Nombre ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO	Fecha 19/09/2021
Actividad 5	Determinantes

Instrucciones:

completa lo que se te pide con el uso de la bibliografía propuesta, además recuerda anotar el procedimiento limpio y claro el cual puede ser en hojas blancas (adjunta la imagen debajo de cada pregunta) de lo contrario realizarlo en Word con el editor de ecuaciones.

Recuerda incluir procedimiento detallado de cada uno de tus procedimientos.

Parte I. Definiciones

1. Defina que es el menor de una matriz.

   Sea A una matriz de n x n y sea M_{ij} la matriz de (n - 1) x (n - 1) que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama **el menor ij** de A.

2. Anote una matriz y calcule 3 menores asociados a está.

   $|A| = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

3. Defina que es un cofactor asociado a una matriz.

   Sea A una matriz de n x n. El **cofactor ij** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

   $$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

   Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

   $$(-1)^{ij}\begin{cases} 1 & si\ i+j\ es\ par \\ -1 & si\ i+j\ es\ impar \end{cases}$$

4. Calcule 3 cofactores asociados a una matriz, describa el proceso explícito de dicho cálculo.

   $|A| = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

   $A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-12) = (-1)(12) = -12$

   $A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{12}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-15 = (-1)(-11) = 11$

   $A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-2 = (1)(-2) = -2$

5. Defina que es un determinante.

Sea A una matriz de n x n. Entonces el determinante de A, denotado por det A o |A|, está dado por

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

6. Anote un ejemplo del cálculo de un determinante para:

a. Matriz de 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \ |A| = 3 - 20 = -17$$

b. Matriz de 2×3

$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $|B|$= No Existe un determinante de una matriz no cuadrada

c. Matriz de 3×3

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ |C| = -42 + 0 - 0 + 216 - 0 + 2 = 176$$

d. Matriz de 4×4

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & -5 & 3 \\ 8 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \ |D| = d_{21}D_{21} + d_{22}D_{22} + d_{23}D_{23} + d_{24}D_{24} =$$

$$|D| = 0D_{21} + 0D_{22} + 0D_{23} + 8D_{24} =$$

$$D_{24} = (-1)^{2+4}|M_{24}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & -5 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 120 - 14 - 224 - 0 - 36 = -154$$

$$|D| = -154$$

Recuerde que debe incluir todo el proceso del cálculo de dicho determinante.

Parte II. Cálculo del determinante de una matriz.

1. Hallar los cofactores que se solicitan a partir de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{11}, A_{31}, A_{41}$$

$$A_{11} = (-1)^2|M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 5 + 0 - 10 - 1 - 0 = -8$$

$$A_{31} = (-1)^4|M_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 20 + 3 - 15 - 2 - 4 = -40$$

$$A_{41} = (-1)^5|M_{41}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 3 - 0 + 2 - 2 = -4$$

2. Utilizar los cálculos realizados en el ejercicio anterior para calcular el determinante de la matriz A.

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = (-1)(-8) + (0)(A_{21}) + (3)(-40) + (4)(-4) =$

$8 + 0 - 120 - 16 = \mathbf{-128}$

3. Calcular el determinante de la matriz B por cofactores en una fila o columna de manera que minimices los cálculos.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44} + a_{54}A_{54} =$

$(0)A_{14} + (1)A_{24} + (0)A_{34} + (0)A_{44} + (2)A_{54} = 0 + (1)(38) + 0 + 0 + (2)(5) =$

$0 + 38 + 0 + 0 + 10 = \mathbf{48}$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |A_{24}| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} =$$

$(-1)A_{12} + (0)A_{22} + (0)A_{32} + (4)A_{42} = (-1)(2) + 0 + 0 + (4)(10) = -2 + 40 = 38$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 3 - 0 - 1 - 0 = 2$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 9 + 4 + 6 - 4 - 3 = 10$$

$$A_{54} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |A_{54}| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} =$$

$(-1)A_{12} + (2)A_{22} + (0)A_{32} + (0)A_{42} = (-1)(9) + (2)(7) + 0 + 0 = -9 + 14 + 0 + 0 = 5$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 2 + 3 - 0 - 2 = 9$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6+4+6-4-3 = 7$$

4. Calcula el determinante de la siguiente matriz llevando la misma a forma triangular superior utilizando las propiedades de los determinantes y la reducción por renglones.

$$C = \begin{pmatrix} 1-2 & 3 & 4 & -5 \\ 2-3 & 2 & 1 & -4 \\ -3\quad 4 & -6 & 1 & 3 \\ 5-8 & 12 & 15 & -20 \\ 7-18 & 16 & 12 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 13 & -12 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & -4 & -5 & -16 & 5 \end{vmatrix}$$

F1(-2) + F2 = F2
F1(3) + F3 = F3
F1(-5) + F4 = F4
F1(-7) + F5 = F5

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & -21 & -44 & 29 \end{vmatrix}$$

F2(2) + F3 = F3
F2(-2) + F4 = F4
F2(4) + F5 = F5

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -199/5 & 29 \end{vmatrix}$$

F3(-1/5) = F3
F3(-5) + F4 = F4
F3(21) + F5 = F5

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -233/40 \end{vmatrix}$$

F4(1/8) = F4
F4 (199/5) + F5 = F5

$$\det\ (A) = (-5)\,(8)(1)(1)(1)(1)\left(-\frac{233}{40}\right) = 233$$

Parte III. Propiedades de los determinantes.

1. Escriba las propiedades de los determinantes.

1. Sea A = (a_{ij}) una matriz de n x n triangular superior o inferior. Entonces

$$\det A = a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{nm}$$

2. Sean A y B dos matrices de n x n. Entonces

$$\det AB = \det A \det B$$

3. $Sea\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}. Entonces\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\ y\ se\ verifica\ que$

$|A| = |A^T| = 16$

4. Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces det A = 0.

5. Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces det A se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|A|$$

6. El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar det A por -1.

7. Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det A = 0.

8. Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces det A = 0.

9. Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

2. Con base en las propiedades de los determinantes conteste lo que se indica.

A es una matriz de tamaño 3×3 con $det(A) = -4$

a. Calcular $\det(A^2)$.

det (A^2) = A x A = (-4) x (-4) = 16

b. Encontrar $\det(4A)$

det (4A) = (4) x (-4) = -16

c. Hallar $\det(A^{-1})$

det (A^{-1}) = -1/4

d. Encontrar $\det(-A)$

det (-A) = (-1) x (-4) = 4

Parte IV. Método de Cramer

1. Para qué sirve el método de Cramer.

La regla de Cramer, nombrada así en honor de Gabriel Cramer (1704–1752), es una fórmula que utiliza determinantes para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n variables.

2. Escribe el proceso necesario para resolver un sistema de ecuaciones lineales con el método de Cramer.

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene una matriz de coeficientes con un determinante |A| diferente de cero, entonces la solución única del sistema está dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A_1)}$$

donde la i-ésima columna de A_i corresponde a la columna de constantes en el sistema de ecuaciones.

3. Describe los tipos de sistemas de ecuaciones lineales que es posible resolver con el método de Cramer

La regla de Cramer se generaliza fácilmente a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables.

Esta regla sólo puede ser aplicada a sistemas de ecuaciones lineales que tienen una única solución

4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de Cramer.

$$x_1 - 3x_2 = -7$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad |A| = -1 + 6 = 5$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad |A_1| = 7 + 12 = 19$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad |A_2| = 4 + 14 = 18$$

$$x_1 = \frac{19}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{18}{5} \qquad \left(\mathbf{\frac{19}{5}}, \mathbf{\frac{18}{5}}\right)$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4$$
$$-3x_1 + 2x_3 - 3x_3 = 1$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} |A| = 30 + 27 + 8 - 15 - 12 - 36 = 2$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} |A| = 60 - 9 + 8 + 5 - 24 - 36 = 4$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} |A| = -24 - 36 + 4 + 12 - 6 + 48 = -2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} |A| = -10 + 36 + 32 - 60 - 16 \mp 12 = -6$$

$$x=\frac{4}{2}=2, y=-\frac{2}{2}=-1, z=-\frac{6}{2}=-3$$

$$\mathbf{(2,-1,-3)}$$

$$x_1-x_2+x_3=-2$$
$$2x_1-x_2+3x_3=-9$$
$$5x_1-3x_2+4x_3=-11$$

$$A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & -3 & 4\end{vmatrix} |A|=-4-15-6+5+9+8=-3$$

$$A_1=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\ -9 & -1 & 3\\ -11 & -3 & 4\end{vmatrix} |A|=8+33+27-11-18-39=0$$

$$A_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -9 & 3\\ 5 & -11 & 4\end{vmatrix} |A|=-36-30-22+45+33+16=6$$

$$A_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -9\\ 5 & -3 & -11\end{vmatrix} |A|=11+45+12-10-27-22=9$$

$$x=\frac{0}{-3}=0, y=\frac{6}{-3}=-2, z=\frac{9}{-3}=-3$$

$$\mathbf{(0,-2,-3)}$$