SEMINARIO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III

I7021 D15

Norma Elva Espino Rojas

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO

218123444

ACTIVIDAD DE MÉTODO DE CROUT Y DOOLITLE

ACTIVIDAD # 8

FECHA:

07/03/2022

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

1. Genere las fórmulas de Crout y Doolitle para un sistema de 4 x 4 de la forma

   DOOLITLE:

$$\boxed{a_{11} = u_{11}} \qquad a_{12} = u_{12} \qquad a_{13} = u_{13} \qquad a_{14} = u_{14}$$

$$a_{21} = l_{21} u_{11} \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \qquad a_{22} = l_{21} u_{12} + u_{22}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12}$$

$$a_{23} = l_{21} u_{13} + u_{23}$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13}$$

$$a_{24} = l_{21} u_{14} + u_{24}$$

$$u_{24} = a_{24} - l_{21} u_{14}$$

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

$a_{31} = l_{31} U_{11}$ $\quad l_{31} = a_{31} / U_{11}$

$a_{32} = l_{31} U_{12} + l_{32} U_{22}$ $\quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} U_{12}}{U_{22}}$

$a_{33} = l_{31} U_{13} + l_{32} U_{23} + U_{33}$

$U_{33} = a_{33} - l_{31} U_{13} - l_{32} U_{23}$

$a_{34} = l_{31} U_{14} + l_{32} U_{24} + U_{34}$

$U_{34} = a_{34} - l_{31} U_{14} - l_{32} U_{24}$

$a_{41} = l_{41} U_{11}$ $\quad l_{41} = a_{41} / U_{11}$

$a_{42} = l_{41} U_{12} + l_{42} U_{22}$ $\quad l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} U_{12}}{U_{22}}$

$a_{43} = l_{41} U_{13} + l_{42} U_{23} + l_{43} U_{33}$ *

$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41} U_{13} - l_{42} U_{23}}{U_{33}}$

$a_{44} = l_{41} U_{14} + l_{42} U_{24} + l_{43} U_{34} + U_{44}$

$U_{44} = a_{44} - l_{41} U_{14} - l_{42} U_{24} - l_{43} U_{34}$

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

CROUT:

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{12} = l_{11} U_{12} \qquad U_{12} = a_{12}/l_{11}$$

$$a_{13} = l_{11} U_{13} \qquad U_{13} = a_{13}/l_{11}$$

$$a_{14} = l_{11} U_{14} \qquad U_{14} = a_{14}/l_{11}$$

$$a_{21} = l_{21}$$

$$a_{22} = l_{21} U_{12} + l_{22} \qquad l_{22} = a_{22} - l_{21} U_{12}$$

$$a_{23} = l_{21} U_{13} + l_{22} U_{23} \qquad U_{23} = \frac{a_{23} - l_{21} U_{13}}{l_{22}}$$

$$a_{24} = l_{21} U_{14} + l_{22} U_{24}$$

$$U_{24} = \frac{a_{24} - l_{21} U_{14}}{l_{22}}$$

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

$a_{31} = l_{31}$

$a_{32} = l_{21} U_{12} + l_{32}$

$l_{32} = a_{32} - l_{31} U_{12}$

$a_{33} = l_{31} U_{13} + l_{32} U_{23} + l_{33}$

$l_{33} = a_{33} - l_{31} U_{13} - l_{32} U_{23}$

$a_{34} = l_{31} U_{14} + l_{32} U_{24} + l_{33} U_{34}$

$$U_{34} = \frac{a_{34} - l_{31} U_{14} - l_{32} U_{24}}{l_{33}}$$

$a_{41} = l_{41}$

$l_{41} = a_{41}$

$a_{42} = l_{41} U_{12} + l_{42}$

$l_{42} = a_{42} - l_{41} U_{12}$

$a_{43} = l_{41} U_{13} + l_{42} U_{23} + l_{43}$

$l_{43} = a_{43} - l_{41} U_{13} - l_{42} U_{23}$

$a_{44} = l_{41} U_{14} + l_{42} U_{24} + l_{43} U_{34} + l_{44}$

$l_{44} = a_{44} - l_{41} U_{14} + l_{42} U_{24} - l_{43} U_{34}$

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con los métodos de Crout y Doolitle

$$\begin{aligned} 36+16B-6D+4E+F &= 0 \\ 64+B-8D+E+F &= 0 \\ 4+16B+2D-4E+F &= 0 \\ 64+9B+8D-3E+F &= 0 \end{aligned}$$

Para la matriz A con el vector solución b

Matriz A			
16	-6	4	1
1	-8	1	1
16	2	-4	1
9	8	-3	1

Vector b
-36
-64
-4
-64

Usando el método de DOOLITLE, encontramos las matrices L y U

Matiz L			
1	0	0	0
0.0625	1	0	0
1	-1.04918033	1	0
0.5625	-1.49180328	0.57272727	1

Matiz U			
16	-6	4	1
0	-7.625	0.75	0.9375
0	0	-7.21311475	0.983606557
0	0	0	1.272727273

Y finalmente el vector solución:

Solución
4
-4
-8
-92

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

Usando el método de CROUT, encontramos las matrices L y U

Matiz L			
16	0	0	0
1	-7.625	0	0
16	8	-7.21311475	0
9	11.375	-4.13114754	1.272727273

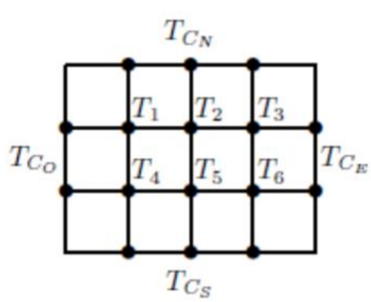
Matiz U			
1	-0.375	0.25	0.0625
0	1	-0.09836066	-0.12295082
0	0	1	-0.136363636
0	0	0	1

Y finalmente el vector solución:

Solución
4
-4
-8
-92

∴Podemos observar que ambos métodos arrojan el mismo vector solución que logra satisfacer al sistema, pero con la gran particularidad de que las matrices L y U de cada método son totalmente distintas por las diferentes proposiciones iniciales en las que se basa cada método que altera las fórmulas.

3. Un aspecto importante del estudio de la Transferencia de Calor es determinar la temperatura en estado estable de una placa delgada cuando se conocen las temperaturas alrededor de la placa. Suponga que la placa de la siguiente figura representa una sección transversal perpendicular a la placa.



Sean T1; T2; T3; T4; T5, y T6 las temperaturas interiores de los nodos de la red. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos arriba, abajo, a la derecha, y a la izquierda. Así por ejemplo

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

$$T_1 = \frac{1}{4}(T_{CN} + T_2 + T_4 + T_{CO})$$

Determine las temperaturas T1 a T6 sabiendo que

$$T_{CN} = 25^o; T_{CE} = 37^o; T_{CS} = 10^o; T_{CO} = 31^o$$

Reporte sólo el valor de T2.

Usamos la información dada para generar un sistema de ecuaciones el cual podamos someter a nuestro método.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{1}{4}(T_{CN} + T_2 + T_4 + T_{CO}) \\
T_2 &= \tfrac{1}{4}(T_{CN} + T_3 + T_5 + T_1) \\
T_3 &= \tfrac{1}{4}(T_{CN} + T_{CE} + T_6 + T_2) \\
T_4 &= \tfrac{1}{4}(T_1 + T_5 + T_{CS} + T_{CO}) \\
T_5 &= \tfrac{1}{4}(T_2 + T_6 + T_{CS} + T_4) \\
T_6 &= \tfrac{1}{4}(T_3 + T_{CE} + T_{CS} + T_5)
\end{aligned}$$

$$T_{CN} = 25°, \qquad T_{CE} = 37°, \qquad T_{CS} = 10°, \qquad T_{CO} = 31°$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{1}{4}(25° + T_2 + T_4 + 31°) = \tfrac{1}{4}(T_2 + T_4 + 56°) \\
T_2 &= \tfrac{1}{4}(25° + T_3 + T_5 + T_1) \\
T_3 &= \tfrac{1}{4}(25° + 37° + T_6 + T_2) = \tfrac{1}{4}(T_6 + T_2 + 62°) \\
T_4 &= \tfrac{1}{4}(T_1 + T_5 + 10° + 31°) = \tfrac{1}{4}(T_1 + T_5 + 41°) \\
T_5 &= \tfrac{1}{4}(T_2 + T_6 + 10° + T_4) \\
T_6 &= \tfrac{1}{4}(T_3 + 37° + 10° + T_5) = \tfrac{1}{4}(T_3 + T_5 + 47°)
\end{aligned}$$

Al final terminamos con el siguiente sistema de 6x6.

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO
218123444

$$4T_1 - T_2 - T_4 = 56°$$
$$4T_2 - T_3 - T_5 - T_1 = 25°$$
$$4T_3 - T_6 - T_2 = 62°$$
$$4T_4 - T_1 - T_5 = 41°$$
$$4T_5 - T_2 - T_6 - T_4 = 10°$$
$$4T_6 - T_3 - T_5 = 47°$$

Donde nuestra matriz A y el vector b serian el siguiente

Matriz A					
4	-1	0	-1	0	0
-1	4	-1	0	-1	0
0	-2	4	0	0	-1
-1	0	0	4	-1	0
0	-1	0	-1	4	-1
0	0	-1	0	-1	4

Vector b
56
25
62
41
10
47

Usando el método de CROUT, encontramos las matrices L y U

Matiz L					
4	0	0	0	0	0
-1	3.75	0	0	0	0
0	-2	3.46666667	0	0	0
-1	-0.25	-0.06666667	3.73076923	0	0
0	-1	-0.26666667	-1.07692308	3.381443299	0
0	0	-1	-0.03846154	-1.164948454	3.33841463

Matiz U					
1	-0.25	0	-0.25	0	0
0	1	-0.266666667	-0.06666667	-0.26666667	0
0	0	1	-0.03846154	-0.15384615	-0.28846154
0	0	0	1	-0.28865979	-0.00515464
0	0	0	0	1	-0.32012195
0	0	0	0	0	1

Y finalmente el vector solución:

Solución
26.2885845
27.0136986
35.4922374
22.1406393
21.2739726
25.9415525

∴ Con el uso del método de CROUT podemos observar en el vector solución que el valor de T2 es de 27.013698° el cual junto a las demás soluciones logran satisfacer el sistema original, que equivale a las temperaturas de cada uno de los nodos de la placa.

Conclusión:

Tras encontrar las fórmulas de ambos método en sistemas de 3x3 y 4x4, al presentárseme un problema con un sistema de 6x6 parecía que el trabajo aumentaría de manera drástica, pero después de un análisis profundo de las formulas capte el patrón exacto que seguían las fórmulas del método de CROUT, gracias a ello y las facilidades del software de Excel fui capaz de inducir las formulas restantes y automatizar su llenado con Excel.