ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO 21/03/2022
TAREA 3.3

# Tarea 3.3 Combinaciones lineales y Teorema de Chebyshev.

## EJERCICIOS

4.55 Suponga que una tienda de abarrotes compra 5 envases de leche descremada al precio de mayoreo de \$1.20 por envase y la vende a \$1.65 por envase. Después de la fecha de caducidad, la leche que no se vende se retira de los anaqueles y el tendero recibe un crédito del distribuidor igual a tres cuartas partes del precio de mayoreo. Si la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es X y el número de envases que se venden de este lote es

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{3}{15}$ |

calcule la utilidad esperada.

$$Utilidad\ esperada = Ingresos - Costos$$

$$U(x) = \left[1.65X + \frac{3}{4}1.20(5-X)\right] - 5 * 1.20 = 1.65X + 0.9(5-x) - 6 =$$

$$1.65X + 4.5 - 0.9X - 6 = 0.75X - 1.5$$

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{15}\right) + 1\left(\frac{2}{15}\right) + \cdots + 5\left(\frac{3}{15}\right) = \frac{46}{15}$$

$$Utilidad = 0.75\,E(x) - 1.5 = 0.75\left(\frac{46}{15}\right) - 1.5 = 2.3 - 1.5 = \mathbf{0.8}$$

4.57 Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

| $x$ | $-3$ | 6 | 9 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

Calcule E(X) y E($X^2$) y luego utilice estos valores para evaluar E[$(2X + 1)^2$].

$$E(X) = -3\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 9\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$$

$$E(X^2) = 9\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{2}\right) + 81\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{93}{2}$$

$$E[(2X+1)^2] = 25\left(\frac{1}{6}\right) + 169\left(\frac{1}{2}\right) + 361\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{209}$$

4.60 Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes que tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta

ARELLANO GRANADOS ANGEL MARIANO 21/03/2022
TAREA 3.3

| $f(x, y)$ | | $x$ = 2 | $x$ = 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0.10 | 0.15 |
| | 3 | 0.20 | 0.30 |
| | 5 | 0.10 | 0.15 |

Calcule

a) E (2X −3Y);

$$E\,(2X-3Y)=E(2X)-E(3Y)$$
$$E(2X)=4(0.40)+8(0.60)=6.4$$
$$E(3Y)=3(0.25)+9(0.50)+15(0.25)=9$$
$$E\,(2X-3Y)=\mathbf{-2.6}$$

b) E (XY).

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$
$$E(X)=3.2$$
$$E(Y)=3$$
$$E(XY)=\mathbf{9.6}$$

4.65 Sea X el número que resulta cuando se lanza un dado rojo y Y el número que resulta cuando se lanza un dado verde. Calcule

a) E (X +Y);

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(X)=E(Y)=1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+\cdots+6\left(\frac{1}{6}\right)=3.5$$
$$E(X+Y)=\mathbf{7}$$

b) E (X −Y);

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=\mathbf{0}$$

c) E (XY).

$$E(XY)=E(X)E(Y)=3.5^2=\mathbf{12.25}$$

## BIBLIOGRAFÍA DE CHEBYSHEV

1. Nació el 16 de mayo de 1821 en una finca de su padre en Okatovo, región de Kaluga, al oeste de Rusia, en el seno de una familia de rancio abolengo.

2. Sus principales trabajos fueron clasificado en: Mecanismos y teoría de la aproximación de funciones, teoría de los números, teoría de probabilidades y teoría de integración. Aunque también se dedicó a escribir acerca de otros temas, formas cuadráticas, construcción de mapas, cálculo geométrico de volúmenes, entre otros.

3. Teoría de Probabilidades: Escribió en total cuatro trabajos sobre teoría de probabilidades, según el reconocimiento universal, estos trabajos llevaron la teoría de probabilidades nuevamente al rango de ciencia matemática y sirvieron de base para la creación de toda una escuela matemática. Y se le atribuyen las leyes principales de esta teoría, como la ley de los grandes números y la teoría central del límite, aunque quizás su contribución más conocida a la teoría de la probabilidad es la llamada desigualdad de Chebyshev.

## TEOREMA DE CHEBYSHEV

(**Teorema de Chebyshev**) La probabilidad de que cualquier variable aleatoria $X$ tome un valor dentro de $k$ desviaciones estándar de la media es de al menos $1 - 1/k^2$. Es decir,

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

4.75 Una empresa eléctrica fabrica una bombilla de luz de 100 watts que, de acuerdo con las especificaciones escritas en la caja, tiene una vida media de 900 horas con una desviación estándar de 50 horas. A lo sumo, ¿qué porcentaje de las bombillas no duran al menos 700 horas? Suponga que la distribución es simétrica alrededor de la media.

$$\mu = 900$$
$$\sigma = 50$$
$$P(X < 700)$$
$$900 - 700 = 200$$
$$k\sigma = 200 \qquad k = 4$$
$$P\big(900 - 4(50) < X < 900 + 4(50)\big) \geq 1 - \left(\frac{1}{(4)^2}\right) = 0.9375$$
$$P(X < 700) = \frac{1 - 0.9375}{2} = \mathbf{0.03125}$$

4.77 Una variable aleatoria X tiene una media μ = 10 y una varianza $\sigma^2 = 4$. Utilice el teorema de Chebyshev para calcular

$$\mu = 10 \qquad \sigma = 2$$

a) P(|X −10| ≥3);

$$1 - P(|X - 10| < 3) = 1 - \frac{5}{9} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$
$$metodo\ alt. \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

b) P(|X −10| < 3);

$$P(-3 < X - 10 < 3) = P(10 - 3 < X < 10 + 3)$$

$$3 = k\sigma \qquad k = \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

c) P(5 < X < 15);

$$5 = 10 - 2k \quad \rightarrow \quad 2k = 5 \quad \rightarrow \quad k = 5/2$$

$$1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}\right) = \mathbf{21/25}$$

d ) el valor de la constante c tal que P(|X −10| ≥c) ≤ 0.04.

$$P(|X - 10| < c) = 0.96$$

$$1 - \left(\frac{1}{k^2}\right) = 0.96 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k^2} = 1 - 0.96 \quad \rightarrow \quad k^2 = \frac{1}{0.04} = 25$$

$$k = 5$$

$$c = k\sigma \quad \rightarrow \quad c = (5)(2) = \mathbf{10}$$

$$metodo\ alt.\epsilon = c$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{4}{c^2} = 0.04 \quad \rightarrow \quad 4 = 0.04c^2 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{0.04} = c^2 \quad \rightarrow \quad 100 = c^2$$

$$\boldsymbol{c = 10}$$