW_s dW_s) = d(1 - cosW_t) - d(\frac{1}{2}\int_0^t cosW_s ds)$$

$$senW_t dW_t) = [0 - senW_t dW_t + \frac{1}{2}cosW_t dt] - \frac{1}{2}cosW_t dt$$

$$senW_t dW_t) = [senW_t dW_t \therefore$$

$$dX_t = dY_t - dZ_t \therefore dX_t - dY_t + dZ_t = 0 \therefore$$

$$X_t - Y_t + Z_t = constante$$

$$X_0 - Y_0 + Z_0 = 0 \therefore constante = 0$$

Tarea 3

Resolver las siguientes integrales estocásticas utilizando integración por partes:

- $\int_0^T W_t dW_t$
  - $f(t) = 1$
  - $g(t) = \frac{x^2}{2}$
  - $g'(t) = x$
  - $g''(t) = 1$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{W_0^2}{2} - \frac{T}{2} = \frac{W_T^2 - T}{2}$$

- $\int_0^T e^{t/2}sen(W_t)dW_t$
  - $f(t) = e^{t/2}$
  - $g(t) = -cos(x)$
  - $g'(t) = sen(x)$
  - $g''(t) = cos(x)$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [-e^{t/2}cosW_t] + [\frac{1}{2}\int_0^T e^{t/2}cosW_t dt] - [\frac{1}{2}\int_0^T e^{t/2}cosW_t dt]$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [-e^{T/2}cosW_T] - e^{0/2}cosW_0 = 1 - e^{T/2}cosW_T$$

- $\int_0^T e^{\alpha t}sen(W_t)dW_t$
  - $f(t) = e^{\alpha t}$

- $g(t) = sen(x)$
- $g'(t) = cos(x)$
- $g''(t) = -sen(x)$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [e^{\alpha t}senW_t] - [\alpha\int_0^T e^{\alpha t}senW_t dt] + [\frac{1}{2}\int_0^T e^{\alpha t}senW_t dt]$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [-e^{\beta t}senW_t] - [\alpha - \frac{1}{2}]\int_0^T e^{\alpha t}senW_t dt$$

- $\int_0^T e^{\beta t}sen(W_t)dW_t$
  - $f(t) = e^{\beta t}$
  - $g(t) = -cos(x)$
  - $g'(t) = sen(x)$
  - $g''(t) = cos(x)$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [-e^{\beta t}cosW_t] + [\beta\int_0^T e^{\beta t}cosW_t dt] - [\frac{1}{2}\int_0^T e^{\beta t}cosW_t dt]$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [-e^{\beta t}cosW_t] + [\beta - \frac{1}{2}]\int_0^T e^{\beta t}cosW_t dt$$

- $\int_0^T (W_t^2 - t)dW_t = \int_0^T W_t^2 dW_t - \int_0^T t dW_t$
  - Primera integral
    - $f(t) = 1$
    - $g(t) = \frac{x^3}{3}$
    - $g'(t) = x^2$
    - $g''(t) = 2x$
  - Segunda integral
    - $f(t) = t$
    - $g(t) = x$
    - $g'(t) = 1$
    - $g''(t) = 0$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = [\frac{W_T^3}{3} - \int_0^T W_t dt] - [TW_T - \int_0^T W_t dt] = \frac{W_T^3}{3} - TW_T$$

- $\int_0^T t dW_t$
  - $f(t) = 1$
  - $g(t) = x$
  - $g'(t) = 1$
  - $g''(t) = 0$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2}f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = TW_t - \int_0^T W_t dt$$

- $\int_0^T e^{-t/2+W_t}dW_t$
  - $f(t) = e^{-t/2}$

- $g(t) = e^x$
- $g'(t) = e^x$
- $g''(t) = e^x$

$$\int_a^b f(t)g'(W_t)dW_t = f(t)g(W_t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{1}{2} f(t)g''(W_t)dt - \int_a^b g(W_t)f'(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = e^{-t/2+W_t} + \frac{1}{2}\int_0^T e^{-t/2+W_t}dt - \frac{1}{2}\int_0^T e^{-t/2+W_t}dt$$

$$\int_0^T f(t)g'(W_t)dW_t = e^{-t/2+W_t} = e^{-T/2+W_T}e^{-0/2+W_0} = e^{-T/2+W_T} - 1$$

Tarea 4

Ejercicio 1: Verificar que las siguientes ecuaciones son solución de la ecuación de calor.

$$\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial t} = \alpha\left[\partial^2 \frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial x^2} + \partial^2 \frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial y^2} + \partial^2 \frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial z^2}\right]$$

- $\partial(t,x) = e^{-\lambda^2(t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$, donde $c_1.c_2 \in R$.
  - $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-\lambda^2}{2} e^{-\lambda^2(t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$
  - $\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-\lambda^2(t/2)}(\lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x})$
  - $\frac{\partial \rho}{\partial x^2} = e^{-\lambda^2(t/2)}(\lambda^2 c_1 e^{\lambda x} + \lambda^2 c_2 e^{-\lambda x})$

  $$\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial t} = \frac{-\lambda^2}{2} e^{-\lambda^2(t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}) + \frac{1}{2} e^{-\lambda^2(t/2)}(\lambda^2 c_1 e^{\lambda x} + \lambda^2 c_2 e^{-\lambda x}) = 0$$

- $\partial(t,x) = e^{\lambda^2(t/2)}(c_1 sen(\lambda x) + c_2 cos(-\lambda x))$, donde $c_1.c_2 \in R$.
  - $\frac{\partial \rho}{\partial t} = frac{-}\lambda^2 2 e^{\lambda^2(t/2)}(c_1 sen(\lambda x) + c_2 cos(-\lambda x))$
  - $\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{\lambda^2(t/2)}(\lambda c_1 cos(\lambda x) - \lambda c_2 sen(-\lambda x))$
  - $\frac{\partial \rho}{\partial x^2} = e^{\lambda^2(t/2)}(-\lambda^2 c_1 sen(\lambda x) - \lambda^2 c_2 cos(-\lambda x))$

  $$\frac{\vartheta(t,x,y,z)}{\partial t} = frac{-}\lambda^2 2 e^{\lambda^2(t/2)}(c_1 sen(\lambda x) + c_2 cos(-\lambda x))$$
  $$+\frac{1}{2} e^{\lambda^2(t/2)}(-\lambda^2 c_1 sen(\lambda x) - \lambda^2 c_2 cos(-\lambda x)) = 0$$

Ejercicio 2: Con ayuda de las funciones encontrar el valor de cada una da las integrales estocásticas.

- $\int_0^T e^{-t/2+W_t} dW_t \therefore$

  $$\rho(t,x) = e^{-\lambda^2(t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$$
  $$\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-\lambda^2(t/2)}(\lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x})$$
  $$c_1 = 1, c_2 = 0, y\lambda = 1 \therefore$$
  $$\partial x \rho(t,x) = e^{-t/2+x}$$

  Sustituyendo:

  $$\int_0^T e^{-t/2+W_t} dW_t = e^{-T/2+W_T} - e^{-0/2+W_0} = e^{-T/2+W_T} - -1$$

- $\int_0^T e^{\lambda^2 t/2} sen(W_t) dW_t \therefore$

  $$\rho(t,x) = e^{-\lambda^2(t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$$
  $$\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-\lambda^2(t/2)}(\lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x})$$

$$c_1 = 0, c_2 = 1, y\lambda = 1 \therefore$$
$$\partial x\rho(t,x) = -\lambda e^{\lambda^2 t/2} sen(\lambda x)$$

Sustituyendo:

$$-\lambda \int_0^T e^{\lambda^2 t/2} sen(\lambda_W t) dW_t = e^{\lambda^2 T/2} cos(\lambda_W T) - e^{\lambda^2 0/2} cos(\lambda_W 0)$$

$$\int_0^T e^{\lambda^2 t/2} sen(\lambda_W t) dW_t = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{\lambda^2 T/2} cos(\lambda_W T))$$

- $\int_0^1 e^t cos(\sqrt{2}W_t) dW_t \therefore$

$$\rho(t,x) = e^{-\lambda^2 (t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-\lambda^2 (t/2)}(\lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x})$$
$$c_1 = 1, c_2 = 0, y\lambda = \sqrt{2} \therefore$$
$$\partial x\rho(t,x) = \sqrt{2} e^t cos(\sqrt{2}x)$$

Sustituyendo:

$$\sqrt{2} \int_0^1 e^t cos(\sqrt{2}W_t) dW_t = e^1 sen(\sqrt{2}W_1) - e^0 sen(\sqrt{2}W_0)$$

$$\int_0^1 e^t cos(\sqrt{2}W_t) dW_t = \frac{e}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}W_1)$$

- $\int_0^3 e^{2t} cos(2W_t) dW_t \therefore$

$$\rho(t,x) = e^{-\lambda^2 (t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-\lambda^2 (t/2)}(\lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x})$$
$$c_1 = 1, c_2 = 0, y\lambda = 2 \therefore$$
$$\partial x\rho(t,x) = 2e^{2t} cos(2x)$$

Sustituyendo:

$$2 \int_0^3 e^{2t} cos(2W_t) dW_t = e^{(2)(3)} sen(2W_{(3)}) - e^0 sen(2W_0)$$

$$\int_0^3 e^{2t} cos(2W_t) dW_t = \frac{e^6}{\sqrt{2}} sen(2W_3)$$

- $\int_0^4 e^{-t+\sqrt{2}W_t} dW_t \therefore$

$$\rho(t,x) = e^{-\lambda^2 (t/2)}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-\lambda^2 (t/2)}(\lambda c_1 e^{\lambda x} - \lambda c_2 e^{-\lambda x})$$
$$c_1 = 1, c_2 = 0, y\lambda = \sqrt{2} \therefore$$
$$\partial x\rho(t,x) = \sqrt{2} e^{-t+\sqrt{2}x}$$

Sustituyendo:

$$\sqrt{2} \int_0^4 e^{-t+\sqrt{2}W_t} dW_t = e^{-4+\sqrt{2}W_4} - e^{-0+\sqrt{2}W_0}$$

$$\int_0^4 e^{-t+\sqrt{2}W_t} dW_t = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-4+\sqrt{2}W_4} - 1$$

4. Cuarto Parcial: E.D. Estocásticas

4.1 Solución de E.D.E. por Técnica de Integración

Proposición 8.2.1 : La solución X_t de la E.D.E. $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$ está distribuida geométricamente con media $X_o + \int_0^t a(s)ds$ y varianza $\int_0^t (b(s))^2 ds$
Demostración: $E[X_t] = X_0 + \int_0^t a(s)ds$

$$\int_0^t dX_s = X_t - X_0 = \int_0^t a(s)ds + \int_0^t (b(s))^2 dW_s$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + 0$$

Demostración: $Var[X_t] = \int_0^t (b(s))^2 ds$

$$Var[X_t] = Var[X_0] + Var[\int_0^t a(s)ds] + Var[\int_0^t (b(s))^2 dW_s]$$

$$Var[X_t] = 0 + 0 + Var[\int_0^t (b(s))^2 dW_s]$$

Proposición 5.6.1 : La integral de Weiner $I(f) = \int_a^b f(t)dW_t$ es una variable aleatoria con media de 0 y varianza $Var[I(f)] = \int_a^b (f(t))^2 dt$

$$Var[X_t] = \int_0^t (b(s))^2 ds$$

Ejercicio: Resolver la siguiente E.D.E. para $t \geq 0$ y calcular el $E[X_t]$ y la $Var[X_t]$. La ecuación es: $d[X_t] = cos(t)dt - sen(t)dW_t$ con $X_0 = 1$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t cos(t)dt - \int_0^t sen(t)dW_s$$

$$X_t - X_0 = \int_0^t cos(t)dt - [sen(t)w_t - \int_0^t cos(s)W_s ds]$$

$$X_t = 1 + sin(t) - [sen(t)w_t - \int_0^t cos(s)W_s ds]$$

$$E[X_t] = E[1] + E[sin(t)] - E[\int_0^t sen(s)dW_s]$$

$$E[X_t] = 1 + sin(t)$$

$$Var[X_t] = Var[1 + sin(t) - \int_0^s sen(s)dW_s]$$

$$Var[X_t] = 0 + 0 + Var[\int_0^t -sen(s)dW_s]$$

$$Var[X_t] = \int_0^t (sen(s))^2 ds$$

Nota: $cos(2\theta) = 1 - 2sen^2(\theta)$

$$Var[X_t] = \int_0^t -(sen(s))^2 ds = \int_0^t \frac{1 - cos(2\theta)}{2}$$

$$Var[X_t] = \frac{t}{2} - \frac{sen(2t)}{4}$$

Ejercicio: Resolver la siguiente E.D.E. para $t \geq 0$ y calcular el $E[X_t]$ y la $Var[X_t]$. La ecuación es: $d[X_t] = e^t dt + \sqrt{t}\, dW_t$ con $X_0 = 0$

$$X_t = \int_0^t e^s ds + \int_0^t \sqrt{s}\, dW_s$$

$$X_t = [e^t - 1] + \int_0^t \sqrt{s}\, dW_s$$

$$X_t = [e^t - 1] + [\sqrt{t}\, W_t - \frac{1}{2}\int_0^t W_s \frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{s}(0) ds]$$

$$X_t = [e^t - 1] + [\sqrt{t}\, W_t] - [\frac{1}{2}\int_0^s W_s \frac{1}{\sqrt{s}} ds]$$

$$E[X_t] = E[e^t - 1] + E[\int_0^t \sqrt{s}\, dW_s]$$

$$E[X_t] = E[e^t - 1] + E[0] = e^t - 1$$

$$Var[X_t] = Var[e^t - 1 + \int_0^t \sqrt{s}\, dW_s] = [0] + \int_0^t s\, ds = \frac{t^2}{2}$$

Ejercicio: Verificar que $E[\int_a^b f(t,Wt) dW_t] = 0$; se sabe que:

$$I = ms \sim \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, W_{ti})(W_{ti+1} - W_{ti}))$$

Dado que $f(t,Wt)$ es no anticipatorio, entonces $f(t_i,W_{ti})$ es independiente del incremento $[W_{ti+1} - W_{ti}]$.

$$E[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, W_{ti})(W_{ti+1} - W_{ti})] = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, W_{ti}) E[(W_{ti+1} - W_{ti})]$$

$$E[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, W_{ti})(W_{ti+1} - W_{ti})] = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, W_{ti})[0] = 0$$

Sabemos que $I = ms \sim \lim_{n\to\infty} S_n$, lo cual es equivalente a tener $\lim_{n\to\infty} E[S_n - I] = 0$ entonces $0 \leq E[(S_n - I)^2]$ A partir de estos 2 hechos y aplicando el teorema del valor intermedio:

$$0 \leq (E[S_n - I])^2 \leq E[(S_n - I)^2], n \to \infty$$

$$E[(S_n - I)^2] = 0$$

Entonces si $E[S_n] = 0$, y en consecuencia $E[I] = 0$ por lo que:

$$I = \int_a^b f(t,Wt) dW_t] = 0$$

4.2 E.D.E. Exactas

La ecuación diferencial estocástica $dX_t = a(t,W_t)dt + b(t,W_t)$ se llama exacta si existe una función diferenciable tal que $a(t,x) = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,x)$ y $b(t,x) = \partial_x f(t,x)$ Entonces la solución es $X_t = f(t,W_t)$. Comprobación:

$$df(t,W_t) = \partial_t f(t,W_t)dt + \partial_x f(t,W_t)dW_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,W_t)dt$$

$$df(t,W_t) = [\partial_t f(t,W_t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,W_t)]dt + \partial_x f(t,W_t)dW_t$$

Donde se tiene que:

$$a(t,x) = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_t^2 f(t,x)$$

$$b(t,x) = \partial_x f(t,x)$$

$$d(X_t) = df(t,W_t) \therefore X_t = f(t,W_t)$$

Para determinar $f(t,W_t)$:

1. Integrar parcialmente respecto a x la ecuación $b(t,W_T)$, ya que es parcial se agrega un nuevo componente çonstante"$T(t)$ que depende del tiempo.
2. Sustituir $f(x)$ en la ecuación 1 y calcular $T(t)$ mediante la integral
3. Calcular la constante de integración del 2do paso a partir de condiciónes iniciales de X_t.

Resolver la E.D.E. $dX_T = e^t(1+W_t^2)dt + (1+2e^tW_t)dW_t$ como una ecuación exacta: $a(x,t) = e^t(1+W_t^2)$ y $b(x,t) = (1+2e^tW_t)$

$$\int b(x,t)dx = \int (1+2e^tx)dx = x + e^tx^2 + T(t)$$

$$a(x,t) = e^t(1+x^2)$$

$$= \partial_t(x+e^tx^2+T(t)) + \frac{1}{2}\partial_x^2(x+e^tx^2+T(t))$$

$$= x^2e^t + T'(t) + \frac{1}{2}2e^t + (x^2+1)e^t + T'(t)$$

$$T'(t) = 0, T(t) = C$$

$$f(x,t) = x + e^tx^2 + C$$

$$f(W_t,0) = W_t + e^tW_t^2 + C = 0 \therefore C = 0$$

$$f(W_t,t) = W_t + e^tW_t^2$$

Resolver la siguiente E.D.E.:$[2tW_t^3 + 3t^2(1+W_t)]dt + (3t^2W_t^2+1)dW_t$ con $X_0 = 0$.

$$a(x,t) = 2tx^3 + 3t^2(1+x)$$

$$b(x,t) = 3t^2x^2 + 1$$

$$\int b(x,t)dx = \int (3t^2x^2+1)dx = t^2x^3 + x + T(t)$$

$$= \partial_t(t^2x^3+x+T(t)) + \frac{1}{2}\partial_x^2(t^2x^3+x+T(t)) = 2tx^3 + T'(t) + \frac{1}{2}23t^2x$$

$$3t^2 = T'(t)$$

$$T(t) = T^3 + c$$

$$X_t = f(x,t) = t^2x^3 + x + t^3 + c$$
$$C = 0$$
$$X_t = t^2W_t^3 + W_t + t^3$$

Teorema: Si la E.D.E. $dX_t = a(t,W_t)dt + b(t,W_t)$ es exacta, entonces las funciones $a(t,W_t)$ y $b(t,W_t)$ satisfacen la siguiente ecuación.

$$\partial_x a(t,x) = \partial_t b(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 b(t,x)$$

Es importante notar que la ecuación es solamente una condición necesaria para tener una ecuación exacta. Esto significa que si la condición no se satisface, entonces la ecuación no es exacta.
Ejemplo: Confirmar que la E.D.E. $dX_t = (1+W_t^2)dt + (t^4 + W_t^2)dW_t$ no es exacta:

$$a(t,x) = 1 + x^2$$
$$b(t,x) = t^4 + x^2$$
$$\partial_x a(t,x) = \partial_t b(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 b(t,x)$$
$$2x = 4t^3 + 1$$

Es falso por lo que no es exacta.

4.3 Solución de E.D.E. por Integración por Inspección

Para resolver Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por este método, se busca la oportunidad de aplicar la fórmula del producto y del cociente como solución a la ecuación diferencial, esto es, hacer uso de:

$$d(f(t)\cdot Y_t) = f(t)dY_t + Y_t d(f(t))$$
$$d\left(\frac{X_t}{f(t)}\right) = \frac{f(t)dX_t - X_t d(f(t))}{f^2(t)}$$

Analice los siguientes ejemplos:
Ejercicio: Resolver la siguiente ecuación diferencial estocástica, con condición inicial $X_0 = a$.

$$dX_t = (W_t + W_t^2)dt + 2(tW_t)dW_t$$

Si se dice que $Y_t = W_t^2$, entonces:

$$dY_t = d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt$$

Por lo que para que se cumpla lo que se busca, se puede decir que $f(t) = t$, por tanto:

$$dX_t = d(f(t)\cdot Y_t) = d(t\cdot W_t^2)$$

Si se integra

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t d(s\cdot W_s^2)$$

Haciendo que la solución a la ecuación diferencial estocástica sea:

$$X_t = a + tW_t^2$$

Ejercicio: Calcular la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dX_t = (W_t + 3t^2)dt + tdW_t$$

Es importante saber que:

$$d(t \cdot W_t) = W_t dt + tdW_t$$

Haciendo que dX_t se pueda reescribir como

$$dX_t = d(t \cdot W_t) + 3t^2 dt$$

Al integrar, se tiene que la solución toma la forma de

$$X_t = X_o + t^3 + tW_t$$

Ejercicio: Resolver lo siguiente utilizando el método de integración por inspección:

$$e^{-2t} dX_t = (1 + 2W_t^2)dt + 2W_t dW_t$$

Al reescribir la ecuación, se puede decir que

$$dX_t = e^{2t} dt + 2e^{2t} W_t^2 dt + 2e^{2t} W_t dW_t$$

Aquí se puede establecer que:

$$Y_t = W_t^2 \quad \therefore \quad f(t) = e^{2t}$$

Si se analiza la diferenciación de su producto, entonces

$$d(e^{2t} W_t^2) = e^{2t} d\left(W_t^2\right) + W_t^2 d\left(e^{2t}\right)$$

$$d(e^{2t} W_t^2) = W_t^2 (2e^{2t})dt + e^{2t}(2W_t dW_t + dt) = e^{2t} dt + 2e^{2t} W_t^2 dt + 2e^{2t} W_t dW_t$$

Haciendo que se pueda decir que

$$dX_t = d(e^{2t} W_t^2)$$

Al integrar, encontramos que la solución toma la forma de:

$$X_t = X_o + e^{2t} \cdot W_t^2$$

Ejercicio: Resolver lo siguiente tomando en consideración el método del cociente, con la condición de frontera $X_1 = 0$.

$$t^3 dX_t = (3t^2 X_t + t)dt + t^6 dW_t$$

Analizar la siguiente relación:

$$d\left(\frac{X_t}{t^3}\right) = \frac{t^3 dW_t - 3t^2 X_t dt}{t^6}$$

De la ecuación diferencial que se intenta resolver, se puede entonces decir que:

$$d\left(\frac{X_t}{t^3}\right) = \frac{t^3 dW_t - 3t^2 X_t dt}{t^6} = \frac{tdt + t^6 dW_t}{t^6}$$

$$d\left(\frac{X_t}{t^3}\right) = \frac{tdt + t^6 dW_t}{t^6} = t^{-5} dt + dW_t$$

Al integrar

$$\frac{X_t}{t^3} = -\frac{1}{4} t^{-4} + W_t + X_{to} \qquad \therefore$$

$$X_t = -\frac{1}{4}t^{-1} + t^3 W_t + t^3 X_{to}$$

Al hacer uso de la condición de frontera, eso es $to = 1$, se tiene que

$$X_1 = -\frac{1}{4} + W_1 + X_{to}$$

Despejando para X_{to}

$$X_{to} = \frac{1}{4} - W_1 \quad \therefore$$

La solución al problema es:

$$X_t = \frac{1}{4}\left(t^3 - \frac{1}{t}\right) + t^3\left(W_t - W_1\right)$$

Ejericio: encontrar la solución a la E.D.E. con condición $X_0 = 0$

$$dX_t = 2tW_t dW_t + W_t^2 dt$$

Se sabe que:

$$d(W_t^2 \cdot t) = 2tW_t dW_t + tdt + W_t^2 dt$$

Por lo que se puede reescribir a dX_t como:

$$dX_t = d(W_t^2 \cdot t) - tdt$$

Al integrar, se tiene entonces que la solución a la ecuación diferencial estocástica, junto con la condición dada, es:

$$X_t = W_t^2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2$$

4.4 Solución de E.D.E. por Variación de Parámetros

Ejerecicio: Resolver la siguiente E.D.E utilizando variación de parámetros.

$$dX_t = \alpha X_t dW_t, \alpha = cte$$

Primer Paso: Calcular la pseudo-solución

$$\frac{dX_t}{X_t} = \alpha dW_t$$

Al integrar

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \alpha \int_0^t dW_s$$

$$ln(X_s)\int_0^t = \alpha W_s \int_0^t$$

$$lnX_t - lnX_0 = \alpha W_t - \alpha W_0$$

$$e^{lnX_t} = e^{X_0 + \alpha W_t} = e^{lnX_0}e^{\alpha W_t} = X_0 e^{\alpha W_t} = X_0 e^{\alpha W_t}$$

$$X_t = e^{\alpha W_t + c}$$

Pseudo-solución

$$c = ln(X_0)$$

$$e^c = e^{lnX_0} = X_0$$

Segundo Paso: ahora sí, la solución

$$X_t = e^{\alpha W_t + c(t)} dX_t = d(e^{\alpha W_t} e^{c(t)}) = e^{c(t)}$$

$$d(X_t = d(e^{\alpha W_t}) + e^{\alpha W_t} d(e^{c_t})$$

$$d(f(t)y_t) = f(t)dy_t + y_t df(t) * d(e^{\alpha W_t}) = \alpha e^{\alpha W_t} dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha W_t} d_t$$

- $f(x) = e^{\alpha x}$
- $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$
- $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$$dX_t = \alpha e^{c(t)} dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{c_t} e^{\alpha W_t} d_t + c'(t) e^{\alpha W_t} e^{c(t)} d_t = e^{c(t)+\alpha W_t}[\alpha dw_t + \frac{1}{2}\alpha^2 d_t + c'(t)d_t]$$

Tercer Paso: Se sustituye en la ecuación inicial:

$$dX_t = \alpha X_t dw_t \alpha dw_t + \frac{1}{2}\alpha^2 d_t + c'(t)d_t$$

$$dX_t = \alpha dw_t (\frac{1}{2}\alpha^2 + c'(t))d_t = 0$$

$$\therefore \quad c'(t) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \Rightarrow c(t) = -\frac{1}{2}\alpha^2 t + k$$

Sustituyendo c(t) y analizar condición inicial

$$X_t = e^{\alpha w_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t + k} = e^k e^{\alpha w_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

$$t = 0, X_0 = e^k e^0 = e^k$$

$$X_t = X_0 e^{\alpha w_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Ejercicio: Resolver la siguiente E.D.E utilizando variación de parámetros. $dX_T = \mu X_t dt + \Theta X_t dw_t$ con μ y Θ constantes. Paso 1:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu d_t + \Theta dw_t$$

$$\int \frac{dX_t}{X_s} = \int_0^t \mu ds + \Theta \int_0^t dw_s$$

$$lnX_t - lnX_0 = \mu_t - \mu_0 + \Theta w_t - \Theta w_0$$

$$X_t = e^{\mu_t + \Theta w_t + c}$$

Paso 2:

$$X_t = e^{\mu_t + \Theta w_t + c}$$

$$d(X_t) = d[e^{\mu_t + \Theta w_t + c}] = e^{\mu_t + \Theta w_t + c}(\mu + c'(t))d_t + e^{\mu_t + \Theta w_t + c}\Theta dw_t + \frac{1}{2}\Theta^2 e^{\mu_t + \Theta w_t + c} d_t$$

$$dX_t = e^{\mu_t + \Theta w_t + c}[(\mu + c'(t) + \frac{1}{2}\theta^2)d_t + \Theta dw_t]$$

Sustituyendo en la E.D.E inicial:

$$e^{\mu_t + \Theta w_t + c}[(\mu + c'(t) + \frac{1}{2}\theta^2)d_t + \Theta dw_t] = \mu e^{\mu_t + \Theta w_t + c} d_t + \Theta e^{\mu_t + \Theta w_t + c} dw_t$$

$$(\mu + c'(t) + \frac{1}{2}\theta^2)d_t + \Theta dw_t = \mu d_t + \Theta dw_t$$

$$c'(t) = -\frac{1}{2}\Theta^2$$

$$c(t) = -\frac{1}{2}\Theta^2 t + k$$

Paso 3:

$$X_t = e^{\mu_t + \Theta w_t - \frac{1}{2}\Theta^2 t + k}$$

$$t = 0$$

$$X_0 = e^k$$

$$X_t = X_0 E^{(\mu - \frac{1}{2}\Theta^2)t} + \Theta w_t$$

4.5 Solución de E.D.E. por Factor Integrante

Este metodo se utiliza para resolver E.D.E de la siguiente forma:

$$dX_t = f(t, X_t)d_t + g(t)X_t dw_t$$

Donde f,g son funciones deterministas continuas: El factor integral está dado por:

$$p_t = e^{-\int_0^t g(s)dw_s + \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)d_s};$$

La ecuacion inicial se puede llevar a la siguiente forma exacta:

$$d(p_t X_t) = p_t f(t, x_t)d_t$$

Sustituyendo $Y_t = p_t X_t$ se obtiene que

$$dY_t = p_t f(t, y_t/p_t)d_t,$$

la cual se puede resolver por integracion, o por medio de la Ecuación Exacta.
Ejercicio: Resolver la siguiente E.D. por factor integrante.

$$dX_t = X_t d_t + \alpha X_t dW_t$$

Primer Paso: Factor integrante.

$$P_t = e^{-\alpha \int_0^t \alpha dw_s} + e^{\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2} = e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

Segundo Paso: Comprobar.

$$d(p_t X_t) = p_t f(t, x_t)dt$$

$$d(p_t X_t) = e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t X_t dt} = P_t dX_t + X_t dP_t + dX_t dP_t$$

$$*dP_t = d(e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}) = e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}[\frac{1}{2}\alpha^2 d_t + (-\alpha dw_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt]$$

$$= e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}[\alpha^2 dt - \alpha dw_t]$$

$$d(P_t X_t) = e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}(X_t dt + \alpha dw_t) + X_t(e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}[\alpha^2 dt - \alpha dw_t])$$

$$+(X_t dt + \alpha X_t dt w_t)e^{-\alpha w_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}(\alpha^2 dt - \alpha dw_t)$$

$$d(p_t X_t) = p_t f(t, x_t)dt$$

Tercer Paso: Resolver:

$$\int_0^t d(P_sX_s) = \int_0^t P_sX_s ds$$

$$(P_tX_t) - (P_0X_0) = \int_0^t P_SX_s ds$$

$$Y_t = P_tX_t \therefore dY_t = P_tX_t dt = Y_t dt \therefore$$

$$Y_t = e^t = P_tX_t \therefore X_t = \frac{1}{P_t}e^t$$

Sustituyendo:

$$P_tX_t = \int_0^t P_SX_s ds + (P_0X_0) = \int_0^t P_sX_s ds + ((1)(1))$$

$$P_tX_t = \int_0^t P_sX_s ds + 1$$

Ejercicio: Resolver la siguiente E.D. por factor integrante $dX_t = (r)dt + (\alpha)X_t dW_t$

$$f(t,X_t) = r \;\; y \;\; g(t) = \alpha$$

$$\rho_t = e^{-\int_0^t \alpha dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2 ds}$$

$$\rho_t = e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

$$d\rho_t X_t = e^{\left(-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)}(r)dt$$

$$\int_0^t d\rho_s X_s = \int_0^t e^{\left(-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s\right)}(s)ds$$

$$\rho_t X_t - \rho_0 X_0 = \int_0^t r e^{-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2} ds$$

Si $Y_t = \rho_t X_t$, y también $dY_t = d\rho_t X_t dt$ entonces:

$$Y_t = e^t = \rho_t X_t$$

Finalmente:

$$\rho_t X_t - (1)(X_0) = \int_0^t e^{-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} r ds$$

$$X_t = \left[X_0 + r\int_0^t e^{-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} ds\right]\rho_t$$

$$X_t = [X_0 + r\int_0^t e^{-\alpha W_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s} ds] e^{-\alpha W_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

4.6 Tareas

Tarea 1

Ejercicio: Resolver las siguientes ecuaciones difenciales estocásticas para $t \geq 0$ y determinar su media y varianza.

- $dX_t = cos(t)dt - sin(t)dW_t$, $X_0 = 1$
  - $a = cos(t)$
  - $dx(a) = 0$
  - $b = -sen(t)$
  - $dt(b) = -cos(t)$
  - $dx(b) = 0$
  - $dx^2(b) = 0$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t cos(s)ds - \int_0^t sin(s)dW_s$$

$$X_t - 1 = sen(t) - [sen(t)W_t - \int_0^t cos(s)W_s dW_s]$$

$$X_t = 1 + sen(t) - [sen(t)W_t - \int_0^t cos(s)W_s dW_s]$$

Media:

$$E[X_t] = E[1 + sen(t) - \int_0^t sin(s)dW_s] = 1 + sen(t)$$

Varianza:

$$Var[X_t] = Var[1 + sen(t) - \int_0^t sin(s)dW_s]$$

$$Var[X_t] = 0 + 0 + \int_0^t sin^2(s)ds]$$

$$Var[X_t] = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}sen(2t)$$

- $dX_t = e^t dt + \sqrt{t}dW_t$, $X_0 = 0$
  - $a = e^t$
  - $dx(a) = 9$
  - $b = t^{1/2}$
  - $dt(b) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$
  - $dx(b) = 0$
  - $dx^2(b) = 0$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t e^s ds + \int_0^t \sqrt{s}dW_s$$

$$X_t = e^t - 1 + \int_0^t \sqrt{s}dW_s$$

$$X_t = e^t - 1 + [W_t\sqrt{t} - \frac{1}{2}\int_0^t] \frac{W_s}{\sqrt{s}}ds$$

Media:

$$E[X_t] = E[e^t - 1 + \int_0^t \sqrt{t}dW_t] = e^t - 1$$

Varianza:

$$Var[X_t] = Var[e^t - 1 + \int_0^t \sqrt{t}dW_t] = 0 - 0 + \int_0^t tdt = \frac{t^2}{2}$$

- $dX_t = \frac{t}{1+t^2}dt + t^{3/2}dW_t$, $X_0 = 1$

- $a = \frac{t}{1+t^2}$
- $dx(a) = 0$
- $b = t^{3/2}$
- $dt(b) = 3/2t^{1/2}$
- $dx(b) = 0$
- $dx^2(b) = 0$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t \frac{s}{1+s^2} ds + \int_0^t s^{3/2} dW_s$$

$$X_t - 1 = \frac{1}{2} ln(1-t^2) - \frac{1}{2} ln(1-0^2) + \int_0^t s^{3/2} dW_s$$

$$X_t = 1 + \frac{1}{2} ln(1-t^2) + \int_0^t s^{3/2} dW_s$$

Media:

$$E[X_t] = E[1 + \frac{1}{2} ln(1-t^2) + \int_0^t s^{3/2} dW_s] = 1 + \frac{1}{2} ln(1-t^2)$$

Varianza:

$$Var[X_t] = Var[1 + \frac{1}{2} ln(1-t^2) + \int_0^t s^{3/2} dW_s]$$

$$Var[X_t] = 0 + 0 + \int_0^t s^3 ds = \frac{t^4}{4}$$

Tarea 2

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas por el método de integración.

- $dX_t = (t - \frac{1}{2} sen(W_t))dt + (cos(W_t))dW_t, X_0 = 0$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t (s - \frac{1}{2} sen(W_s))ds + \int_0^t (cos(W_s))dW_s$$

$$X_t = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^t sen(W_s ds + sen(W_t)$$

$$X_t = \frac{t^2}{2} + sen(W_t)$$

- $dX_t = (\frac{1}{2} cos(W_t) - 1)dt + (sen(W_t))dW_t, X_0 = 0$

$$\int_0^t dX_s = \int_0^t (\frac{1}{2} cos(W_s) - 1)ds + \int_0^t (sen(W_s))dW_s$$

$$X_t = \frac{1}{2} \int_0^t cos(W_s)ds - t - cos(W_t) + cos(W_0)$$

$$X_t = 1 - t - cos(W_t)$$

- $dX_t = \frac{1}{2}(senW_t + W_t cosW_t)dt + (W_t sen(W_t))dW_t, X_0 = 0$

$$\int_0^t dX_s = \frac{1}{2}(senW_s + W_s cosW_s)ds + (W_s sen(W_s))dW_s$$

$$X_t = \frac{1}{2} \int_0^t sinW_s +_W scosW_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t sinW_s +_W scosW_s ds + sinW_t - Wtcos_W t$$

$$X_t = sinW_t - Wtcos_W t$$

Tarea 3

Ejercicio 8.3.7 de Ovidiu: Verifica la condición de cercanía y resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas exactas.

- $dX_t = (Wt + \frac{3}{2}W_t^2)dt + (t + Wt^3)dW_t$, $X_0 = 0$
  Ecuación 1: $x + \frac{3}{2}x^2 = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,x)$
  Ecuación 2: $t + x^3 = \partial_x f(t,x)$
  Paso 1: $\int t + x^3 dx = tx + \frac{1}{4}x^4 + T(t) = f(t,x)$
  Paso 2:
  - $\partial_t f(t,x) = x$
  - $\partial_x f(t,x) = t + x^3$
  - $\partial_x^2 f(t,x) = 3x^2 + T'(t)$

  Sustituir: $x + \frac{3}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}3x^2 + T'(t)$
  $$T'(t) = 0 \rightarrow T(t) = constante$$
  Paso 3: $f(0,W_0) = X_0 = t(0)\frac{1}{4}x^0 + constante \therefore c = 0$
  Finalmente
  $$X_t = tWt + \frac{1}{4}W_t^4$$
- $dX_t = (2tW_t)dt + (t^2 + Wt)dW_t$, $X_0 = 0$
  Ecuación 1: $2tx = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,x)$
  Ecuación 2: $t^2 + x = \partial_x f(t,x)$
  Paso 1: $\int t^2 + xdx = t^2x + \frac{1}{2}x^2 + T(t) = f(t,x)$
  Paso 2:
  - $\partial_t f(t,x) = 2tx + T'(t)$
  - $\partial_x f(t,x) = t^2 + x$
  - $\partial_x^2 f(t,x) = 1$

  Sustituir: $2tx = 2tx + T'(t) + \frac{1}{2}(1)$
  $$T'(t) = \frac{-1}{2} \rightarrow T(t) = \frac{-1}{2}t + c$$
  Paso 3: $f(0,W_0) = X_0 = t(0)^2(0)\frac{1}{2}(0)^2 + c = 0 \therefore c = 0$
  Finalmente
  $$X_t = W_t t^2 + \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$$
- $dX_t = (e^t W_t + \frac{1}{2}cos(W_t))dt + (e^t + senWt)dW_t$, $X_0 = 0$
  Ecuación 1: $e^t x + \frac{1}{2}cos(x) = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,x)$
  Ecuación 2: $e^t + sen(x) = \partial_x f(t,x)$
  Paso 1: $\int e^t + sen(x)dx = xe^t - cos(x) + T(t) = f(t,x)$
  Paso 2:
  - $\partial_t f(t,x) = xe^t + T'(t)$
  - $\partial_x f(t,x) = e^t + sen(x)$
  - $\partial_x^2 f(t,x) = e^t + cos(x)$

  Sustituir: $e^t x + \frac{1}{2}cos(x) = xe^t + T'(t) + \frac{1}{2}e^t + cos(x)$
  $$T'(t) = \frac{1}{2}e^t \rightarrow T(t) = \frac{1}{2}e^t x + c$$
  Paso 3: $f(0,W_0) = X_0 = 0e^0 - cos(0) + \frac{1}{2}e^t x + c = 0 \therefore c = 1$
  Finalmente
  $$X_t = Wte^t - cos_W t + 1$$

- $dX_t = e^{W_t}(1+\frac{t}{2})dt + (te^{Wt})dW_t$, $X_0 = 2$
  Ecuación 1: $e^x(1+\frac{t}{2}) = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t,x)$
  Ecuación 2: $te^x = \partial_x f(t,x)$
  Paso 1: $\int te^x dx = te^x + T(t) = f(t,x)$
  Paso 2:
  - $\partial_t f(t,x) = e^x + T'(t)$
  - $\partial_x f(t,x) = te^x$
  - $\partial_x^2 f(t,x) = te^x$

  Sustituir: $e^x(1+\frac{t}{2}) = e^x + T'(t) + \frac{1}{2}te^x$
  $$T'(t) = 0 \to T(t) = constante$$
  Paso 3: $f(0,W_0) = X_0 = (0)e^0 + constante = 2 \therefore c = 2$
  Finalmente
  $$X_t = te^{W_t} + 2$$

Tarea 4

Ejercicio 8.4.5 de Ovidiu (página 177): Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por el método de inspección.

1. $dX_t = (1+W_t)dt + (t+2W_t)dW_t$; $X_0 = 0$
$$dX_t = (tdW_t + W_t dt) + 2W_t dW_t + dt$$
$$dX_t = d(tW_t) + 2W_t dW_t + dt$$
$$\int_0^t dX_s = \int_0^t d(sW_s) + \int_0^t 2W_s dW_s + \int_0^t ds$$
$$X_t - X_0 = tW_t + W_t^2 + t$$
$$X_t = tW_t + W_t^2 + t$$
2. $t^2 dX_t = (2t^3 - W_t)dt + tdW_t$; $X_1 = 0$
$$dX_t = t^{-2}(2t^3 - W_t)dt + t^{-2}tdW_t$$
$$dX_t = (2t)dt - t^{-2}W_t dt + t^{-1}dW_t$$
$$dX_t = (-t^{-2}W_t dt + t^{-1}dW_t) + (2t)dt$$
$$dX_t = d(t^{-1}W_t) + (2t)dt$$
$$\int_0^t dX_s = \int_0^t d(s^{-1}W_s) + \int_0^t (2s)ds$$
$$X_t - X_1 = (t^{-1}W_t + t^2) - (t_1^{-1}W_{t1} + t_1^2)$$
$$X_t = (t^{-1}W_t + t^2) - (t_1^{-1}W_{t1} + t_1^2)$$
3. $e^{\frac{-t}{2}} dX_t = \frac{1}{2}W_t dt + dW_t$; $X_0 = 0$
$$dX_t = \frac{1}{2}W_t e^{\frac{t}{2}} dt + e^{\frac{t}{2}} dW_t$$
$$dX_t = d(e^{\frac{t}{2}}W_t)$$
$$\int_0^t dX_s = \int_0^t d(e^{\frac{s}{2}}W_s)$$
$$X_t - X_0 = e^{\frac{t}{2}}W_t$$
$$X_t = e^{\frac{t}{2}}W_t$$

4. $dX_t = 2tW_t dW_t + W_t^2 dt; X_0 = 0$

$$dX_t = d(tW_t^2)$$
$$\int_0^t dX_s = \int_0^t d(sW_s^2)$$
$$X_t - X_0 = tW_t^2$$

5. $dX_t = (1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}W_t)dt + \sqrt{t}dW_t; X_1 = 0$

$$dX_t = dt + \frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}W_t dt + t^{\frac{1}{2}}dW_t$$
$$dX_t = (dt) + (\frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}W_t dt + t^{\frac{1}{2}}dW_t)$$
$$dX_t = (dt) + d(t^{\frac{1}{2}}W_t)$$
$$\int_0^t dX_s = \int_0^t ds + \int_0^t d(s^{\frac{1}{2}}W_s)$$
$$X_t - X_1 = (t + t^{\frac{1}{2}}W_t) - (t_1 + t_1^{\frac{1}{2}}W_{t1})$$
$$X_t = (t + t^{\frac{1}{2}}W_t) - (t_1 + t_1^{\frac{1}{2}}W_{t1})$$

Utilizar el método de variación de parámetros para obtener la solución de la ecuación de Langevin: $dX_t = -qX_t dt + \sigma dW_t$, con q constante. Primero se debe resolver la ecuación determinista asociada:

$$dX_t = -qX_t dt' \to \frac{dX_t}{X_t} = -qdt$$
$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t (-q)ds$$
$$ln(X_t) = (-q)t + C \to X_t = e^{(-q)t+C} = Ce^{(-q)t}$$

donde C es constante.
Se debe encontrar una solución $X_t = Ce^{(-q)t}$ que determine $C(t)$:

$$dX_t = d(Ce^{(-q)t}) = -qC(t)e^{(-q)t}dt + e^{(-q)t}dC(t)$$
$$dX_t = -q(X_t)dt + e^{(-q)t}dC(t)$$

Comparando con la ecuación de Langevin, se sabe que:

$$dC(t) = \sigma e^{qt}dW_t$$

Integrando $dC(t)$:

$$\int_0^t dC(s) = \int_0^t \sigma e^{qs}dW_s$$
$$C(t) - C(0) = \sigma \int_0^t e^{qs}dW_s$$
$$C(t) = C(0) + \sigma \int_0^t e^{qs}dW_s$$

Se sabe que:

$$X_t = C(0)e^{(-q)t} + \sigma e^{-qt}\int_0^t e^{qs}dW_s$$

por lo que finalmente resulta:

$$X_t = X_0 e^{-qt} + \sigma e^{-qt}\int_0^t e^{qs}dW_s$$

5. Bibliografía

[Cal15] Ovidiu Calin. *An informal introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific, 2015 (véase página 47).