Nombre: ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO	Fecha: 06 / 10 / 2021
Actividad 3.1	**Espacio, subespacio vectorial y conjunto generador**

Instrucciones: contesta lo que se te solicita en cada pregunta con el uso del editor de ecuaciones de Word, recuerda que también puedes pegar la imagen de tu procedimiento realizado a mano en **hojas blancas** en el espacio destinado para la respuesta. **No olvides anotar la justificación a cada uno de tus procesos para que tu respuesta sea válida**. Recuerda que trabajos fuera de tiempo e incompletos no son revisados.

1. Escribe 3 ejemplos de espacios vectoriales, escribe la justificación de cada uno de ellos.

EJEMPLO 1:

Matrices triangulares inferiores:

u= $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}$ v=$\begin{vmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}$ u+v=$\begin{vmatrix}5 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}$ $\therefore\begin{vmatrix}5 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix} \in$ V

u+0=$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}$ $\therefore$hay un elemento 0

u+(-u)= $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & -3\end{vmatrix}$ =0 $\therefore$existe el elemento opuesto

c=4 cu=$\begin{vmatrix}4 & 0\\ 8 & 12\end{vmatrix}$ $\therefore\begin{vmatrix}4 & 0\\ 8 & 12\end{vmatrix} \in$ V

EJEMPLO 2:

Vectores de R^4:

u= $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$ v=$\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ -8\\ 2\end{pmatrix}$ u+v=$\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$ $\therefore\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -4\\ 1\end{pmatrix} \in$ V

u+0=$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$ $\therefore$hay un elemento 0

u+(-u)=$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $\therefore$existe el elemento opuesto c=5 cu=$\begin{pmatrix}10\\5\\20\\-5\end{pmatrix}$ $\therefore\begin{pmatrix}10\\5\\20\\-5\end{pmatrix}$ ∈ V

EJEMPLO 3:

Matrices 2x3:

u= $\begin{vmatrix}5 & 0 & 3\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix}$ v=$\begin{vmatrix}2 & 2 & -6\\8 & -1 & 4\end{vmatrix}$ u+v=$\begin{vmatrix}7 & 2 & -3\\6 & 0 & 4\end{vmatrix}$ $\therefore\begin{vmatrix}7 & 2 & -3\\6 & 0 & 4\end{vmatrix}$ ∈ V

u+0=$\begin{vmatrix}5 & 0 & 3\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 0 & 3\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix}$ ∴hay un elemento 0

u+(-u)= $\begin{vmatrix}5 & 0 & 3\\-2 & 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-5 & 0 & -3\\2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ ∴existe el elemento opuesto

c=1/2 cu=$\begin{vmatrix}5/2 & 0 & 3/2\\-1 & 1/2 & 0\end{vmatrix}$ $\therefore\begin{vmatrix}5/2 & 0 & 3/2\\-1 & 1/2 & 0\end{vmatrix}$ ∈ V

2. Escribe 3 ejemplos de subespacios vectoriales, con su debida justificación.

EJEMPLO 1:

Sea V los vectores (a, b) en R^2

W es un subconjunto talque a + b = 0

$u=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ $u+v=\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ ∴a + b =0

$u=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ $c=4$ $cu=\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$ ∴a + b =0

EJEMPLO 2:

Sea V las matrices 2x2

W es un subconjunto talque todos sus componentes sean divisibles entre 2

$u=\begin{vmatrix}4 & 6\\2 & 8\end{vmatrix}$ $v=\begin{vmatrix}10 & 8\\2 & -2\end{vmatrix}$ $u+v=\begin{vmatrix}14 & 14\\4 & 6\end{vmatrix}$ ∴ sus componentes son divisibles entre 2

$u=\begin{vmatrix}4 & 6\\2 & 8\end{vmatrix}$ $c=3$ $cu=\begin{vmatrix}12 & 18\\6 & 24\end{vmatrix}$ ∴ sus componentes son divisibles entre 2

EJEMPLO 3:

Sea V los vectores (a, b) en R^2

W es un subconjunto talque el primer componente es 0

$u=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ $u+v=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ ∴ el primer componente es 0

$u=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $c=7$ $cu=u=\begin{pmatrix}0\\21\end{pmatrix}$ ∴ el primer componente es 0

3. Determina si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales:

a) Matrices diagonales

u= $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$ v= $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ u+v= $\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$ $\therefore \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}$ ∈ V

u+0= $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$ ∴hay un elemento 0

u+(-u)= $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$ =0 ∴existe el elemento opuesto

c= -3 cu= $\begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -27 \end{vmatrix}$ $\therefore \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -27 \end{vmatrix}$ ∈ V

b) Matrices triangulares superiores cuyos elementos son enteros positivos.

u= $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ c= - 2 cu= $\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}$ $\therefore \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}$ no son enteros positivos

c) Polinomios de grado menor o igual a tres.

u= x^3-2x^2+x+3 v= $-x^3+2x^2-x-5$ u+v= -2 ∴ -2 no es un polinomio de grado <= 3

4. En los siguientes ejercicios W no es un subespacio vectorial. Comprueba lo anterior con un ejemplo específico que viole la prueba para subespacio vectorial.

a) W es el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^3$cuya tercera componente es -1

u= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ v= $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ u+v= $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $la\ tercera\ componenete\ no\ es -1$

b) W es el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^2$ cuya segunda componente es 1.

u= $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ v= $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ u+v= $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ $la\ segunda\ componenete\ no\ es\ 1$

c) W es el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^2$ cuyos componentes son números racionales.

u= $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ c=π cu= $\begin{pmatrix} 5\pi \\ 3\pi \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} 5\pi \\ 3\pi \end{pmatrix}$ no es un número racional

d) W es el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^2$ cuyos componentes son números enteros.

u= $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ c=1/5 cu= $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$no es un número entero

5. Determine si los siguientes conjuntos generan al espacio vectorial indicado.

a) $S = \{(2,1), (-1,2)\}$

$$\det S = 5 \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \frac{2a+b}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-a+2b}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

∴ S si genera a R^2

b) $S = \{(1,-1),(2,1)\}$

$$\det S = 3 \quad S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \frac{a-2b}{3}\binom{1}{-1} + \frac{a+b}{3}\binom{2}{1} = \binom{a}{b}$$

$\therefore$ S si genera a R^2

c) $S = \{(5,0),(5,-4)\}$

$$\det S = -25 \quad S^{-1} = \frac{1}{-25}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{4}{25} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \frac{4a}{25} + \frac{b}{5}\binom{5}{0} + -\frac{b}{5}\binom{5}{-4} = \binom{a}{b}$$

d) $S = \{(2,0),(0,1)\}$

$$\det S = 2 \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \frac{a}{2}\binom{2}{0} + b\binom{0}{1} = \binom{a}{b}$$

$\therefore$ S si genera a R^2

e) $S = \{(4,7,3),(-1,2,6),(2,-3,5)\}$

$\det S = 228$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{r} F1\left(\frac{1}{4}\right) = F1 \\ F1(-7) + F2 = F2 \\ F1(-3) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{13}{2} \\ 0 & \frac{27}{4} & \frac{7}{2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{a}{4} \\ -\frac{7a}{4} + b \\ -\frac{3a}{4} + c \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{r} F2\left(\frac{4}{15}\right) = F2 \\ F2\left(\frac{1}{4}\right) + F1 = F1 \\ F2\left(-\frac{27}{4}\right) + F3 = F3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{15} \\ 0 & 0 & \frac{76}{5} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{2a}{15} + \frac{b}{15} \\ -\frac{7a}{15} + \frac{4b}{15} \\ \frac{12a}{5} - \frac{9b}{5} + c \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{r} F3\left(\frac{5}{76}\right) = F3 \\ F3\left(-\frac{1}{15}\right) + F1 = F1 \\ F3\left(\frac{26}{15}\right) + F2 = F2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\frac{18a}{125}+\frac{103b}{375}-\frac{26c}{225}\\ \frac{843a}{125}-\frac{1928b}{375}+\frac{676c}{225}\\ \frac{104a}{25}-\frac{78b}{25}+\frac{26c}{15}\end{vmatrix}$$

$\therefore$ S si genera a R^3

f) $S=\{(6,7,6),(3,2,-4),(1,-3,2)\}$

$\det S=-184$

$$\begin{vmatrix}6&3&1\\7&2&-3\\6&-4&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F1\left(\frac{1}{6}\right)=F1\\ F1(-7)+F2=F2\\ F1(-6)+F3=F3\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{25}{6}\\0&-7&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{a}{6}\\-\frac{7a}{6}+b\\-a+c\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F2\left(-\frac{2}{3}\right)=F2\\ F2\left(-\frac{1}{2}\right)+F1=F1\\ F2(7)+F3=F3\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&\frac{9}{4}\\0&1&-\frac{25}{9}\\0&0&-\frac{169}{6}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{5a}{9}+\frac{b}{3}\\-\frac{7a}{9}-\frac{2b}{3}\\-\frac{58a}{9}-\frac{14b}{3}+c\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F3\left(-\frac{6}{169}\right)=F3\\ F3\left(-\frac{9}{25}\right)+F1=F1\\ F3\left(\frac{25}{9}\right)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{a+b+c}{19}\\ \frac{32a+6b-25c}{190}\\ \frac{34a-42b+15c}{190}\end{vmatrix}$$

$\therefore$ S si genera a R^3

6. Determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite un resultado adecuado. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite un resultado adecuado.

i. El conjunto de todos los enteros es un espacio vectorial.

FALSO:

u=3 c=1/8 cu=3/8 $\therefore$3/8 no es entero

ii. El conjunto de todas las tercias ordenadas (x, y, z) de números reales donde y≥0, en $\mathbb{R}^3$es un espacio vectorial.

FALSO:

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $c = -2$ $cu = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ ∴-8 no es menor o igual a 0

iii. Para demostrar que un conjunto no es un espacio vectorial, es suficiente demostrar que uno de los axiomas no se cumple.

VERDADERO

iv. El conjunto de todos los polinomios de primer grado es un espacio vectorial.

VERDADERO:

u= x+2 v=2x-1 u+v=3x+1 ∴3x+1 es un polinomio de grado 1

u+0=x+2 ∴hay un elemento 0

u+(-u)=x+2+(-x-2)=0 ∴existe el elemento opuesto

c=4 cu=4x+8 ∴4x+8 es un polinomio de grado 1

v. El conjunto de todos los pares de números reales de la forma $(0, y)$ con las operaciones estándar en $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial.

VERDADERO:

u=$\binom{0}{4}$ v=$\binom{0}{-1}$ u+v=$\binom{0}{3}$ ∴(0,3) ∈ V

u+$\binom{0}{0}$=$\binom{0}{4}$ ∴hay un elemento 0

u+(-u)= $\binom{0}{4}$+($\binom{0}{-4}$)=0 ∴existe el elemento opuesto

c=4 cu=$\binom{0}{16}$ ∴(0,16) ∈ V

vi. W es el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^2$ cuyas componentes son números naturales.

FALSO:

u=$\binom{3}{5}$ c=1/2 cu=$\binom{3/2}{5/2}$ $\therefore \binom{3/2}{5/2}$ $no\ son\ numeros\ naturales$

vii. W es el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes son no negativas.

FALSO:

u=$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ c= -1 cu=$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $son\ negativas$

viii. Los vectores $(1,3),(2,3),(1,2)$ genera a $\mathbb{R}^2$

VERDADERO:

$$C_1\binom{1}{3} + C_2\binom{2}{3} + C_3\binom{1}{2} = \binom{a}{b}$$

$$\binom{1C1}{3C1} + \binom{2C2}{3C2} + \binom{1C3}{2C3} = \binom{a}{b}$$

$c_1+2c_2+c_3=a$

$3c_1+23_2+2c_3=b$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\\ b\end{vmatrix} F1(-3)+F2=F2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\\ -3a+b\end{vmatrix} \begin{matrix}F2\left(-\frac{1}{3}\right)=F2\\ F2(-2)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{-3a+2b}{3}\\ \frac{3a-b}{3}\end{vmatrix} \begin{matrix}F2\left(-\frac{1}{3}\right)=F2\\ F2(-2)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{-3a+2b}{3}-\frac{1}{3}C3\\ \frac{3a-b}{3}-\frac{1}{3}C3\\ C3\end{pmatrix}$$

∴los vectores si generan R^2

ix. Los vectores $(1,2,3),(1,3,9)$ genera a $\mathbb{R}^3$.

FALSO:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 9\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\\ b\\ c\end{vmatrix} \begin{matrix}F1(-2)+F2=F2\\ F1(-3)+F3=F3\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\\ -2a+b\\ -3a+c\end{vmatrix} \begin{matrix}F2(-1)=F2\\ F2(-2)+F1=F1\\ F3(-3)+F3=F3\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-3a+b\\ 2a-b\\ -9a+3b+c\end{vmatrix}$$

∴El sistema no tiene soluciones y no genera a R^3

x. El conjunto de polinomios $1 + x, 2 + 2x$ genera a P_2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

$\det S = 0$ ∴El sistema no tiene soluciones y no genera a P_2