Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Álgebra Lineal

ACTIVIDAD 3.4 Cambio de base

NOMBRE: ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO

SECCIÓN: D - 17 **CÓDIGO:** 218123444

Instrucciones: Contesta lo que se pide, recuerda hacerlo de forma clara y con el apoyo de los recursos propuestos para esta actividad, en cada ejercicio deberás anotar el procedimiento limpio, claro y legible que justifique tu respuesta.

Especificaciones de formato: Arial 11, Interlineado sencillo, un espacio entre párrafos, margen moderado, texto justificado.

Cambio de base

1. Escribe la base canónica para $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, M_{2\times2}, M_{2\times3}, P_1, P_2, P_3$.

R^2:

S={(1,0),(0,1)}

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ ∴S genera a R^2

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ R^2$

R^3:

S={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ ∴S genera a R^3

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ R^3$

R^4:

S={(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)}

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$ ∴S genera a R^4

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ R^4$

M_{2x2}:

$$S = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$$ ∴S genera a M_{2x2}

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ M_{2x2}$

M_{2x3}:

$$S = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{vmatrix}$$ ∴S genera a M_{2x3}

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ M_{2x3}$

P_1:

S={ x , 1 }

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$ ∴S genera a P_1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ P_1$

P_2:

S={ x^2 , x , 1 }

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$ ∴S genera a P_2

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ P_2$

P_3:

S={ x^3 , x^2 , x , 1 }

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\\b\\c\\d\end{vmatrix}$$ ∴S genera a P_3

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix}$$ ∴Solución Trivial Independiente

$\therefore S\ es\ la\ base\ canonica\ de\ P_3$

1. Encuentra la matriz de transición de

a) La base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ a la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix}2&-3\\3&-4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F1\left(\frac{1}{2}\right)=F1\\ F1(-3)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-3/2\\0&1/2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1/2&0\\-3/2&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F2(2)=F2\\ F2(3/2)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4&3\\-3&2\end{vmatrix}$$

b) La base $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ a la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&-3\\3&-4\end{vmatrix}$$

c) La base$\{1,x\}$ a la base $\{2+3x,-4+5x\}$

$$\begin{vmatrix}2&-4\\3&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F1\left(\frac{1}{2}\right)=F1\\ F1(-3)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2\\0&11\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1/2&0\\-3/2&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}F2(1/11)=F2\\ F2(2)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5/22&2/11\\-3/22&1/11\end{vmatrix}$$

2. Escriba $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en términos de la base dada.

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \quad F1(-1)+F2=F2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x\\-x+y\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}F2\left(-\frac{1}{2}\right)=F2\\F2(-1)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x-y}{2}\end{vmatrix}$$

b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \quad F1(-1)+F2=F2$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x\\-x+y\end{vmatrix}$$

No Tiene Solución

c) $\left\{\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{vmatrix}5 & 3\\7 & -4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}F1\left(\frac{1}{5}\right)=F1\\F1(-7)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & \frac{3}{5}\\0 & -\frac{41}{5}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{x}{5}\\\frac{-7x+5y}{5}\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}F2\left(-\frac{5}{41}\right)=F2\\F2(-3/5)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{4x+3y}{41}\\\frac{7x-5y}{41}\end{vmatrix}$$

3. Suponga que $[x]_{B_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$. Escriba x en términos de la base $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

$$\begin{vmatrix}0 & 5\\3 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}F1 \leftrightarrow F2\\F1\left(\frac{1}{3}\right)=F1\\F2\left(\frac{1}{5}\right)=F2\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & 1\\\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{vmatrix} \quad F2\left(\frac{1}{3}\right)+F1=F1$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}\frac{2}{5} & \frac{17}{15}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{matrix}\right|$$

$$P^{-1}=\left|\begin{matrix}\frac{2}{5} & \frac{17}{15}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{matrix}\right|\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}-\frac{17}{15}\\ \frac{2-2}{5}\end{pmatrix}$$

$$[x]_{B_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

4. En P_2, $[x]_{B_1}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, donde $B_1=\{1-x,3x,x^2-x-1\}$. Escriba x en términos de la base $B_2=\{3-2x,1-x,x+x^2\}$.

$$\left|\begin{matrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right| \quad \begin{matrix}F1\left(\frac{1}{3}\right)=F1\\ F1(2)+F2=F2\end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 1/3 & 0\\ 0 & -1/3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1/3 & 0 & -1/3\\ -1/3 & 3 & -5/3\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right| \quad \begin{matrix}F2(-3)=F2\\ F2(-1/3)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}0 & 3 & -2\\ 1 & -9 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right| \quad \begin{matrix}F3(3)+F2=F2\\ F3(-1)+F1=F1\end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}0 & 3 & -3\\ 1 & -9 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|$$

$$P^{-1}=\left|\begin{matrix}0 & 3 & -3\\ 1 & -9 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=$$

$$[x]_{B_2}=\begin{pmatrix}-6\\ 17\\ 3\end{pmatrix}$$

5. Escriba una base para el subespacio $x+2y-z=3$, deje z como la variable dependiente y escriba su dimensión.

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}: x+2y-z=3\right\} \quad z=x+2y$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 0\\ x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y\\ 2y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$Base=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}, \dim S=2$$

6. Escriba una base para el subespacio $2x + 3y = 0$ considere y como la variable dependiente y escriba su dimensión.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 2x + 3y = 0 \right\} \quad y = -\frac{2x}{3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -\frac{2x}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Base = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \dim S = 1$$