Nombre ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO	Fecha 07/09/2021
Actividad 4	**Operaciones con vectores**

Instrucciones:

completa lo que se te pide con el uso de la bibliografía propuesta, además recuerda anotar el procedimiento limpio y claro el cual puede ser en hojas blancas (adjunta la imagen debajo de cada pregunta) de lo contrario realizarlo en Word con el editor de ecuaciones.

Recuerda incluir procedimiento detallado de cada uno de tus procedimientos, incluyendo derivadas, dominios, despejes, etc.

Parte I. Definición de vector

1. Defina un vector renglón de "n" componentes. Muestre un ejemplo en el espacio $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\ y\ en\ \mathbb{R}^4$, respectivamente.

   Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

   $$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

   EJEMPLOS:

   R^2:

   (4, 4)

   R^3:

   (1, -2, 0)

   R^4:

   (0, -5, 7, 11)

2. Defina un vector columna de "n" componentes. Muestre un ejemplo en el espacio $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\ y\ en\ \mathbb{R}^4$, respectivamente.

   Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

   $$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{pmatrix}$$

   EJEMPLOS:

   R^2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

R^3:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

R^4:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Parte II. Norma y dirección de un vector

1. Escribe las fórmulas para calcular la norma y dirección de un vector en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Norma o magnitud:

$$|v| = magnitud\ de\ v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dirección:

$$\tan \emptyset = \frac{b}{a}$$

2. Calcule la norma y dirección de los siguientes vectores:

a) $u = 3i + 2j$

Norma:

$$|u| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Dirección:

$$\tan \emptyset = \frac{2}{3} = 33°41°2424$$

b) $u = -2i + 2j$

Norma:

$$|u| = \sqrt{-2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Dirección:

$$\tan \emptyset = \frac{2}{-2} = 135°$$

c) $u = -i - 2j$

Norma:

$$|u| = \sqrt{-1^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

Dirección:

$$\tan \emptyset = \frac{-2}{-1} = 63°43° + 180 = 243°26°$$

d) $u = (1, -4)$

Norma:

$$|u| = \sqrt{1^2 - 4^2} = \sqrt{17}$$

Dirección:

$$\tan \emptyset = \frac{-4}{1} = -75°57° + 180$$
$$= 104°2°$$

e) $u = 3i + 2j - 6k$

f) $u = (1, 1, 1)$

Norma:

$$|u| = \sqrt{3^2 + 2^2 - 6^2} = \sqrt{49}$$

Dirección:

$$\vec{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{49}}, \frac{2}{\sqrt{49}}, \frac{-6}{\sqrt{49}}\right)$$

Norma:

$$|u| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Dirección:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Parte III. Suma/resta de vectores y multiplicación por un escalar

1. Describa las condiciones para efectuar la suma y resta de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. 11

   La suma de vectores está definida por:

$$a + b = \begin{pmatrix} a1 + b1 \\ a2 + b2 \\ \dots \\ an + bn \end{pmatrix}$$

2. Muestre un ejemplo de suma/resta de **vectores en** $\mathbb{R}^2$

$$a + b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

3. Muestre un ejemplo de suma/resta **de vectores en** $\mathbb{R}^3$

$$a - b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Escriba un ejemplo en el cual la suma/resta de vectores **no esté definida**.

$$a + b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{No está definida}$$

5. Posteriormente, considere los vectores $a = (-4,\ 3, -2),\ \ b = (2, -4, 5),\ \ c = 3i - j - k,$ $d = -i + 4j,\ \ e = (-9,1)$. Donde los vectores $a, b\ y\ c\ \in\ \mathbb{R}^3,\ d\ y\ e\ \in\ \mathbb{R}^2$. Realice las operaciones indicadas, si la operación no está definida, escríbalo.

a) $a + b - c =$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $c - d =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = No\ esta\ definida$$

c) $c + d =$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = No\ esta\ definida$$

d) $a + b - d =$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$No\ esta\ definida$$

6. Describa las condiciones para efectuar la multiplicación de vectores por un escalar. Muestre dos ejemplos, use el espacio $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y escalares diferentes de cero.

   La multiplicación por escalares está definida por:

$$\alpha \text{ a} = \begin{pmatrix} \alpha a1 \\ \alpha a2 \\ \dots \\ \alpha an \end{pmatrix}$$

7. Luego, considere los vectores $a = (-4,\ 3, -2),\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix},\ c = 3i - j - k,\ d = -i + 4j,\ e = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donde los vectores $a, b\ y\ c\ \in \mathbb{R}^3,\ d\ y\ e\ \in \mathbb{R}^2$. Realice las operaciones indicadas, si la operación no está definida, escríbalo.

a) $-3a - 4b + 2c =$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix}$$

b) $-d + 4e =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $-3a + d =$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = No\ definida$$

d) $7a + 4c + 2b =$

$$\begin{pmatrix} -28 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Parte IV. Producto punto

1. Describa las condiciones para efectuar el producto punto. Escriba la fórmula.

Sean u = (a_1, b_1) y v = (a_2, b_2); entonces el producto escalar o producto punto de u y v, denotado por u · v, está dado por :

$$u \cdot v = a_1a_2 + b_1b_2$$

Si u = (a_1, b_1, c_1) y v = (a_2, b_2, c_2), entonces

$$u \cdot v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

2. Muestre un ejemplo de **producto punto en $\mathbb{R}^2$, uno en $\mathbb{R}^3$** y uno en lo que el producto punto **no esté definido**.

R^2:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 16 + 24 = 40$$

R^3:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 24 + 0 + 36 = 60$$

No definido:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \text{No está definida}$$

3. Posteriormente, considere los vectores $a = (-4,\ 3, -2)$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c = 3i - j - k$, $d = -i + 4j$, $e = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donde los vectores $a, b\ y\ c\ \in \mathbb{R}^3$, $d\ y\ e\ \in \mathbb{R}^2$. Realice las operaciones indicadas, si la operación no está definida, escríbelo.

a) $(a \cdot b) \cdot (-2c) =$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$-8 - 12 - 10 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -30 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 180 \\ -60 \\ -60 \end{pmatrix}$

b) $\left(\left((3a) \cdot (-2c)\right) \cdot (4b)\right) - a =$

$\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 72+18-12=$

$78 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ -1248 \\ -1560 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 628 \\ -1251 \\ -1558 \end{pmatrix}$

c) $(a \cdot b) - 2c =$

$-30 - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} =$ No definida

d) $(4d - 6e) \cdot (e + d) =$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -54 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} = -500 + 50 = -450$

e) $(4d - 6e) \cdot (a + d)$

$\begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) =$

No definida

f) $5(a + b) \cdot (-c) =$

$\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 20 - 5 + 15 = 30$

Parte V. Producto cruz

1. Describa las condiciones para efectuar el producto cruz. Escriba la fórmula.

   Sean $u = a_1i + b_1j + c_1k$ y $v = a_2i + b_2j + c_2k$. Entonces el producto cruz (cruz vectorial) de u y v, denotado por u x v, es un nuevo vector definido por:

   $$u \times v = (b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_2 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k$$

2. Muestre un **ejemplo en el espacio** $\mathbb{R}^3$ y uno en el que el producto **cruz no esté definido**.

EJEMPLOS:

R^3:

$(u = 5i + j + 7k) \times (v = 3i - 2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 0)i + (21 + 10)j + (0 - 3)k = -2i + 31j - 3k$

No Definido:

$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ x $\begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$ = No definido

3. Luego, suponga que $a = (-4,\ 3, -2),\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix},\ c = 3i - j - k,\ d = -i + 4j,\ e = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donde los vectores $a, b\ y\ c\ \in\ \mathbb{R}^3,\ d\ y\ e\ \in\ \mathbb{R}^2$. Realice las operaciones indicadas, si la operación no está definida, escríbelo.

a) $(a \times b) \times c =$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ =

(15 - 8)i + (-4 - (- 20))j + (16 - 6)k =

7i + 16j + 10k x c =

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 16 & 10 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ =

(-16 + 10)i + (30 + 7)j + (-7 - 48)k =

- 6i + 37j - 55k

b) $(a \times b) \cdot c =$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ = 21 - 16 - 10 = -5

c) $(a \cdot b) \times c =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ = - 2 - 12 - 10 = -24

$-24\ x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$

d) $(e \cdot d) \times e =$

$\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ = 9 + 4 = 13

13 x $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -117 \\ 13 \end{pmatrix}$