ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444
ACTIVIDAD # 2

Norma Elva Espino Rojas

Realice los siguientes ejercicios sin omitir procedimientos, explicando cada paso de su proceso y dando conclusión. Cada ejercicio le dar· la información necesaria para realizarlo.

1. Evalué e^{-5} con el uso de dos métodos

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots}$$

y compárelo con el valor verdadero de 6.737947 x 10^{-3}. Utilice 20 términos para evaluar cada serie y calcule los errores relativos aproximado y verdadero como términos que se agregan.

Aplicamos la serie de Maclaurin. (para confirmar)

$g(x) = e^{-x}$

$g(x) = e^{-x}$	$\rightarrow$	$g(0) = 1$
$g'(x) = -e^{-x}$	$\rightarrow$	$g'(0) = -1$
$g''(x) = e^{-x}$	$\rightarrow$	$g''(0) = 1$
$g'''(x) = -e^{-x}$	$\rightarrow$	$g'''(0) = -1$
$g^{(4)}(x) = e^{-x}$	$\rightarrow$	$g^{(4)}(0) = 1$
$g^{(5)}(x) = -e^{-x}$	$\rightarrow$	$g^{(5)}(0) = -1$
$g^{(6)}(x) = e^{-x}$	$\rightarrow$	$g^{(6)}(0) = 1$
$g^{(7)}(x) = -e^{-x}$	$\rightarrow$	$g^{(7)}(0) = -1$
$g^{(8)}(x) = e^{-x}$	$\rightarrow$	$g^{(8)}(0) = 1$

$e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots$

$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

Evaluamos con 20 términos y hacemos las sustituciones

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

metodo 1:

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{10}}{10!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{12}}{12!}-\frac{x^{13}}{13!}+\frac{x^{14}}{14!}-\frac{x^{15}}{15!}+\frac{x^{16}}{16!}-\frac{x^{17}}{17!}+\frac{x^{18}}{18!}-\frac{x^{19}}{19!}+\frac{x^{20}}{20!}$$

sustiticion

$$1-5+\frac{5^2}{2}-\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}-\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!}-\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}-\frac{5^9}{9!}+\frac{5^{10}}{10!}-\frac{5^{11}}{11!}+\frac{5^{12}}{12!}-\frac{5^{13}}{13!}+\frac{5^{14}}{14!}-\frac{5^{15}}{15!}+\frac{5^{16}}{16!}-\frac{5^{17}}{17!}+\frac{5^{18}}{18!}-\frac{5^{19}}{19!}+\frac{5^{20}}{20!}=$$
$$\frac{26257980879929}{3892643213082624}=6.74554010\times10^{-3}$$

metodo 2:

$$\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{10}}{10!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{12}}{12!}-\frac{x^{13}}{13!}+\frac{x^{14}}{14!}-\frac{x^{15}}{15!}+\frac{x^{16}}{16!}-\frac{x^{17}}{17!}+\frac{x^{18}}{18!}-\frac{x^{19}}{19!}+\frac{x^{20}}{20!}}$$

sustiticion

$$\frac{1}{1-5+\frac{5^2}{2}-\frac{5^3}{3!}+\frac{5^4}{4!}-\frac{5^5}{5!}+\frac{5^6}{6!}-\frac{5^7}{7!}+\frac{5^8}{8!}-\frac{5^9}{9!}+\frac{5^{10}}{10!}-\frac{5^{11}}{11!}+\frac{5^{12}}{12!}-\frac{5^{13}}{13!}+\frac{5^{14}}{14!}-\frac{5^{15}}{15!}+\frac{5^{16}}{16!}-\frac{5^{17}}{17!}+\frac{5^{18}}{18!}-\frac{5^{19}}{19!}+\frac{5^{20}}{20!}}=\frac{3892643213082624}{26257980879929}=148.246098$$

Error relativo 1:

$$E_r=\left\|\frac{6.737947\times10^{-3}-6.74554010\times10^{-3}}{6.737947\times10^{-3}}\right\|=1.12691596\times10^{-3}$$

Error relativo 2:

$$E_r=\left\|\frac{6.737947\times10^{-3}-148.246098}{6.737947\times10^{-3}}\right\|=22000.6717$$

∴Por las sustituciones podemos ver que la primera función se acerca mucho más a el valor real, mientras la segundo se queda muy lejos.

2. Determine la integral.

$$\int_1^3 \frac{e^{x^2}}{x^2}\,dx$$

usando la serie de Maclaurin correspondiente, aproxime con 10 términos de la serie y calcule el error porcentual sabiendo que el valor verdadero de la integral 1.87 855 248 264 x 10^2

Aplicamos la serie de Maclaurin.

$f(x)=e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f(0)=1$
$f'(x)=2xe^{x^2}$	$\rightarrow$	$f'(0)=0$
$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f''(0)=2$
$f'''(x)=12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f'''(0)=0$
$f^{(4)}(x)=12e^{x^2}+48x^2e^{x^2}+16x^4e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f^{(4)}(0)=12$
$f^{(5)}(x)=120xe^{x^2}+160x^3e^{x^2}+32x^5e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f^{(5)}(0)=0$
$f^{(6)}(x)=120e^{x^2}+720x^2e^{x^2}+480x^4e^{x^2}+64x^6e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f^{(6)}(0)=120$
$f^{(7)}(x)=1680xe^{x^2}+3360x^3e^{x^2}+1344x^5e^{x^2}+128x^7e^{x^2}$	$\rightarrow$	$f^{(7)}(0)=0$
$f^{(8)}(x)=\ldots$	$\rightarrow$	$f^{(8)}(0)=1680$

$$e^{x^2}=1+\frac{0}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{12}{4!}x^4+\ldots$$
$$=1+\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{4!}x^4+\frac{120}{6!}x^6+\frac{1680}{8!}x^8+\ldots$$

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

obtenemos la siguiente integral

integral no pude completarla :(

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\square}{(2n)!} x^{2n}$$

Analisis a 10 terminos

$$\int_1^3 \frac{e^{x^2}}{x^2} dx = \int_1^3 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\square}{(2n)!} x^{2n}}{x^2}$$

$$f^{(18)}(0) = 17\,643\,225\,600$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 + \frac{120}{6!}x^6 + \frac{1680}{8!}x^8 + \frac{30240}{10!}x^{10} + \frac{665280}{12!}x^{12} + \frac{17297280}{14!}x^{14} + \frac{518918400}{16!}x^{16} + \frac{17643225600}{18!}x^{18}}{x^2} \right)$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{12}{4!}x^2 + \frac{120}{6!}x^4 + \frac{1680}{8!}x^6 + \frac{30240}{10!}x^8 + \frac{665280}{12!}x^{10} + \frac{17297280}{14!}x^{12} + \frac{518918400}{16!}x^{14} + \frac{17643225600}{18!}x^{16} \right)$$

$$= \frac{-1}{x} + x + \frac{12}{4!}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{120}{6!}\left(\frac{x^5}{5}\right) + \frac{1680}{8!}\left(\frac{x^7}{7}\right) + \frac{30240}{10!}\left(\frac{x^9}{9}\right) + \frac{665280}{12!}\left(\frac{x^{11}}{11}\right) + \frac{17297280}{14!}\left(\frac{x^{13}}{13}\right) + \frac{518918400}{16!}\left(\frac{x^{15}}{15}\right) + \frac{17643225600}{18!}\left(\frac{x^{17}}{17}\right)\Big|_1^3$$

Por ultimo sustituimos los limites de la integral y restamos los resultados

sustituir

$$= \frac{-1}{(3)} + (3) + \frac{12}{4!}\left(\frac{(3)^3}{3}\right) + \frac{120}{6!}\left(\frac{(3)^5}{5}\right) + \frac{1680}{8!}\left(\frac{(3)^7}{7}\right) + \frac{30240}{10!}\left(\frac{(3)^9}{9}\right) + \frac{665280}{12!}\left(\frac{(3)^{11}}{11}\right) + \frac{17297280}{14!}\left(\frac{(3)^{13}}{13}\right) + \frac{518918400}{16!}\left(\frac{(3)^{15}}{15}\right) + \frac{17643225600}{18!}\left(\frac{(3)^{17}}{17}\right) = \frac{1407\,668\,593}{10\,210\,200} = 137.\,868\,856$$

$$= \frac{-1}{(1)} + (1) + \frac{12}{4!}\left(\frac{(1)^3}{3}\right) + \frac{120}{6!}\left(\frac{(1)^5}{5}\right) + \frac{1680}{8!}\left(\frac{(1)^7}{7}\right) + \frac{30240}{10!}\left(\frac{(1)^9}{9}\right) + \frac{665280}{12!}\left(\frac{(1)^{11}}{11}\right) + \frac{17297280}{14!}\left(\frac{(1)^{13}}{13}\right) + \frac{518918400}{16!}\left(\frac{(1)^{15}}{15}\right) + \frac{17643225600}{18!}\left(\frac{(1)^{17}}{17}\right) = \frac{114\,141\,551}{551\,350\,800} = 0.\,207\,021\,648$$

resultado

$$137.\,868\,856 - 0.\,207\,021\,648 = 137.\,661\,834$$

Error Porcentual

$$E_{\%} = \left\| \frac{1.87855248264\times 10^2 - 137.\,661\,834}{1.87855248264\times 10^2} \times 100 \right\| = 26.\,719\,197\,2\%$$

$$1.\,87855248264 \times 10^2 = 187.\,855\,248$$

Calculamos el error porcentual que me dio de 26%

∴Por mucho este era el problema mas difícil, al final no pude resolver la serie de la integral, pues no fui capaz de encontrar el patrón exponencial que hacia que se elevaran tanto los números, aun así vi que no era tan indispensable, pues sacando manualmente los primero 10 términos pude dar una respuesta al problema.

3. Un alumno quiere determinar el volumen de gas desprendido, para ello realiza la experimentación cuatro veces. Los resultados obtenidos son: 100.0 cm^3; 98.0 cm^3; 101.0 cm^3; 97.0 cm^3: Determinar el error absoluto y porcentual de la medida 101.0 cm^3.

Al no tener un valor verdadero decidí hacer un promedio entre los 4 resultados y usarlo como valor real

promedio

$$\frac{100.0 + 98.0 + 101.0 + 97.0}{4} = 99.0$$

Errores:

$$E_a = \|99.0 - 101.0\| = 2.0$$

$$E_p = \left\| \frac{99.0 - 101.0}{99.0} \right\| \times 100 = 2.\,020\,202\,02\%$$

∴La respuesta puede variar demasiado, debido a que no se especifica ningún intento como el valor verdadero, aun así la medida de 101.0 se queda muy cercana al promedio de resultados, por eso podemos decir que no es un resultado demasiado erróneo.

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

4. Sean:

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \quad y \quad P(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$$

Calcular f (0.01) y P (0.01) con 6 cifras significativas. Teniendo en cuenta que P (x) es el polinomio de grado 2 de f (x). ¿Cuál de los resultados es más correcto?

Sustituimos en ambas funciones

$f(x) = \frac{e^x-1-x}{x^2}$	$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$
$f(0.01) = \frac{e^{(0.01)}-1-(0.01)}{(0.01)^2} = 0.501\,670\,842$	$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{(0.01)}{6} + \frac{(0.01)^2}{24} = 0.501\,670\,833$

∴Al no saber cual termino es el verdadero, tomando en cuenta 6 decimales concluimos que ambas son iguales y por lo tanto ambas son correctas.