Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Álgebra Lineal

ACTIVIDAD 3.6 Repaso espacios vectoriales

NOMBRE: ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO

SECCIÓN: D - 17 **CÓDIGO:** 218123444

Instrucciones: Contesta lo que se pide, recuerda hacerlo de forma clara y con el apoyo de los recursos propuestos para esta actividad, en cada ejercicio deberás anotar el procedimiento limpio, claro y legible que justifique tu respuesta.

Especificaciones de formato: Arial 11, Interlineado sencillo, un espacio entre párrafos, margen moderado, texto justificado.

1. Sea el conjunto A=$\{u, v, w\}$, donde $u = (2,1)$, $v = (2,4)$, $w = (5,4)$. Representar el vector w como combinación lineal de los vectores u y v

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} F1 \leftrightarrow F2 \\ F1(-2) + F2 = F2 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F2\left(-\frac{1}{6}\right) = F2 \\ F2(-4) + F1 = F1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

∴w si es combinación lineal de los vectores u y v

2. Demuestra (Resuelve el sistema de ecuaciones o en su defecto usa el concepto de determinante, no olvides proporcionar una explicación contundente de tu respuesta) si el conjunto $A = \{(-1,0,2), (0,-4,2), (2,0,-4\})$ es linealmente independiente o dependiente.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \det A = -16 + 0 + 0 + 16 - 0 - 0 = 0$$

∴ El determinante de A es igual a 0 se puede deducir que el sistema tiene infinitas soluciones, por lo tanto es una Solución Dependiente

3. Para el conjunto A=$\{(k-5)x^2+x, 2x^2-2x+3, 2x^2+3x+3\}$. Obtener el valor de $k\varepsilon\mathbb{R}$, tal que "A" sea linealmente dependiente. Sugerencia: transforma los polinomios a vectores y usa el concepto de determinante forma una ecuación y determina todos los posibles valores de k.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ (k-5) & 2 & 2 \end{vmatrix} \det A = 0 + 9(k-5) + 6 + 6(k-5) - 0 - 6 \ = 0$$

$15(k-5) = 0$ $\qquad$ $15k = 75$ $\qquad$ $k = \dfrac{75}{15}$

$\therefore$ k = 5

4. Sea A=$\{u, v, w\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial "V". Determinar si el conjunto de vectores B=$\{u-2v+w, u+v, u-v\}$ es linealmente independiente o dependiente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \det B = 0 - 1 + 0 - 1 - 0 - 0 = -2$$

$\therefore$ El determinante de B es deferente que 0, por lo que el conjunto de vectores es una Solución Linealmente Independiente.

5. Determine si los siguientes conjuntos de vectores forman una base para el espacio vectorial dado. Demuestre las dos condiciones:

a) Es un conjunto generador

b) Es linealmente independiente

a) $\{1-2x, x-x^2\}\ en\ P_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} F1(2)+F2=F2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ 2a+b \\ c \end{vmatrix} F2+F3=F3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ 2a+b \\ 2a+b+c \end{vmatrix} Ecuacion\ Falsa$$

∴ Los vectores no generan a P^2 por lo que no son una base de P^2.

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ $en\ M_{2\times 2}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} \begin{matrix} F1(-1)+F2=F2 \\ F1+F3=F3 \\ F1(-1)+F4=F4 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ -a+b \\ a+c \\ -a+d \end{vmatrix} \begin{matrix} F2(-1)+F3=F3 \\ F2(-1)+F4=F4 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ -a+b \\ 2a-b+c \\ -b+d \end{vmatrix} F3+F4=F4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ -a+b \\ 2a-b+c \\ 2a-2b+c+d \end{vmatrix} La\ Ecuacion\ es\ Falsa$$

∴ Las matrices no generan a M_{2x2} por lo que no es una base de M_{2x2}.

6. Sean $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (-1,1,-1,0)$ dos vectores linealmente independientes, construya una base para R^4 que contenga dichos vectores.

(Sugerencia: use la base canónica para completar el resto de los vectores faltantes, luego determine cuales son los vectores linealmente independientes que conformarán la base).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} F1(-1) + F3 = F3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} F2 + F1 = F1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F3(-1) = F3 \\ F3(-1) + F1 = F1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 - x_5 \\ -x_4 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$base = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

7. Si $S = \{t^2 + t + 1, t^2 + 2t + 3, t^2 + 1\}$ y $T = \{t + 1, t^2, t^2 + 1\}$ son dos bases en P_2, y sabemos que $[u]_S = 2t^2 + t + 1$, encuentre $[u]_T$.

a) Calcule la matriz de transición de $S \to T$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} F1(-1)+F2=F2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & -1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} F2 \leftrightarrow F3$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1\\0 & -1 & -1\end{vmatrix} \begin{matrix}F3(-1)=F3\\F3(-1)+F1=F1\\F3(-1)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

b) Calcule la matriz de transición de $T \rightarrow S$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} \begin{matrix}F1(-1)+F2=F2\\F1(-1)+F3=F3\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & -1\\0 & -2 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\end{vmatrix} \begin{matrix}F2(-1)=F2\\F2(-3)+F1=F1\\F2(2)+F3=F3\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 2\end{vmatrix} \begin{matrix}F3\left(\frac{1}{2}\right)=F3\\F3(2)+F1=F1\\F3(-1)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1/2 & 1\end{vmatrix}$$

c) Compruebe su respuesta

$$P^1 = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\1/2 & -1/2 & 0\\-1/2 & 1/2 & 1\end{vmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

∴ La Matriz de transición que necesitábamos era la T->S y

$$[u]_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Si conocemos $[u]_S$, donde S es una base, determine el vector u en términos de la base canónica correspondiente al espacio vectorial que se muestra en cada caso.

a) $[u]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donde $S = \{(0,1,-1), (1.0.0), (1,1,1)\}$ es una base en R^3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ u en términos de la base canónica es $= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $[u]_S = 3 - x - 2x^2$ donde $S = \{x^2 + 1, x + 1, x^2 + x\}$ es una base en P_2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$\therefore$ u en términos de la base canónica es $= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Encuentre una base ortonormal para el espacio solución del sistema homogéneo.

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 = 0 \end{gathered}$$

Compruebe su respuesta.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} F1(2)+F2=F2 \\ F1(-1)+F2=F2 \\ F1(-4)+F2=F2 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} F2+F3=F3 \\ F2+F4=F4 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| = \begin{pmatrix} -x_2-2x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|w_1| = \sqrt{-1^2+1^2+0^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$$|w_2| = \sqrt{-1^2+-1^2+1^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,0\right)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}w_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,0\right).\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} + 0 + 0 = 0$$

$$|u_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + 0 + 0 = 1$$

$$|u_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$