Nombre: Arellano Granados Angel Mariano Fecha: 10/03/2022

Tarea: 3

Métodos de solución de una ecuación diferencial

Instrucciones: Responde a lo que se te pide en cada apartado.

I. Identifica el método de solución apropiado para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

Método: Ecuaciones homogénea

$$x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2} + y \quad \rightarrow \quad xdy = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)dx$$

$$Sustitucion:\ \ u = \frac{y}{x} \rightarrow \quad y = ux \rightarrow \quad dy = u\,dx + x\,du$$

$$x(u\,dx + x\,du) = \left(\sqrt{x^2 + (ux)^2} + ux\right)dx \rightarrow$$

$$ux\,dx + x^2\,du = \sqrt{x^2 + (ux)^2}dx + ux\,dx \rightarrow \ x^2\,du = \sqrt{u^2 + 1}\,x\,dx \rightarrow$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ \ln\left(\sqrt{u^2 + 1} + u\right) = \ln(x) + C$$

$$Sustituir\ U:\ \ln\left(\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} + \frac{y}{x}\right) = \ln(x) + C$$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}$

Método: Ecuaciones separables

$$dy = \frac{2xy}{(x^2 - x)(y^2 + 3)}\,dx \ \rightarrow \ \left(\frac{y^2 + 3}{y}\right)dy = \frac{2x}{(x^2 - x)}\,dx \rightarrow$$

$$\int y + \frac{3}{y}dy = \int \frac{2}{x - 1}dx \ \rightarrow \ 3\ln(y) + \frac{y^2}{2} = 2\ln(x) - 1 + C$$

3) $y' - 2xy = -xy^5$

Método: Ecuaciones separables

$$\frac{dy}{dx} = 2xy - xy^5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = x(2y - y^5) \rightarrow \frac{dy}{(2y - y^5)} = x\,dx \rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{(2y - y^5)} = \int x\,dx \rightarrow \frac{\ln(y)}{2} - \frac{\ln(y^4 - 2)}{8} = \frac{x^2}{2} + C$$

4) $(x^2 + 1)\tan(y)y' = x$

Método: Ecuaciones separables

$$\frac{tan(y)\,dy}{dx} = \frac{x}{(x^2 + 1)} \rightarrow tan(y)\,dy = \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)} \rightarrow$$

$$\int tan(y)\,dy = \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)} \rightarrow -\ln(\cos(y)) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C$$

5) $(\sin(y) + y\sin(x))dx + (x\cos(y) - \cos(x))dy = 0$

Método: Ecuación exacta

$$My = \cos(y) + \sin(x) \qquad Nx = \cos(y) + \sin(x)$$

$$\int (sin(y) + y\,sin(x))\,dx + \int (x\,cos(y) - cos(x))\,dy = \int 0$$

$$x\,sin(y) - y\cos(x) = C$$

6) $x\frac{dy}{dx} + x^3 y = 0$

Método: Ecuaciones separables

$$x\frac{dy}{dx} = -x^3 y \rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2\,dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -x^2\,dx \rightarrow \ln(y) = -\frac{x^3}{3} + C$$

7) $3x - 4y + (2x - y)y' = 0$

Método: Ecuación homogénea

$$3x - 4y + (2x - y)\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow (2x - y)dy = (-3x + 4y)dx$$

$Sustitucion\colon\ u = \frac{y}{x} \ \rightarrow \ \ y = ux \ \rightarrow \ \ dy = u\,dx + x\,du$

$(2x - ux)u\,dx + x\,du = (-3x + 4ux)dx \rightarrow \ (2-u)x(udx + xdu) = (4u-3)xdx \rightarrow$

$(2x - ux)du = (u^2 + 2u - 3)dx \ \ \rightarrow \ \ (2-u)xdu = (u^2 + 2u - 3)dx \ \ \rightarrow$

$$\int \frac{(2-u)du}{(u-1)(u+3)} = \int \frac{dx}{x} \ \rightarrow \ \frac{\ln(u-1)}{4} - \frac{5\ln(u+3)}{4} = \ln(x) + C$$

8) $(e^x \sin(y) - 2y\sin(x))dx + (e^x\cos(y) + 2\cos(x))dy = 0$

Método: Ecuación exacta

$My = e^x\cos(y) - 2\sin(x) \qquad Nx = e^x\cos(y) - \sin(x)$

$$\int (e^x\, sin(y) - 2y\, sin(x))\,dx + \int (e^x\, cos(y) + 2\, cos(x))\,dy = \int 0$$

$e^x\, sin(y) + 2y\, cos(x) + 2y\, cos(x) + e^x\, sin(y) = C$

$e^x\, sin(y) + 2y\, cos(x) = C$

9) $y' - xy = 5x$

Método: Ecuaciones separables

$$\frac{dy}{dx} - xy = 5x \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = x(5+y) \ \rightarrow \ \int \frac{dy}{(5+y)} = \int x\,dx \ \rightarrow \ \ln(y+5) = \frac{x^2}{2} + C$$

10) $xy' + x^5y = x^5y^{\frac{1}{2}}$

Método: Ecuaciones separables

$$\left(xy' + x^5y = x^5y^{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{x} \ = \ y' + x^4y = x^4y^{\frac{1}{2}} \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = x^4y^{\frac{1}{2}} - x^4y \ \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = x^4(y^{\frac{1}{2}} - y) \ \rightarrow \ \int \frac{dy}{(y^{\frac{1}{2}} - y)} = \int x^4dx \ \rightarrow -2\ln\ (\sqrt{y} - 1) = \frac{x^5}{5} + C$$

II. Encuentre el factor integrante para cada una de las siguientes ecuaciones.

1) $(3x^5\tan(y) - 2y^3)dx + (x^6\sec^2(y) + 4x^3y^3 + 3xy^2)dy = 0$

$My = \ 3x^5\sec^2(y) - 6y^2 \qquad\qquad Nx = 6x^5\sec^2(y) + 12x^2y^3 + 3y^2$

$$P(x) = \frac{6x^5 \sec^2(y) + 12x^2y^3 + 3y^2 - 3x^5 \sec^2(y) + 6y^2}{x^6\, sec^2(y) + 4x^3y^3 + 3xy^2} = \frac{3}{x}$$

$$F(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\left(3x^2\, tan(y) - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\, sec^2(y) + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$$

$$My = 3x^2\, sec^2(y) - \frac{6y^2}{x^3} \qquad Nx = 3x^2\, sec^2(y) - \frac{6y^2}{x^3}$$

$$\int \left(3x^2\, tan(y) - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \int \left(x^3\, sec^2(y) + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = \int 0$$

$$x^3\, tan(y) + \frac{y^3}{x^2} + x^3\, tan(y) + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C$$

$$x^3\, tan(y) + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C$$

2) $(3x^2y + y^2)dx + (3x^3 - y^2 + 4xy)dy = 0$

$$My = 3x^2 + 2y \qquad Nx = 9x^2 + 4y$$

$$P(x) = \frac{9x^2 + 4y - 3x^2 - 2y}{3x^2y + y^2} = \frac{6x^2 + 2y}{3x^2y + y^2} = \frac{2(3x^2 + y)}{y(3x^2 + y)} = \frac{2}{y}$$

$$F(x) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y} = y^2$$

$$(3x^2y^3 + y^4)dx + (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3)dy = 0$$

$$My = 9x^2y^2 + 4y^3 \qquad Nx = 9x^2y^2 + 4y^3$$

$$\int (3x^2y^3 + y^4)\, dx + \int (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3)\, dy = \int 0$$

$$x^3y^3 + xy^4 - \frac{y^5}{5} + x^3y^3 + xy^4 = C$$

$$-\frac{y^5}{5} + x^3y^3 + xy^4 = C$$