Nombre: ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO	**Fecha: 22/09/2021**
Actividad 2.4	**Inversa de una matriz**

Instrucciones mano en **hojas blancas** en el espacio destinado para la respuesta. **No olvides anotar la justificación a cada uno de tus procesos para que tu respuesta sea válida**. Recuerda que trabajos fuera de tiempo e incompletos no son revisados.

Parte 1. Inversa de una matriz

1- Calcule la adjunta de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$adj\ A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$adj\ B = B_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, B_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, B_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, B_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$B_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, B_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, B_{32} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$abj\ B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

2- Con base en la matriz adjunta de cada una de las matrices del ejercicio 1. Calcule la inversa de cada inciso.

a) $A^{-1} =$

$$\left(\frac{1}{\det A}\right)(adj\ A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $B^{-1} =$

$$\left(\frac{1}{\det B}\right)(adj\ B) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -5/2 & 7/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

3- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcule A^{-1}. Utilice eliminación por renglones.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F1(-4) + F2 = F2 \\ F1(-2) + F3 = F3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F2\left(\frac{1}{5}\right) = F2 \\ F2 + F1 = F1 \\ F2(-2) + F3 = F3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F3\left(\frac{-5}{18}\right) = F2 \\ F3\left(\frac{6}{5}\right) + F2 = F2 \\ F3\left(-\frac{9}{5}\right) + F1 = F1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{23}{25} & \frac{23}{25} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{32}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{11}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{vmatrix}$$

4- Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, cuyo $det(A) = -4$. Utilice propiedades de matrices inversas y calcule el det(A^{-1}):

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{-4}$$

5- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, calcule el det($A^{-1}$).

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F1(-2) + F2 = F2 \\ F1(-5) + F3 = F3 \\ F1(4) + F4 = F4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -9 & 5 & -23 \\ 0 & 11 & -3 & 22 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F2(-1) = F2 \\ F2(-2) + F1 = F1 \\ F2(9) + F3 = F3 \\ F2(-11) + F4 = F4 \end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&7&-4\\0&1&-4&4\\0&0&-31&13\\0&0&41&-22\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-3&2&0&0\\2&-1&0&0\\13&-9&1&0\\-18&11&0&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}F3\left(-\frac{1}{31}\right)=F3\\F3(-7)+F1=F1\\F3(4)+F2=F2\\F3(-41)+F4=F4\end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&-\frac{33}{31}\\0&1&0&\frac{72}{31}\\0&0&1&-\frac{13}{31}\\0&0&0&-\frac{149}{31}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\frac{2}{31}&-\frac{1}{31}&\frac{7}{31}&0\\\frac{10}{31}&\frac{5}{31}&-\frac{4}{31}&0\\-\frac{13}{31}&\frac{9}{31}&-\frac{1}{31}&0\\-\frac{25}{31}&-\frac{28}{31}&-\frac{41}{31}&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}F4\left(-\frac{31}{149}\right)=F4\\F4\left(\frac{33}{31}\right)+F1=F1\\F4\left(-\frac{72}{31}\right)+F2=F2\\F4\left(\frac{13}{31}\right)+F3=F3\end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{17}{149}&\frac{25}{149}&-\frac{10}{149}&-\frac{33}{149}\\-\frac{10}{149}&-\frac{41}{149}&\frac{76}{149}&\frac{72}{149}\\-\frac{52}{149}&\frac{55}{149}&-\frac{22}{149}&-\frac{13}{149}\\\frac{25}{149}&\frac{28}{149}&-\frac{41}{149}&-\frac{31}{149}\end{vmatrix}$$

6- Sea $A=\begin{pmatrix}-a&2b\\\frac{3}{2}&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6&-7\\-8&10\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$. Encuentre la matriz E tal que: $E=A^t+BC-2D^{-1}$

$$E=\begin{vmatrix}-a&3/2\\2b&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-12&16\\-16&22\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6&-8\\-4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-a-18&51/2\\2b-12&33\end{vmatrix}$$

7- Sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\4&5\end{pmatrix}$ y $B^{-1}=\begin{pmatrix}5&1\\2&3\end{pmatrix}$, Calcule $(AB)^{-1}$. Utilice propiedades de matrices inversas.

$$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\30&19\end{pmatrix}$$

8- Sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\4&5\end{pmatrix}$, encuentra A. Utilice propiedades de matrices inversas.

$$A=\begin{vmatrix}-1&3\\4&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}F1(-1)=F1\\F1(-4)+F2=F2\end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-3\\0&17\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&0\\4&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}F2\left(\frac{1}{17}\right)=F2\\F2(3)+F1=F1\end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-13/17&1/17\\4&1\end{vmatrix}$$

9- Cuál es el valor del $\det(A^{-1})$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| = \begin{matrix} F2 \to F3 \\ F1\left(\frac{1}{2}\right) = F1 \\ F2(-1) = F2 \\ F3\left(-\frac{1}{5}\right) = F3 \\ F4\left(\frac{1}{3}\right) = F4 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}\right| \text{ ó } \left|\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}\right|$$

Parte II. Sistemas de Ecuaciones Lineales e Inversa de una matriz

10- Sea $\begin{matrix} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{matrix}$, un sistema de ecuaciones lineales de orden 3. Resuelva el sistema mediante la forma: $x = A^{-1}b$.

a) Escriba la representación matricial del sistema en cuestión.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Escriba la inversa de la matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F1\left(\frac{1}{2}\right) = F1 \\ F1(-4) + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F2\left(-\frac{1}{3}\right) = F2 \\ F2(-2) + F1 = F1 \\ F2(5) + F3 = F3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5/6 & 2/3 & 0\\2/3 & -1/3 & 0\\11/6 & -5/3 & 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}F3(-1) = F3\\F3 + F1 = F1\\F3(-2) + F2 = F2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8/3 & 7/3 & -1\\13/3 & -11/3 & 2\\-11/6 & 5/3 & -1\end{pmatrix}$$

c) Escriba la solución del sistema.

$$\begin{pmatrix}-8/3 & 7/3 & -1\\13/3 & -11/3 & 2\\-11/6 & 5/3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\24\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

11- Sea $\begin{matrix}x - y + z = 20\\-x - 2y + 3z = -2\\x + y + 2z = 2\end{matrix}$, un sistema de ecuaciones lineales de orden 3. Resuelva el sistema mediante la forma: $x = A^{-1}b$.

a) Escriba la representación matricial del sistema en cuestión.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\-2\\2\end{pmatrix}$$

b) Escriba la inversa de la matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & -2 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}F1 + F2 = F2\\F1(-1) + F3 = F3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -3 & 4\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}F2\left(-\frac{1}{3}\right) = F2\\F2 + F1 = F1\\F2(-2) + F3 = F3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\0 & 1 & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & \frac{11}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}F3\left(\frac{3}{11}\right) = F3\\F3\left(\frac{1}{3}\right) + F1 = F1\\F3\left(\frac{4}{3}\right) + F2 = F2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7/11 & -3/11 & 1/11\\-5/11 & -1/11 & 4/11\\-1/11 & 2/11 & 3/11\end{pmatrix}$$

c) Escriba la solución del sistema.

$$\begin{pmatrix}7/11 & -3/11 & 1/11\\-5/11 & -1/11 & 4/11\\-1/11 & 2/11 & 3/11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}148/11\\-90/11\\-18/11\end{pmatrix}$$