



**“APUNTES PARA LA
MATERIA DE
MATEMÁTICAS
DISCRETAS”**

P R E S E N T A

M.S.I. JOSÉ FRANCISCO VILLALPANDO BECERRA

ÍNDICE

ÍNDICE	1
RELACIONES.....	2
DEFINICIÓN Y SU REPRESENTACIÓN.....	2
OPERACIONES CON RELACIONES	5
COMPOSICIÓN DE RELACIONES	8
PROPIEDADES DE LAS RELACIONES.....	9
RELACIONES DE EQUIVALENCIA.....	12
ORDENES PARCIALES	15
INDUCCIÓN MATEMÁTICA	17
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS	17
CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS NUMERABLES.....	19
FÓRMULAS INDUCTIVAS Y GENERALIZACIÓN	21
PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA	24
RELACIONES DE RECURRENCIA.....	28
PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS	28
SUCESIONES RECURRENTES Y ECUACIÓN DE RECURRENCIA	32
SOLUCIONES HOMOGÉNEAS.....	36
SOLUCIONES PARTICULARES.....	39
SOLUCIONES TOTALES	42
PRINCIPIOS DE CONTEO	44
REGLAS DE LA SUMA Y EL PRODUCTO	44
RECURSOS DE CONTEO: LISTAS Y ÁRBOLES	47
PERMUTACIONES Y COMBINACIONES	49
PERMUTACIONES Y COMBINACIONES GENERALIZADAS	53
PRINCIPIOS	57
<i>PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN-INCLUSIÓN.....</i>	<i>57</i>
<i>PRINCIPIO DE DIRICHLET.....</i>	<i>60</i>
APLICACIONES (IDENTIDADES BÁSICAS Y TEOREMA DEL BINOMIO).....	62
GRAFOS	65
DEFINICIONES BÁSICAS Y SU REPRESENTACIÓN.....	65
GRAFOS DIRIGIDOS Y NO DIRIGIDOS	66
MULTIGRAFOS Y GRAFOS PESADOS (GRAFOS PONDERADOS)	71
PASEOS (CAMINOS) Y CIRCUITOS (CÍCLOS)	72
<i>PASEOS Y CIRCUITOS DE EULERIANOS (DE EULER)</i>	<i>73</i>
<i>PASEOS Y CIRCUITOS HAMILTONIANOS</i>	<i>76</i>
REPRESENTACIONES MATRICIALES	77
ISOMORFISMO DE GRAFOS	79
GRAFOS APLANABLES.....	81
ÁRBOLES Y CONJUNTOS DE CORTE.....	84
ÁRBOLES.....	84
ÁRBOLES CON TERMINAL (ENRAIZADOS)	85
LONGITUD DE PASEO EN ÁRBOLES ENRAIZADOS.....	89
PREFIJOS CODIFICADOS.....	90
ÁRBOLES DE BÚSQUEDA BINARIA	92
ÁRBOLES GENERADORES Y CONJUNTOS DE CORTE	94
ÁRBOLES GENERADORES MÍNIMOS	96

RELACIONES

DEFINICIÓN Y SU REPRESENTACIÓN

La forma más directa de expresar una relación entre elementos de dos conjuntos es usando pares ordenados, por lo que de manera abstracta se puede definir una relación es como un conjunto de pares ordenados. En este contexto se considerará que el primer elemento del par ordenado está relacionado con el segundo elemento del par ordenado.

Definición:

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $A \times B$ será el conjunto de pares ordenados (a, b) , donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Se usa la notación $a \mathbf{R} b$ para denotar que $(a, b) \in \mathbf{R}$ y $a \nmathbf{R} b$ para denotar que $(a, b) \notin \mathbf{R}$.

Ejemplo:

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$ entonces:

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}$$

$$B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (s, 1), (s, 2), (s, 3)\}$$

Se puede ver que $A \times B$ es diferente de $B \times A$

Definición:

Una relación binaria, o simplemente relación, \mathbf{R} de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in \mathbf{R}$ se escribe $a \mathbf{R} b$ y significa que a esta en relación con b .

Si $A = B$ se dice que \mathbf{R} es una relación binaria sobre A .

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\mathbf{R} = \{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$. ¿Cuales pares ordenados están en dicha relación?

Nota: La división debe ser entera.

$\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$, en ese caso \mathbf{R} es una relación binaria sobre A .

Definición:

Si $\mathbf{R} \subseteq (A \times B)$ es una relación de A en B , el dominio de \mathbf{R} , que se escribe $\text{Dom}(\mathbf{R})$, y es el conjunto de los elementos de A que están relacionados con B , es decir:

$$\text{Dom}(\mathbf{R}) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathbf{R}, \text{ para algún } b \in B\}$$

Ejemplo:

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{r, s\}$ y $\mathbf{R} = \{(1, r), (1, s), (2, s), (3, s)\}$, entonces $\text{Dom}(\mathbf{R}) = \{1, 2, 3\}$

Definición:

Si $R \subseteq (A \times B)$ es una relación de A en B, el codominio (rango, imagen o recorrido) de R , se escribe $\text{Cod}(R)$ o $\text{Ran}(R)$ y es el conjunto de los elementos de B, que están relacionados con algún elemento de A, es decir:

$$\text{Cod}(R) = \{b \in B \mid (a, b) \in R, \text{ para algún } a \in A\}$$

Ejemplo:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{r, s\}$ además sea $R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$, entonces $\text{Cod}(R) = \{r, s\}$

OTRAS REPRESENTACIONES DE LAS RELACIONES

Las relaciones además de ser representadas como conjuntos de pares ordenados, se pueden representar de las siguientes maneras:

- Tablas
- Diagramas
- Matriz de Relación
- Por medio de Grafos Dirigidos (dígrafos).

Ejemplo:

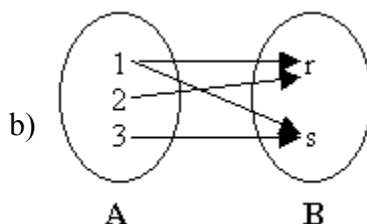
Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$ y sea $R = \{(1, r), (1, s), (2, r), (3, s)\}$

a)

R	r	s
1	✓	✓
2	✓	
3		✓

ó

A	B
1	r
1	s
2	r
3	s



c)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

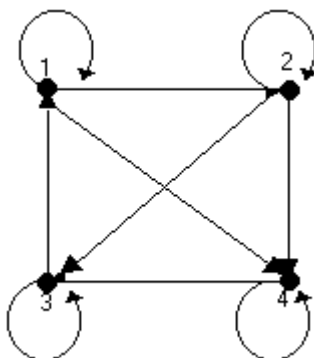
La representación por medio de grafos dirigidos, se utiliza cuando R es relación binaria sobre A.

Ejemplo:

Sea R la relación sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida como sigue:

$$(x, y) \in R \text{ si } x \leq y \text{ donde } x, y \in A$$

Por lo que $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ y su representación como dígrafo es:



Este tipo de representaciones se analizará con más detalle en la unidad dedicada a grafos.

Los puntos son llamados vértices y representan los elementos de A.

Las flechas son llamadas aristas dirigidas de x a y y representan que el elemento (x, y) esta relacionado.

Las flechas que representan elementos de la forma (x, x) se llaman lazos.

Ejercicio:

Sean las siguientes relaciones en el conjuntos de los números enteros:

$R1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$	ó	$(a, b) \in R$ si $a \leq b$
$R2 = \{(a, b) \mid a > b\}$	ó	$(a, b) \in R$ si $a > b$
$R3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ ó } a = -b\}$	ó	$(a, b) \in R$ si $a = b$ ó $a = -b$
$R4 = \{(a, b) \mid a = b\}$	ó	$(a, b) \in R$ si $a = b$
$R5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$	ó	$(a, b) \in R$ si $a = b + 1$
$R6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$	ó	$(a, b) \in R$ si $a + b \leq 3$

¿Cuáles de las relaciones anteriores contienen a los siguientes pares ordenados?:

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, -1)$ y $(2, 2)$

Respuesta:

$(1, 1) \in R1, R3, R4$ y $R6$

$(1, 2) \in R1$ y $R6$

$(2, 1) \in R2, R5$ y $R6$

$(1, -1) \in R2, R3$ y $R6$

$(2, 2) \in R1, R3$ y $R4$

OPERACIONES CON RELACIONES

Puesto que las relaciones binarias son conjuntos de pares ordenados, las nociones de intersección, diferencia simétrica, unión y diferencia de dos relaciones, se obtienen de manera similar a las correspondientes para conjuntos.

Entonces primeramente es necesario recordar dichas nociones para conjuntos.

a) La **unión** de dos conjuntos A y B , denotada por $A \cup B$, es el conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos A ó B , ó de ambos.

Ejemplos:

- 1) Si $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
- 2) Si $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c\}$
- 3) Si $A = \{a, b\}$, $B = \{\}$, entonces $A \cup B = \{a, b\}$
- 4) Si $A = \{a, b\}$, $B = \{c, \{a, b\}\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, \{a, b\}\}$

b) La **intersección** de dos conjuntos A y B , denotada por $A \cap B$, es el conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos que están tanto en A como en B .

Ejemplos:

- 1) $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$
- 2) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- 3) $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$

c) La **diferencia** de dos conjuntos A y B , denotada por $A - B$, es el conjunto que contiene exactamente aquellos elementos de A que no están en B .

Ejemplos:

- 1) $\{a, b, c\} - \{a\} = \{b, c\}$
- 2) $\{a, b, c\} - \{a, d\} = \{b, c\}$
- 3) $\{a, b, c\} - \{d, e\} = \{a, b, c\}$

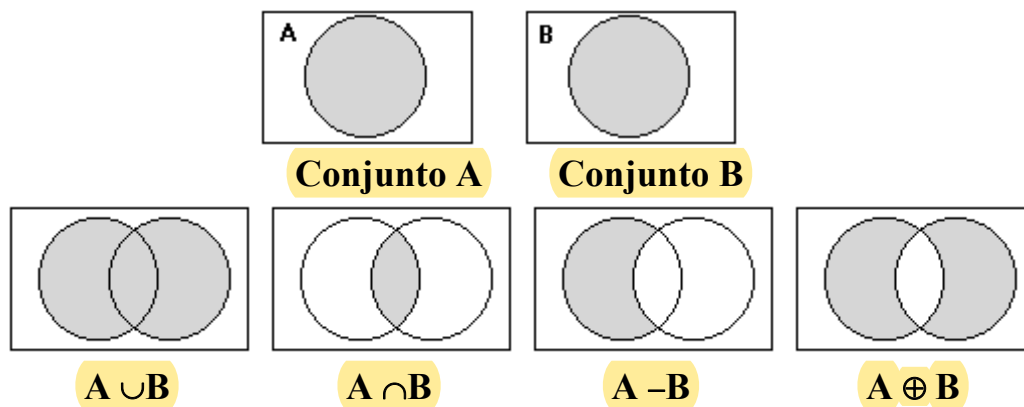
d) La **diferencia** simétrica de dos conjuntos A y B , denotada por $A \oplus B$, es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A o en B pero no en ambos, es decir:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Ejemplos:

- 1) $\{a, b\} \oplus \{a, c\} = \{b, c\}$
- 2) $\{a, b\} \oplus \emptyset = \{a, b\}$
- 3) $\{a, b\} \oplus \{a, b\} = \emptyset$

Gráficamente se pueden representar estas operaciones con conjuntos como sigue:



Aplicando los conceptos anteriores a relaciones binarias, tenemos que si R y S son dos relaciones binarias de A en B entonces: $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $R \oplus S$ son también relaciones binarias de A en B .

Ejemplo:

Sean R y S dos relaciones de X a Y y de U a V respectivamente. Además tenemos que

$$R = \{(a, A), (a, B), (b, C)\} \text{ y } S = \{(a, B), (b, C)\}$$

Encontrar $R \cup S$, $R \cap S$, $R - S$, $R \oplus S$.

$$R \cup S = \{(a, A), (a, B), (b, C)\}$$

$$R \cap S = \{(a, B), (b, C)\}$$

$$R - S = \{(a, A)\}$$

$$R \oplus S = \{(a, A)\}$$

Definición:

Puede definirse el complemento de una relación R como el conjunto de todos los pares ordenados del producto cartesiano $A \times B$ que no están en R , y se representa como R' ó $\sim R$.

Ejemplo:

Sean R y S dos relaciones de X a Y y de U a V respectivamente. Además tenemos que $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{A, B, C\}$, $U = \{a, b\}$ y $V = \{B, C\}$ y sean

$$R = \{(a, A), (a, B), (b, C)\} \text{ y } S = \{(a, B), (b, C)\}$$

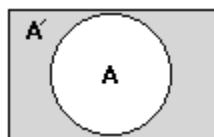
$$\text{Entonces } X \times Y = \{(a, A), (a, B), (a, C), (b, A), (b, B), (b, C), (c, A), (c, B), (c, C)\}$$

$$\text{Por lo tanto } R' = \{(a, C), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B), (c, C)\}$$

$$\text{Y para } U \times V = \{(a, B), (a, C), (b, B), (b, C)\}$$

$$\text{se tiene que } S' = \{(a, C), (b, B)\}.$$

Gráficamente se representa:



Otra operación que a menudo se utiliza es el **inverso** de una relación, la cual se define de la siguiente manera:

Definición:

Sea R una relación de A en B , el inverso de R , que se denota como R^{-1} ó R^{\sim} , y es la relación de B en A definida formalmente como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Ejemplo:

Sean $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, además definimos R como sigue:

$$(a, b) \in R \text{ si } a \text{ divide a } b \text{ (división entera)}$$

entonces $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$, por lo que $R^{-1} = \{(4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4)\}$

De lo anterior se deduce que $a R b \equiv b R^{-1} a$. Algunos autores le llaman al inverso opuesto.

Como una relación es un conjunto, podemos obtener el número de elementos de dicho conjunto, es decir:

Definición:

La **cardinalidad** es el número de elementos de un conjunto. Para una relación R de A en B , la cardinalidad se representa $\# R$ y el número de pares ordenados que constituyen la relación.

Ejemplos:

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces $\#A = 4$

Si $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$ entonces $\# R = 5$

Definición:

Sea R una relación de A en B , el **conjunto potencia** de R , denotado como $P(R)$, es el conjunto que contiene a todos los subconjuntos de R , es decir:

$$P(R) = \{S \mid S \subseteq R\}$$

Si $\#R = n$, entonces $\#P(R) = 2^n$

Ejemplo:

Sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$, entonces $\#R = 3$ y $\#P(R) = 2^3 = 8$

Esto significa que el conjunto potencia de R tiene 8 subconjuntos, los cuales son:

$$P(R) = \{\emptyset, \{(1, 1)\}, \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \{(1, 1), (1, 2)\}, \{(1, 1), (1, 3)\}, \{(1, 2), (1, 3)\}, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}\}$$

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sea R una relación de A en B y S una relación de B en C . La composición de R y S es una relación consistente de los pares ordenados (a, c) , donde $a \in A$ y $c \in C$ y para los cuales existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$, es decir $a R b$ y $b S c$.

La composición se denota por $S \circ R$, si R y S son relaciones.

Ejemplos:

a) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$ y sean

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$\text{Entonces } S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

b) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{s, t, u\}$ y sean

$$R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$

$$S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

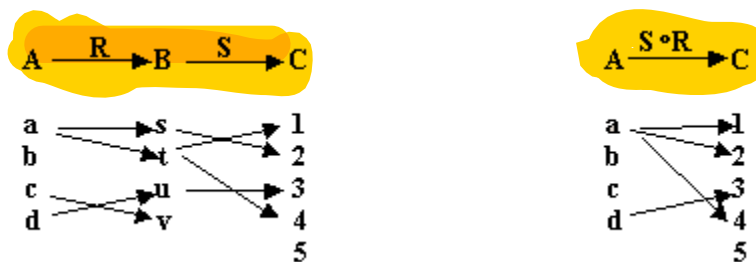
$$\text{Entonces } S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$$

c) Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{s, t, u, v\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sean

$$R = \{(a, s), (a, t), (c, v), (d, u)\}$$

$$S = \{(s, 2), (t, 1), (t, 4), (u, 3)\}$$

$$\text{Entonces } S \circ R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (d, 3)\} \text{ y gráficamente se puede representar como}$$



NOTA: $S \circ R \neq R \circ S$

Generalizando:

Sean R una relación de A en B , S una relación de B en C y T una relación de C en D . La composición de R , S y T es una relación consistente de los pares ordenados (a, d) , donde $a \in A$ y $d \in D$ y para los cuales existen un $b \in B$ y un $c \in C$ tal que $(a, b) \in R$, $(b, c) \in S$ y $(c, d) \in T$, es decir $a R b$, $b S c$ y $c T d$.

Lo anterior se puede denotar como $T \circ (S \circ R)$, si R , S y T son relaciones.

Además se tiene que:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Definición:

Una relación **R** sobre un conjunto A es llamada **reflexiva** si $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$, es decir:

$$R \text{ es reflexiva} \equiv \forall a (a R a)$$

Primeramente definamos algunas relaciones que nos serán útiles a lo largo de este tema.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sean las siguientes relaciones sobre A:

$$R1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$R3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

$$R6 = \{(3, 4)\}$$

Ejemplo:

¿Cuáles relaciones son reflexivas? **R3 y R5**

Definición:

Una relación **R** sobre un conjunto A es llamada **no reflexiva** (o irreflexiva) si el par ordenado $(a, a) \notin R$, $\forall a \in A$, es decir:

$$R \text{ es no reflexiva} \equiv \forall a (a \not R a)$$

Ejemplo:

¿Cuáles de las relaciones descritas son no reflexivas? **R4 y R6**

Mientras que **R1 y R2** son relaciones que no son ni reflexiva ni no reflexivas.

Por medio de tablas podemos mostrar este tipo de relaciones.

R1	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3				✓
4	✓			✓

Relación que no es
reflexiva ni no
reflexiva

R3	1	2	3	4
1	✓	✓		✓
2	✓	✓		
3			✓	
4	✓			✓

Relación Reflexiva

R4	1	2	3	4
1				
2	✓			
3	✓	✓		
4	✓	✓	✓	

Relación no reflexiva

Definición:

Una relación **R** en un conjunto A es llamada **simétrica** si $\forall (a, b) \in R$ implica que $(b, a) \in R$, es decir:

$$R \text{ es simétrica} \equiv \forall a \forall b (a R b \Rightarrow b R a)$$

¿Cuáles de las anteriores relaciones representan una relación simétrica? **R2 y R3**

Definición:

Una relación **R** en un conjunto **A** es llamada **antisimétrica** si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$, $\forall a, \forall b \in A$, es decir:

$$R \text{ es antisimétrica} \equiv \forall a \forall b (a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b)$$

Otra forma de expresarlo es diciendo que cuando $a \neq b$ se tiene que, $a \not R b$ ó $b \not R a$.

¿Cuáles de las anteriores relaciones son antisimétricas? **R4**, **R5** y **R6**, ya que no hay pares de elementos a y b con $a \neq b$ tales que (a, b) y $(b, a) \in R$.

Por medio de tablas podemos mostrar este tipo de relaciones.

R1	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3				✓
4	✓			✓

Relación que no es
simétrica ni
antisimétrica

R3	1	2	3	4
1	✓	✓		✓
2	✓	✓	✓	
3		✓	✓	
4	✓			✓

Relación Simétrica

R4	1	2	3	4
1				
2	✓			
3	✓	✓		
4	✓	✓	✓	

Relación
antisimétrica

Definición:

Una relación **R** en un conjunto **A** es llamada **transitiva** si $\forall a, \forall b, \forall c \in A$, $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$, esto es:

$$R \text{ es transitiva} \equiv \forall a \forall b \forall c (a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c)$$

¿Cuáles de las anteriores relaciones representan una relación transitiva? **R4**, **R5** y **R6**.

Por medio de una tabla seria:

R4	1	2	3	4
1				
2	✓			
3	✓	✓		
4	✓	✓	✓	

Relación Transitiva

Ya que se tiene que:

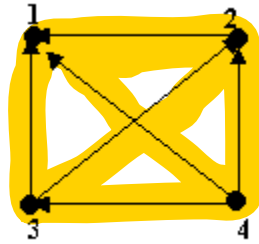
$$(3, 2) \text{ y } (2, 1) \in R \Rightarrow (3, 1) \in R$$

$$(4, 2) \text{ y } (2, 1) \in R \Rightarrow (4, 1) \in R$$

$$(4, 3) \text{ y } (3, 1) \in R \Rightarrow (4, 1) \in R$$

$$(4, 3) \text{ y } (3, 2) \in R \Rightarrow (4, 2) \in R$$

Un grafo dirigido de una relación transitiva tiene la propiedad que si existen aristas dirigidas de x a y y de y a z , también existe una arista dirigida de x a z . Como lo muestra el siguiente grafo:



NOTA: Si $a = b$ y (a, b) y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) = (b, c) \in R$, por lo que no hay que verificar de manera explícita toda la condición. Para comprobar la condición de transitividad se eliminan los casos $a = b$ y $b = c$ y sólo hay que verificar los restantes pares ordenados.

Definición:

Sea R una relación binaria sobre A . La extensión transitiva de R , denotada por R_1 , es la relación binaria sobre A tal que R_1 contiene a R y además si (a, b) y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R_1$.

Ejemplo:

Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\}$, entonces

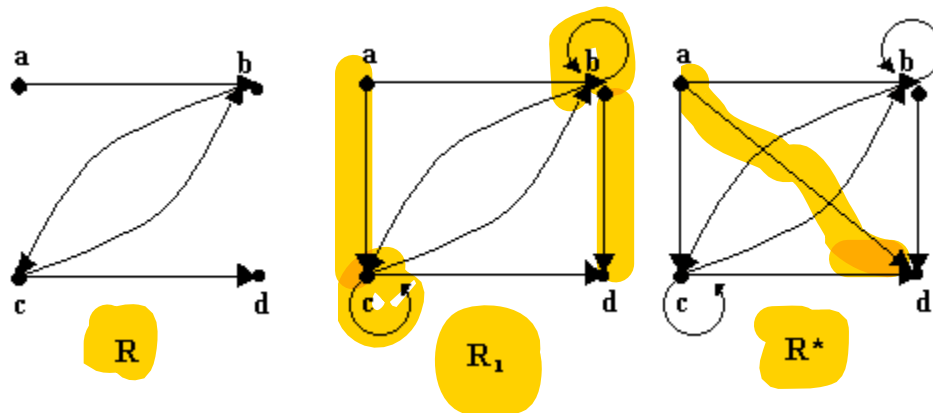
$R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$

Si R es una relación transitiva entonces R es igual a R_1 .

Si R_2 denota la extensión transitiva de R_1 , y en general R_{i+1} denota la extensión transitiva de R_i , definimos la cerradura transitiva de R , denotada por R^* , como el conjunto unión de R, R_1, R_2, \dots , entonces, en del ejemplo anterior

$$R^* = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$$

Lo que por medio de dígrafos se puede representar como:



RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Definición:

Una **partición** de un conjunto S es una colección de **subconjuntos** **disjuntos** no vacíos de S que tienen a S como su unión, en otras palabras, la colección de subconjuntos $A_i, i \in I$ (donde I es un índice del conjunto) forma una partición si y solo si:

$$A_i \neq \emptyset, i \in I, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ cuando } i \neq j \text{ y } \bigcup_{i \in I} A_i = S$$

También estos subconjuntos son llamados bloques de la partición.

Lo anterior significa que $S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$

Ejemplo:

Sea $S = \{a, b, c, d, \dots, z\}$ y sean

$$W_1 = \{a, e, i, o, u\}$$

$$W_2 = \{w, c\}$$

$$W_3 = \{b, f, g, h, j, k, l\}$$

$$W_4 = \{m, n, \tilde{n}, p, q\}$$

$$W_5 = \{r, s, t, v\}$$

$$W_6 = \{x, y\}$$

$$W_7 = \{d, z\}$$

$$S = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7 \text{ o bien}$$

$$S = \{\{a, e, i, o, u\}, \{w, c\}, \{b, f, g, h, j, k, l\}, \{m, n, \tilde{n}, p, q\}, \{r, s, t, v\}, \{x, y\}, \{d, z\}\}$$

Ejemplo:

Si $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ entonces $\{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e, f\}, \{g\}\}$ es una partición de S y también se puede representar como $\{\overline{a}, \overline{bcd}, \overline{ef}, \overline{g}\}$, en donde se coloca una barra sobre los elementos del mismo bloque.

TEOREMA

Sea S una partición sobre un conjunto X . Decimos que $x \mathbf{R} y$ si para algún A en S $x, y \in A$. Entonces \mathbf{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo:

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $S = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$ una partición de X . La relación \mathbf{R} definida por el teorema anterior es:

$$\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)\}$$

Definición:

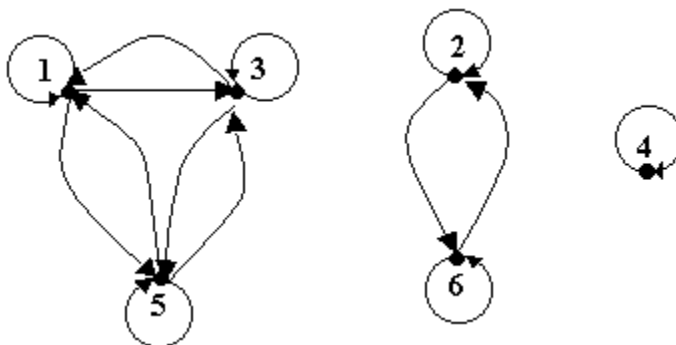
Una relación \mathbf{R} que es reflexiva, simétrica y transitiva, sobre un conjunto X , se conoce como una **relación de equivalencia** sobre X .

Ejemplos:

a) Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $S = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$ una partición de X . La relación \mathbf{R} definida por el teorema anterior es:

$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)\}$

la cual, por la definición anterior es una relación de equivalencia. Si se representa por medio de dígrafos tenemos que:



R es reflexiva puesto que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \in R$

R es simétrica ya que siempre que si $(x, y) \in R$ también $(y, x) \in R$

R es transitiva puesto que siempre que si (x, y) y $(y, z) \in R$ también $(x, z) \in R$

Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces R es una relación de equivalencia sobre X .

b) Sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$, y sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$

R es reflexiva ya que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$

R no es simétrica ya que $(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 2) \notin R$

R es transitiva puesto que siempre que si (x, y) y $(y, z) \in R$ también $(x, z) \in R$

Por lo que como R no es simétrica, por lo tanto no es una relación de equivalencia.

Definición:

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . El conjunto de todos los elementos que están relacionados a un elemento de A es llamado clase de equivalencia de A y se denota por $[a]$, en otras palabras:

$$[a] = \{x \in A \mid x R a\}$$

además se tiene $S = \{[a] \mid a \in A\}$ es una partición de A

Ejemplos:

a) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea

$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)\}$ una relación de equivalencia sobre A , entonces tenemos que:

$$[1] = \{1, 3, 5\}$$

$$[2] = \{2, 6\}$$

$$[3] = \{1, 3, 5\}$$

$$[4] = \{4\}$$

$$[5] = \{1, 3, 5\}$$

$$[6] = \{2, 6\};$$

donde se observa que

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}$$

$$[2] = [6] = \{2, 6\}$$

$$[4] = \{4\},$$

Además $S = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$ es una partición de A

b) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ una relación de equivalencia sobre A, donde se tiene que

$$[1] = \{1, 2\}$$

$$[2] = \{1, 2\}$$

$$[3] = \{3, 4\}$$

$$[4] = \{3, 4\}$$

por lo que

$$[1] = [2] = \{1, 2\}$$

$$[3] = [4] = \{3, 4\}$$

donde $S = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ es una partición de A.

De los ejemplos anteriores se concluye que:

a) Si $a R b$ entonces $[a] = [b]$

b) Si $[a] = [b]$ entonces $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

c) Si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ entonces $a R b$

En resumen dos clases de equivalencia de dos elementos de A son idénticas o disjuntas.

ORDENES PARCIALES

Definición:

Se dice que una relación R sobre un conjunto A es una **relación de orden parcial** si esta es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si R es una relación de **orden parcial** (o simplemente orden parcial) sobre A , se utiliza la notación $a \leq b$ para indicar que $(a, b) \in R$.

Esta notación sugiere que estamos interpretando la relación como orden sobre los elementos.

Ejemplo:

Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y sea R una relación sobre A definida como sigue:

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$

Representada en la siguiente tabla:

R	a	b	c	d	e
a	✓	✓	✓	✓	✓
b		✓	✓		✓
c			✓		✓
d				✓	✓
e					✓

como R es reflexiva, antisimétrica y transitiva por lo tanto es una relación de orden parcial.

Un conjunto A junto con un orden parcial R sobre A , es llamado un **conjunto parcialmente ordenado** y se **denota por (A, R)** . Un conjunto parcialmente ordenado es conocido como POSET (del inglés: Partially Ordered SET).

Ejemplo:

Sea A el conjunto de \mathbb{Z}^+ y sea R una relación sobre A , tal que $(a, b) \in R$ si a divide a b (con residuo igual a cero).

Entonces como cualquier entero se divide a si mismo, **R es una relación reflexiva**. Si a divide a b significa que b no divide a a , a menos que sea $a = b$, por lo que **R es antisimétrica**, y puesto que si a divide a b y b divide a c entonces a divide a c , por lo que **R es transitiva**. En consecuencia **R es un orden parcial**.

En realidad un conjunto parcialmente ordenado es denotado como **(A, \leq)** .

Definición:

Si R es un orden parcial sobre A y si $x, y \in A$ y $x \leq y \vee y \leq x$, se dice que x y y son comparables. Y si $x, y \in A$ y $x \not\leq y \wedge y \not\leq x$, se dice que x y y son incomparables.

Definición:

Si cada par de elementos de A son comparables se dice que R es un orden total, es decir, un orden parcial R es un orden total, (orden lineal) si y solo si $\forall x, \forall y, x R y$ ó $y R x$ es siempre verdadero.

En este caso (A, R) es un conjunto totalmente ordenado ó también llamado cadena (chain).

Ejemplo:

Los números naturales con la relación (\mathbb{N}, \geq) y los números enteros con la relación (\mathbb{Z}, \geq) son ambos cadenas.

También el conjunto de las palabras del idioma español con el orden lexicográfico es una cadena.

Definición:

La longitud de una cadena es la cantidad de elementos de la misma.

Definición:

Si todos los elementos de un conjunto A son no comparables, entonces R se dice que es una anticadena, es decir, un orden parcial R es una anticadena si $\forall x, \forall y \in A, x \not R y \wedge y \not R x$.

En este caso (A, R) es una anticadena, es decir, no hay dos elementos distintos que estén relacionados.

Ejemplo:

Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y sea R un orden parcial. Representemos a R por medio de una tabla.

R	a	b	c	d	e
a	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
b		\checkmark	\checkmark		\checkmark
c			\checkmark		\checkmark
d				\checkmark	\checkmark
e					\checkmark

Entonces (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado donde:

$\{a, b, c, e\}$	es una cadena
$\{a, b, c\}$	es una cadena
$\{a, d, e\}$	es una cadena
$\{a\}$	es una cadena y una anticadena
$\{b, d\}$	es una anticadena
$\{c, d\}$	es una anticadena
$\{a, c, d\}$	no es ni cadena ni anticadena

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

El sistema de los números naturales \mathbb{N} tiene un defecto manifiesto en que dados $m, n \in \mathbb{N}$, la ecuación $m + x = n$ puede o no tener solución, por ejemplo, la ecuación $m + x = m$ carece de solución, mientras que la ecuación $m + x = m^*$ (siguiente) tiene la solución $x = 1$. Es sabido que esto se remedia añadiendo a los números naturales el cero y los números enteros negativos para formar el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} . Dicho símbolo proviene del alemán Zahl (número).

Entonces:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE \mathbb{Z}

ADICIÓN

- | | | |
|---|-----------------------|--|
| 1 | Ley de la clausura | $r + s \in \mathbb{Z}, \forall r, s \in \mathbb{Z}$ |
| 2 | Ley conmutativa | $r + s = s + r, \forall r, s \in \mathbb{Z}$ |
| 3 | Ley Asociativa | $r + (s + t) = (r + s) + t, \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$ |
| 4 | Ley de la cancelación | Si $r + t = s + t$ entonces $r = s, \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$ |
| 5 | Neutro Aditivo | \exists un único $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $r + 0 = 0 + r = r, \forall r \in \mathbb{Z}$ |
| 6 | Simétrico Aditivo | Para cada $r \in \mathbb{Z}$ \exists un único simétrico aditivo $-r$ tal que $r + (-r) = (-r) + r = 0, \forall r \in \mathbb{Z}$ |

MULTIPLICACIÓN

- | | | |
|---|-----------------------|---|
| 1 | Ley de la clausura | $r \cdot s \in \mathbb{Z}, \forall r, s \in \mathbb{Z}$ |
| 2 | Ley conmutativa | $r \cdot s = s \cdot r, \forall r, s \in \mathbb{Z}$ |
| 3 | Ley Asociativa | $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t, \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$ |
| 4 | Ley de la cancelación | Si $r \cdot t = s \cdot t$ entonces $r = s, \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$ |
| 5 | Neutro Multiplicativo | \exists un único $1 \in \mathbb{Z}$ tal que $r \cdot 1 = 1 \cdot r = r, \forall r \in \mathbb{Z}$ |

LEYES DISTRIBUTIVAS

- | | |
|---|---|
| 1 | $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t, \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$ |
| 2 | $(s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r, \forall r, s, t \in \mathbb{Z}$ |

DIVISORES

Un entero $a \neq 0$ se llama divisor (o factor) de un elemento b (lo cual denota $a \mid b$) si $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = a \cdot c$$

cuando $a \mid b$ se dice que b es un múltiplo de a .

Ejemplos:

- a) $2 \mid 6$ ya que $\exists c = 3$ tal que $6 = 2 \cdot 3$
- b) $-3 \mid 15$ ya que $\exists c = -5$ tal que $15 = (-3) \cdot (-5)$
- c) $a \mid 0$ ya que $\forall a \in \mathbb{Z}, 0 = a \cdot 0$

PRIMOS

Como $a \cdot 1 = (-a) \cdot (-1) = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, se dice que ± 1 y $\pm a$ son divisores de a . Un entero $p \neq 0$ y $p \neq \pm 1$ se dice que es primo si y solo si sus únicos divisores son ± 1 y $\pm p$.

Ejemplos:

- a) 2 es primo ya que sus únicos divisores son $\pm 2, \pm 1$
- b) -5 es primo ya que sus únicos divisores son $\pm 5, \pm 1$
- c) 6 no es primo ya que sus divisores son $\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$
- d) 39 no es primo ya que sus divisores son $\pm 39, \pm 13, \pm 3, \pm 1$

Esta claro que $-p$ es primo si y solamente si p lo es, por lo que solamente será necesario referirse a los primos positivos.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

Si $a \mid b$ y $a \mid c$ se dice que a es un divisor común de b y c . Si además todo divisor común de b y c también es de a , se dice que a es el máximo común divisor de b y c .

Ejemplo:

- a) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$; son divisores comunes de 24 y 60
- b) ± 12 es el MCD de 24 y 60

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS NUMERABLES

Definición (intuitiva):

El tamaño de un conjunto es la cantidad de elementos distintos del conjunto.

Ejemplos:

- a) El tamaño del conjunto $\{a, b, c\}$ es 3
- b) El tamaño del conjunto $\{a, \emptyset, d\}$ es 3
- c) El tamaño del conjunto $\{\{a, b\}\}$ es 1
- d) El tamaño del conjunto \emptyset es cero

Para encontrar el tamaño de dos conjuntos de manera comparativa, se necesita la siguiente

Definición:

Dados dos conjuntos P y Q se dice que existe una correspondencia uno a uno (biunívoca) entre los elementos de P y los de Q , si es posible “aparear” los elementos de P y de Q de tal modo que todos los elementos P estén “apareados” con distintos elementos de Q .

Ejemplo:

Existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a, b\}$ y los de $\{c, d\}$, también existe una correspondencia biunívoca entre los de $\{a, b, c\}$ y los de $\{\emptyset, a, b\}$, pero no existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\{a, b, c\}$ y los de $\{a, d\}$.

Definición:

Se dice que un conjunto es finito si existe una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y los elementos de algún conjunto $n \in \mathbb{N}$, y se dice que n es la cardinalidad del conjunto.

Ejemplo:

La cardinalidad de los conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, \emptyset, d\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es 3

Definición:

Se dice que un conjunto es infinito contable (o infinito numerable o que la cardinalidad del conjunto es infinita contable), si existe una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto y los elementos de \mathbb{N} .

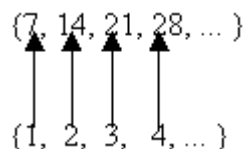
Ejemplos:

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ es un conjunto infinito contable.

El conjunto de todos los enteros pares no negativos $\{2, 4, 6, \dots\}$ es un conjunto infinito contable, pues existe una correspondencia uno a uno entre los enteros pares no negativos y los números naturales, a saber el entero $2i$ le corresponde el número natural i , para $i = 1, 2, \dots$, es decir:



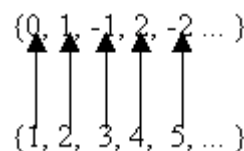
De manera análoga, el conjunto de todos múltiplos de 7 no negativos $\{7, 14, 21, \dots\}$ es infinitos numerable, es decir:



Cabe señalar que un conjunto es infinito contable si, comenzando con un cierto elemento podemos listar sucesivamente, uno detrás de otro todos los elementos del conjunto, pues esa lista nos permite construir una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto y los números naturales \mathbb{N} .

Ejemplo:

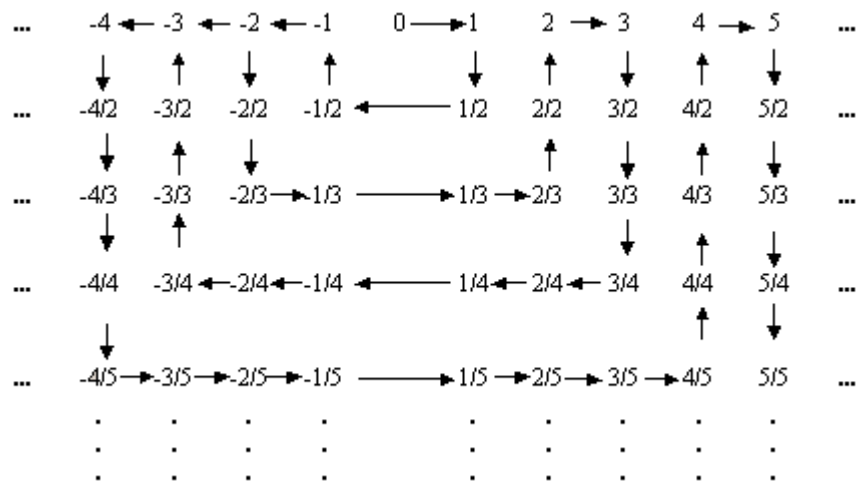
El conjunto de los enteros $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$, es un conjunto infinito contable, porque sus elementos pueden ser listados como $\mathbb{Z} = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \}$, ya que se puede hacer una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto de los enteros \mathbb{Z} y los números naturales \mathbb{N} , es decir:



La unión de un número finito contable de conjuntos infinitamente contable es un conjunto infinito contable. Lo mismo sucede con la unión de un número infinito contable de conjuntos infinitos contables.

Ejemplo:

El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} es un conjunto infinito numerable ya que puede ser listado como sigue:

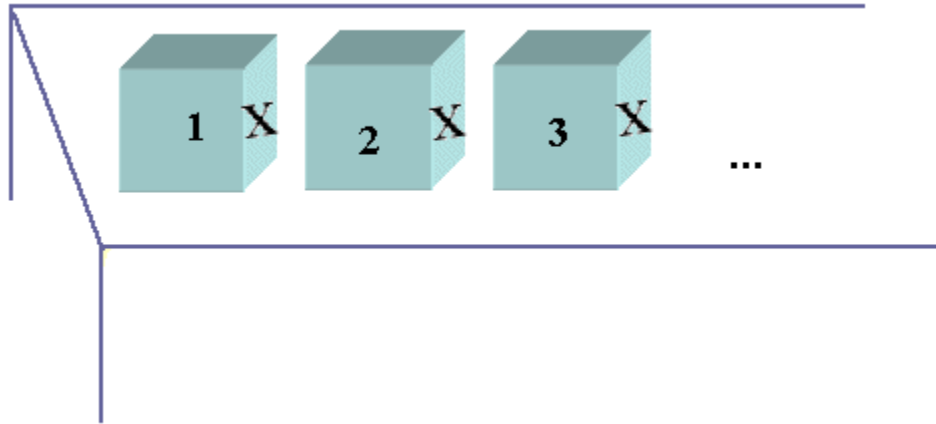


Además se puede observar que se pueden hacer una cantidad infinita numerable de sublistas, donde cada una es a la vez un conjunto infinito numerable, y la unión de todas ellas es el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} .

Finalmente se tiene que el conjunto de los números reales \mathbb{R} no es un conjunto infinito numerable, aunque no se demostrará.

FÓRMULAS INDUCTIVAS Y GENERALIZACIÓN

Supongamos que una serie de cubos numerados 1, 2, 3, ... están en una mesa infinitamente larga y que los cubos están marcados con una "X", como se muestra a continuación:



y supóngase que:

- a) El primer cubo está marcado.
- b) Si todos los cubos anteriores al cubo $(n + 1)$ están marcados, entonces el cubo $(n + 1)$ también lo está.

a) y b) implican que cada cubo está marcado, examinando los cubos uno por uno.

La afirmación a) establece de manera explícita que el cubo 1 está marcado. Considerando el cubo 2, todos los cubos anteriores al cubo 2 están marcados, o sea, el cubo 1 y así de acuerdo a b) el cubo 2 también está marcado. Considerando el cubo 3, todos los cubos anteriores al cubo 3 están marcados, o sea, los cuales 1 y 2 así de acuerdo a b) el cubo 3 está marcado.

Para mostrar que el cubo 5 está marcado, se observa que todos los cubos anteriores al cubo 5 están marcados, de modo que por b), el cubo 5 también está marcado.

Ejemplo:

Este ejemplo ilustra el principio de inducción matemática. Para mostrar como se puede utilizar la inducción de manera más profunda:

Sea S_n la suma de los n enteros positivos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Ahora supongamos que alguien afirma que:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

Esto establece una serie de afirmaciones:

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & \frac{1(2)}{2} = 1 \quad \mathbf{X} \\
S_2 & = & \frac{2(3)}{2} = 3 \quad \mathbf{X} \\
S_3 & = & \frac{3(4)}{2} = 6 \quad \mathbf{X} \\
\vdots & & \mathbf{X} \\
S_{n-1} & = & \frac{(n-1)n}{2} \quad \mathbf{X} \\
S_n & = & \frac{n(n+1)}{2} \quad \mathbf{X} \\
S_{n+1} & = & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \mathbf{?}
\end{array}$$

Supongamos que cada ecuación verdadera tiene una X junto a ella. Como la primera ecuación es verdadera, ésta marcada.

Ahora debemos demostrar que si todas las ecuaciones anteriores a la ecuación $(n + 1)$ son verdaderas, entonces la ecuación $(n + 1)$ también lo es.

Suponiendo que todas las ecuaciones anteriores a la ecuación $(n + 1)$ son verdaderas, entonces la ecuación (n) es verdadera:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Debemos demostrar que la ecuación $(n + 1)$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

es verdadera. De acuerdo a la definición:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1)$$

S_n esta contenida dentro de S_{n+1} en el sentido de que

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) \\
&= S_n + (n + 1)
\end{aligned}$$

De donde se obtiene que:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Otro ejemplo sería $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

Es decir, la suma de los n primeros números impares es n^2 . Donde tenemos que:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1^2 = 1 \\ S_2 &= 2^2 = 4 \\ S_3 &= 3^2 = 9 \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= (n - 1)^2 \\ S_n &= n^2 \end{aligned}$$

Donde se observa que S_1 es verdadera.

Suponiendo que S_n es verdadera, debemos demostrar que la ecuación $(n + 1)$, $S_{n+1} = (n + 1)^2$, es verdadera. El n -ésimo término es $(2n - 1)$, entonces el siguiente sería $(2n + 1)$.

De acuerdo a la definición:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \\ &= S_n + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Ejercicios:

Probar que :

- a) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$
- b) $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2} n(3n - 1)$
- c) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

La inducción matemática es un método de demostración que se utiliza cuando se trata de establecer la veracidad de una lista infinita de proposiciones. El método es bastante natural para usarse en una variedad de situaciones en la ciencia de la computación. Algunas aplicaciones tienen un sabor muy matemático, tal como verificar que todo entero positivo satisface cierta fórmula. Otra utilización frecuente es la de demostrar que un programa de computación o que un algoritmo con ciclos funciona como se espera.

Primer principio de inducción matemática

Consideremos una lista de proposiciones $p(1), p(2), p(3), \dots$ con índices en los enteros positivos \mathbb{Z}^+ . Todas las proposiciones $p(n)$ son verdaderas a condición que:

(B) $p(1)$ sea verdadera.

(I) $p(n+1)$ es verdadera siempre que $p(n)$ lo sea.

nos referimos a (B), es decir al hecho de $p(1)$ es verdadera, como la base de la inducción y nos referimos a (I) como el paso inductivo. En la notación del cálculo proposicional (I) equivale decir que:

La implicación $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo:

Demostrar $\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{1}{2}(3n^2 - n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. (Hipótesis de la inducción)

Demostración:

La n -ésima proposición $p(n)$ es verdadera, esto es

$$\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

Nótese que:

$$p(1) = 1 = \frac{1}{2}[3(1)^2 - 1] \text{ de aquí que } 1 = 1$$

$$p(2) = 1 + 4 = \frac{1}{2}[3(2)^2 - 2] \text{ de aquí que } 5 = 5$$

$$p(3) = 1 + 4 + 7 = \frac{1}{2}[3(3)^2 - 3] \text{ de aquí que } 12 = 12$$

...

En particular, $p(1)$ es verdadera por inspección y esto establece la base de la inducción. Ahora supóngase que $p(n)$ es verdadera para algún n , esto es:

$$\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

necesitamos demostrar que $p(n+1)$, (ya que en este paso $n = k+1$)

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k - 2) = \frac{1}{2} [3(k+1)^2 - (k+1)]$$

tal como lo establece el paso inductivo. Utilizando $p(n)$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k - 2) = \sum_{k=1}^n (3k - 2) + [3(k+1) - 2] = \frac{1}{2}(3k^2 - k) + (3k + 1)$$

para verificar $p(n + 1)$ necesitamos comprobar que:

$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) + (3k + 1) = \frac{1}{2}[3(k+1)^2 - (k+1)]$$

Esto ya es un problema puramente algebraico, para lo cual se trabajara con el lado izquierdo de la igualdad, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3k^2 - k) + (3k + 1) &= \frac{1}{2}(3k^2 - k + 6k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(3k^2 + 5k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(3k + 2)(k + 1) \\ &= \frac{1}{2}[3(k+1) - 1](k+1) \\ &= \frac{1}{2}[3(k+1)^2 - (k+1)] \end{aligned}$$

Entonces $p(n + 1)$ es verdadera siempre que $p(n)$ lo sea. Por el primer principio de inducción matemática se concluye que $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

No siempre es necesario el uso del símbolo de sumatoria para aplicar la inducción matemática, puede también utilizarse parte del desarrollo de la misma, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo:

Demostrar por inducción que: $2 + 4 + \dots + 2(n) = n(n + 1)$

Demostración:

Nuestra n-ésima proposición $p(n)$ es: $2 + 4 + \dots + 2(n) = n(n + 1)$ y nótese que:

$$\begin{aligned} p(1) &= 2 = 1(2), \text{ donde } 2 = 2 \\ p(2) &= 2 + 4 = 2(3), \text{ donde } 6 = 6 \\ p(3) &= 2 + 4 + 6 = 3(4), \text{ donde } 12 = 12 \\ p(4) &= 2 + 4 + 6 + 8 = 4(5), \text{ donde } 20 = 20 \\ &\dots \end{aligned}$$

Así $p(1)$ asegura $2 = 1(1 + 1)$ y como es verdadera por inspección tal como lo establece la base de la inducción matemática.

Para el paso inductivo, supongamos que $p(n)$ es verdadera para algún n , esto es

$$2 + 4 + \dots + 2(n) = n(n + 1)$$

es verdadera. Ahora queremos probar que para $p(n + 1)$ (y ya que en este paso $n = k + 1$)

$$2 + 4 + \dots + 2(k) + 2(k+1) = (k+1)((k+1) + 1)$$

es decir $2 + 4 + \dots + 2(k) + (2k+2) = (k+1)(k+2)$

tal como lo establece el paso inductivo.

Como $p(n)$ es verdadera por hipótesis, y trabajando con el lado izquierdo de la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \dots + 2(k) + (2k+2) &= [2 + 4 + \dots + 2k] + (2k+2) \\ &= k(k+1) + (2k+2) \\ &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Entonces $p(n+1)$ es verdadera siempre que $p(n)$ lo sea. Por el primer principio de inducción matemática se concluye que $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

No todas las demostraciones tienen que ver con sumas y sumatorias, también se puede aplicar la inducción para demostrar desigualdades. La diferencia es que la base de la inducción cambia un poco en el sentido que no necesariamente se debe cumplir $p(1)$, pero puede ser cierto para algunos valores de p mayores que cierto valor de n .

Ejemplo:

Demostrar por inducción que $2 + 5(n-1) \leq 5n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Demostración:

Nuestra n -ésima proposición $p(n)$ es: $2 + 5(n-1) \leq 5n$ y nótese que:

$$\begin{aligned} p(1) &= 2 \leq 5 \\ p(2) &= 7 \leq 10 \\ &\dots \end{aligned}$$

En particular, $p(1)$ es verdadera por inspección y esto establece la base de la inducción. Ahora supóngase que $p(n)$ es verdadera para algún n , esto es:

$$2 + 5(n-1) \leq 5n$$

es verdadera. Ahora queremos probar que para $p(n+1)$ (ya que en este paso $n = k+1$)

$$2 + 5((k+1) - 1) \leq 5(k+1)$$

simplificando $2 + 5k \leq 5k + 5$, tal como lo establece el paso inductivo.

Como $p(n)$ es verdadera por hipótesis, y trabajando con el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 + 5k + 5 - 5 &\leq 5k + 5 \\ 2 + 5k &\leq 5k + 5 \end{aligned}$$

Entonces $p(n + 1)$ es verdadera siempre que $p(n)$ lo sea. Por el primer principio de inducción matemática se concluye que $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo:

Demostrar por inducción que $2^n < n! \forall n \geq 4$ (hipótesis inductiva)

Demostración:

Nuestra n -ésima proposición $p(n)$ es $2^n < n!$

Nótese que $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$ no son verdaderas, y no necesitamos que sean verdaderas. Ahora bien $p(4) = 2^4 = 16 < 4! = 24$. así que $p(4)$ es válido, como lo establece nuestra base inductiva.

Ahora supóngase que $p(n)$ es verdadera para algún n , esto es:

$$2^n < n!$$

es verdadera. Ahora queremos probar que para $p(n + 1)$ (ya que en este paso $n = k + 1$)

$$2^{k+1} < (k + 1)!$$

tal como lo establece el paso inductivo. Utilizando $p(n)$, se multiplican ambos lados de la desigualdad por 2, para obtener $n \geq 4$,

$$(2)(2^k) = 2^{k+1} < 2(k!) < (n+1)(n!) = (n+1)!$$

Entonces $p(n+1)$ es verdadera siempre que $p(n)$ lo sea. Por el primer principio de inducción matemática se concluye que $p(n)$ es verdadera $\forall n \geq 4$.

Ejercicios:

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

b) $\sum_{k=1}^n k(2^k) = 2 + (n-1)2^{n+1}$

c) $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

f) $\sum_{k=1}^n 2(3^{k-1}) = 3^n - 1$

g) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

RELACIONES DE RECURRENCIA

PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Definición:

Intuitivamente una sucesión **S** es una simple lista de objetos llamados elementos, que forman un conjunto, los elementos están uno detrás de otro en el orden natural creciente de los números naturales \mathbb{N} .

Si la sucesión es finita, puede terminar después de un cierto número de términos o puede en principio, al menos, seguir indefinidamente, en este caso se dice que es infinita.

Ejemplo:

La sucesión 1, 4, 9, 16, 25, ... , n^2 , es una sucesión infinita de números $n \in \mathbb{N}$ al cuadrado, los tres puntos suspensivos significan "así sucesivamente".

Una sucesión general, es decir, una sucesión en la que no se especifican los términos puede escribirse como:

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

o algunas veces como:

$$x_n, 1 \leq n \leq \infty$$

Si **X** es una sucesión se escribe como $X = (x_n)$.

Formalizando, una sucesión **S** es una función de una variable n donde $\text{Dom}(n) = \mathbb{N}$, a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un término de la sucesión (x_n), el término n -ésimo de la sucesión, es decir:

$$S: \mathbb{N} \rightarrow (x_n)$$

En una sucesión los términos pueden ser todos distintos o no, esto es puede tener términos repetidos.

Ejemplo:

$S = \{1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1\}$ es una sucesión finita con términos repetidos.

Ejemplos de sucesiones:

1, 2, 3, 4, ..., n , ...

2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ...

1, 4, 9, 16, ..., n^2 , ...

-1, 1, -1, 1, ..., -1^n , ...

-1, 2, -3, 4, ..., $(-1)^n n$, ...

-1, 1/2, -1/3, 1/4, ..., $-1^n/n$, ...

1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ..., $1/2^n$, ...

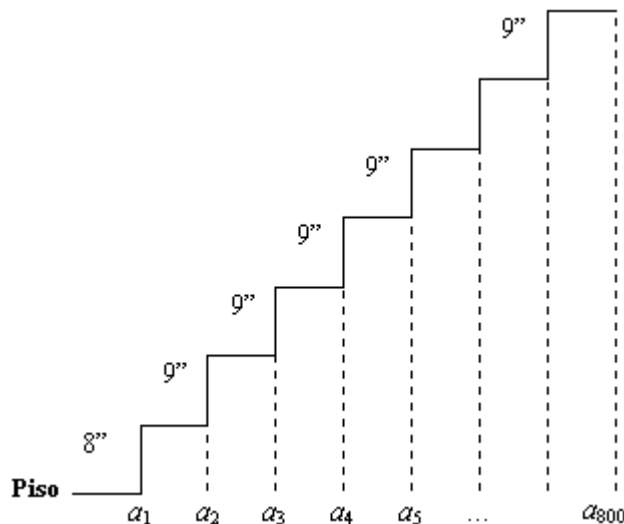
1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, ..., $1/10^n$, ...

Progresiones Aritméticas

Empecemos viendo un ejemplo:

Escalera de Jacob.

En el rasca cielos que Jacob posee hay una escalera que va desde el suelo hasta la cima. El primer escalón mide 8 pulgadas los posteriores miden 9 pulgadas. ¿A que altura del suelo esta el escalón 800?



$$a_1 = 8$$

$$a_2 = 8 + 1(9) = 17$$

$$a_3 = 8 + 2(9) = 26$$

$$a_4 = 8 + 3(9) = 35$$

...

$$a_{800} = 8 + 799(9) = 7199$$

Por lo tanto el escalón 800 esta a 7199 pulgadas sobre el suelo.

Ahora consideremos las siguientes sucesiones. Al detectar un patrón llénese los espacios en blanco.

a) 5, 9, 13, 17, , , ...

b) 2, 2.5, 3, 3.5, , , ...

c) 8, 5, 2, -1, , , ...

¿Qué tienen en común estas tres sucesiones? Simplemente que en cada caso se puede obtener un término sumando un número fijo al anterior.

Definición:

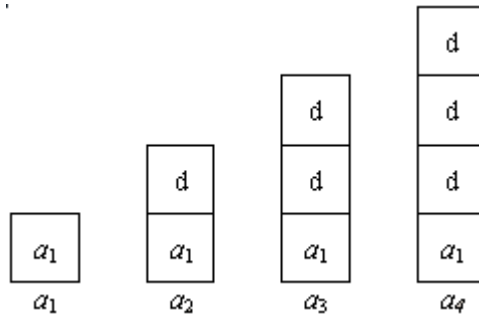
Una progresión aritmética es una sucesión infinita de números donde cualquier termino (distinto de primero) se obtiene sumando un numero fijo al anterior.

Si se denota a tal sucesión como a_1, a_2, a_3, \dots satisface la formula recursiva

$$a_n = a_{n-1} + d$$

donde d es un numero fijo llamado diferencia común.

¿Se puede obtener también una fórmula explícita? Sí. Veamos primero la siguiente figura:



Hay que observar que las d's deben sumarse con a_1 una vez menos que el subíndice de a . Esto significa que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Entonces:

$$a_n = 5 + (n - 1)(4) = 1 + 4n$$

$$b_n = 2 + (n - 1)(.5) = 1.5 + .5n$$

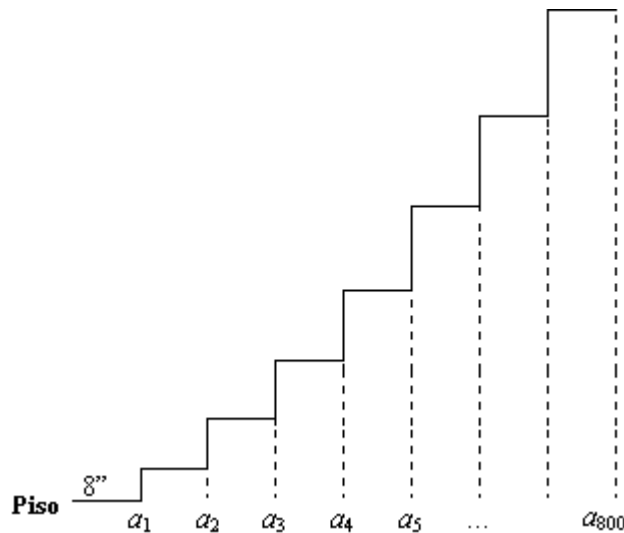
$$c_n = 8 + (n - 1)(-3) = 11 - 3n$$

Progresiones Geométricas

Empecemos viendo un ejemplo:

Escalera de Oro de Jacob.

En sus sueños Jacob vio una escalera de oro con ángeles subiendo y bajando. El primer escalón era de 8 pulgadas, pero después cada escalón tenía una altura de $5/4$ pulgadas más que el anterior. ¿A que altura estará el escalón 800?



$$a_1 = 8$$

$$a_2 = 8 (5/4)$$

$$a_3 = 8 (5/4)^2$$

$$a_4 = 8 (5/4)^3$$

$$\dots$$

$$a_{800} = 8 \left(\frac{5}{4} \right)^{799}$$

Por lo tanto la altura del escalón 800 es de $8 \left(\frac{5}{4} \right)^{799}$ pulgadas arriba del piso.

Esta escalera de Jacob es en verdad para ángeles y no para personas. El escalón 800 tiene $3.4 \times (10)^{73}$ millas de alto. A modo de comparación, el sol esta a $9.3 \times (10)^7$ millas de la tierra y Alpha Centauri, que es la estrella más cercana a la tierra, esta a $2.5 \times (10)^{13}$ millas de la misma. Esta escalera en verdad alcanza el cielo.

En la sucesión anterior cada término era $\frac{5}{4}$ veces más alto que el anterior. Se puede encontrar un patrón similar en cada una de las siguientes sucesiones:

- a) 3, 6, 12, 24, \square , \square , ...
 b) 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, \square , \square , ...
 c) .6, 6, 60, 600, \square , \square , ...

El rasgo común de estas tres sucesiones es que en cada caso se puede obtener un término multiplicando el término anterior por un número fijo.

Definición:

Una progresión geométrica es una sucesión infinita de números donde cualquier término (distinto del primero), se obtiene multiplicando un numero fijo al termino anterior.

Así una sucesión geométrica a_1, a_2, a_3, \dots satisface la formula recursiva

$$a_n = r a_{n-1}$$

donde r es un número fijo llamado razón común.

Además se tiene $a_2 / a_1 = a_3 / a_2 = a_4 / a_3 = \dots = a_n / a_{n-1} = r$.

Para obtener la formula explícita correspondiente se tiene que

$$a_2 = r(a_1)$$

$$a_3 = r(a_2) = r(r \cdot a_1) = r^2(a_1)$$

$$a_4 = r(a_3) = r(r^2 \cdot a_1) = r^3(a_1)$$

...

$$a_n = r^{n-1} \cdot a_1$$

En este caso el exponente de r es uno menos que el subíndice de a. Esto significa que:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Así:

$$a_n = (3)(2)^{n-1}$$

$$b_n = (12)(1/3)^{n-1}$$

$$c_n = (0.6)(10)^{n-1}$$

SUCESIONES RECURRENTES Y ECUACIÓN DE RECURRENCIA

A menudo es posible desarrollar relaciones entre los elementos de una sucesión. Tales relaciones se llaman relaciones de recurrencia. Se ilustrará el concepto con un ejemplo y luego, se dará una definición más formal.

Ejemplo:

Una persona invierte \$1,000.00 pesos al 12% de interés compuesto anual. Si A_n representa el monto de cada n años, determinar una relación entre A_n y A_{n-1} .

Al cabo de $n - 1$ años el monto será A_{n-1} . Después de un año mas se tendrá la cantidad de A_{n-1} más el interés del año, entonces:

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + (0.12)A_{n-1} \\ &= 1.12A_{n-1} \end{aligned}$$

El valor inicial $A_0 = 1000$ que junto con la ecuación anterior permite calcular el valor de $A_n \forall n$.

$$\begin{aligned} A_3 &= 1.12(A_2) \\ &= (1.12)(1.12)(A_1) \\ &= (1.12)(1.12)(1.12)(A_0) \\ &= (1.12)^3(1000) \\ &= 1404.93 \end{aligned}$$

Por lo tanto al final del tercer año la cantidad es \$1,404.93 pesos. Se puede efectuar para cualquier valor de n y se obtiene:

$$\begin{aligned} A_n &= 1.12(A_{n-1}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= (1.12)^n (1000) \end{aligned}$$

Al cabo de 20 años la cantidad resultante es: $(1.12)^{20} (1000) = \$9,646.30$

La ecuación $A_n = (1.12)A_{n-1}$ proporciona un ejemplo de una relación de recurrencia. Tal relación define una sucesión geométrica dando el n -ésimo valor en términos de algunos de los antecesores. Los valores dados explícitamente tales como $A_0 = 1000$ se denominan condiciones iniciales.

Definición:

Una relación de recurrencia para una sucesión $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ es una ecuación que relaciona a_n con alguno de sus antecesores $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Ejemplo:

Una de las más antiguas relaciones de recurrencia define la sucesión de Fibonacci. Esta sucesión se encuentra por primera vez en el libro de este autor, Liber Abaci (1202) donde él se preguntó lo siguiente: ¿cuántas parejas de conejos habrá después de un año, si al comienzo solo hay una pareja, y

sabemos que cada pareja produce al mes una nueva pareja la cual se vuelve productiva al mes?. Se da por sentado que no ocurren muertes.

Sea f_i el número de parejas de conejos al cabo del i -ésimo mes. Entonces

$$f_0 = 1 \quad (i)$$

Al final de primer mes hay sólo una pareja ya que comienza a ser productiva después de un mes. Por consiguiente

$$f_1 = 1 \quad (ii)$$

Las ecuaciones (i) y (ii) son las condiciones iniciales por la sucesión de Fibonacci. El aumento en las parejas de conejos f_n, f_{n-1} , del mes $(n - 1)$ al mes (n) se debe a que cada pareja viva el mes $(n - 2)$ produciendo una pareja adicional. Esto es:

$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} &= f_{n-2}, & \text{ó bien} \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} & (iii) \end{aligned}$$

La relación de recurrencia (iii) con las condiciones iniciales (i) y (ii) define una sucesión de Fibonacci.

Entonces después de un año la solución es $f_{12} = 233$

Vamos a desarrollar los 12 primeros términos para comprobar la afirmación anterior.

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 = 1 \\ f_2 &= f_1 + f_0 = 1 + 1 = 2 \\ f_3 &= f_2 + f_1 = 2 + 1 = 3 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 3 + 2 = 5 \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 5 + 3 = 8 \\ f_6 &= f_5 + f_4 = 8 + 5 = 13 \\ f_7 &= f_6 + f_5 = 13 + 8 = 21 \\ f_8 &= f_7 + f_6 = 21 + 13 = 34 \\ f_9 &= f_8 + f_7 = 34 + 21 = 55 \\ f_{10} &= f_9 + f_8 = 55 + 34 = 89 \\ f_{11} &= f_{10} + f_9 = 89 + 55 = 144 \\ f_{12} &= f_{11} + f_{10} = 144 + 89 = 233 \end{aligned}$$

NOTA: Una relación de recurrencia define generalmente una progresión. Dicha relación de recurrencia no define una única progresión, a menos que se especifique los valores iniciales.

Ejemplo:

La relación de recurrencia $a_{n-1} = 3a$ ó $a_n = 3a_{n-1}$, $n \geq 0$, puede definir las siguientes progresiones geométricas:

i) 5, 15, 45, ... ó

ii) 7, 21, 63, ...

Pero si especificamos que en *i*) el valor inicial es $a_0 = 5$, y en *ii*) que el valor inicial $a_0 = 7$, entonces se define una progresión geométrica única en cada caso.

Ejemplo:

La sucesión

$$3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^r,$$

donde el valor inicial $3^0 = 1$ y con la relación de recurrencia $a_r = 3a_{r-1}$, dan como resultado la siguiente progresión:

$$1, 3, 9, 27, \dots, 3^{r-1}, 3^r$$

Relaciones de Recurrencia Lineal con Coeficientes Constantes

Una relación de recurrencia de la forma:

$$C_0 a_r + C_1 a_{r-1} + C_2 a_{r-2} + \dots + C_k a_{r-k} = f(r) \quad (i)$$

donde las C_i son constantes, se denomina relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes. La relación de recurrencia (i) se conoce como una relación de recurrencia de k -ésimo orden siempre que tanto C_0 y C_k sean distintos de cero.

Ejemplos:

a) $2a_r + 2a_{r-1} = 2^r$, es una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes de primer orden.

b) $3a_r - 5a_{r-1} + 2a_{r-2} = r^2 + 5$, es una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes de segundo orden.

c) $a_r + 7a_{r-2} = 0$, es una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes de segundo orden.

d) $a_r = 3a_{r-1} \cdot a_{r-2}$, no es una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes.

e) $a_r = 3ra_{r-1}$, no es una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes.

Si $f(r) = 0$, como ocurre en la relación de recurrencia c), se dice que la relación de recurrencia es lineal homogénea con coeficientes constantes.

Consideremos la relación de recurrencia $3a_r - 5a_{r-1} + 2a_{r-2} = r^2 + 5$.

Supóngase que nos dan los valores iniciales $a_3 = 3$ y $a_4 = 6$, podemos calcular a a_5 y a_6 como sigue:

$$\begin{aligned} a_r &= [5a_{r-1} - 2a_{r-2} + r^2 + 5]1/3 \\ a_5 &= [5a_4 - 2a_3 + 25 + 5]1/3 \\ &= [(5)(6) - (2)(3) + 25 + 5]1/3 \\ &= [30 - 6 + 30]1/3 \\ &= 54/3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= [5a_5 - 2a_4 + 16 + 5]1/3 \\
&= [(5)(18) - (2)(6) + 36 + 5]1/3 \\
&= [90 - 12 + 41]1/3 \\
&= 119/3
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. De manera similar podemos calcular a_2 , a_1 , y a_0 , lo que va a variar es el despeje de a_r :

$$\begin{aligned}
a_2 &= 9 \\
a_1 &= 25 \\
a_0 &= 107/2
\end{aligned}$$

En general una relación de recurrencia de k -ésimo orden con coeficientes constantes como en (ii), si k valores consecutivos de la función numérica de a a_{m-k} , a_{m-r-1} , ..., a_{m-1} ; son conocidos para algún m , los valores de a_m puede calcularse de acuerdo con (i) a saber:

$$a_m = -1/C_0 [C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_k a_{m-k} - f(m)]$$

además el valor $a_{m+1} = -1/C_0 [C_1 a_m + C_2 a_{m-1} + \dots + C_k a_{m-k+1} - f(m+1)]$

y los valores de a_{m+2} , a_{m+3} , a_{m+4} , ... pueden calcularse de manera similar.

SOLUCIONES HOMOGÉNEAS

La solución (total) a una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes es la suma de dos partes, la solución homogénea que satisface la ecuación en diferencias (relación de recurrencias), cuando el lado derecho de la ecuación se hace cero y la solución particular, que satisface la ecuación en diferencias con $f(r)$ en el lado derecho. En otras palabras la función numérica discreta que es solución de la ecuación en diferencias es la suma de dos funciones numéricas discretas una es la solución homogénea y otra es la solución particular.

Sean: $a^{(h)} = (a_0^{(h)}, a_1^{(h)}, \dots, a_r^{(h)}, \dots)$ la solución homogénea y $a^{(p)} = (a_0^{(p)}, a_1^{(p)}, \dots, a_r^{(p)}, \dots)$ la solución particular a la ecuación en diferencias. Puesto que:

$$C_0 a_r^{(h)} + C_1 a_{r-1}^{(h)} + \dots + C_k a_{r-k}^{(h)} = 0$$

y

$$C_0 a_r^{(p)} + C_1 a_{r-1}^{(p)} + \dots + C_k a_{r-k}^{(p)} = f(r)$$

Tenemos que:

$$C_0 (a_r^{(h)} + a_r^{(p)}) + C_1 (a_{r-1}^{(h)} + a_{r-1}^{(p)}) + \dots + C_k (a_{r-k}^{(h)} + a_{r-k}^{(p)}) = f(r)$$

La solución $a = a^{(h)} + a^{(p)}$ satisface la ecuación en diferencias (relación de recurrencias).

Una solución homogénea para la ecuación de recurrencia lineal con coeficientes constantes de la forma: $A\alpha_1^r$, donde α_1 se conoce como una raíz característica y A es una constante determinada por los valores iniciales. Si sustituimos $A\alpha^r$ por a_r en la ecuación de recurrencia con el lado derecho de la ecuación igual a cero, obtenemos:

$$C_0 A\alpha^r + C_1 A\alpha^{r-1} + C_2 A\alpha^{r-2} + \dots + C_k A\alpha^{r-k} = 0$$

La ecuación puede simplificarse como:

$$C_0 \alpha^k + C_1 \alpha^{k-1} + C_2 \alpha^{k-2} + \dots + C_k = 0$$

la cual se conoce como ecuación característica de la ecuación de recurrencia. Por lo tanto si α_1 es una de las raíces de la ecuación característica (ésta es la razón de que α_1 se llame raíz característica), $A\alpha_1^r$ es una solución homogénea de la ecuación de recurrencia.

Una ecuación característica de k-ésimo grado tiene k raíces características. Supongamos que las raíces de la ecuación característica son todas distintas. En este caso sencillo

$$a_r^{(h)} = A_1 \alpha_1^r + A_2 \alpha_2^r + \dots + A_k \alpha_k^r$$

también es una solución homogénea de la ecuación de recurrencia donde:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$$

son las distintas raíces características y los A_1, A_2, \dots, A_k son constantes que están determinados por los valores iniciales.

Ejemplo:

Consideremos de nuevo la sucesión de Fibonacci. La relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes homogénea de segundo orden para la sucesión de Fibonacci es

$$a_r = a_{r-1} + a_{r-2}$$

La correspondiente ecuación característica es

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

La cual tiene dos raíces distintas

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De lo cual se obtiene que

$$a_r^{(h)} = A_1 \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^r + A_2 \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^r$$

es una solución homogénea donde las dos constantes A_1 y A_2 serán determinados a partir de las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$.

Ejemplo:

Considérese la siguiente relación de recurrencia

$$a_r + 6a_{r-1} + 12a_{r-2} + 8a_{r-3} = 0$$

La ecuación característica es

$$\alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8 = 0$$

Así

$$a_r^{(h)} = (A_1 r^2 + A_2 r + A_3)(-2)^r$$

es una solución homogénea ya que -2 es una raíz característica tripe.

Esta solución viene de la siguiente observación:

Supongamos que algunas de las raíces de la ecuación característica son raíces múltiples. Sea α_1 una raíz de multiplicidad m . La correspondiente solución homogénea es:

$$(A_1 r^{m-1} + A_2 r^{m-2} + \dots + A_{m-2} r^2 + A_{m-1} r + A_m)(\alpha_1^r)$$

donde las constantes A_i serán determinadas por las condiciones iniciales.

Ejemplo:

Sea la ecuación de recurrencia:

$$4a_r - 20a_{r-1} + 17a_{r-2} - 4a_{r-3} = 0$$

La ecuación característica es:

$$4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 17\alpha - 4 = 0$$

Las raíces características son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y 4. En consecuencia la solución homogénea es:

$$a^{(h)} = (A_1 r + A_2) \left(\frac{1}{2}\right)^r + A_3 (4)^r$$

SOLUCIONES PARTICULARES

No existe un procedimiento general para determinar la solución particular de una relación de recurrencia. No obstante, en casos simples, esta solución puede obtenerse mediante el método de inspección.

Ejemplo:

Sea la siguiente relación de recurrencia:

$$a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 3r^2 \quad (i)$$

Supongamos que la forma general de la solución particular es:

$$P_1 r^2 + P_2 r + P_3 \quad (ii)$$

donde P_1 , P_2 y P_3 son constantes. Al sustituir la expresión (ii) en el lado izquierdo de (i), obtenemos

$$P_1 r^2 + P_2 r + P_3 + 5P_1(r-1)^2 + 5P_2(r-1) + 5P_3 + 6P_1(r-2)^2 + 6P_2(r-2) + 6P_3$$

lo cual puede simplificarse como

$$12P_1 r^2 - (34P_1 - 12P_2)r + (29P_1 - 17P_2 + 12P_3) \quad (iii)$$

Sustituyendo (iii) en la parte derecha de (i) se obtienen las ecuaciones:

$$12P_1 = 3$$

$$34P_1 - 12P_2 = 0$$

$$29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0$$

de lo cual se obtiene

$$P_1 = 1/4$$

$$P_2 = (17/24)$$

$$P_3 = (115/288)$$

Por lo tanto la solución particular es:

$$a_r^{(p)} = (1/4)r^2 + (17/24)r + (115/288)$$

En general, cuando $f(r)$ es de la forma de un polinomio de grado t en r

$$F_1 r^t + F_2 r^{t-1} + \dots + F_t r + F_{t+1}$$

la solución particular será de la forma

$$P_1 r^t + P_2 r^{t-1} + \dots + P_t r + P_{t+1}$$

Ejemplo:

Encontrar la solución particular para la relación de recurrencia

$$a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 3r^2 - 2r + 1 \quad (i)$$

la solución particular es de la forma

$$P_1 r^2 + P_2 r + P_3 \quad (ii)$$

donde P_1 , P_2 y P_3 son constantes. Al sustituir la expresión (ii) en el lado izquierdo de (i), obtenemos

$$P_1 r^2 + P_2 r + P_3 + 5P_1(r-1)^2 + 5P_2(r-1) + 5P_3 + 6P_1(r-2)^2 + 6P_2(r-2) + 6P_3 = 3r^2 - 2r + 1$$

lo cual puede simplificarse como

$$12P_1 r^2 - (34P_1 - 12P_2)r + (29P_1 - 17P_2 + 12P_3) = 3r^2 - 2r + 1 \quad (iii)$$

Sustituyendo (iii) en la parte derecha de (i) se obtienen las ecuaciones:

$$12P_1 = 3$$

$$34P_1 - 12P_2 = 2$$

$$29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 1$$

de lo cual se obtiene

$$P_1 = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = \frac{13}{24}$$

$$P_3 = \frac{71}{288}$$

Por lo tanto la solución particular es:

$$a_r^{(p)} = \left(\frac{1}{4}\right)r^2 + \left(\frac{13}{24}\right)r + \left(\frac{71}{288}\right)$$

Ejemplo:

Encontrar la solución particular para la relación de recurrencia.

$$a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 1$$

Puesto que $f(r)$ es una constante la solución particular también lo será, dicha constante es P . Sustituyendo P en la ecuación, obtenemos

$$P - 5P + 6P = 1$$

Esto es $2P = 1$ o bien $a_r^{(p)} = \frac{1}{2}$

Ejemplo:

Encontrar la solución de recurrencia para la siguiente relación de recurrencia.

$$a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 42 \cdot 4^r$$

La forma general será la solución particular es

$$P4^r \quad (ii)$$

Sustituyendo (ii) en el lado derecho de (i) se tiene que

$$P4^r + 5P4^{r-1} + 6P4^{r-2}$$

lo cual se simplifica como

$$(21/8)P4^r \quad (iii)$$

Comparando (iii) con el lado derecho de (i), se tiene que:

$$(21/8)P = 42$$

$$P = 16$$

Por lo tanto la solución particular es:

$$a_r^{(p)} = 16 \cdot 4^r$$

Ejemplo:

Encontrar la solución particular para la relación de recurrencia

$$a_r + a_{r-1} = 3r2^r \quad (i)$$

La forma general para la solución particular es

$$(P_1r + P_2)2^r \quad (ii)$$

Al sustituir (ii) en (i) se obtiene que :

$$(P_1r + P_2)2^r + [P_1(r-1) + P_2]2^{r-1} = 3r2^r$$

La cual se simplifica como:

$$\frac{3}{2}P_1r2^r + (-\frac{1}{2}P_1 + \frac{3}{2}P_2)2^r \quad (iii)$$

Al compara (iii) con el lado derecho de (i) se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$\frac{3}{2}P_1 = 3$$

$$-\frac{1}{2}P_1 + \frac{3}{2}P_2 = 0$$

Así

$$P_1 = 2 \text{ y } P_2 = \frac{2}{3}$$

y la solución particular es

$$a_r^{(p)} = (2r + \frac{2}{3})2^r$$

Ejercicios:

Encontrar las soluciones particulares para cada relación de recurrencia.

- | | |
|--|------------------------|
| a) $a_r + a_{r-1} = 3r2^r$ | $(P_1r + P_2)2^r$ |
| b) $a_r - 2a_{r-1} = 3 \cdot 2^r$ | $Pr2^r$ |
| c) $a_r - 4a_{r-1} + 4a_{r-2} = (r+1)2^r$ | $r^2(P_1r + P_2)2^r$ |
| d) $a_r = 4a_{r-1} + 7$ | Pr |
| e) $a_r - 2a_{r-1} + a_{r-2} = 7$ | Pr^2 |
| f) $a_r - 5a_{r-1} + 6a_{r-2} - 2 = 2^r + r$ | $P_1r2^r + P_2r + P_3$ |

SOLUCIONES TOTALES

Ahora se deben de combinar la solución homogénea y la solución particular y determinar los coeficientes indeterminados de la solución homogénea. Para una relación de recurrencia de k -ésimo orden, los k coeficientes indeterminados

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$$

de la solución homogénea pueden determinarse mediante los valores iniciales:

$$a_{r_0}, a_{r_0+1}, \dots, a_{r_0+k-1}$$

para cualquier r_0

Si todas las raíces de la ecuación de recurrencia son distintas, la solución total es de la forma

$$a_r = A_1 \alpha_1^r + A_2 \alpha_2^r + \dots + A_k \alpha_k^r + p(r)$$

donde $p(r)$ es la solución particular.

Así para $r = r_0 + 1, \dots, r_0 + k - 1$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$a_{r_0} = A_1 \alpha_1^{r_0} + A_2 \alpha_2^{r_0} + \dots + A_k \alpha_k^{r_0} + p(r_0)$$

$$a_{r_0+1} = A_1 \alpha_1^{r_0+1} + A_2 \alpha_2^{r_0+1} + \dots + A_k \alpha_k^{r_0+1} + p(r_0 + 1)$$

.

.

.

$$a_{r_0+k+1} = A_1 \alpha_1^{r_0+k+1} + A_2 \alpha_2^{r_0+k+1} + \dots + A_k \alpha_k^{r_0+k+1} + p(r_0 + k + 1)$$

Estas k ecuaciones pueden resolverse para

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$$

Ejemplo:

Sea la ecuación de recurrencia:

$$a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 42 \cdot 4^r \quad (i)$$

La solución homogénea es:

$$a_r^{(h)} = A_1 (-3)^r + A_2 (-2)^r$$

y la solución particular es

$$a_r^{(h)} = 16 \cdot 4^r$$

Y ahora supongamos que nos dan los valores iniciales (condiciones de frontera) $a_2 = 278$ y $a_3 = 962$

Entonces la solución total es

$$a_r = A_1(-3)^r + A_2(-2)^r + 16 \cdot 4^r$$

Sustituyendo los valores se tiene que

$$278 = 9A_1 + 4A_2 + 256$$

$$962 = -27A_1 - 8A_2 + 1024$$

Donde se obtiene que

$$A_1 = 2 \text{ y } A_2 = 1$$

Así

$$a_r = 2 \cdot (-3)^r + (-2)^r + 16 \cdot 4^r$$

Ejemplo:

Encontrar la solución total de la siguiente relación de recurrencia

$$a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 3^r$$

con los valores iniciales

$$a_0 = 0 \text{ y } a_1 = 1$$

La solución homogénea para dicha relación de recurrencia es

$$a_r^{(h)} = A_1(2)^r + A_2(5)^r$$

y la solución particular es

$$a_r^{(h)} = (-9/2) \cdot 3^r$$

entonces la solución total es

$$a_r = A_1(2)^r + A_2(5)^r - (9/2) \cdot 3^r$$

Ahora sustituyendo los valores iniciales se tiene que

$$0 = A_1 + A_2 - 9/2$$

$$1 = 2A_1 + 5A_2 - 27/2$$

Donde se obtiene que

$$A_1 = 8/3 \text{ y } A_2 = 11/6$$

Entonces la solución total que finalmente como sigue:

$$a_r = 8/3(2)^r + 11/6(5)^r - (9/2) \cdot 3^r$$

PRINCIPIOS DE CONTEO

REGLAS DE LA SUMA Y EL PRODUCTO

Definición:

Para cualquier conjunto finito S , se escribe $|S|$ para denotar la cantidad de elementos de dicho conjunto, de esta manera $|S| = |T|$ precisamente cuando S y T son del mismo tamaño.

Observemos que:

$$|\emptyset| = 0 \text{ y } |\{1, 2, 3, \dots, n\}| = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Regla de la Suma (Regla de la Unión)

Si S y T son dos conjuntos finitos:

a) Si S y T son disjuntos, es decir, $S \cap T = \emptyset$, entonces $|S \cup T| = |S| + |T|$

b) En general $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$

La razón intuitiva por la que se cumple b) es que cuando calculamos $|S| + |T|$ se están contando dos veces los elementos de $S \cap T$, por lo que debemos restar $|S \cap T|$ de la suma de $|S| + |T|$ para obtener $|S \cup T|$.

Ejemplos:

a) En una escuela 20 alumnos toman clases de computación, 30 física y 7 de ellos toman ambas. ¿Cuántos alumnos hay en total?

Sea C el conjunto de los alumnos que toman la clase de computación y sea F el conjunto de los alumnos que toman la clase de física. Aplicando la regla de la suma tenemos que:

$$\begin{aligned} |C \cup F| &= |C| + |F| - |C \cap F| \\ &= 20 + 30 - 7 \\ &= 43 \end{aligned}$$

Es decir, en total hay 43 alumnos.

b) ¿Cuántos enteros en $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5?

Sean:

$$D3 = \{n \in S \mid n \text{ es divisible por } 3\}$$

$$D5 = \{n \in S \mid n \text{ es divisible por } 5\}$$

Buscamos el número de elementos en $D3 \cup D5$, que no es obvio. Puede verse que $|D3|=333$; basta dividir 1000 entre 3 y redondear. De la misma manera $|D5|=200$. Además $|D3 \cap D5| = |D15| = 66$.

Por b) de la Regla de la Suma tenemos que:

$$|D3 \cup D5| = 333 + 200 - 66 = 467 \text{ números enteros que son divisibles por } 3 \text{ o } 5.$$

c) La biblioteca de una universidad tiene 40 libros de texto de sociología y 50 de antropología. Por a) de la Regla de la Suma, un estudiante de esta universidad puede elegir entre $40 + 50$ libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas.

d) Un instructor de ciencias de la computación tiene cinco libros de cada uno de los siguientes lenguajes de programación: Basic, Fortran, C, Pascal, por lo que puede recomendar cualquiera de estos veinte libros a un estudiante interesado en aprender un lenguaje de programación.

Ahora, el ejemplo anterior muestra que se puede generalizar esta regla.

Así

$$\begin{aligned}
 |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\
 &= |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
 &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
 &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \\
 &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
 \end{aligned}$$

y en general:

Si A_1, \dots, A_n son n conjuntos finitos con cardinalidades $|A_1|, \dots, |A_n|$, se verifica que:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Ahora bien, si $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ son una partición del conjunto A , entonces el principio se reduce a:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|, \text{ o bien } |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Regla del Producto (Principio de Elección)

Para conjuntos finitos S y T se tiene que $|S \times T| = |S| \cdot |T|$ ya que $S \times T = \{(s, t) \mid s \in S \text{ y } t \in T\}$ y para cada una de las $|S|$ selecciones de s en S hay $|T|$ elecciones para t en T .

Ejemplo:

Sean $S = \{1, 2\}$ y $T = \{a, b, c\}$, entonces $|S| = 2$ y $|T| = 3$, por lo que:

$|S \times T| = |S| \cdot |T| = 2 \cdot 3 = 6$, dichos elementos son:

$S \times T = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

Regla del Producto

a) Para conjuntos finitos S_1, S_2, \dots, S_k se tiene que:

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k| = \prod_{j=1}^k |S_j|$$

- b) De manera más general, supongamos que un conjunto dado puede verse como k -adas ordenadas (s_1, \dots, s_k) con la siguiente estructura: Hay n_1 elecciones posibles S_1 . Dado S_1 hay n_2 elecciones posibles S_2 . Dados S_1 y S_2 hay n_3 elecciones posibles de S_3 . En general dados S_1, \dots, S_{j-1} , hay n_j elecciones posibles S_j . Entonces el conjunto tiene $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ elementos.

Ejemplos:

- a) Calculemos el número de maneras distintas de seleccionar 5 cartas con reemplazo de una baraja de 52 cartas. Así procedemos a contar quintillas ordenadas de cartas de la baraja. Con reemplazo significa que cada carta se regresa a la baraja antes de sacar la nueva carta. El conjunto de formas de seleccionar 5 cartas con reemplazo esta en correspondencia uno a uno con $D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D = D^5$, donde D es el conjunto de cartas de 52 elementos. Por lo tanto, por a) de la regla del producto, el conjunto tiene 52^5 elementos. También este problema puede resolverse utilizando b) de la misma regla. Hay 52 maneras de seleccionar la primera carta. Después al regresar la carta hay 52 maneras de seleccionar la segunda y así sucesivamente, por lo tanto hay $52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52$ formas de seleccionar cinco cartas con reemplazo.
- b) Calculemos ahora la forma de seleccionar 5 cartas distintas sin reemplazo de una baraja de 52 cartas. Sin reemplazo significa que una vez seleccionada una carta ya no es posible regresarla a la baraja. Esta vez a) de la regla del producto no puede aplicarse, ya que están prohibidas las quintillas donde se repita una carta. Sin embargo podemos aplicar la regla b) del producto. La primera carta puede seleccionarse de 52 maneras. Una vez seleccionada, la segunda carta puede elegirse de 51 maneras. La tercera puede escogerse de 50 formas, la cuarta de 49 y la quinta de 48. De manera que para elegir 5 cartas sin reemplazo existen $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$ formas diferentes.
- c) El club de teatro de la Universidad realiza ensayos para una obra de teatro que se montará el próximo año. Si seis hombres y ocho mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino), por la regla del producto, el director puede elegir a la pareja principal de $6 \cdot 8 = 48$ formas diferentes.
- d) En una fabrica de placas de automóvil, cada placa consta de dos letras y cuatro dígitos:
- i) Si ninguna letra o dígitos se puede repetir habrá:
 $27 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3'538,080$ placas posibles diferentes.
 - ii) Si se permite repetir las letras y los dígitos será posible tener:
 $27 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 7'290,000$ placas diferentes.
 - iii) Si no permite que dos dígitos juntos se repitan, entonces habrá:
 $27 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5'314,410$ placas diferentes.

RECURSOS DE CONTEO: LISTAS Y ÁRBOLES

Para ver estos recursos será más fácil si empezamos con un

Ejemplo:

En el menú de un restaurante se tienen dos entradas, tres platos principales y cuatro bebidas

¿Cuántas posibles combinaciones de comidas diferentes constan de un plato principal y una bebida?

Primeramente veamos el menú:

Entrada	Plato Principal	Bebidas
Nachos (N)	Hamburguesa (H)	Te (T)
Ensalada (E)	Hamburguesa con queso (Q)	Leche (L)
	Filete de Pescado (F)	Café (C)
		Cerveza de Raíz (R)

Si listamos todas las posibles comidas que constan de un plato principal y una bebida

HT, HL, HC, HR,
QT, QL, QC, QR,
FT, FL, FC, FR

se ve que hay 12 comidas diferentes. Ya que hay 3 platos principales y 4 bebidas, por la regla del producto $3 \cdot 4 = 12$ comidas diferentes.

Además existen 24 comidas diferentes que constan de una entrada, un plato principal y una bebida, las cuales son:

NHT, NHL, NHC, NHR, NQT, NQL,
NQC, NQR, NFT, NFL, NFC, NFR
EHT, EHL, EHC, EHR, EQT, EQL,
EQC, EQR, EFT, EFL, EFC, EFR

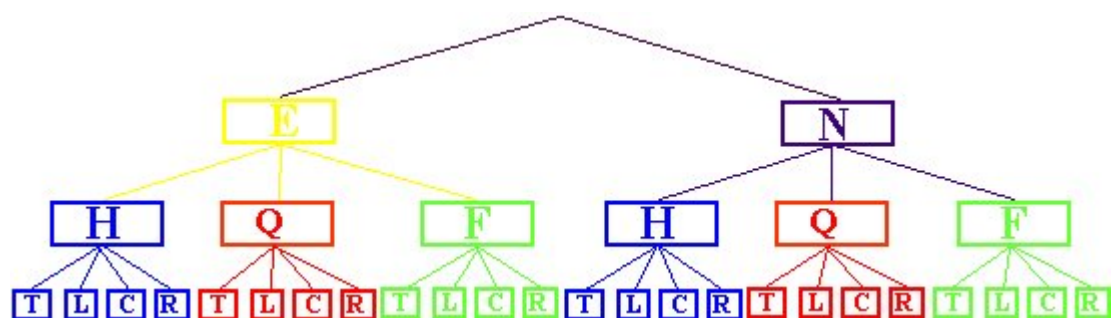
Y se observa que como hay dos entradas, tres platos principales y cuatro bebidas, se tiene, que por la regla del producto, existen $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ comidas diferentes.

Se pueden representar las posibles comidas no solamente por listas que sirven para enumerar las posibles opciones, también se pueden representar mediante árboles, como se muestra a continuación.



En la figura anterior se representan las 12 posibles opciones de elegir una comida que conste de un plato principal y de una bebida.

En cambio el siguiente árbol muestra las 24 diferentes opciones que constan de una entrada, un plato principal y una bebida.



PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Una permutación de objetos implica orden mientras que una combinación no toma el orden de los objetos considerados.

Definición:

Dado un conjunto que contiene n elementos distintos $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- a) Una permutación de \mathbf{X} es una ordenación de los n elementos x_1, x_2, \dots, x_n
- b) Una permutación- r (ó r -permutación) de \mathbf{X} donde $r \leq n$, es una ordenación de un subconjunto de r elementos de \mathbf{X} .
- c) El número de permutaciones- r de un subconjunto de n elementos distintos se denota $P(n, r)$ ó nPr .
- d) Una combinación- r (r -combinación) es una selección no ordenada de r elementos de \mathbf{X} , es decir, un subconjunto de r elementos de \mathbf{X} .
- e) El número de combinaciones- r de un conjunto de n elementos distintos y se denota $C(n, r)$ ó $\binom{n}{r}$ ó nCr .

Ejemplo:

Sea $\mathbf{X} = \{a, b, c\}$

Algunas permutaciones de \mathbf{X} son: abc, acb, bac

Algunas permutaciones-2 de \mathbf{X} son: ab, ba, ca

Algunas combinaciones-2 de \mathbf{X} son: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

Teorema:

El número de permutaciones- r de un conjunto de n objetos distintos es

$$P(n, r) = (n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

La demostración es directa aplicando la regla b) del producto.

Por este teorema el número de permutaciones-2 de $\mathbf{X} = \{a, b, c\}$ es 6, las cuales son:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

También por este Teorema el número de permutaciones en un conjunto de n elementos es

$$P(n, n) = (n)(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1) = n!$$

Obsérvese que $P(n, r) \cdot (n-r)! = n!$, por lo que

$$\begin{aligned} P(n, r) &= (n)(n-1)\dots(n-r+1) \\ &= \frac{(n)(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)\dots(2)(1)}{(n-r)\dots(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Ejemplos:

- a) De cuántas maneras se puede seleccionar un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero entre un grupo de 10 personas .

La respuesta es $P(10, 4) = 10! / (10 - 4)! = 5,040$ ó bien $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5,040$ maneras diferentes.

- b) ¿De cuántas formas puede formarse en una fila 7 mexicanos distintos y 5 gringos distintos si ninguna pareja de gringos puede estar junta?

Podemos formar a los mexicanos y a los gringos mediante un proceso de dos partes. Formando a los mexicanos y a los gringos. Los mexicanos pueden formarse de $7! = 5040$ maneras. Una vez formados los mexicanos, como ninguna pareja de gringos puede estar junta, los gringos tienen 8 posiciones en las cuales formarse, es decir:

$$_ M_1 _ M_2 _ M_3 _ M_4 _ M_5 _ M_6 _ M_7 _$$

Así los gringos pueden formarse de $P(8, 5) = 6,720$ maneras. Por la regla del producto tenemos que $5,040 \cdot 6,720 = 33'868,800$ maneras diferentes de formarlos.

- c) Se quieren colocar 3 pelotas de color rojo, azul y blanco en cajas numeradas con 1, 2, ..., 10. Deseamos conocer el número de maneras distintas en que las pelotas pueden ser colocadas en cajas, si cada caja es capaz de contener sólo una pelota.

Coloquemos las pelotas una a la vez, iniciando con la pelota roja, luego la azul y después la blanca. Puesto que la pelota roja puede colocarse en cualquiera de las 10 cajas, la azul en cualquiera de las 9 restantes y la blanca en cualquiera de las 8 restantes, el número total de maneras distintas de colocar estas pelotas es $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

- d) ¿De cuántas maneras pueden ser programados tres exámenes dentro de un periodo de 5 días, de modo que el mismo día no sean programados 2 exámenes?

Si consideramos que $P(n, r) = (n)(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneras distintas de programar los exámenes.

- e) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF?

Para garantizar la presencia del patrón DEF en la subcadena, estas 3 letras deben estar juntas y en ese orden. Las letras A, B y C pueden colocarse de manera arbitraria. Así es como tener 4 elementos diferentes, por lo que la respuesta es $P(4, 4) = 4!$.

- f) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contiene las letras DEF juntas, pero en cualquier orden?

Se puede resolver este problema en dos pasos. Primero se elige un ordenamiento para las letras DEF, es decir, se pueden tener $P(3, 3) = 3! = 6$ formas distintas de ordenar dichas letras, el segundo paso puede realizarse de $P(4, 4) = 4! = 24$, ya que se considera cualquiera de las ordenaciones del primer paso como un elemento, más A, B y C. Y por la regla del producto la respuesta es $6 \cdot 24 = 144$, permutaciones de dichas letras.

- g) Supongamos que una caja puede contener tantas pelotas como se quiera. Se quieren colocar 3 pelotas de colores diferentes en 10 cajas con numeración distinta. La primera pelota puede colocarse en cualquiera de las 10 cajas, como puede hacerse con la segunda y tercera pelotas, por lo que el número total de colocaciones diferentes es $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1,000$ maneras diferentes de acomodar las pelotas.

En general, hay n^r maneras de colocar r pelotas de colores dentro de n cajas numeradas, si una caja puede contener tantas pelotas como queramos.

Ahora regresemos con las combinaciones.

En problemas de conteo donde el orden es importante, las permutaciones- r son claramente relevantes. Muchas veces el orden no es importante en cuyo caso la habilidad para contar conjuntos adquiere importancia. Sabemos que un conjunto S con n elementos tiene en total 2^n subconjuntos. Para $0 \leq r \leq n$ sea $\binom{n}{r}$ el número de subconjuntos de S con r elementos. El número $\binom{n}{r}$ se llama coeficiente binomial y se lee " n en r ", en ocasiones se le llama el número de combinaciones de n objetos, tomando r a la vez.

Teorema:

Para $0 \leq r \leq n$ tenemos que

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Demostración:

Sea S un conjunto con n elementos. Para cada subconjunto de T en S elementos, hay $r!$ permutaciones de S que utilizan elementos de T . Por lo tanto hay $\binom{n}{r} \cdot r!$ permutaciones de S en total, es decir:

$$\binom{n}{r} \cdot r! = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Por lo tanto

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Ejemplos:

a) ¿Cuántas manos de poker hay en una baraja de 52 cartas?

$$\text{Hay } \binom{52}{5} = 2'598,960 \text{ manos de poker.}$$

b) Se quieren colocar 3 pelotas, todas ellas del mismo color, en 10 cajas que estas numeradas 1, 2,...,10. Nuestro objetivo es conocer el número de maneras distintas en que las pelotas pueden distribuirse, si cada caja puede contener sólo una pelota.

$$\text{La respuesta es } \binom{10}{3} = 120 \text{ maneras distintas de colocar las pelotas.}$$

c) Una ama de casa desea programar cenas de espagueti 3 veces a la semana.

$$\text{La cantidad de maneras distintas de programarlas es } \binom{7}{3} = 35.$$

- d) Un grupo de 5 estudiantes: Mary, Boris, Rosa, Ahmad y Nora, han decidido hablar con el jefe del Departamento de Matemáticas para que el departamento ofrezca más cursos de Matemáticas Discretas. El jefe ha avisado que hablará solamente con 3 estudiantes en su oficina. ¿De cuántas maneras pueden elegir estos 5 estudiantes 3 de ellos para hablar con el jefe del Departamento?.

La respuesta es $\binom{5}{3} = 10$ maneras diferentes.

- e) ¿De cuantas formas puede elegirse un comité de 3 personas de entre un grupo de 10 personas distintas?.

En total se tienen

$$\binom{10}{3} = 120$$

maneras distintas de elegirlos.

- f) ¿De cuántas maneras distintas puede elegirse un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres distintas y seis hombres distintos?.

Las mujeres pueden elegirse de $\binom{5}{2} = 10$ formas y los hombre pueden elegirse de $\binom{6}{3} = 20$ formas.

Y por la regla del producto tenemos que el número total de comités es $10 \cdot 20 = 200$.

- g) ¿Cuántas cadenas de 8 bits contiene exactamente 4 unos?

La respuesta es

$$\binom{8}{4} = 70$$

formas o cadenas diferentes.

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES GENERALIZADAS

Teorema:

Supóngase que una sucesión **S** de n objetos tiene n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, . . . , n_t objetos idénticos del tipo t . Entonces el número de ordenaciones de **S** es:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!}$$

Demostración:

Se asignan las posiciones de cada uno de los n objetos para crear un orden de **S**. Es posible asignar las posiciones de los n_1 objetos del tipo 1 en $C(n, n_1)$ formas. Una vez realizada esta asignación, pueden asignarse las posiciones de los n_2 objetos del tipo 2 en $C(n - n_1, n_2)$ maneras, etc. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{t-1}}{n_t} \\ &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{t-1})!}{n_t!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!} \end{aligned}$$

Ejemplos:

a) ¿De cuántas maneras es posible ordenar las siguientes letras ?

MISSISSIPPI

Debido a la repetición de algunas letras, la respuesta no es $11!$, pero sí un número menor a $11!$.

Consideremos el problema de llenar 11 espacios en blanco

— — — — —

con las letras dadas. Hay $\binom{11}{2}$ maneras de escoger posiciones para las dos letras P. Una vez

seleccionadas las dos P, existen $\binom{9}{4}$ maneras de elegir posiciones para las cuatro S. Una vez

seleccionadas las posiciones para las letras S, hay $\binom{5}{4}$ maneras de escoger lugares para las letras I.

Una vez realizadas estas elecciones, queda un único lugar para ser llenado por la letra M. Por el Teorema anterior, directamente existen

$$\frac{11!}{2!4!4!1!} = 34,650$$

maneras de ordenar dichas letras.

- b) De cuántos modos se pueden repartir ocho libros distintos entre tres estudiantes si Guillermo recibe cuatro libros, en tanto que Maria y Silvia reciben 2 cada una.

Sea G = Guillermo, S = Silvia y M = Maria.

Unos ejemplos de ordenación serian GGGGSSMM, GGGSMGMS, MMSSGGGG, etc.

Cada uno de estos ordenamientos determina una distribución de libros. Por lo que existen

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420$$

maneras de repartir los libros.

- c) ¿De cuantas maneras pueden formarse tres comités distintos de un grupo de 20 personas, si los comités deben tener 3, 5 y 7 personas respectivamente?

La respuesta es

$$\frac{20!}{3!5!7!5!} \approx 5.587 \cdot 10^9$$

- d) Una partida de Bridge es una partición ordenada de 52 cartas que comprende 4 conjuntos de 13 cartas cada uno. Por lo tanto hay

$$\frac{52!}{13!13!13!13!} = \frac{52!}{(13!)^4} = 5.3645 \cdot 10^{28}$$

partidas de Bridge.

- e) ¿De cuántas maneras posibles pueden distribuirse 12 estudiantes en 3 grupos, con 4 estudiantes cada grupo, de manera que un grupo estudie un tema, el otro un tema diferente y el tercero otro diferente a los dos anteriores?

En total hay

$$\frac{12!}{4!4!4!} = \frac{12!}{(4!)^3} = 34,650$$

posibles maneras de distribuir a los estudiantes.

- f) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 19 estudiantes en 5 grupos, 2 grupos de 5 y 3 grupos de 3, de manera que cada grupo estudie un tema distinto?

En total hay

$$\frac{19!}{5!5!3!3!3!} = \frac{19!}{(5!)^2 (3!)^3} \approx 3.911 \cdot 10^{10}$$

posibles maneras de distribuir a los estudiantes.

- g) ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de 100 elementos en 50 conjuntos diferentes de 2 elementos cada uno?

La respuesta es $\frac{100!}{\underbrace{2!2!2!\dots 2!}_{50 \text{ veces}}} = \frac{100!}{2^{50}} = 8.28903 \cdot 10^{142}$ formas posibles.

De forma más general puede enunciarse el mismo problema de la siguiente manera ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto con $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos cada uno?.

Entonces la respuesta es $\frac{(2n)!}{\underbrace{2!2!2!\dots 2!}_{n \text{ veces}}} = \frac{(2n)!}{2^n}$ formas posibles.

Teorema:

Si X es un conjunto que contiene n elementos, entonces el número de selecciones de r elementos, no ordenadas, con repeticiones permitidas y tomando del conjunto X es:

$$\binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$$

NOTA:

Es posible que r sea mayor que n cuando se permiten repeticiones.

Ejemplos:

a) Supóngase que se tienen 3 pilas de pelotas rojas, azules y verdes y cada una contiene al menos 8 pelotas.

i) ¿De cuántos modos se pueden seleccionar 8 pelotas?

ii) ¿De cuántas maneras de pueden seleccionar 8 pelotas si se debe tener al menos una de cada color?

Por el Teorema anterior, el número de formas para elegir 8 pelotas es:

$$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

También se puede aplicar el Teorema para resolver la parte ii). Si se selecciona una pelota de cada color. Para completar la elección, deben escogerse 5 pelotas más. Esto se puede hacer de

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

formas diferentes.

b) ¿De cuántas maneras es posible colocar 10 canicas rojas en 5 bolsas? La respuesta es

$$\binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4} = 1,001$$

maneras posibles.

- c) ¿De cuántas maneras es posible seleccionar 10 monedas de un abasto ilimitado de monedas de cincuenta, cien, doscientos y quinientos pesos?

Entonces es posible seleccionar

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$

formas distintas.

- d) De cuántas formas pueden distribuirse 12 libros idénticos de matemáticas discretas entre 4 estudiantes.

En total se pueden distribuir

$$\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3} = 455$$

formas diferentes.

- e) Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$

Cada solución es equivalente a elegir 29 elementos x_i del tipo i , $i = 1, 2, 3, 4$. El número solución es

$$\binom{29+4-1}{4-1} = \binom{32}{3} = 4,960$$

- f) Una tienda ofrece 20 tipos de donas. Si suponemos que al menos hay una docena de cada tipo cuando entramos a la tienda, podemos elegir una docena de donas de

$$\binom{12+20-1}{20-1} = \binom{31}{19} = 141'120,525$$

PRINCIPIOS

PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN-INCLUSIÓN

El principio de exclusión-inclusión nos dirá el tamaño de una unión en términos de varias intersecciones. Sean A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos finitos. Para $n = 2$ la regla de la unión afirma que:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

para $n = 3$ el principio de exclusión-inclusión afirma que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

y para $n = 4$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - \\ & |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - \\ & |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \\ & |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \\ & |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

Definición:

Para calcular el tamaño de $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ debemos calcular el tamaño de todas las posibles intersecciones de conjuntos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sumar los resultados obtenidos al intersectar un número impar de conjuntos y restar los resultados obtenidos al intersectar un número par de conjuntos.

Los términos "exclusión-inclusión" indican que hay que incluir o sumar los tamaños de los conjuntos, después excluir o restar los tamaños de las intersecciones de dos conjuntos, luego incluir o sumar los tamaños de todas las intersecciones de tres conjuntos, etc., es decir:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Ejemplos:

- a) ¿Cuántos números hay del 50 al 12,000, excluyendo los múltiplos de 3 y de 5?. Es fácil equivocarse. Intentemos organizarnos: Del 50 al 12,000 hay $12,000 - 50 + 1 = 11,951$ números. Tendríamos que restar de esta cantidad, los que son múltiplos de 3 o de 5.

Si llamamos N_3 al conjunto de los múltiplos de 3 entre el 50 y el 12,000 y N_5 al de los múltiplos de 5, y si con $|A|$ indicamos la cantidad de elementos que tiene A , la solución a nuestro problema es $11,951 - |N_3 \cup N_5|$.

Ahora: $|N_3 \cup N_5| = |N_3| + |N_5| - |N_3 \cap N_5|$.

Notemos que ser múltiplo de 3 y de 5 es lo mismo que ser múltiplo de 15, entonces sea N_{15} el conjunto de los múltiplos de 15 entre 50 y 12,000.

Además que $|Nk| \leq (12,000 / k) - (49 / k)$, la división es entera. Entonces:

$$\begin{aligned} |N3| &= (12,000/3) - (49/3) = 4,000 - 16 = 3,984, \\ |N5| &= (12,000/5) - (49/5) = 2,400 - 9 = 2,391 \text{ y} \\ |N15| &= (12,000 / 15) - (49 / 15) = 800 - 3 = 797. \end{aligned}$$

Así, $|N3 \cup N5| = 3,984 + 2,391 - 797 = 5,578$, y la cantidad buscada es $11,951 - 5,578 = 6,373$.

- b) Contemos el número de enteros en $S = \{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ que son divisibles por 9, 11, 13 ó 15. Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ hacemos $|Dk| = \{n \in S \mid n \text{ es divisible por } k\}$ y buscamos $|D9 \cup D11 \cup D13 \cup D15|$. Nótese que $|Dk| \leq (2000 / k)$, división entera. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |D9| &= 222 & |D11| &= 181 \\ |D13| &= 153 & |D15| &= 133 \\ |D9 \cap D11| &= |D99| = 20 & |D9 \cap D13| &= |D117| = 17 \\ |D9 \cap D15| &= |D45| = 44 & |D11 \cap D13| &= |D143| = 13 \\ |D11 \cap D15| &= |D165| = 12 & |D13 \cap D15| &= |D195| = 10 \\ |D9 \cap D11 \cap D13| &= |D1287| = 1 & |D9 \cap D11 \cap D15| &= |D495| = 4 \\ |D9 \cap D13 \cap D15| &= |D585| = 3 & |D11 \cap D13 \cap D15| &= |D2145| = 0 \\ |D9 \cap D11 \cap D13 \cap D15| &= |D6435| = 0 \end{aligned}$$

Obsérvese, por ejemplo, que $D9 \cap D15 = D45$ y no $D135$, ya que el $\text{mcm}(9,15) = 45$. Ahora por el principio de exclusión-inclusión tenemos que:

$$\begin{aligned} |D9 \cup D11 \cup D13 \cup D15| &= 222 + 181 + 153 + 133 - \\ &\quad (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10) + \\ &\quad (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581 \end{aligned}$$

enteros en $S = \{1, 2, 3, \dots, 2000\}$ que son divisibles por 9, 11, 13 ó 15.

- c) Supongamos que tenemos seis computadoras con las siguientes especificaciones:

Computadora	Quemador (A1)	Procesador PIV (A2)	Pantalla Plana (A3)
I	SI	SI	NO
II	SI	SI	SI
III	NO	NO	NO
IV	NO	SI	SI
V	NO	SI	NO
VI	NO	SI	SI

¿Cuántas computadoras tienen uno o más de los 3 tipos de hardware?

Por el principio de exclusión-inclusión tenemos que:

$$\begin{array}{lll}
|A_1| = 2 & |A_2| = 5 & |A_3| = 3 \\
|A_1 \cap A_2| = 2 & |A_1 \cap A_3| = 1 & |A_2 \cap A_3| = 3 \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1
\end{array}$$

Por lo que

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2 + 5 + 3 - 2 - 1 - 3 + 1 = 5$$

computadoras que tienen uno o más tipos de hardware.

- d) De 200 estudiantes 50 toman el curso de matemáticas discretas, 140 el curso de economía y 24 ambos. Como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no estén en ninguno de estos curso podrán ir a la fiesta de la noche. Se quiere ver cuántos estudiantes irán a la fiesta.

Sea A_1 = Estudiantes de matemáticas discretas y A_2 = Estudiantes de economía. Por el principio de exclusión-inclusión se tiene que:

$|A_1 \cup A_2| = 50 + 140 - 24 = 166$ estudiantes que toman uno o ambos cursos. En consecuencia $200 - 166 = 34$ estudiantes son los que irán a dicha fiesta.

- e) Determine el número de enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 100$ y n no es divisible entre 2, 3 ó 5.

Sean:

D_2 = Números divisibles entre 2

D_3 = Números divisibles entre 3

D_5 = Números divisibles entre 5

$$\begin{array}{lll}
|D_2| = 50 & |D_3| = 33 & |D_5| = 20 \\
|D_2 \cap D_3| = |D_6| = 16 & |D_2 \cap D_5| = |D_{10}| = 10 & |D_3 \cap D_5| = |D_{15}| = 6 \\
|D_2 \cap D_3 \cap D_5| = |D_{30}| = 3
\end{array}$$

Aplicando el principio de exclusión-inclusión tenemos que

$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

Por lo tanto $100 - 74 = 26$ número que no son divisibles entre 2, 3, ó 5.

Estos números son 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97

PRINCIPIO DE DIRICHLET

El principio de Dirichlet permite en muchas ocasiones concluir que el número de elementos de un conjunto es cero, o lo que es lo mismo que el conjunto cuya cardinalidad estamos buscando es vacío.

Consideremos el siguiente problema: Si se introducen n palomas a un palomar con k nidos, $k < n$, al menos en un nido habrá 2 o más palomas. Esta versión del principio del Dirichlet se conoce como "Principio del Palomar" o "Principio de la Pichonera".

Imaginemos 21 palomas introduciéndose en los 20 nidos de un palomar. Es claro que al menos dos de las palomas se meterán en el mismo nido.

Este principio no nos dice como localizar el nido que contiene 2 o más palomas. Sólo afirma la existencia de un nido con 2 o más palomas.

Para aplicar ese principio debemos decir cuales objetos juegan el papel de las palomas y cuales juegan el papel de los nidos.

Ejemplos:

a) En un conjunto de 32 personas al menos 2 celebran su cumpleaños el mismo día del mes.

Si consideramos a las personas como palomas y a los días del mes como los nidos y aplicamos el principio de Dirichlet, al menos dos o más personas cumplirán años el mismo día del mes.

b) Los nombres de 10 personas son Alice, Bernard, Charles, mientras que sus apellidos son Lee, McDuff, Montana, entonces al menos 2 personas tienen el mismo nombre y apellido. Hay 9 nombres y apellidos diferentes que seleccionar, pero son diez personas en total.

Si consideramos a las 10 personas como las palomas y a los nombres y apellidos como los nidos por el principio de Dirichlet al menos dos personas tienen el mismo nombre y apellido.

c) Juan regresa de la lavandería con 12 pares de calcetines, (cada par de distinto color) en una bolsa, al sacar cada calcetín de la bolsa aleatoriamente tendrá que sacar cuando mucho trece calcetines para obtener el par.

d) Vilma opera una computadora que tiene una unidad de cinta magnética para respaldar la información. Un día le dan una cinta que contiene 600,000 "palabras" de cuatro o menos letras minúsculas. En la cinta las palabras consecutivas se separan con un carácter en blanco. ¿Puede suceder que las 600,000 palabras sean distintas entre sí?

A partir de las reglas del producto y de la suma, el número total de palabras distintas posibles, de cuatro o menos letras es:

$$27^4 + 27^3 + 27^2 + 27 = 551,880$$

Estas 551,880 palabras si las consideramos como los nidos y las 600,000 palabras de la cinta como las palomas, de acuerdo al principio de Dirichlet al menos una palabra se repite en la cinta.

- e) Cualquier subconjunto de tamaño seis del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, debe contener al menos dos elementos cuya suma es 10.

Aquí los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 son las palomas, y los nidos son los subconjuntos $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{5\}$. Cuando las palomas van a sus respectivos nidos, deben ocupar al menos uno de los subconjuntos cuyos miembros suman 10.

- f) Demostrar que en cualquier conjunto de 8 números enteros existen al menos dos números a y b tales que $(a - b)$ es múltiplo de 7.

El resto de dividir un número por 7 es uno de los siete números enteros entre 0 y 6. En consecuencia si tenemos un conjunto de 8 números, al menos dos de ellos, a y b , tienen el mismo resto r en la división por 7. Esto es: $a = 7q + r$ y $b = 7q' + r$ donde $r = 0$ ó $0 < r < 7$.

Por lo tanto $(a - b) = 7(q - q')$ es múltiplo de 7.

APLICACIONES (IDENTIDADES BÁSICAS Y TEOREMA DEL BINOMIO)

Identidades básicas

Puesto que

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

y que $n - (n - r) = r$ se tiene la siguiente identidad

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Otra identidad importante es:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Otra identidad muy útil es

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Utilizando la identidad anterior para obtener la suma $1 + 2 + \dots + n$

Es posible expresar

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + \dots + n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n}{1} \\ &= \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!2!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!2!} = \frac{(n+1)(n)}{2} \end{aligned}$$

Teorema del Binomio

Los números

$$\binom{n}{r}$$

se llaman coeficientes binomiales, pues aparecen en el desarrollo del binomio $(a + b)$ elevado a alguna potencia.

Este teorema proporciona una fórmula para los coeficientes del desarrollo $(a + b)^n$. Ya que:

$$(a + b)^n = \overbrace{(a + b)(a + b) \dots (a + b)}^{n \text{ factores}}$$

Si $n = 2$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Si $n = 3$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Un término de la forma $a^{n-k}b^k$ proviene de tomar a de $n - k$ factores, y b de k factores. Pero puede hacerse de $\binom{n}{k}$ formas, pues $\binom{n}{k}$ cuenta el número de formas de seleccionar k los n objetos dados. Por lo tanto $a^{n-k}b^k$ aparece $\binom{n}{k}$ veces. Luego

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Ahora enunciemos el Teorema del binomio.

Si a y b son números reales y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ejemplo:

Tomando $n = 3$ tenemos que:

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}a^3 \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Triángulo de Pascal

También pueden expresarse los coeficientes binomiales mediante un arreglo triangular conocido como Triángulo de Pascal. Los dos lados superiores están formados por números 1, y cualquier valor interior es la suma de los dos números que están por encima y a los lados del él, es decir:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & & & & & & & & \\
 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

o bien, expresado en forma de coeficientes binomiales tenemos que:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & & & & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & & & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & & & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
 \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} & \binom{8}{5} & \binom{8}{6} & \binom{8}{7} & \binom{8}{8} & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

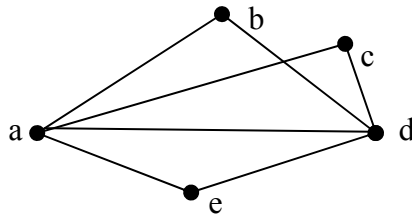
GRAFOS

DEFINICIONES BÁSICAS Y SU REPRESENTACIÓN

Empezaremos con un

Ejemplo:

Dado un mapa de las autopistas de un lugar, se podría determinar si existe una ruta por autopista entre dos ciudades en el mapa. Sea $S = \{a, b, c, \dots\}$ el conjunto de ciudades y \mathbf{R} una relación binaria sobre S tal que $(a, b) \in \mathbf{R}$ si existe una autopista de la ciudad a a la ciudad b .



$$\mathbf{R} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, d), (c, d), (d, e)\}$$

Definición:

A la representación gráfica de los objetos y las relaciones binarias sobre ellos se conoce como grafo y consta de vértices (nodos) y lados (aristas).

Los vértices, que son los puntos del grafo, representan los elementos del conjunto. Los lados representan los elementos (x, y) que están relacionados.

GRAFOS DIRIGIDOS Y NO DIRIGIDOS

Definición:

Un grafo (grafo no dirigido) **G** consta de un conjunto **V** de vértices o nodos y un conjunto **E** de lados, (ramas o aristas) tales que cada lado $e \in E$ esta asociado a un par no ordenado de vértices.

Si un lado e esta asociado a un único par de vértices v y w se escribe $e = (v, w)$ o también se escribe $e = (w, v)$.

NOTA:

En este contexto (v, w) denota un lado de un grafo no dirigido y no un par ordenado de números.

Definición:

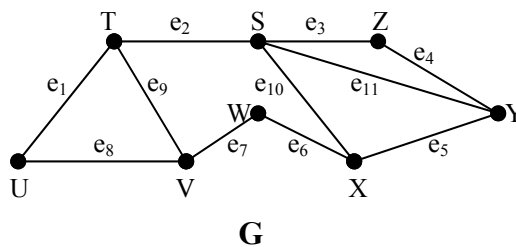
Un grafo dirigido (o dígrafo) **G** consta de un conjunto **V** de vértices y un conjunto **E** de lados, tal que $e \in E$ esta asociado a un par ordenado único de vértices v y w y se escribe $e = (v, w)$.

Definición:

Se dice que un lado $e = (v, w)$ de un grafo (dirigido o no dirigido) es incidente en v y w . Se dice que los vértices v y w son incidentes en e y también que los vértices son adyacentes.

Si **G** es un grafo (dirigido o no dirigido) con un conjunto de vértices **V** y un conjunto de lados **E**, se escribe **G** = (**V**, **E**).

Ejemplo:



Este grafo **G** consta de un conjunto **V** de vértices

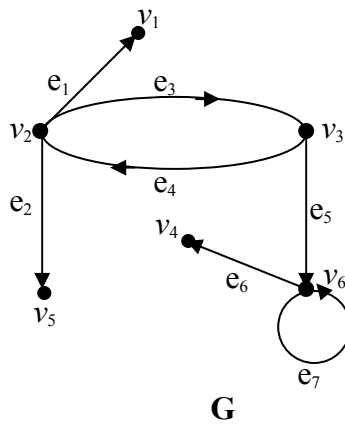
$$V = \{S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

y el conjunto de lados

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{11}\}.$$

El lado e_1 esta asociado con el par no ordenado $\{T, U\}$, el lado e_{10} esta asociado al par no ordenado $\{S, X\}$. El lado e_1 se denota por (U, T) o bien (T, U) . El lado e_4 es incidente en los vértices Y y Z por lo que Y y Z son vértices adyacentes.

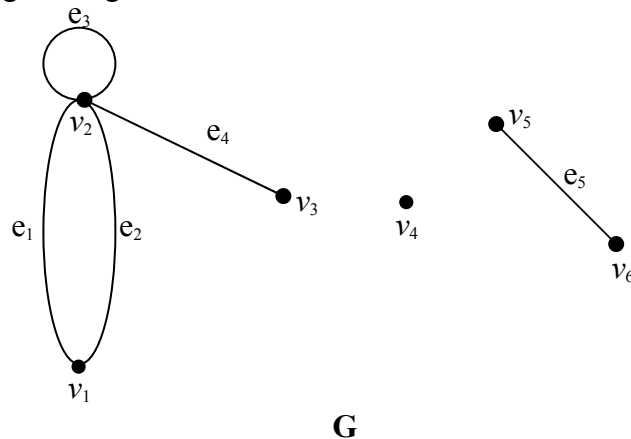
Ejemplo:



En este dígrafo los lados dirigidos están indicados por flechas. El lado e_1 esta asociado al par ordenado de vértices (v_2, v_1) por lo que se escribe $e_1 = (v_2, v_1)$ y el lado e_7 con el par ordenado (v_6, v_6) , por lo que se escribe $e_7 = (v_6, v_6)$.

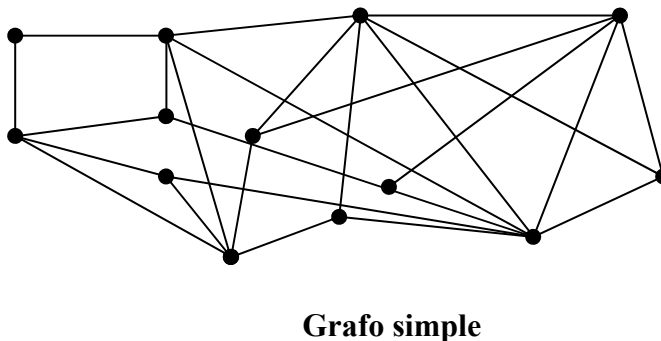
Ejemplo:

Consideremos ahora el siguiente grafo:

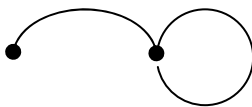


Cuando dos lados distintos están relacionados con el mismo par de vértices se llaman lados paralelos, como e_1 y e_2 que están asociados con el par no ordenado de vértices $\{v_1, v_2\}$. Un lado de la forma (v, v) que inicia y termina en el mismo vértice se llama lazo, como ocurre en $e_3 = (v_2, v_2)$. En el grafo G ningún lado es incidente a v_4 , un grafo que no tiene lazos ni lados paralelos recibe el nombre de grafo simple.

Ejemplo:



Grafo simple

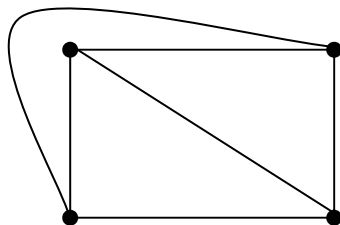


Grafo no simple

Definición:

Un grafo completo de n vértices, que se denota K_n , es el grafo simple con n vértices en el cual existe una arista entre cada par de vértices distintos.

Ejemplo:

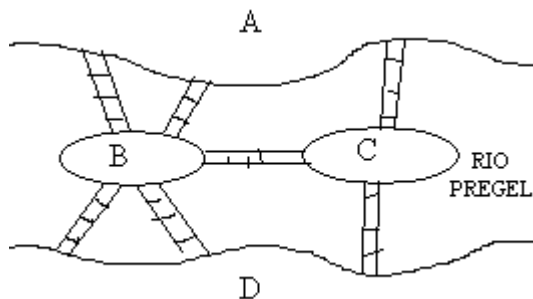


Grafo completo K_4

Ejemplo:

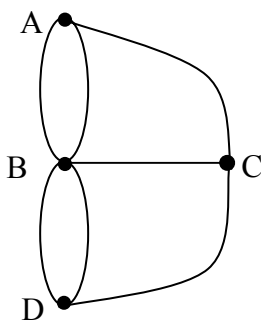
Problema de los puentes de Königsberg.

Dos islas que se encuentran en el río Pregel en Königsberg (antes Prusia Oriental, llamado ahora Kaliningrado) están conectadas entre si y con la margen del río por puentes como se indica en la siguiente figura:



El problema consiste en partir desde cualquier lugar (A, B, C, o D), seguir caminando y pasar por cada uno de los puentes una sola vez y luego volver al punto de partida.

A un recorrido de este tipo se llama “Circuito de Euler”. Tal recorrido puede representarse mediante un grafo como sigue:



La solución puede obtenerse fácilmente utilizando el concepto de valencia de un vértice.

Definición:

La valencia (o grado) de un vértice v se denota $\delta(v)$ y es numero de lados incidentes en v .

Ejemplo:

Del grafo anterior tenemos que:

$$\delta(A) = 3$$

$$\delta(B) = 5$$

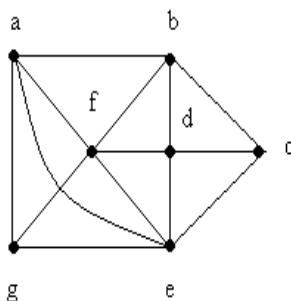
$$\delta(C) = 3$$

$$\delta(D) = 3$$

Más adelante se demostrará que el Problema de los puentes de Königsberg no tiene solución.

Un problema similar al de encontrar un circuito de Euler en un grafo es el obtener un circuito Hamiltoniano. Un circuito de Hamilton en un grafo G es un camino que comienza y termina en el mismo vértice, pasando exactamente una vez por cada vértice.

Ejemplo:



El camino (a, b, c, d, e, f, g, a) o (a, b, c, d, f, e, g, a) es un circuito Hamiltoniano. Este grafo no tiene circuito de Euler. En un circuito de Euler se pasa por cada lado exactamente una vez, en tanto que en un circuito de Hamilton se pasa por cada vértice exactamente una vez.

Definición:

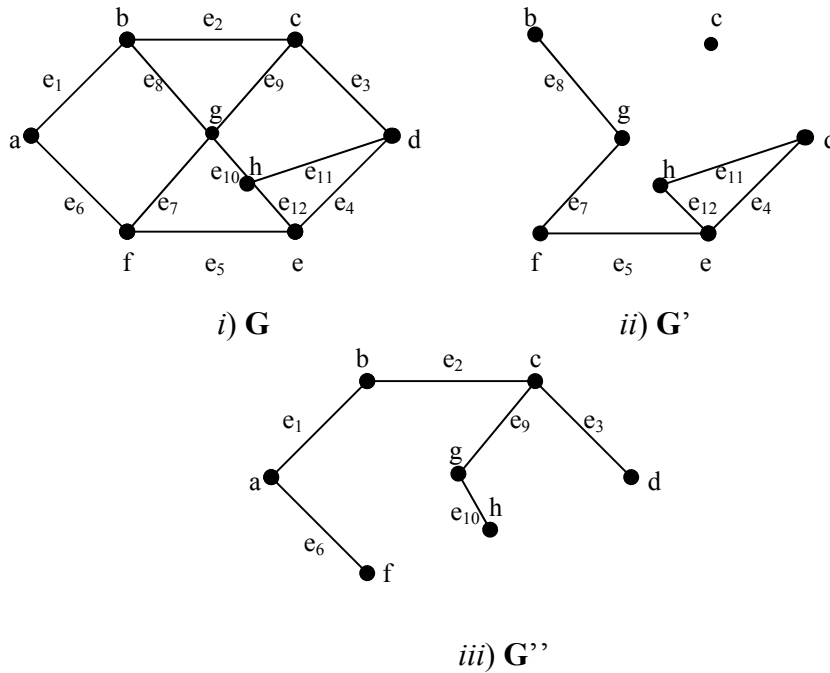
Sea un grafo $G = (V, E)$, diremos que un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G si $E' \subset E$ y $V' \subset V$ tal que los lados de E' sean incidentes en los vértice de V' .

Definición:

El complemento de un subgrafo $G' = (V', E')$ con respecto a un grafo G es otro grafo $G'' = (V'', E'')$ tal que $E'' = E - E'$ ó $E = E' + E''$ y V'' contiene a los vértices con los cuales E'' son incidentes.

Ejemplo:

Consideremos los siguiente grafos:



Sea en i) $G = (V, E)$, donde $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_{12}\}$

Sea en ii) $G' = (V', E')$, donde $V' = \{b, c, d, e, f, g, h\}$ y $E' = \{e_4, e_5, e_7, e_8, e_{11}, e_{12}\}$, además se tiene que $E' \subset E$ y $V' \subset V$ tal que los lados de E' sean incidentes en los vértice de V' , por lo que G' es un subgrafo de G .

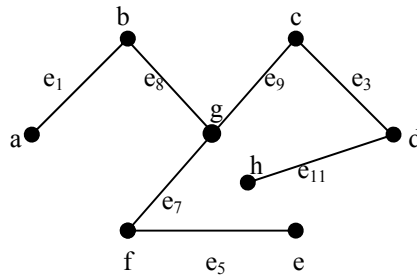
Además en iii) $G'' = (V'', E'')$, donde $V'' = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ y $E'' = \{e_1, e_2, e_3, e_6, e_9, e_{10}\}$, además $E'' = E - E'$ y V'' contiene a los vértices con los cuales E'' son incidentes, por lo que G'' es el complemento del subgrafo de G' .

Definición:

Se dice que G' es un subgrafo generador si contiene todos los vértices de G

Ejemplo:

Sea el siguiente subgrafo del grafo i) del ejemplo anterior.



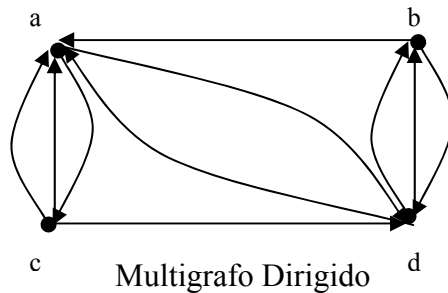
Se tiene que: $V' = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $E' = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{11}\}$ y como V' contiene todos los vértices de G , entonces G' es un subgrafo generador de G

MULTIGRAFOS Y GRAFOS PESADOS (GRAFOS PONDERADOS)

Definición:

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, donde V es un conjunto y E es un multiconjunto de pares ordenados de $V \times V$. G es llamado un multigrafo dirigido y geoméricamente puede representarse como un conjunto de vértices V y un conjunto de flechas E entre los vértices, donde no existe restricción en el numero de flechas de un vértice a otro.

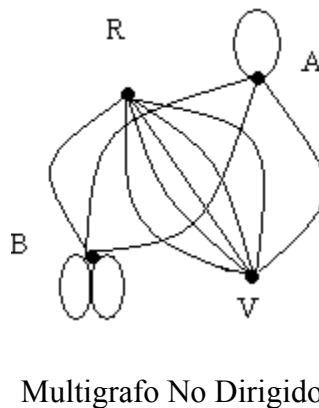
Ejemplo:



Ahora consideremos una representación gráfica de un mapa de carreteras en el cual una arista entre dos ciudades corresponde a un carril en una autopista entre las dos ciudades. Como a menudo hay autopistas de varios carriles entre pares de ciudades, esta representación origina un multigrafo.

La noción de multigrafo no dirigido puede definirse de manera similar a la de un multigrafo dirigido.

Ejemplo:



Definición:

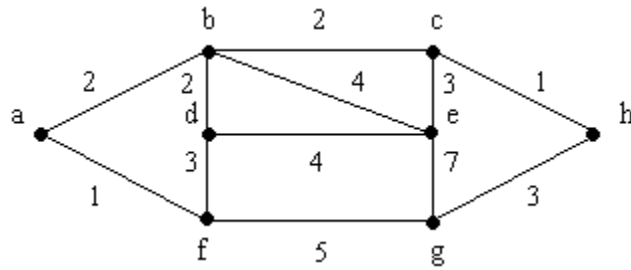
Un grafo ponderado (o grafo con peso) es un grafo en el cual hay datos asociados a sus lados, el valor $w(i, j)$ esta asociado con el lado (i, j) y se llama ponderación o peso del lado (i, j) .

Definición:

El peso o ponderación de un grafo es la suma de los pesos de sus lados. Frecuentemente el peso de un camino se le conoce como longitud del camino.

Ejemplo:

Si se interpretan las ciudades como vértices y los caminos entre ellas como sus lados, al asignarles un valor a sus caminos resulta un grafo ponderado o con peso.



Grafo Ponderado

PASEOS (CAMINOS) Y CIRCUITOS (CICLOS)

Con frecuencia se abrevia la sucesión de lados

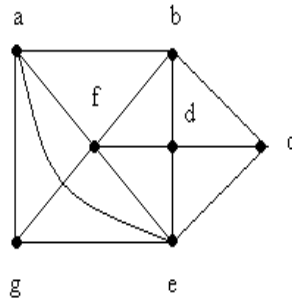
$$\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$$

como

$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Ejemplo:

Sea el siguiente grafo **G**



La sucesión de lados $\{(a, b), (b, f), (f, g), (g, e)\}$ se puede representar como (a, b, f, g, e)

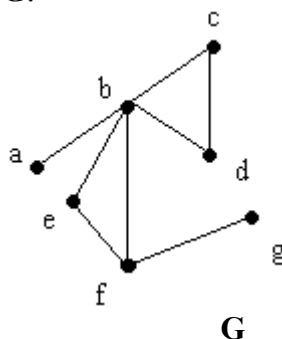
Definición:

Sea **G** un grafo y sean v y w vértices de **G**.

- Un camino de longitud n de v a w es una sucesión de lados que de v a w , la cual tiene n lados distintos entre sí.
- Un camino simple de longitud n de v a w es de la forma $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ donde $v_0 = v$ y $v_n = w$ y $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ son distintos entre sí.
- Un circuito o ciclo es un camino de v a v .
- Un circuito simple es un circuito de la forma $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ donde $v_0 = v_n$ y v_1, v_2, \dots, v_{n-1} son distintos entre sí.

Ejemplo:

Sea el siguiente grafo no dirigido G .



Basándose en el grafo anterior llénese la siguiente tabla:

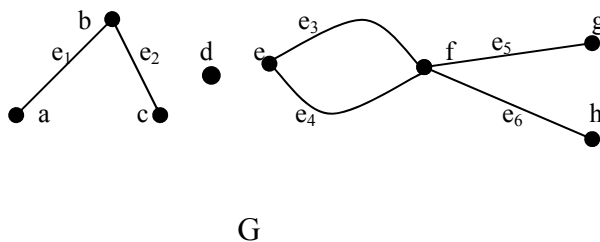
Sucesión de lados	Camino	Camino simple	Circuito	Circuito simple
(a, b, c, b, a)	NO	NO	NO	NO
(f, e, b, d, c, b, a,)	SI	NO	NO	NO
(f, e, b, d)	SI	SI	NO	NO
(b, f, e, b, d, c, b)	SI	NO	SI	NO
(e, f, b, e)	SI	NO	SI	SI

Definición:

Se dice que un grafo G es conexo si, para cualquier par de vértices (v, w) distintos entre si, existe un camino de v a w .

Ejemplo:

El siguiente grafo es no conexo

**PASEOS Y CIRCUITOS DE EULERIANOS (DE EULER)****Definición:**

Un paseo de Euler (Euleriano) es un camino que incluye todos los lados – y por lo tanto todos los vértices – de un grafo dado, una y sólo una vez.

Definición:

Un circuito de Euler (Euleriano) es un circuito que incluye todos los lados – y por lo tanto todos los vértices – de un grafo dado, una y sólo una vez.

Condiciones para saber si un grafo dado tiene un paseo o circuito de Euler.

- 1) Un grafo no dirigido G tiene un paseo de Euler si y solo si tiene cero o dos vértices de valencia impar.
- 2) Si un grafo no dirigido G tiene un circuito de Euler entonces todo vértice de G tiene valencia par, además de ser conexo.
- 3) Si G es un grafo no dirigido con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y la suma

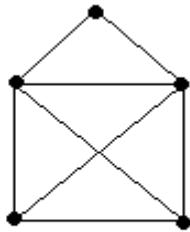
$$\delta(v_1), \delta(v_2), \dots, \delta(v_n)$$

es par entonces el grafo tiene un circuito de Euler.

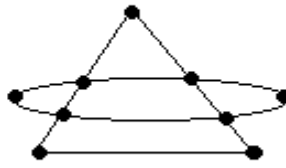
- 4) Un grafo G tiene un camino de Euler de $v \neq w$ si y solo si v y w son los únicos vértices de valencia impar.

Ejemplo:

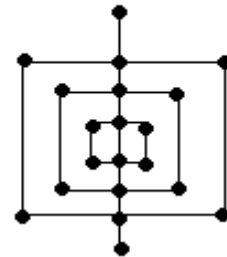
Verificar si los siguientes grafos no dirigidos tienen un paseo o circuito de Euler.



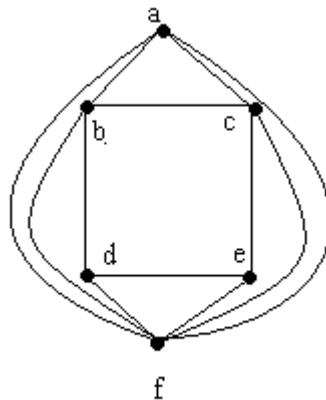
Paseo: Si
Circuito: No



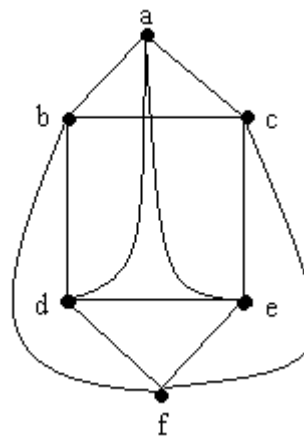
Paseo: Si
Circuito: Si



Paseo: Si
Circuito: No



Paseo: Si
Circuito: No



Paseo: Si
Circuito: Si

Los resultados obtenidos para grafos no dirigidos pueden extenderse de inmediato para grafos dirigidos.

Definición:

En un grafo dirigido el grado o valencia de entrada de un vértice es el numero de lados incidentes hacia este y el grado de salida es el numero de lados que son incidentes desde este.

Definición:

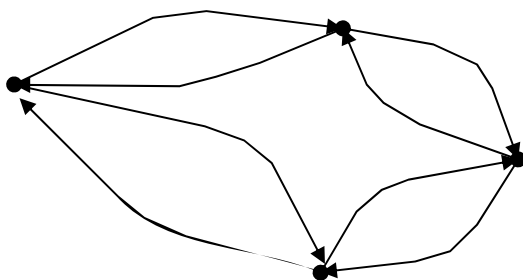
Un grafo dirigido tiene un circuito de Euler si y solo si es conexo y el grado de entrada de cualquier vértice es igual a su salida.

Definición:

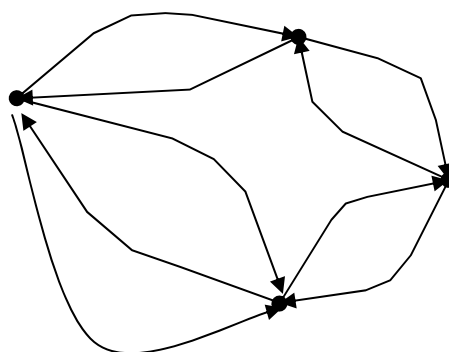
Un grafo dirigido tiene un paseo de Euler si y solo si es conexo y el grado de entrada de cualquier vértice es igual a su grado de salida con la posible excepción de solo dos vértices. Para estos dos vértices el grado de entrada de uno de ellos es mayor que su grado de salida y el grado de entrada del otro es menor que su grado de salida.

Ejemplo:

Verificar si los siguientes grafos dirigidos tienen un paseo o circuito de Euler.



Paseo: Si
Circuito: Si



Paseo: Si
Circuito: No

PASEOS Y CIRCUITOS HAMILTONIANOS

Un problema similar a la determinación de un paseo o un circuito de Euler, es el de determinar un paseo o circuito que pasa a través de un vértice en un grafo una y sólo una vez.

Definición:

Un paseo hamiltoniano es un paseo que pasa a través de cada uno de los vértices de un grafo dado exactamente una vez.

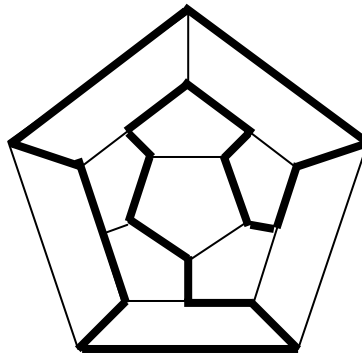
Definición:

Un circuito hamiltoniano es un circuito que pasa a través de cada uno de los vértices de un grafo dado exactamente una vez.

NOTA: No se conoce ninguna condición necesaria y suficiente para demostrar la existencia de un paseo o un circuito de Hamilton en un grafo.

Ejemplo:

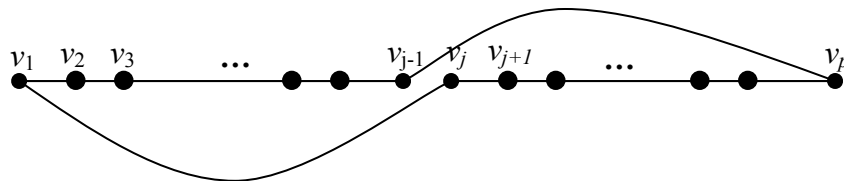
Encuentre un circuito de Hamilton en el siguiente grafo:



El siguiente es un resultado general sobre la existencia de paseos o circuitos hamiltonianos.

Sea G un grafo no dirigido de tipo lineal de n vértices. Si la suma de los grados para cada par de vértices de G es $n - 1$ o mayor, entonces existe un paseo de Hamilton en G .

Ejemplo:



La consideración anterior es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de un paseo hamiltoniano en un grafo.

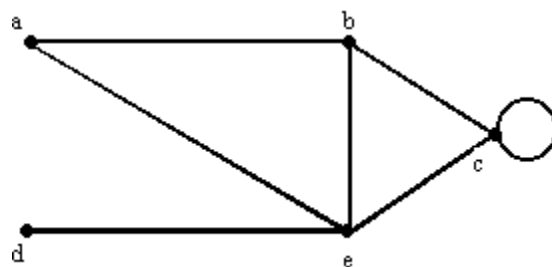
REPRESENTACIONES MATRICIALES

Hasta ahora se ha visto como representar un grafo mediante un esquema. Algunas veces, por ejemplo, cuando se desea analizar un grafo en una computadora, se necesita una presentación más formal. Un primer método de representación de un grafo lo constituye la matriz de adyacencia.

Para obtener la matriz de adyacencia de un grafo, se selecciona un orden arbitrario de vértices, supongamos que nuestro grafo tiene 5 vértices: a, b, c, d y e. A continuación, se le asignan a las filas y a las columnas de una matriz el mismo orden dado a los vértices. Un elemento de la matriz es 1 si los vértices correspondientes a la fila (renglón) y a la columna de dicho elemento están unidos por un lado (arista), y 0 en caso contrario.

Ejemplo:

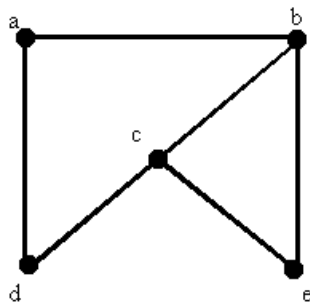
La matriz de adyacencia para este grafo es:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de adyacencia permite representar lazos, no permite representar lados paralelos. Si el grafo no tiene lados paralelos ni lazos, se puede obtener la valencia de un vértice sumando la fila o la columna correspondiente.

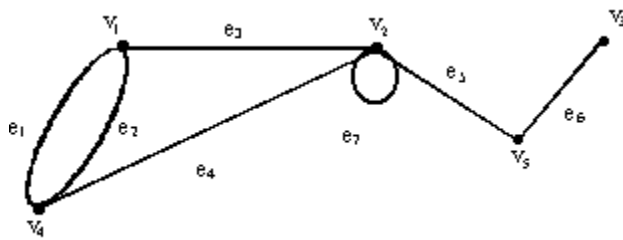
Ejemplo:



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de adyacencia no es una manera muy eficaz de representar un grafo. Como es simétrica con respecto a la diagonal la información, exceptuando la contenida en la diagonal, aparece dos veces.

Otra representación útil de un grafo es la conocida como matriz de incidencia como se puede ver en el siguiente grafo:



$$A = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Se le asigna a las filas las marcas correspondientes a los vértices y a las columnas las correspondientes a los lados. El elemento que corresponde a la fila y a la columna e es 1 si es incidente en algún vértice v y es 0 en cualquier otro caso.

Una columna semejante a e_7 representa un lazo.

La matriz de incidencia permite representar lados paralelos y lazos simultáneamente.

Un grafo sin lazos en cada columna tiene dos cifras 1 y la suma de cada fila da la valencia del vértice correspondiente.

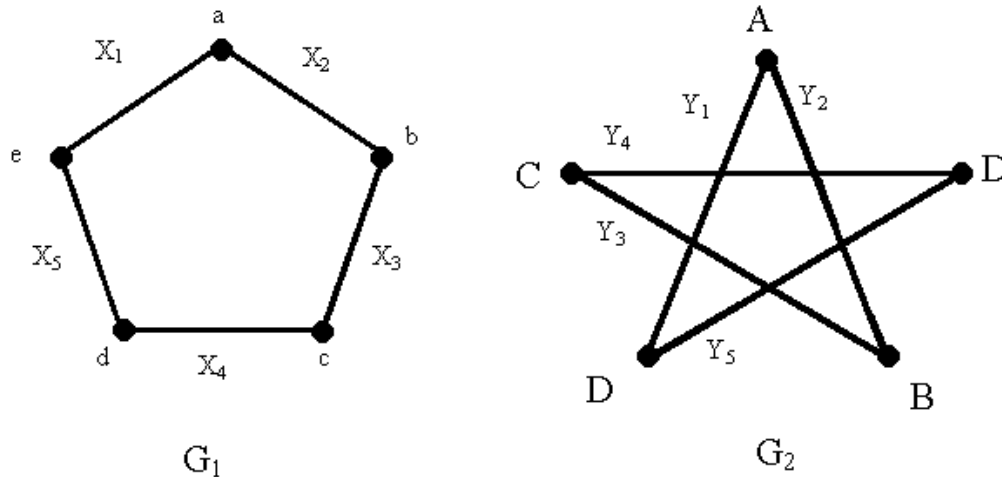
ISOMORFISMO DE GRAFOS

Definición:

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si existe una función biyectiva f entre los vértices de G_1 y G_2 , y una función biyectiva g entre lados de G_1 y G_2 tales que un lado e es incidente a v y w en G_1 si solo si el lado $g(e)$ es incidente a los vértices $f(v)$ y $f(w)$ en G_2 . Al par de funciones f y g se le denomina *isomorfismo*.

Ejemplo:

Sean los siguientes grafos G_1 y G_2



Un isomorfismo para los grafos anteriores G_1 y G_2 esta definido por:

$$\begin{aligned} f(a) &= A \\ f(b) &= B \\ f(c) &= C \\ f(d) &= D \\ f(e) &= E \end{aligned}$$

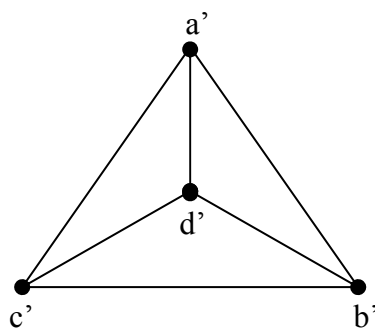
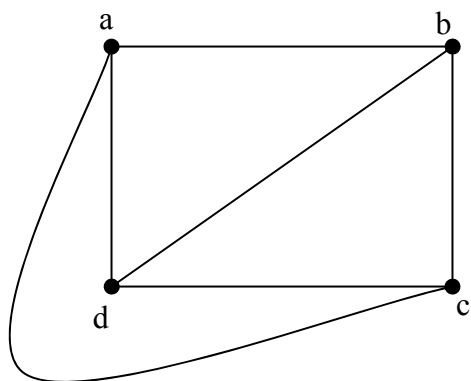
$$\text{y } g(X_i) = Y_i, i = 1, \dots, 5$$

Los grafos G_1 y G_2 son isomorfos si y solo si para alguna ordenación de vértices y lados sus matrices de incidencia son iguales. Veamos la matrices de incidencia de los grafos anteriores:

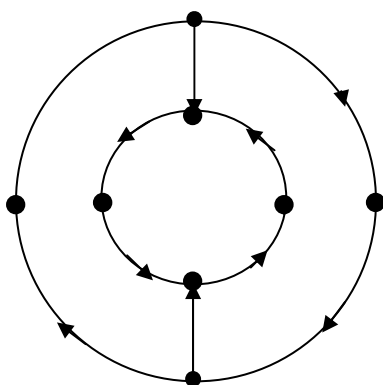
$$G_1 = \begin{array}{c|ccccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad G_2 = \begin{array}{c|ccccc} & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ \hline A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ E & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ejercicios:

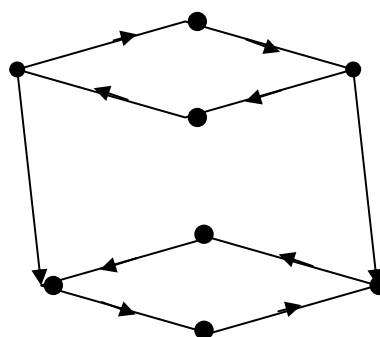
Verificar si los siguientes pares de grafos son isomorfos.



a)



b)

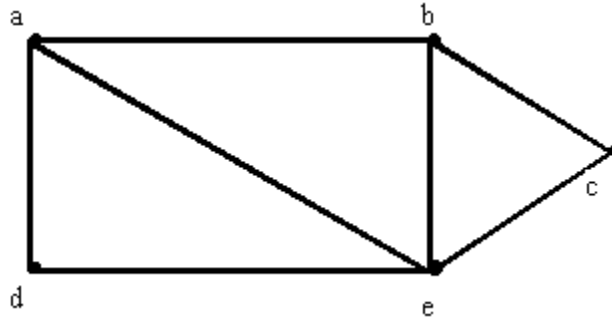


GRAFOS APLANABLES

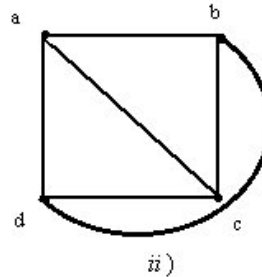
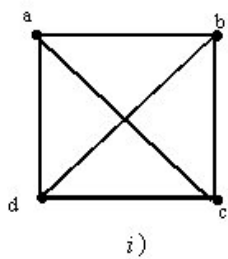
Este tipo de grafos, además de aparecer con mucha frecuencia también cuentan con muchas propiedades interesantes. Se analizarán algunas de las más importantes.

Definición:

Diremos que un grafo es aplanable si puede ser dibujado sobre un plano de tal manera que ninguna arista se cruce con otra excepto, desde luego, en los vértices comunes. El siguiente es un grafo aplanable:

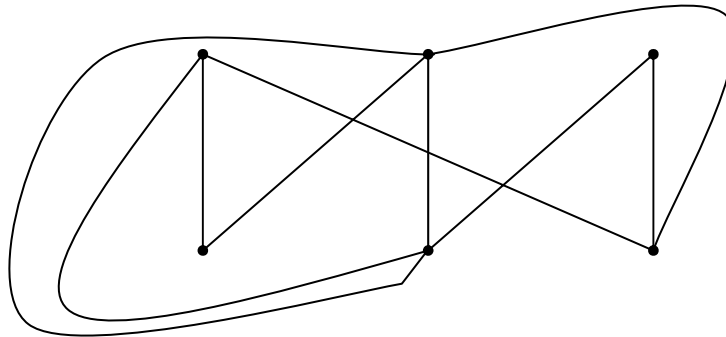


el grafo *i)* también es aplanable ya que puede dibujarse como se muestra en el grafo *ii)*



Ejemplo:

La siguiente figura es un grafo no aplanable que a decir verdad corresponde al problema de determinar si es posible conectar las casas 1, 2, 3 a los servicios de Luz, Agua y Drenaje, de tal manera que no haya 2 líneas de conexión que se crucen una con la otra.

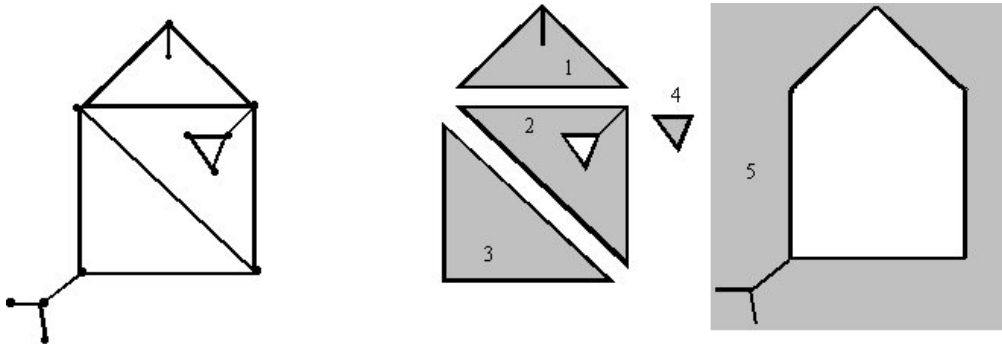


Definición:

Una región (o cara) de un grafo aplanable se define como una área del plano que está acotada por aristas y no puede continuar dividiéndose en subáreas.

Ejemplo:

El siguiente grafo tiene 5 regiones que son:

**Definición:**

Diremos que una región es infinita si su área es infinita y se dice que es finita, si su área es finita. En un grafo aplanable se tienen exactamente una región infinita.

Tenemos el siguiente resultado:

$$v - e + r = 2$$

donde v , e y r son el número de vértices, aristas y regiones respectivamente. Esta ecuación se conoce como la Fórmula de Euler para grafos aplanables. Sin excepción alguna todos los grafos aplanables conexos deben satisfacer la fórmula de Euler.

En cualquier grafo aplanable lineal conexo que no tenga lazos y que tenga 2 o más aristas se cumple la siguiente desigualdad:

$$e \leq 3v - 6$$

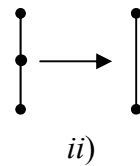
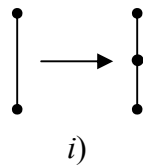
Debido a que el grafo es lineal cada región es acotada por 3 o más aristas por lo tanto el número es mayor o igual que $3r$. en la frontera a lo largo de 2 regiones, el número total es igual o menor a $2e$ así tenemos:

$$2e \geq 3r \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3}e \geq r$$

De acuerdo a la fórmula de Euler, tenemos que:

$$v - e + \frac{2e}{3} \geq 2 \quad \text{ó} \quad 3v - 6 \geq e$$

Es evidente que la planaridad de un grafo no se ve afectada si una arista es dividida en dos arista por la inserción de un vértice de grado 2 como *i)* o si 2 aristas se combinan en una sola arista al eliminar este vértice como en *ii)*

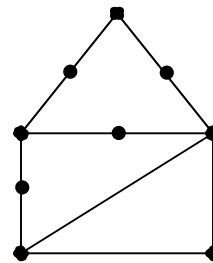
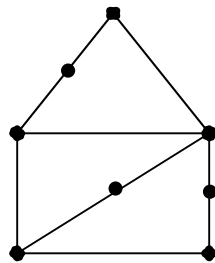


Definición:

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos bajo vértices de grado 2, si son isomorfos ó si pueden transformarse en grafos isomorfos mediante repeticiones de inserciones y/o eliminaciones de vértices de grado 2 como en *i)* y *i i)*.

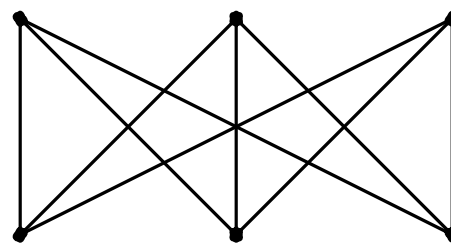
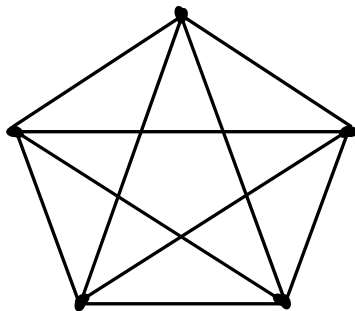
Ejemplo

Los siguientes grafos son isomorfos bajo vértices de grado 2.



Teorema de Kuratowski

Un grafo es aplanable si y solo si no contiene cualquier subgrafo que sea isomorfo bajo vértices de grado 2 a cualquier de los siguientes grafos, que son llamados de Kuratowski



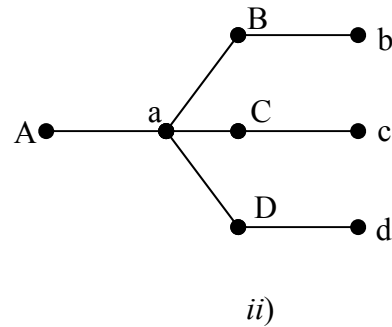
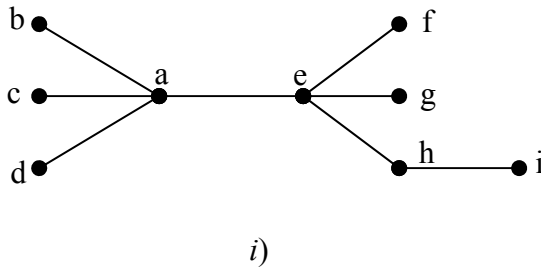
ÁRBOLES Y CONJUNTOS DE CORTE

ÁRBOLES

Definición:

Un árbol es un grafo no dirigido conexo que no contiene circuitos.

Ejemplos:



Definición:

Una colección de árboles disjuntos se llama bosque. Un vértice de grado 1 en un árbol se le llama hoja o nodo terminal, y un vértice de grado mayor que 1 recibe el nombre de nodo rama o nodo interno.

Ejemplo:

En el árbol i)

b, c, d, f, g, i, son nodos hoja

a, e, h, son nodos rama.

Existen algunas propiedades que señalaremos con relación a los árboles.

- 1) Existen un único paseo entre dos vértices cualesquiera en un árbol.
- 2) El número de vértices es mayor que el número de aristas en un árbol.
- 3) Un árbol con dos o más vértices tiene al menos una hoja.

Existen además otros resultados sobre la caracterización de árboles.

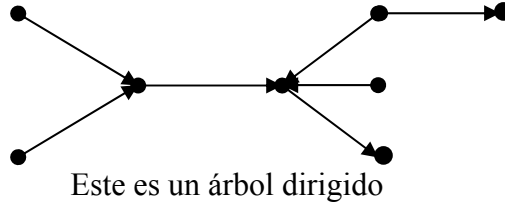
- 1) Un grafo en el cual existe un único paseo entre cada par de vértices es un árbol.
- 2) Un grafo conexo con $e = v - 1$ es un árbol.
- 3) Un grafo con $e = v - 1$ que no tiene circuitos es un árbol.

ÁRBOLES CON TERMINAL (ENRAIZADOS)

Definición:

Diremos que un grafo dirigido es un árbol dirigido si se convierte en un árbol cuando se ignoran las direcciones de sus aristas.

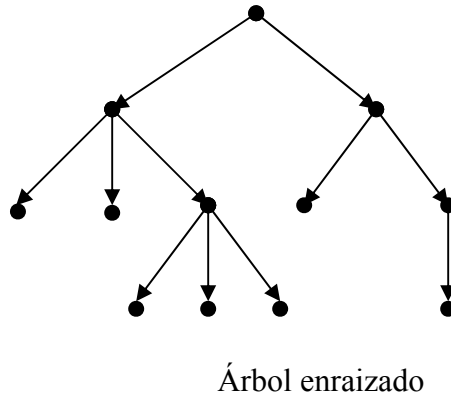
Ejemplo:



Definición:

Un árbol dirigido es un árbol enraizado si existe exactamente un vértice cuyo grado de entrada sea 0 y los grados de entrada de los otros vértices sea 1. El vértice con grado de entrada 0 es llamado raíz del árbol enraizado.

Ejemplo:

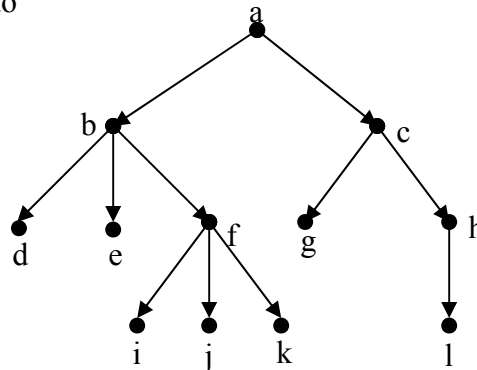


Definición:

En un árbol enraizado, un vértice cuyo grado de salida sea 0 se llama nodo hoja o nodo terminal, y un vértice cuyo grado de salidas sea diferente de 0 se llama nodo rama o nodo interno.

Ejemplo:

Sea el siguiente árbol dirigido



Entonces:

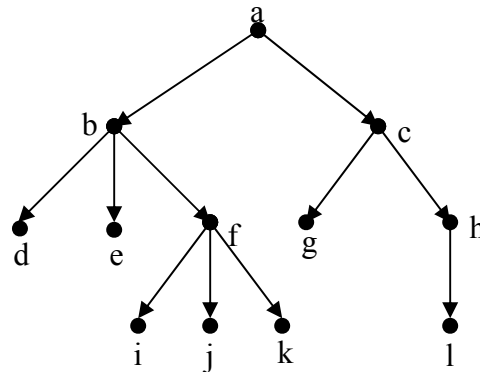
Los nodos a, b, c, f, h son nodos rama y los nodos d, e, g, i, j, k, l son nodos hoja.

Definición:

Sea a un nodo rama en un árbol enraizado. Diremos que un vértice b es un hijo de a si existe una arista de a a b . Además se dice que el vértice a es el padre de b . Dos vértices son hermanos si son hijos del mismo vértice. Diremos que un vértice c es un descendiente de a si existe un paseo dirigido de a a c . Además, se dice a es un ancestro de c .

Ejemplo:

Sea el siguiente árbol dirigido



Entonces:

b, c son hijos de a
d, e, f son hijos de b
g, h son hijos de c
i, j, k son hijos de f
l es hijo de h

a es padre de b, c
b es padre de d, e, f
c es padre de g, h
f es padre de i, j, k
h es padre de l

b, c son hermanos
d, e, f son hermanos
g, h son hermanos
i, j, k son hermanos
l no tiene hermanos

Además:

b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l son descendientes de a
d, e, f, i, j, k son descendientes de b
i, j, k son descendientes de f
g, h, l son descendientes de c
l es descendiente de h

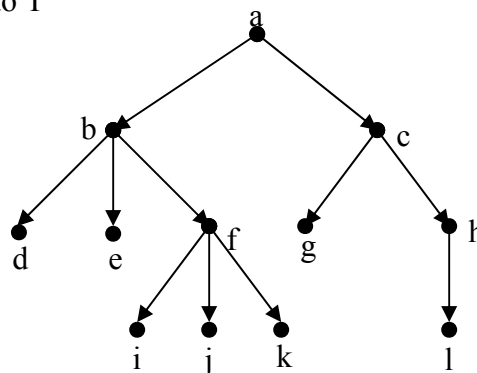
a es ancestro de b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l
b es ancestro de d, e, f, i, j, k
f es ancestro de i, j, k
c es ancestro de g, h, l
h es ancestro de l

Definición:

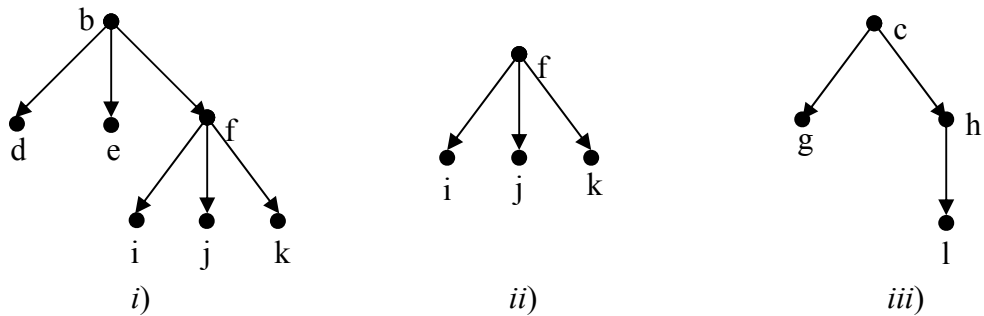
Sea a un nodo rama en un árbol T . Por el subárbol con raíz a entendemos el subgrafo $T' = (V', E')$ de T tal que V' contiene a a y a todas sus descendientes y E' contiene las aristas de todos los paseos dirigidos que surjan de a . Por un subárbol de a entendemos un subárbol que tiene a a como raíz.

Ejemplo:

Sea el siguiente árbol dirigido T



Entonces

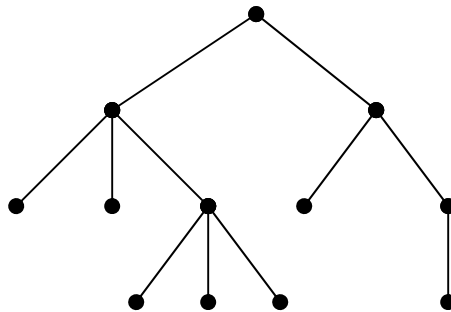


i), *ii)* y *iii)* son subárboles de *T* cuyas raíces son *b*, *f* y *c* respectivamente.

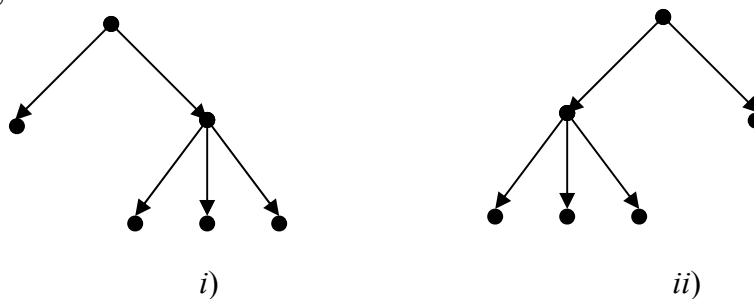
Observación:

Cuando se trace un árbol enraizado, si nos apegamos a la convención de colocar los hijos de un nodo rama bajo este, las flechas de las aristas pueden omitirse, debido a que puede entenderse a que apuntan hacia abajo.

Ejemplo:



Ahora veamos los siguientes árboles:

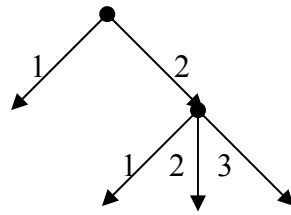


A pesar de que los árboles *i)* y *ii)* enraizados son isomorfos podrían representarnos dos situaciones completamente diferentes. Esto motiva a la siguiente definición de un árbol ordenado, lo cual permitirá referirnos sin ambigüedades a cada uno de los subárboles de un nodo rama. Veámosla

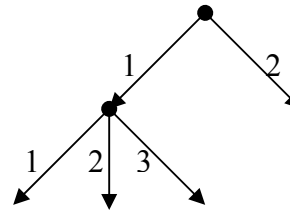
Definición:

Un árbol ordenado es un árbol enraizado con las aristas incidentes de cada nodo rama, etiquetadas con los enteros 1, 2, ..., *i*, ... por lo tanto, los subárboles de un nodo rama pueden ser referidos como el primero, el segundo, ..., y el *i*-ésimo subárboles del nodo rama y corresponden a las aristas incidentes desde el nodo, que pueden ser enteros no consecutivos.

Ahora supongamos que los árboles anteriores se etiquetan como se muestran a continuación:



i)



ii)

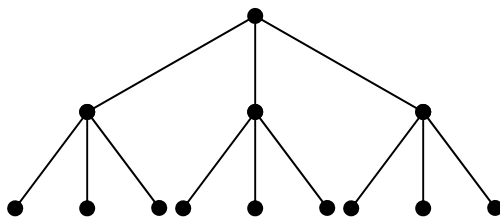
Definición:

Dos árboles ordenados son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre sus vértices y sus aristas, la cual conserva la relación de correspondencia, y si las etiquetas de las aristas correspondientes coinciden. Así los árboles ordenados *i)* y *ii)* no son isomorfos.

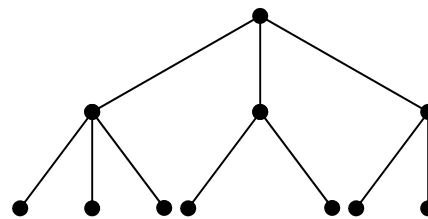
Definición:

Un árbol ordenado en el cual cada nodo rama tiene a lo más m hijos es llamado árbol m -ario. Diremos que un árbol m -ario es regular si cada una de sus ramas tiene exactamente m hijos. Una clase importante de árboles m -arios son los llamados árboles binarios. En los árboles binarios en lugar de referirnos al primero o al segundo subárbol de un nodo rama, a menudo nos referimos al subárbol izquierdo o al subárbol derecho del nodo.

Ejemplo:



Árbol ternario regular



Árbol ternario

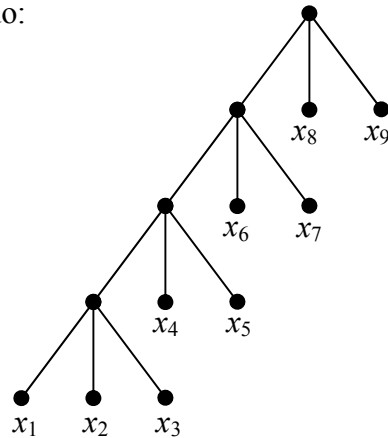
LONGITUD DE PASEO EN ÁRBOLES ENRAIZADOS

Definición:

La longitud de un paseo para un vértice en un árbol enraizado se define como el número de aristas en el paseo desde la raíz hasta el vértice.

Ejemplo:

Sea el siguiente árbol enraizado:



La longitud de paseo del vértice x_1 es 4 y la del vértice x_5 es 3.

Definición:

La altura (h) de un árbol se define como el máximo de las longitudes de los paseos en un árbol.

Ejemplo:

La altura de árbol enraizado del ejemplo anterior es 4.

PREFIJOS CODIFICADOS

Definición:

Diremos que un conjunto de sucesiones es un código de prefijos si no existe una sucesión del conjunto que sea un prefijo de otra sucesión del conjunto.

Ejemplo:

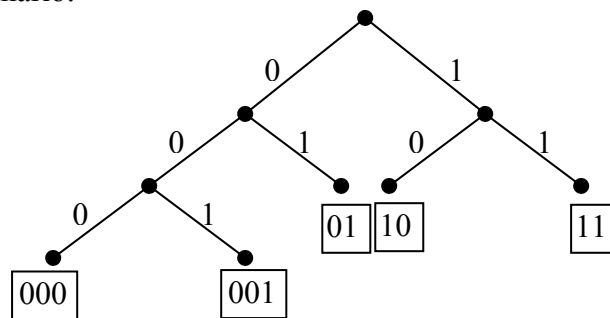
El conjunto {000, 001, 01, 10, 11} es un código de prefijos.

El conjunto {1, 00, 01, 000, 0001} no lo es un código de prefijos.

A partir de un árbol binario dado, podemos obtener directamente un código de prefijos binario. Primero etiquetamos las aristas con 0 y 1. Las aristas que corresponden al subárbol izquierdo se etiquetan con 0 y las derechas con 1.

Ejemplo:

Sea el siguiente árbol binario:

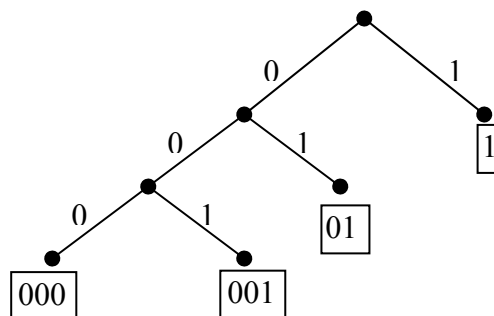


Es evidente que el conjunto de sucesiones asignadas a las hojas de cualquier árbol binario es un código de prefijos. El código de prefijos obtenido es {000, 001, 01, 10, 11}.

También podemos construir a partir de un código de prefijos un árbol binario.

Ejemplo:

Tenemos el código de prefijos {001, 000, 01, 1} con el cual obtenemos el siguiente árbol binario de altura 3:



Ejemplo práctico:

Al almacenar o transmitir grandes cantidades de texto, frecuentemente conviene buscar la forma de comprimirlo en el menor número posible de bits. El tiempo necesario para transmitir cierto mensaje es proporcional a su número de bits. Al comprimir los datos a enviar, puede reducirse el tiempo de transmisión. Además, los datos comprimidos necesitan menos bits para su almacenamiento.

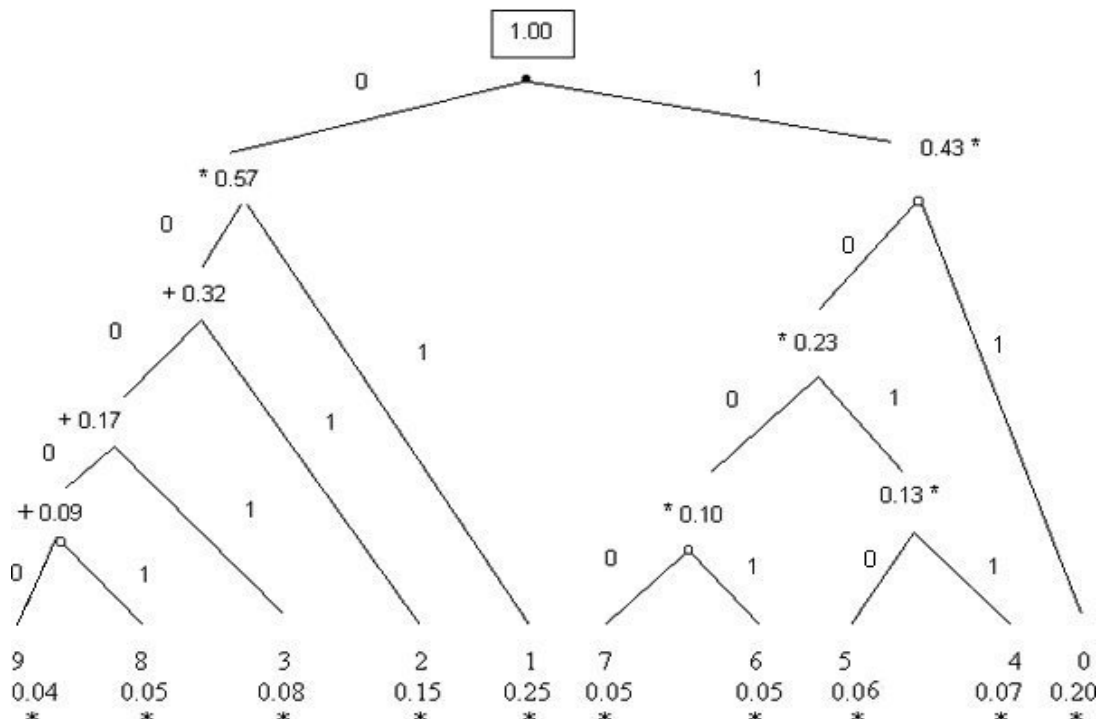
Una manera de hacerlo es eliminar la restricción de que todos los códigos de caracteres deben tener la misma longitud. Si en un idioma los códigos de letras comunes como "e" y "t" fueran mas cortos que los códigos de los menos comunes como "x" y "z", disminuiría el número de bits totales necesarios para almacenar o transmitir el texto. Dicho esquema de codificación se llama código dependiente de frecuencia o código Huffman, basado precisamente en los prefijos codificados. Al utilizar este método de codificación para cualquier aplicación particular, han de conocerse las frecuencias a priori a cada carácter.

El primer paso para construir el código es escribir la probabilidad de cada carácter debajo de este. El orden en que se acomodan los caracteres no importa y puede combinarse durante la construcción para mayor legibilidad. Después se buscan las dos probabilidades más pequeñas y se añade una nueva probabilidad igual a la suma de aquellas. Las dos probabilidades se marcan para no ser utilizadas de nuevo y se trazan dos aristas que unan a la nueva probabilidad con las que le dieron origen. Este proceso se repite una y otra vez hasta que solo quede una probabilidad sin marcar, que será igual a 1.00.

Construiremos el código Huffman para una supuesta transmisión para los dígitos 0,...,9 basados en las probabilidades siguientes:

Digito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia	0.20	0.25	0.15	0.08	0.07	0.06	0.05	0.05	0.05	0.04

El árbol resultante es el siguiente:



El código Huffman resultante para cada dígito es:

Digito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Código	11	01	001	0001	1011	1010	1001	1000	00001	00000

ÁRBOLES DE BÚSQUEDA BINARIA

Supongamos que trabajamos con objetos sobre los cuales existe un ordenamiento lineal $<$. En ejemplos prácticos el ordenamiento puede ser numérico, alfabético, alfanumérico, etc. Sean K_1, K_2, \dots, K_n los n objetos de una lista ordenada los cuales son conocidos como las claves.

Supongamos que $K_1 < K_2 < \dots < K_n$. Dado un objeto x , nuestro problema es buscar las claves y determinar si x es igual a una de las claves o si x esta entre las claves K_i y K_{i+1} para algún i . Primero señalemos que la búsqueda tiene $2n+1$ posibles resultados, es decir, x es menor que K_1 , x es igual a K_1 , x es mayor que K_1 pero menor que K_2 , x es igual a K_2 , etc.

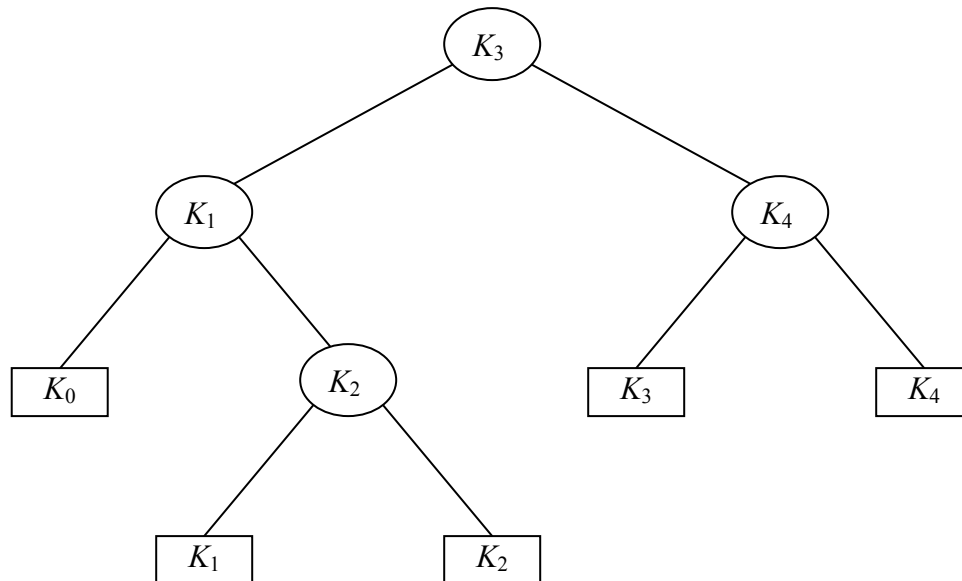
Un procedimiento de búsqueda consiste en una serie de comparaciones entre x y las claves donde cada comparación de x con una clave nos indica si x es igual, menor que, o mayor que tal clave.

Definición:

Definimos un árbol de búsqueda para las claves K_1, K_2, \dots, K_n como un árbol binario con n nodos rama y $n+1$ hojas. Los nodos rama son etiquetados con K_1, K_2, \dots, K_n y las hojas son etiquetados $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$; de manera que para el nodo rama con la etiqueta K_i , su subárbol izquierdo contiene sólo los vértices con las etiqueta $K_j, j < i$ y su subárbol derecho contiene sólo vértices con etiquetas $K_j, j \geq i$.

Ejemplo:

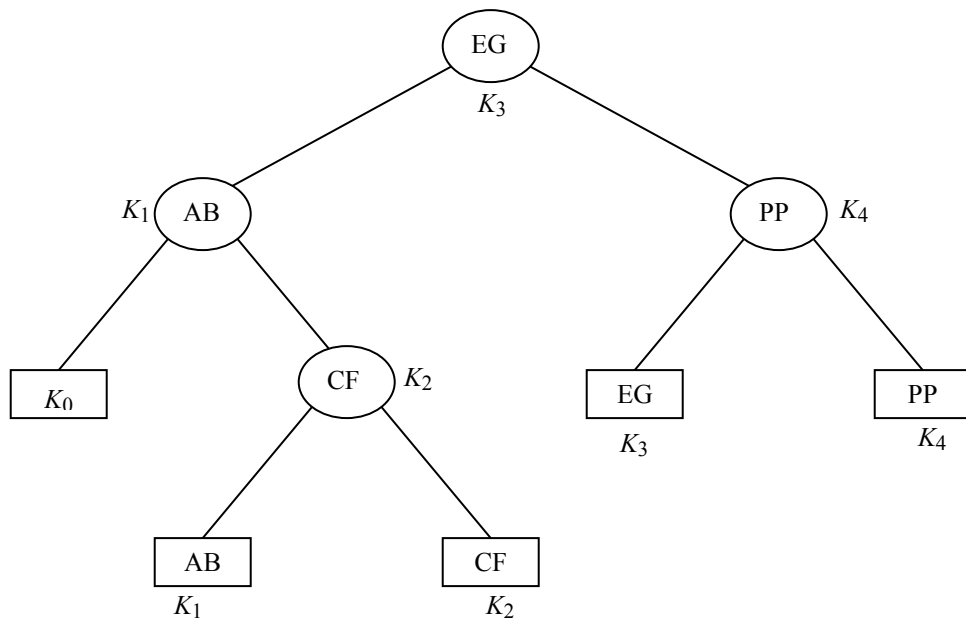
Sea el siguiente árbol:



De inmediato se ve que un árbol de búsqueda corresponde un procedimiento de búsqueda; al comenzar con la raíz del árbol de búsqueda, compramos un objeto dado x con la etiqueta de la raíz K_i . Si x es igual a K_i , la búsqueda ha terminado. Si x es menor que K_i , comparamos x con el hijo izquierdo, si x es mayor que K_i con el hijo derecho de la raíz. Dicha comparación se continúa para los nodos rama sucesivamente hasta que x concuerda con una clave o se alcance una hoja. Es evidente que si una hoja etiquetada con K_j es alcanzada, esto significa que x es mayor que la clave K_j pero menor que la clave K_{j+1} . Si se alcanza K_n significa que x es mayor que K_n .

Ejemplo:

Sean AB, CF, EG, PP las claves K_1 , K_2 , K_3 , K_4 en un árbol de búsqueda. Dado el objeto BB, los pasos de búsqueda son:



- 1.- Comparar BB con K_3 la cual es EG
- 2.- Como BB es menor que EG, comparemos BB con K_1 , la cual es AB
- 3.- Como BB es mayor que AB, comparemos BB con K_2 , la cual es CF
- 4.- Como BB es menor que CF, se alcanza la hoja K_1

Así concluimos que el objeto BB es mayor que AB y menor que CF.

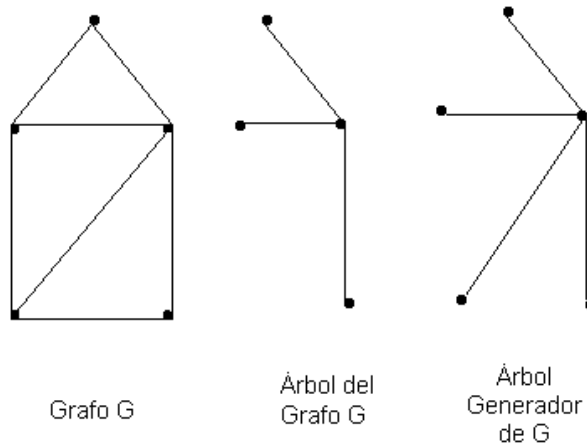
ÁRBOLES GENERADORES Y CONJUNTOS DE CORTE

Sean G un grafo conexo donde los vértices representan edificios y las aristas túneles de conexión entre los edificios. Se quiere determinar un subconjunto de túneles que debieran mantenerse que pudiéramos alcanzar un edificio desde otro a través de estos túneles. También se desea determinar los subconjuntos de túneles que el ser obstruidos separarían a algunos edificios de otros (subconjunto de aristas de conexión y subconjunto de aristas de no conexión de un grafo).

Definición:

Un árbol de un grafo es un subgrafo del grafo que es un árbol. Un árbol generador de un grafo conexo es un subgrafo generador que es un árbol.

Ejemplo:

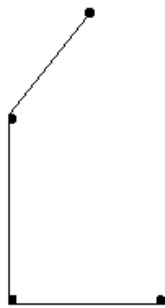


Definición:

Una rama de un árbol es una arista del grafo que es un árbol. Una cuerda o enlace de un árbol es una arista del grafo que no está en el árbol. El conjunto de cuerdas de un árbol se conoce como el complemento del árbol.

Ejemplo:

Del grafo G , del ejemplo anterior, el siguiente grafo es su complemento.



Definición:

Un grafo conexo siempre contiene un árbol generador. Si un grafo es conexo y no contiene circuitos entonces es un árbol. Si el grafo contiene uno o más circuitos, podemos eliminar una arista de los circuitos y aún tener un subgrafo conexo.

Definición:

Un grafo generador es un subgrafo mínimo conexo de un grafo conexo en el sentido de que a partir de un subgrafo conexo el cual no sea un árbol generador, una o más de sus aristas pueden eliminarse, de manera que el grafo resultante aún sea un subgrafo conexo y, por otra parte, ninguna arista puede eliminarse de un árbol generador de manera que el subgrafo resultante aún sea un subgrafo conexo.

Definición:

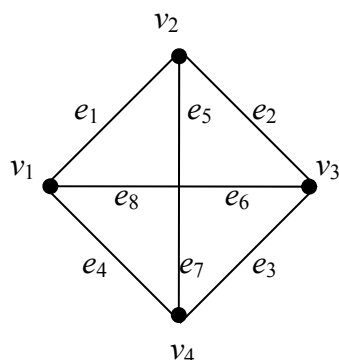
Para un grafo conexo con e aristas y v vértices, existen $v - 1$ ramas en cualquier árbol generador. Entonces, en relación con cualquier árbol generador, existen $e - v + 1$ cuerdas.

Definición:

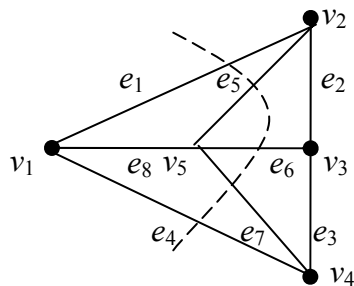
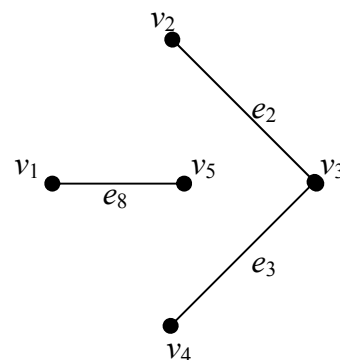
Un conjunto de corte es un conjunto (mínimo) de aristas en un grafo tal que la eliminación del conjunto incrementa el número de componentes conexas en el subgrafo restante, en tanto que la eliminación de cualquier subconjunto propio de este no lo haría. De esto se tiene que en un grafo conexo, la eliminación de un conjunto de corte divide el grafo con dos partes. Este sugiere una forma alternativa de definido en conjunto de corte.

Definición:

Si los vértices de una componente conexa a un grafo se divide en dos subconjuntos, de manera que cada dos vértices en cada subconjunto estén conectados por un paseo que sólo atraviesa vértices en tal subconjunto, entonces el conjunto de aristas que una los vértices de los dos subconjuntos es un conjunto de corte.

Ejemplo:

Para este grafo el conjunto de aristas $\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_4\}$ es un conjunto de corte, ya que su eliminación dejará un subgrafo no conexo como el de la derecha.



Este grafo es isomorfo al grafo anterior y se ve más claramente la división de los vértices para obtener un subgrafo no conexo como el de la derecha.

ÁRBOLES GENERADORES MÍNIMOS

Definición:

El peso de un árbol generador es la suma de los pesos de las ramas del árbol. Un árbol generador mínimo es uno con peso mínimo.

Una interpretación física de este problema es considerar los vértices de un grafo como ciudades, y los pesos de las aristas como los costos de construcción y mantenimiento de vías de comunicación entre las ciudades. Supongamos que queremos construir una red de comunicaciones que conecte a todas las ciudades a un costo mínimo. Entonces el problema es determinar un árbol generador mínimo.

Un procedimiento para resolver este problema se base en la observación de que entre todas las aristas en un circuito, la arista con mayor peso no está en el árbol generador mínimo. Sea “C” un circuito en un grafo pesado, y “E” la arista con el mayor peso en “C”. Supongamos que “E” es una rama de un árbol generador de T. Sea d el conjunto de corte correspondiente a la rama a la rama “E” como el circuito C y el conjunto de corte d deben tener un número par de aristas en común además de la arista “E” deberán existir al menos una o más aristas que estén tanto en C como en D. Sea F una de estas aristas. Observemos que F es una cuerda del árbol generador t debido a que D es un conjunto de corte. Agreguemos la arista F al árbol generador T y denotemos el subgrafo resultante como U. Es obvio que U es un subgrafo generador que contiene exactamente un circuito, el circuito correspondiente a F. Si eliminamos E de U, obtenemos un árbol generador cuyo peso es menor que T.

Construiremos un subgrafo del grafo pesado paso por paso, al ir examinando cada arista en orden creciente de pesos. Se agregará una arista al subgrafo parcialmente construido si no origina un circuito, y será descartada en caso contrario. La construcción termina cuando todas las aristas han sido examinadas. Es claro que nuestra construcción de origen a un subgrafo que no contiene un circuito. El subgrafo también es conexo. Así el subgrafo construido es un árbol.

Además, este es un árbol generador debido a que el grafo original es conexo. Finalmente, el árbol generador es mínimo por que en el proceso de construcción una arista era excluida a favor de las aristas de pesos mayores solo si se sabía que la arista excluida no podía estar en un árbol generador mínimo. En otras palabras, las $v - 1$ aristas en el subgrafo son efectivamente las $v - 1$ aristas con los pesos menores que pueden ser incluidas en un árbol generador mínimo.

Ejemplo:

