ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO 21/02/2022
TAREA 2.1

Tarea 2.1 Variables aleatorias

EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

3.1 Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

X: el número de accidentes automovilísticos que ocurren al año en Virginia.

Continua

Y: el tiempo para jugar 18 hoyos de golf.

Continua

M: la cantidad de leche que una vaca específica produce anualmente.

Discreta

N: el número de huevos que una gallina pone mensualmente.

Discreta

P: el número de permisos para construcción que los funcionarios de una ciudad emiten cada mes.

Discreta

Q: el peso del grano producido por acre.

Continua

3.5 Determine el valor c de modo que cada una de las siguientes funciones sirva como distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X:

a) $f(x) = c(x^2 + 4), para\ x = 0,1,2,3;$

$$c = \sum_{x=0}^{3} c(x^2 + 4) = c(4 + 5 + 8 + 13) = 30c$$

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{30}}$$

b) $f(x) = c\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}, para\ x = 0,1,2.$

$$c = \sum_{x=0}^{2} c\binom{2}{x}\binom{3}{3-x} = c(1 + 6 + 3) = 10c$$

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{10}}$$

3.11 Un embarque de 7 televisores contiene 2 unidades defectuosas. Un hotel compra 3 de los televisores al azar. Si x es el número de unidades defectuosas que compra el hotel, calcule la distribución de probabilidad de X. Exprese los resultados de forma gráfica como un histograma de probabilidad.

$$f(0) = P(X = x) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}, \qquad f(1) = P(X = x) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7},$$

$$f(2) = P(X = x) = \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}$$

x	0	1	2
f(x)	2/7	4/7	1/7

3.13 La distribución de probabilidad de X, el número de imperfecciones que se encuentran en cada 10 metros de una tela sintética que viene en rollos continuos de ancho uniforme, está dada por

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Construya la función de distribución acumulativa de X.

$$F(x)\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.41 & 0 \le x < 1 \\ 0.78 & 1 \le x < 2 \\ 0.94 & 2 \le x < 3 \\ 0.99 & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

3.17 Una variable aleatoria continua X, que puede tomar valores entre x = 1 y x = 3, tiene una función de densidad dada por f (x) = 1/2.

a) Muestre que el área bajo la curva es igual a 1.

$$A = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}\right) dx = \frac{x}{2}\Big|_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

b) Calcule P(2 < X < 2.5).

$$P(2 < X < 2.5) = \int_2^{2.5} \left(\frac{1}{2}\right) dx = \frac{x}{2}\Big|_2^{2.5} = \frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

c) Calcule P(X ≤ 1.6).

$$P(X \leq 1.6) = \int_{1}^{1.6} \left(\frac{1}{2}\right) dx = \frac{x}{2}\Big|_{1}^{1.6} = 0.8 - 0.5 = \mathbf{0.3}$$

3.21 Considere la función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Evalúe k.

$$1 = k\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx = \frac{2k}{3} x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} = \frac{2k}{3} - 0 = \frac{2k}{3}$$

$$\boldsymbol{k = \frac{3}{2}}$$

b) Calcule F(x) y utilice el resultado para evaluar

$$P(0.3 < X < 0.6).$$

$$F(x) = \frac{3}{2}\int_{0}^{x} \sqrt{t}\, dt = t^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{x} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x)\begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(0.3 < X < 0.6) = F(0.6) - F(0.3) = 0.4647 - 0.1643 = \mathbf{0.3004}$$

3.27 El tiempo que pasa, en horas, antes de que una parte importante de un equipo electrónico que se utiliza para fabricar un reproductor de DVD empiece a fallar tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}\exp(-x/2000), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

a) Calcule F(x).

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{2000}\exp\left(-\frac{t}{2000}\right) dt = -\exp\left(-\frac{t}{2000}\right)\Big|_{0}^{x} = 1 - \exp\left(-\frac{x}{2000}\right)$$

$$F(x)\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{2000}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

b) Determine la probabilidad de que el componente (y, por lo tanto, el reproductor de DVD) funcione durante más de 1000 horas antes de que sea necesario reemplazar el componente.

$$P(X > 1000) = 1 - F(1000) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{1000}{2000}\right)\right] = \mathbf{0.6065}$$

c) Determine la probabilidad de que el componente falle antes de 2000 horas.

$$P(X > 2000) = 1 - F(2000) = 1 - \exp\left(-\frac{2000}{2000}\right) = \mathbf{0.6321}$$

3.29 Un factor importante en el combustible sólido para proyectiles es la distribución del tamaño de las partículas. Cuando las partículas son demasiado grandes se presentan problemas importantes. A partir de datos de producción históricos se determinó que la distribución del tamaño (en micras) de las partículas se caracteriza por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, & x > 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que sea una función de densidad válida.

$$f(x) \geq 0, \quad \int_1^{\infty} 3x^{-4}dx = -3\frac{x^{-3}}{3}\bigg|_1^{\infty} = 1$$

b) Evalúe F(x).

$$x \geq 1, \quad F(x) = \int_1^x 3t^{-4}dt = 1 - x^{-3}$$

$$F(x)\begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-3} & x \geq 1 \end{cases}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una partícula tomada al azar del combustible fabricado sea mayor que 4 micras?

$$P(X > 4) = 1 - F(4) = 4^{-3} = \mathbf{0.0156}$$

3.31 Con base en pruebas extensas, el fabricante de una lavadora determinó que el tiempo Y (en años) para que el electrodoméstico requiera una reparación mayor se obtiene mediante la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-y/4}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO 21/02/2022

TAREA 2.1

a) Los críticos considerarían que la lavadora es una ganga si no hay probabilidades de que requiera una reparación mayor antes del sexto año. Comente sobre esto determinando P(Y > 6).

$$f(y) \geq 0,\ \ F(y) = \frac{1}{4}\int_0^y e^{\frac{-t}{4}}\,dy = 1 - e^{\frac{-t}{4}}$$

$$P(\mathrm{Y} > 6) = e^{\frac{-6}{4}} = \mathbf{0.2231}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la lavadora requiera una reparación mayor durante el primer año?

$$P(Y \leq 1) = 1 - e^{\frac{-1}{4}} = \mathbf{0.2212}$$