Nombre de la materia: MÉTODOS MATEMATICOS 3

Sección: D01

Trabajo Final

Integrantes:

Arellano Granados Angel Mariano

Mercado Hernández Angel Gabriel

Fecha de entrega: 24/05/2022

Nombre de la profesora: Mtra. Fabiola del Carmen Beltrán Aguirre

Índice

Introducción 3

Marco teórico 4

Planteamiento del problema 5

- Teorema de Laplace 5
- Inversa de Laplace 5

Solución 7

Conclusiones 11

Referencias bibliográficas 12

Introducción

La transformada de Laplace puede ser usada para resolver Ecuaciones Diferenciales Lineales y Ecuaciones Integrales. Aunque se pueden resolver algún tipo de ED con coeficientes variables, en general se aplica a problemas con coeficientes constantes. Un requisito adicional es el conocimiento de las condiciones iniciales a la misma ED. Su mayor ventaja sale a relucir cuando la función en la variable independiente que aparece en la ED es una función seccionada.

Cuando se resuelven ED usando la técnica de la transformada, se cambia una ecuación diferencial en un problema algebraico. La metodología consiste en aplicar la transformada a la ED y posteriormente usar las propiedades de la transformada. El problema de ahora consiste en encontrar una función en la variable independiente tenga una cierta expresión como transformada.

Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

Las principales características por las cuales escogimos es tema es que al usar la transformada de Laplace podemos reemplazar una operación de diferenciación por una que sea algebraica. Además, que es útil en los campos de los sistemas de control, por la automatización de proceso.

Marco teórico

La transformada de Laplace:

Dada una función de variable continua f(t), su transformada bilateral de Laplace se define como:

$$L[f(t)] = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

siempre y cuando la función este definida.
Esta última forma de la transformada de Laplace resulta útil para analizar sistemas causales, esto es, sistemas para los cuales la señal de salida en cualquier instante depende sólo de los valores de la señal de entrada en el instante presente y en los anteriores, pero no de los futuros. Toda señal causal tiene un instante de inicio, de modo que la función que la representa es nula para cualquier instante previo. Para evitar ambigüedades indicaremos en general a la señal de entrada como) f (t) · u(t , donde) u(t es la función escalón unitario o función de Heaviside.

$Sea\ F(s) \ = \ L\ \{f(t)\}, llamaremos\ Transformada\ Inversa\ de\ Laplace,$

$L^{-1}\{F(s)\} \ = \ f(t).$

La transformada de Laplace es una herramienta que permite resolver problemas de valor inicial de manera más sencilla. La idea es reemplazar un problema de valor inicial en el dominio del tiempo t por una ecuación algebraica en el dominio de s (la frecuencia en análisis de circuitos).

Linealidad:

$$L\ \{\alpha f(t) \ + \ \beta g(t)\} \ = \ \alpha L\ \{f(t)\} \ + \ \beta L\ \{g(t)\}$$

$$L^{-1}\{\alpha F(s) \ + \ \beta G(s)\} \ = \ \alpha L^{-1}\{F(s)\} \ + \ \beta L^{-1}\{G(s)\}$$

Software Scientific Workplace:

Con Scientific WorkPlace usted puede crear, editar y componer tipográficamente matemáticas y texto científico en forma más sencilla que nunca. Este software está basado en un procesador de palabras que integra completamente escritura de matemáticas y texto en el mismo ambiente. Con el sistema de computación algebraica incorporado, usted puede ejecutar cálculos directamente sobre el screen.

Scientific WorkPlace tiene herramientas que simplifican la escritura y edición de libros y otros grandes documentos. Es perfecto para escritores en instituciones académicas, industriales y gubernamentales y en todos los campos científicos y técnicos: matemáticas, física, ingeniería, economía, química, ciencias de la computación, estadística, investigación médica y lógica.

Planteamiento del problema

Teorema de Laplace

Evaluar $\mathcal{L}\{sen\ 2t\}$

Para la transformada de Laplace tenemos que sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces tenemos que la integral

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$ Siempre que la integral converja.

Y ahora integrando por partes, nos queda que

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin 2t\ dt = -\frac{e^{-st}\sin 2t}{s} \Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st} \cos 2t\ \ dt$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st} \cos 2t\ dt, s > 0$$

$\lim_{t\to\infty} e^{-st} \cos 2t = 0, s > 0$ Transformada de Laplace de $\sin 2t$

$$= \frac{2}{s}\left[-\frac{e^{-st}\cos 2t}{s} \Big|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st} \sin 2t\ dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

Tenemos una ecuación con $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, s > 0$

Inversa de Laplace

Aquí tenemos otro problema donde se incluyen fracciones parciales, por lo cual tenemos que evaluar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$. Tenemos constantes reales A, B y C, por lo que

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}$$

$$= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Tenemos denominadores idénticos entonces los numeradores son idénticos.

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2).$$

Ahora comparamos los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de ecuaciones con tres incógnitas A, B y C. Sin embargo, hay un atajo para determinar incógnitas. Si se hace s=1, s=2 y s=-4 en (3) se obtiene

$$16 = A(-1)(5),\ \ 25 = B(1)(6),\ \ 1 = C(-5)(-6)$$

Entonces $A = -\frac{16}{5}, B = \frac{25}{6}\ y\ C = \frac{1}{30}$. Por lo que tenemos una descomposición de fracciones parciales

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{\frac{16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}$$

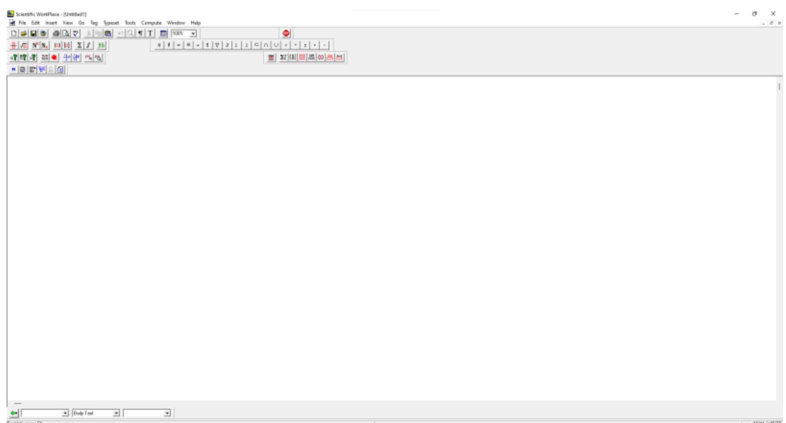
Y tenemos de la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$.

$$= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$$

Solución

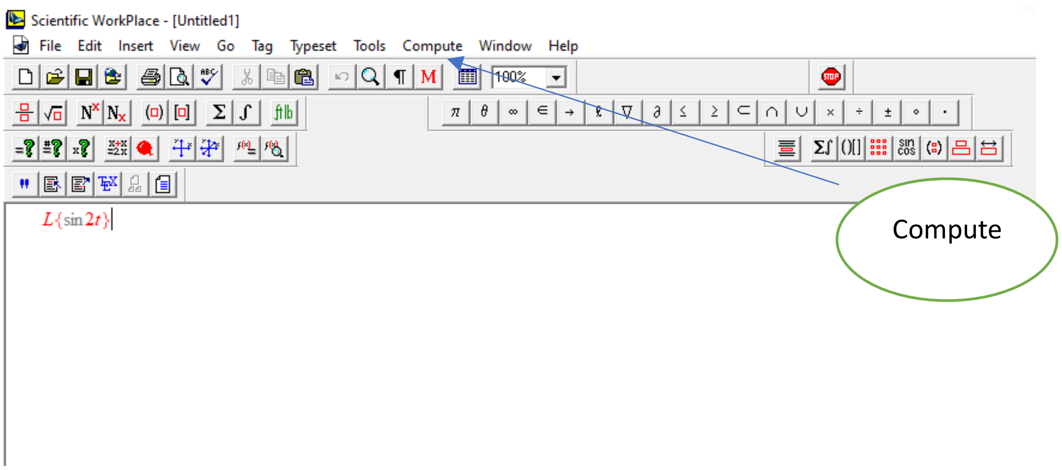
Para esta ocasión tenemos Scientific WorkPlace, este software cuenta con muchas herramientas y nos ayuda a responder muchos modelos matemáticos, pero en esta ocasión nos centraremos en la verificación de los resultados de la transformada de Laplace y su inversa.

Una vez tenemos el archivo instalado y al abrirlo nos aparecerá una ventana en blanco como la siguiente.

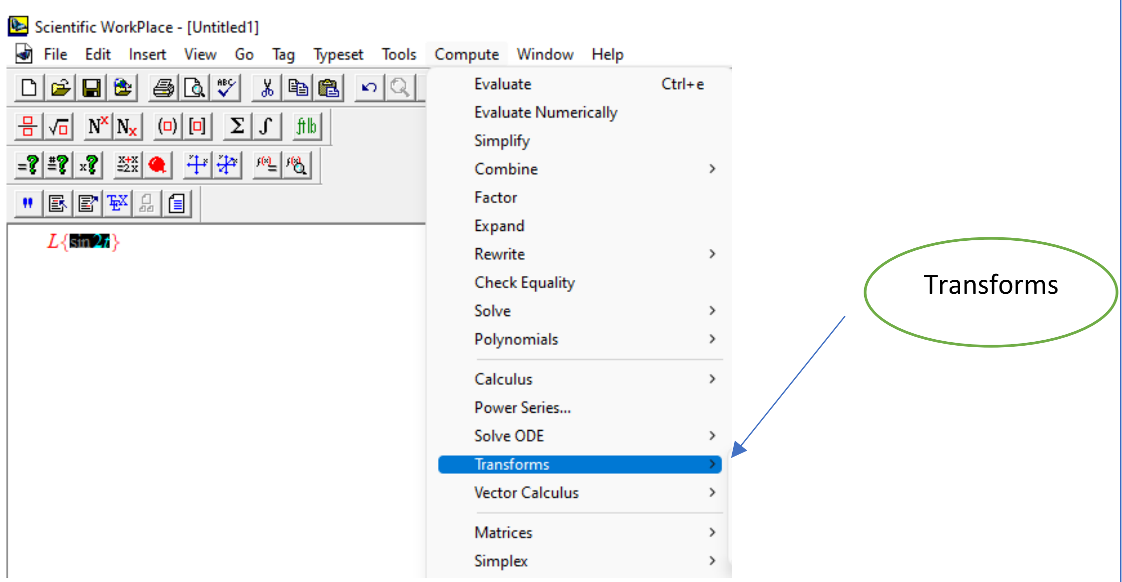


Como podemos darnos cuenta tenemos muchas opciones por seleccionar para una función matemática, realmente tu podrías configurar tu barra de herramientas según vayas a necesitar.

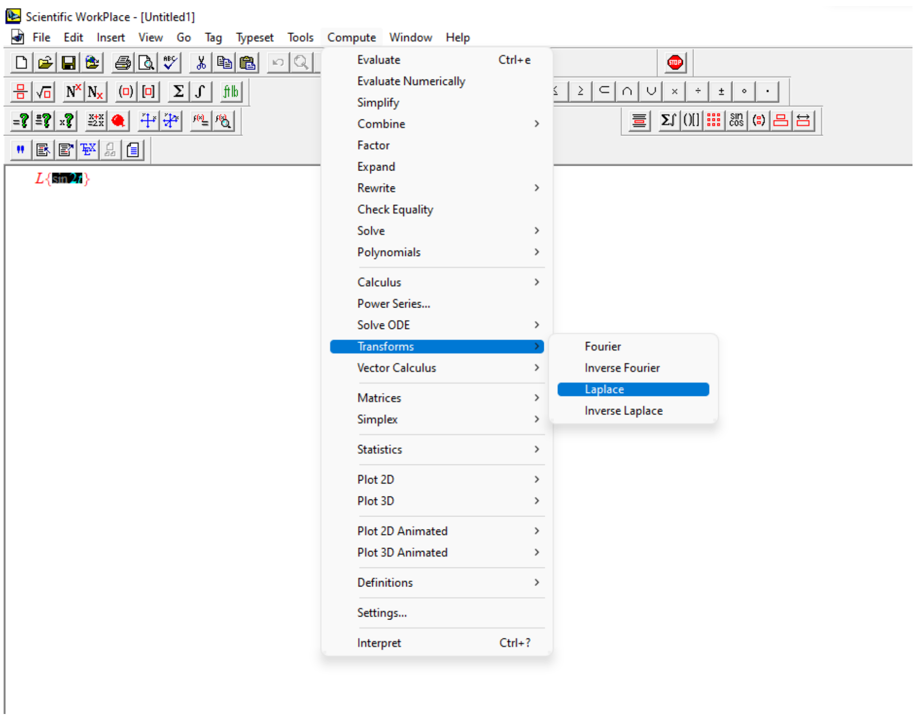
Una vez dentro ya de la hoja en blanco podremos anotar cualquier cosa que vayamos a necesitar, en este caso comprobaremos el primer ejemplo que tuvimos anteriormente sobre la transformada de Laplace la cual nos dice que evaluemos la transformada de $\mathcal{L}\{sen\ 2t\}$.



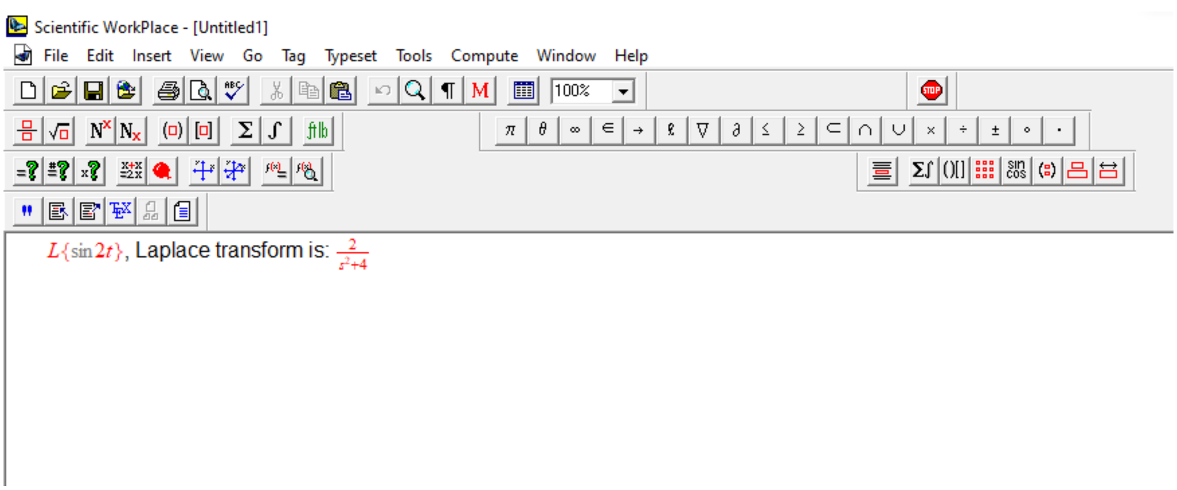
Para poder calcular este método primero debemos seleccionar lo que se desea calcular (este se muestra en negrita para demostrar lo que se tiene que seleccionar), una vez hecho esto nos tendremos que dirigir a la opción de “Compute”, ya estando ahí tendremos muchas opciones a resolver como una matriz, una simplificación o polinomios, etc, pero al querer evaluar la transformada de Laplace entonces nos vamos a dirigir al apartado de “Transforms”.



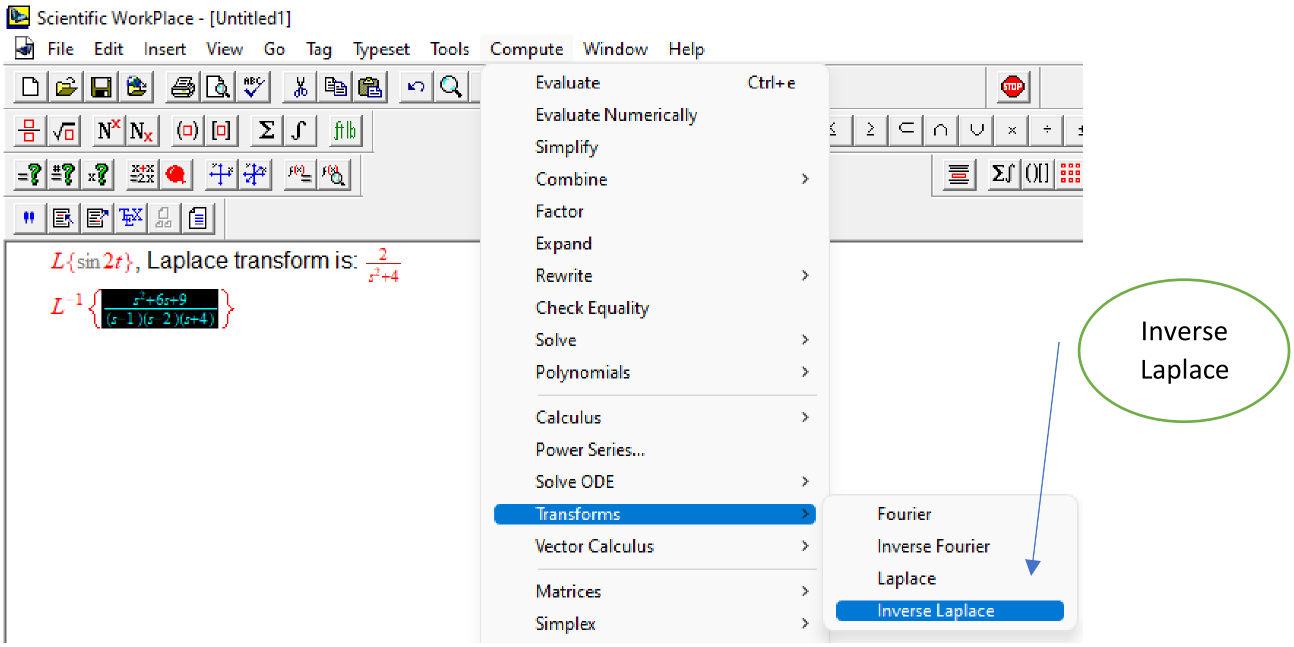
Una vez ya estemos dentro de la parte de las transformadas, tenemos el calculo para 4 distintas transformadas, y podemos notar que si esta la transformada de Laplace y continuamos.



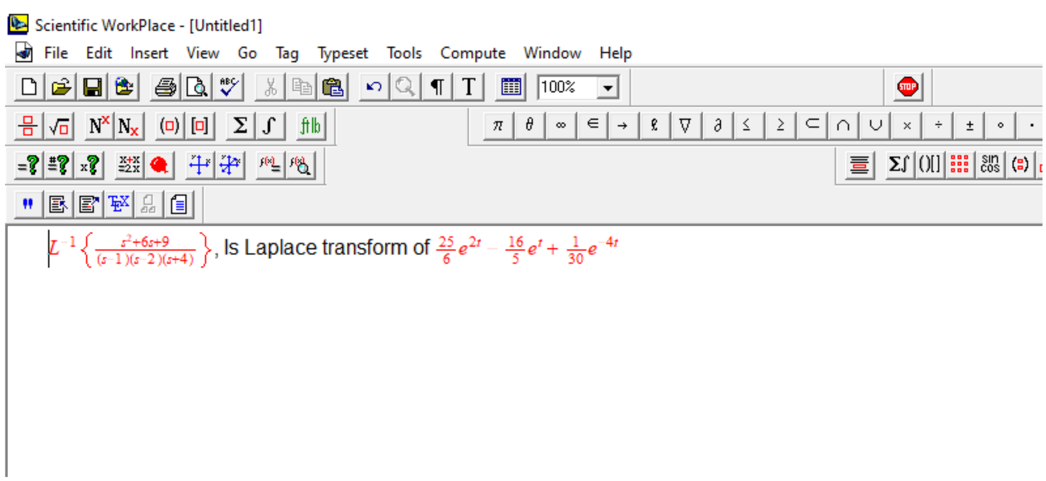
Ya al seleccionar el método que se quería comprobar tenemos que la transformada de la función es $\frac{2}{s^2+4}$, y podemos ver que efectivamente tenemos un resultado correcto mediante este software.



Ahora aquí tenemos otro ejemplo donde calcularemos la inversa de la transformada de Laplace, lo cual es el segundo problema que tenemos en el documento y tenemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$ donde vemos que tenemos fracciones parciales.



Al seleccionar los datos para la transformada inversa de Laplace, vemos que tenemos que decirnos al mismo lugar de "Compute" y en la parte de las transformadas podemos notar que esta la inversa de Laplace que es la que necesitaríamos para esta ocasión.



Y podemos ver que los resultados de igual manera son correctos y que este software realmente nos puede ayudar para los cálculos de la transformada de Laplace y su inversa.

Conclusiones

La transformada de Laplace nos ayuda a convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, y al resolver esta tenemos un valor total. Una ecuación diferencial se puede transformar en una ecuación algebraica de la variable compleja s. Y sabemos que esta transformada nos ayuda a reemplazar operaciones como derivación por integración, por operaciones algebraicas en el plano complejo de la variable s.

Para la transformada de Laplace no necesariamente sea necesario resolverlos con las ecuaciones diferenciales correspondientes ya que nos permite el uso de gráficas para predecir su funcionamiento de un sistema.

También el uso de scientific ha sido muy bueno a la hora de querer comprobar un resultado, no arroja procedimientos, pero a la hora de verificar alguna respuesta este software puede ayudarte a llegar a la solución correcta, así como también puede llegar a otros resultados, si sabemos darle un buen uso a este software podría ser de gran ayuda. Aunque sabemos que no es el único software que nos podría ayudar, aunque hay más métodos vimos que era una manera practica y algo sencilla y nos puede llevar al resultado correcto también.

Referencias bibliográficas

- ECUACIONES DIFERENCIALES CON PROBLEMAS EN LA FRONTERA, ZILL, DENNIS G CENGAGE LEARNING
- *Método de transf. de Laplace - Temas de matemáticas 3*. (s/f). Google.com.

  Recuperado el 23 de mayo de 2022, de

  https://sites.google.com/site/temasdematematicas3/metodo-de-transf-de-laplace
- Universidade de Vigo. (n.d.). Transformada de Laplace. Departamento de Matemática Aplicada II. https://www.dma.uvigo.es/~aurea/Transformada_Laplace.pdf
- Software shop. (n.d.). LA INTEGRACION DE LaTeX Y ALGEBRA COMPUTACIONAL. Software Shop. https://www.software-shop.com/producto/scientific-workplace