

Álgebra Lineal

ACTIVIDAD 3.2 Dependencia e independencia lineal.

Instrucciones: Contesta lo que se pide, recuerda hacerlo de forma clara y con el apoyo de los recursos propuestos para esta actividad, en cada ejercicio deberás anotar el procedimiento limpio, claro y legible que justifique tu respuesta.

1. Determine si cada vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores en S.

$$S = \{(2, -1, 3), (5, 0, 4)\}$$

$$(a) \mathbf{z} = (-1, -2, 2)$$

$$(b) \mathbf{v} = \left(8, -\frac{1}{4}, \frac{27}{4}\right)$$

$$(c) \mathbf{w} = (1, -8, 12)$$

$$(d) \mathbf{u} = (1, 1, -1)$$

a)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} F1 \left(\frac{1}{2}\right) = F1 \\ F1 + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} F1 \left(\frac{2}{5}\right) = F1 \\ F2 \left(-\frac{5}{2}\right) + F1 = F1 \\ F2 \left(\frac{7}{2}\right) + F3 = F3 \end{array} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} (C_1 = 2) \\ (C_2 = -1) \end{array}$$

∴ S puede expresarse como C. L. de z

b)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 3 & 4 & \frac{27}{4} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} F1 \left(\frac{1}{2}\right) = F1 \\ F1 + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \end{array} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{4}{15} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{4}{-21} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{4}{4} \end{array} \right| \begin{array}{l} F1 \left(\frac{2}{5} \right) = F1 \\ F2 \left(-\frac{5}{2} \right) + F1 = F1 \\ F2 \left(\frac{7}{2} \right) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{3}{2} \end{array}$$

∴ S puede expresarse como C. L. de w

c)

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -8 \\ 3 & 4 & 12 \end{array} \right| \begin{array}{l} F1 \left(\frac{1}{2} \right) = F1 \\ F1 + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{21}{2} \end{array} \right| \begin{array}{l} F1 \left(\frac{2}{5} \right) = F1 \\ F2 \left(-\frac{5}{2} \right) + F1 = F1 \\ F2 \left(\frac{7}{2} \right) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} C_1 = 8 \\ C_2 = -3 \end{array}$$

∴ S puede expresarse como C. L. de v

d)

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} F1 \left(\frac{1}{2} \right) = F1 \\ F1 + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array} \right| \begin{array}{l} F1 \left(\frac{2}{5} \right) = F1 \\ F2 \left(-\frac{5}{2} \right) + F1 = F1 \\ F2 \left(\frac{7}{2} \right) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{array} \right| \text{LA ECUACION ES FALSA}$$

∴ S NO puede expresarse como C. L. de u

2. Determine si el conjunto S es linealmente dependiente o independiente

a) $S = \{(1, 0), (1, 1), (2, -1)\}$

$$S = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} F2(-1) + F1 = F1 \\ F2(-1) + F1 = F1 \end{array} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right|$$

$$C_1 = -3C_3, \quad C_2 = C_3, \quad C_3 = R$$

∴ S tiene infinitas soluciones, Solucion Dependiente

b) $S = \{(1, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -6), (1, 5, -3)\}$

$$S = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} F2\left(\frac{1}{4}\right) = F2 \\ F3\left(-\frac{1}{6}\right) = F3 \end{array} = \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right|$$

$$C_1 = -C_4, \quad C_2 = -\frac{5}{4}C_4, \quad C_3 = -\frac{1}{2}C_4, \quad C_4 = R$$

∴ S tiene infinitas soluciones, Solucion Dependiente

c) $S = \{x^2 + 3x + 1, 2x^2 + x - 1, 4x\}$

$$S = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right| \det S = 0 - 4 + 0 + 0 - 8 + 0 = -12$$

∴ S tiene unica solucion $\det \neq 0$, solucio trivial independiente

d) $S = \{x^2, x^2 + 1\}$

$$S = \left| \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| \det S = 0 - 1 = -1$$

∴ S tiene unica solucion $\det \neq 0$, solucio trivial independiente

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -6 & 17 \end{bmatrix}$

$$S = \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 17 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} F1 \Leftrightarrow F4 \\ F1(3) + F3 = F3 \\ F1(-2) + F4 = F4 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 17 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 15 & 45 & 0 \\ 0 & -14 & -42 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} F2(-1) = F2 \\ F2(-5) + F1 = F1 \\ F2(-15) + F3 = F3 \\ F2(14) + F4 = F4 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{pmatrix} -2C \\ -3C \\ C \end{pmatrix}$$

∴ S tiene infinitas soluciones, Solucion Dependiente

3. Demuestre que el conjunto dado es linealmente dependiente.

a) $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F1(-1) + F2 = F2 \\ F1(-1) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F3 \Leftrightarrow F2 \\ F2(-1) = F2 \\ F2(-1) + F1 = F1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F3(-1) + F1 = F1 \\ F3 + F2 = F2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} -C_4 \\ C_4 \\ 0 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

∴ S tiene infinitas soluciones, Solucion Dependiente

b) $S = \{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 2), (1, 4, 5, 6)\}$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F1(-2) + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \\ F1(-4) + F4 = F4 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F2(-1) = F2 \\ F2 + F3 = F3 \\ F2 + F4 = F4 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

∴ S tiene infinitas soluciones, Solucion Dependiente

4. ¿Para qué valores de t los siguientes conjuntos son linealmente independientes?

(a) $S = \{(t, 1, 1), (1, t, 1), (1, 1, t)\}$

(b) $S = \{(t, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 3t)\}$

a)

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F1 \Leftrightarrow F2 \\ F1(-t) + F2 = F2 \\ F1(-1) + F3 = F3 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & -t^2 + 1 & -t + 1 & 0 \\ 0 & -t + 1 & t - 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F2 \left(-\frac{1}{t^2 - 1} \right) = F2 \\ F2(t - 1) + F3 = F3 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^2+t-2}{t+1} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F3 \left(\frac{t+1}{t^2+t-2} \right) = F3 \\ F3 \left(-\frac{1}{t+1} \right) + F2 = F2 \\ F3(-1) + F1 = F1 \\ F2(-t) + F1 = F1 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\therefore t$ puede ser $\mathbb{R} - \{-1\}$ y $t^2+t-2 \neq 0$

b)

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3t & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F1 \Leftrightarrow F2 \\ F1(-t) + F2 = F2 \\ F1(-1) + F3 = F3 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t+1 & 0 \\ 0 & 1 & 3t-1 & 0 \end{array} \right] F2(-1) + F3 = F3$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 4t-2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} F3 \left(\frac{1}{4t-2} \right) = F3 \\ F3(-1) + F1 = F1 \\ F3(t-1) + F2 = F2 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\therefore t$ puede ser \mathbb{R} y $2t-1 \neq 0$

5. Determine si el conjunto S genera a \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 según sea el caso.

a) $S = \{(1, 3), (-2, -6), (4, 12)\}$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 3 & -6 & 12 & b \end{array} \right] F1(-3) + F2 = F2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 0 & 0 & -3a+b \end{array} \right] \text{ NO TIENE SOLUCION}$$

$\therefore S$ NO genera a \mathbb{R}^2

b) $S = \{(1, -1), (2, 1)\}$

$$\det S = 3 \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{a}{3} - \frac{2b}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\therefore S$ si genera a \mathbb{R}^2

c) $S = \{(-2, 5, 0), (4, 6, 3)\}$

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & a \\ 5 & 6 & b \\ 0 & 3 & c \end{array} \right] \begin{array}{l} F1 \left(-\frac{1}{2} \right) = F1 \\ F1(-5) + F2 = F2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -\frac{a}{2} \\ 0 & 16 & 5a \\ 0 & 3 & \frac{5a}{2} + b \end{array} \right] \begin{array}{l} F2 \left(\frac{1}{16} \right) = F2 \\ F2(2) + F1 = F1 \\ F2(-3) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -\frac{a}{2} \\ 0 & 16 & 5a + 2b \\ 0 & 0 & \frac{32}{32} \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -15a - 6b + 32c \end{array} \quad \text{NO ESIXTE SOLUCION}$$

∴ S NO genera a R^3

d) $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array} \right] F1(-1) + F3 = F3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & -a + c \end{array} \right] F2(-1) + F1 = F1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a - b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & -a + c \end{array} \right] F3(-1) + F2 = F2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a - b \\ 0 & 1 & 0 & a + b - c \\ 0 & 0 & 1 & -a + c \end{array} \right]$$

∴ S si genera a R^3

6. Determina si el conjunto S genera a \mathbb{P}_2 .

a) $S = \{1, x^2, x^2 + 2\}$

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2 & c \end{array} \right] \text{ecuacion falsa } 0 \neq b$$

∴ S no genera a P_2

b) $S = \{x^2 - 2x, x^3 + 8, x^3 - x^2, x^2 - 4\}$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 8 & 0 & -4 & a \\ -2 & 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & d \end{array} \right] \begin{array}{l} F1 \Leftrightarrow F2 \\ F1 \left(-\frac{1}{2} \right) = F1 \\ F1(-1) + F3 = F3 \\ F2(1/8) = F2 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{8} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{b}{2} + c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & d \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} F3(-1) = F3 \\ F2(-1) + F4 = F4 \\ F3(-1) + F4 = F4 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{a}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{b}{2} - c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{a+4b}{8} + c + d \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} F4(2/3) = F4 \\ F4(1/2) + F2 = F2 \\ F4(1) + F3 = F3 \end{array}$$

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2b+4c+4d}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a-2b-4c+8d}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{a+4b+8c+8d}{12} \end{array} \right]$$

∴ S si genera a P_3

7. Determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite un resultado adecuado. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite un resultado adecuado.

a) Si un subconjunto S genera un espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse como una combinación lineal de los vectores en S.

VERDADERO:

Si porque sea $S = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ una combinación lineal de $S = \{C_1U_1 + C_2U_2 + \dots + C_kU_k\}$, todos los vectores de la combinación lineal S estarán dentro de V pues al ser un sub conjunto ya cumple la cerradura bajo multiplicación escalar.

b) El conjunto $S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1)\}$ genera \mathbb{R}^4 .

VERDADERO:

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array} \right] \quad F4(-1) = F4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array} \right]$$

∴ S si genera a \mathbb{R}^4

- c) Un conjunto de vectores $S = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ en un espacio vectorial es linealmente dependiente si la ecuación vectorial $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = \mathbf{0}$ tiene solo la solución trivial.

VERDADERO:

Sea $S = \{(1,2), (2,8)\}$ entonces $a(1,2) + b(2,8) = (0,0)$:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad F1(-2) + F2 = F2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad F2(-2) + F1 = F1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\therefore S$ tiene unica solucion, solucio trivial independiente