



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



# Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

## Tema 1 – Introducción a la computación

*Este documento está protegido por la Ley de Propiedad Intelectual ([Real Decreto Ley 1/1996 de 12 de abril](#)). Queda expresamente prohibido su uso o distribución sin autorización del autor.*

Manuel Pegalajar Cuéllar  
manupc@ugr.es

Departamento de Ciencias de la  
Computación e Inteligencia Artificial  
<http://decsai.ugr.es>

### Objetivos del tema

- Conocer los fundamentos de los modelos de computación.
- Conocer los conceptos de alfabeto, lenguajes y gramáticas.
- Conocer la jerarquía de los diferentes lenguajes.



### Anotación sobre estas diapositivas:

El contenido de estas diapositivas es esquemático y representa un apoyo para las clases presenciales teóricas. No se considera un sustituto para apuntes de la asignatura.

Se recomienda al alumno completar estas diapositivas con notas/apuntes propios, tomados en clase y/o desde la bibliografía principal de la asignatura.





UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

## Introducción a la computación



1. ¿Por qué estudiar computación?
2. Operaciones con palabras y lenguajes
3. Gramáticas
4. Jerarquía de Chomsky



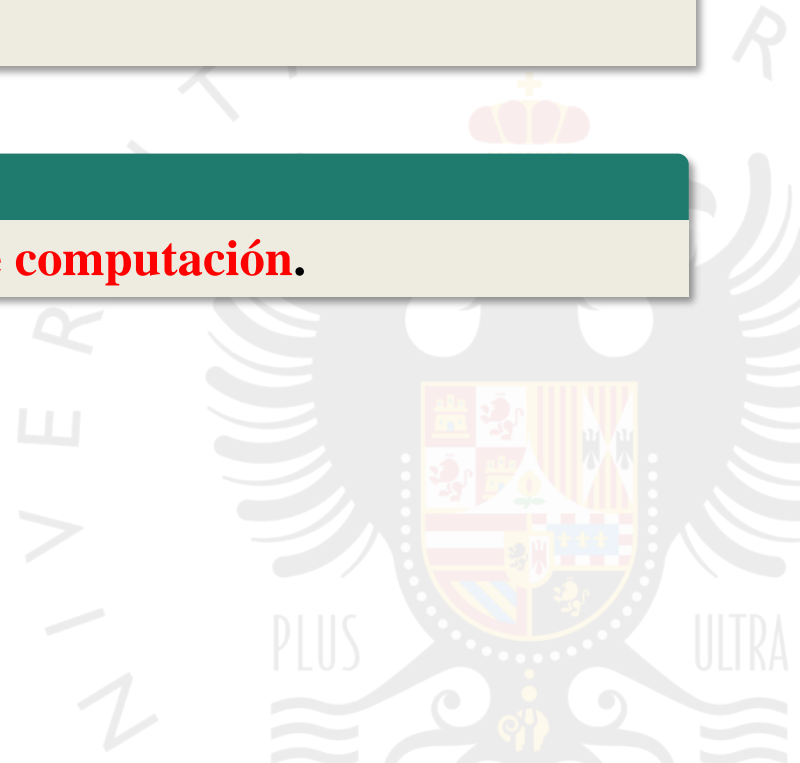
DECSAI

### La computación

- ¿Qué puede ser resuelto de forma automática?
- ¿Qué puede ser resuelto de forma eficiente?
- ¿Existen subclases de problemas que tengan una eficiencia garantizada?

### Solución:

Estudio de **Modelos de computación.**



### Ejemplo: El problema de la parada

¿Existe un programa (llamémoslo **Stops(P,x)**) que tenga como entrada CUALQUIER programa **P** junto con sus datos de entrada **x** y nos diga si ese programa termina o cicla indefinidamente?

No, no existe

Por ejemplo, supongamos el programa **Turing(P)**:

```
L           If Stops(P,P) GOTO L
```

¿Cuál es la salida de **Turing( Turing )** ? Se entra a una contradicción que demuestra que tal programa **Stops(P,x)** no puede existir.

**Esto no quita que exista algún caso o algunos casos para los que se pueda hacer.**



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

## Introducción a la computación

1. ¿Por qué estudiar computación?
- » 2. Operaciones con palabras y lenguajes
3. Gramáticas
4. Jerarquía de Chomsky



DECSAI

### Definición: Alfabeto

Un alfabeto es un conjunto de símbolos o letras.

**Notación: Alfabeto  $A, B, \dots$**

**Notación: Símbolos  $a, b, c, a_1, b_1, \dots$**

### Ejemplos de alfabetos

- $A = \{0, 1\}$
- $B = \{a, b, c, \dots, z\}$
- $C = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle \}$



### Definición: Palabra

Una sucesión finita  $a_1a_2a_3a_4...a_n$  de símbolos  $a_i$  de un alfabeto.

Al conjunto de **todas las palabras** de A se le llama  $A^*$ .

**Notación: Palabras  $u, v, x, y$**

### Ejemplos de palabras

- $A = \{0,1\} \rightarrow 0110$  es palabra
- $A = \{a, b, c, \dots, z\} \rightarrow MC$  **NO ES PALABRA**
- $A = \{a, b, c, \dots, z\} \rightarrow qwerty$  es palabra
- $A = \{ \langle 0,1 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle \} \rightarrow \langle 1,1 \rangle \langle 0,1 \rangle$  es palabra

### Definición: Longitud de palabra

Dada una palabra  $u$ , la **longitud**  $|u|$  es el número de símbolos que contiene.

### Ejemplos de palabras

- $A = \{0,1\} \rightarrow 0110$  es palabra.  $|0110| = 4$
- $A = \{a, b, c, \dots, z\} \rightarrow \text{qwerty}$  es palabra.  $|\text{qwerty}| = 6$
- $A = \{ \langle 0,1 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle \} \rightarrow \langle 1,1 \rangle \langle 0,1 \rangle$  es palabra. Su longitud  $|\langle 1,1 \rangle \langle 0,1 \rangle| = 2$

### Definición: Palabra vacía

La palabra vacía  $\epsilon$  es la palabra de longitud 0.

### Definición: Conjunto de palabras de un alfabeto

Notaremos como  $A^+$  al conjunto de palabras que se pueden formar del alfabeto  $A$ , **excluyendo la palabra vacía**.

$$A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$$

E  
V  
I  
Z



### Definición: Concatenación

Sean  $u, v \in A$  dos palabras del alfabeto  $A$ ,  $u = a_1 a_2 \dots a_n$ , y  $v = b_1 b_2 \dots b_m$ . La **concatenación de  $u$  y  $v$** , notada como  **$u.v$** , es:

$$u.v = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$$

### Ejemplos de concatenación

- $A = \{0,1\}$ ,  $u=0110, v=10 \rightarrow u.v=011010$
- $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ ,  $u=qwerty, v=asd \rightarrow u.v= qwertyasd$ .
- $A = \{a, b, \varepsilon\}$ ,  $u=aaba, v=\varepsilon \rightarrow u.v=aaba$

### Iteración n-ésima

Notamos  $\mathbf{u}^n$  a la iteración n-ésima de la palabra  $\mathbf{u}$  de  $A^*$  como a la concatenación de la palabra  $\mathbf{u}$  con sí misma  $\mathbf{n}$  veces. Su definición es recursiva:

- $\mathbf{u}^0 = \varepsilon$
- $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}$ , para todo  $i \geq 0$ .

### Propiedades de la concatenación

- $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$  para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  en  $A^*$
- **Propiedad asociativa:**  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
- **Elemento neutro:**  $\mathbf{u} \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

### Cadena inversa

Sea  $u = a_1 \dots a_n$  una palabra de  $A^*$ . Entonces la cadena inversa  $u^{-1}$  se define como:

$$u^{-1} = a_n \dots a_1$$

### Ejemplo de iteración y de cadena inversa

- $A = \{0,1\}$ ,  $u = 0101$ 
  - $u^{-1} = 1010$ ;
  - $u^2 = 01010101$
  - $(u^2)^{-1} = 10101010$

### Definición: Lenguaje

Un **lenguaje**  $L$  sobre el alfabeto  $A$  es un subconjunto del conjunto de las cadenas sobre  $A^*$ . Es decir:

$$L \subseteq A^*.$$

### Ejemplos de lenguajes

$L1 = \{a, b, \varepsilon\} \rightarrow$  Lenguaje formado por 3 palabras

$L2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\} \rightarrow$  Lenguaje formado por un número dado de  $a$ 's seguido del mismo número de  $b$ 's

$L3 = \{uu^{-1} \mid u \in A^*\} \rightarrow$  Lenguaje formado por palíndromos

$L4 = \{a^{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow$  Lenguaje formado por palabras formadas por  $a$ 's cuya longitud (número de  $a$ 's) es cuadrado perfecto.

### Conjuntos numerables

Un conjunto se dice **numerable** si existe una aplicación inyectiva de este conjunto en el conjunto de los números naturales, o lo que es lo mismo, se le puede asignar un número natural a cada elemento del conjunto de tal manera que dos elementos distintos tengan números distintos.

### Ejemplos de lenguajes numerables

$A^*$  es siempre numerable. Si  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , por ejemplo, a cada símbolo  $a_i$  le puedo asignar un número binario diferente. A cada palabra  $\{u_1, \dots, u_n\}$  le puedo asignar otro número binario, resultado de sustituir cada símbolo por su binario.

### ¿Es el lenguaje $C$ numerable?

Sí. A cada programa se le asigna un número binario (la concatenación de todos los bytes del código compilado).



### Operaciones con lenguajes

- **Unión:**  $L = L1 \cup L2$  = Las palabras del lenguaje L son las palabras del lenguaje L1 junto con las del lenguaje L2.
- **Intersección:**  $L = L1 \cap L2$  = Las palabras del lenguaje L son las palabras comunes del lenguaje L1 y del lenguaje L2.
- **Concatenación:**  $L = L1.L2 = \{u_1.u_2 | u_1 \in L1, u_2 \in L2\}$  → Nota: Puede verse como producto cartesiano.

### Propiedades de los lenguajes

- $L.\emptyset = \emptyset.L = \emptyset$
- **Elemento neutro:**  $L.\{\epsilon\} = \{\epsilon\}.L = L$
- **Propiedad Asociativa:**  $(L1 L2)L3 = L1(L2 L3)$

### Ejemplo de concatenación de lenguajes

Si  $L_1 = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$ ,  $L_2 = \{1^i 0^i : i \geq 0\}$  entonces,

$$L_1 L_2 = \{0^i 1^i 1^j 0^j : i, j \geq 0\}$$

Ejemplo:  $u = 0011 \in L_1, v = 10 \in L_2 \rightarrow u.v = 001110 \in L_1 L_2$

### Definición: Iteración de un lenguaje

Notamos  $L^n$  a la iteración  $n$ -ésima del lenguaje  $L$  como a la concatenación de las palabras de  $L$  con las palabras de  $L$   $n$  veces. Su definición es recursiva:

- $L^0 = \varepsilon$
- $L^{i+1} = L^i.L$ , para todo  $i \geq 0$ .

### Definición: Cláusula de Kleene

Si  $L$  es un lenguaje, entonces la cláusula de Kleene sobre  $L$  se define como:

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

$$L^+ = \bigcup_{i > 0} L^i$$

### Propiedades de la cláusula de Kleen

$$L^+ = L^* \text{ si } \epsilon \in L$$

$$L^+ = L^* - \{\epsilon\} \text{ si } \epsilon \notin L$$

### Ejemplo de cláusula de Kleene

$L = \{0, 01\}$

- $L^*$  = Conjunto de palabras formadas por 0's y 1's donde un 1 siempre va precedido por un 0.
- $L^+$  = Conjunto de palabras formadas por 0's y 1's donde un 1 siempre va precedido por un 0, excluyendo la palabra vacía.

UNIVERSITY



### Definición: Lenguaje inverso

El lenguaje inverso  $L^{-1}$  del lenguaje  $L$  es aquel tal que:

$$L^{-1} = \{u | u^{-1} \in L\}$$

### Definición: Cabecera de un lenguaje.

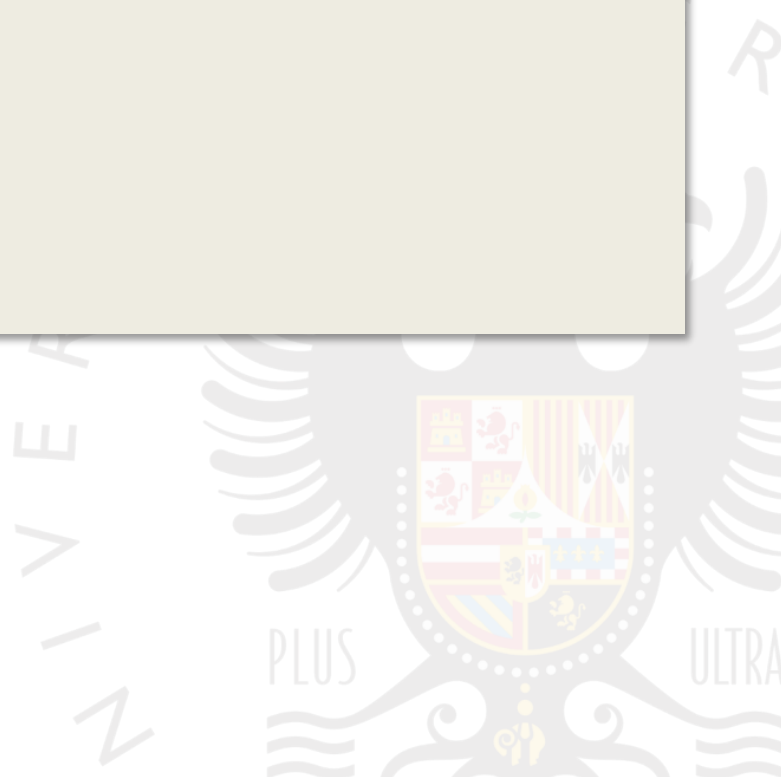
La cabecera de un lenguaje  $CAB(L)$  se define como el conjunto de palabras del alfabeto (no necesariamente del lenguaje) para las que, añadiendo otra palabra más, da una del lenguaje:

$$CAB(L) = \{u \in A^* | \exists v \in A^* \ u.v \in L\}$$

### Ejemplo de cabecera de un lenguaje

Sea  $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

Entonces  $CAB(L) = \{a^i b^j \mid i \geq j \geq 0\}$



### Definición: Homomorfismo

Supongamos  $A_1, A_2$  **dos alfabetos**, y una aplicación  $h: A_1 \rightarrow A_2$ .

Diremos que  $h$  es un homomorfismo si se cumple:

$$h(uv) = h(u)h(v)$$

Para cualquier par de palabras  $u \in A_1, v \in A_2$

### Consecuencias

- $h(\varepsilon) = \varepsilon$
- $h(a_1 \dots a_n) = h(a_1) h(a_2) \dots h(a_n)$

### Ejemplo de homomorfismo

- Sean  $A_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A_2 = \{0, 1\}$
- Sea  $h$  la aplicación siguiente:
  - $h(0) = 0000$ ,  $h(1) = 0001$ ,  $h(2) = 0010$ ,  $h(3) = 0011$
  - $h(4) = 0100$ ,  $h(5) = 0101$ ,  $h(6) = 0110$ ,  $h(7) = 0111$
  - $h(8) = 1000$ ,  $h(9) = 1001$
- $h$  es un homomorfismo porque  $h(uv) = h(u)h(v)$  para cualquier par de palabras  $u \in A_1, v \in A_2$
- Ejemplo:  $h(034) = h(0)h(3)h(4) = 000000110100$



Pregunta 1: ¿Verdadero o falso?

Si  $A$  es un alfabeto cualquiera, la aplicación que transforma cada palabra  $u \in A^*$  en su inversa es un homomorfismo de  $A^*$  en  $A^*$



Pregunta 1: ¿Verdadero o falso?

Si  $A$  es un alfabeto cualquiera, la aplicación que transforma cada palabra  $u \in A^*$  en su inversa es un homomorfismo de  $A^*$  en  $A^*$

Respuesta:

FALSO. Por ejemplo, si  $A = \{0, 1\}$ , entonces la palabra de dos símbolos  $u = 01$  tiene como inversa  $h(01) = 10$ , pero no se cumple  $h(01) \neq h(0)h(1) = 01$

Pregunta 2: ¿Verdadero o falso?

La transformación que a cada palabra sobre  $\{0, 1\}^*$  le añade **00** al principio y **11** al final es un homomorfismo.



### Pregunta 2: ¿Verdadero o falso?

La transformación que a cada palabra sobre  $\{0, 1\}^*$  le añade **00** al principio y **11** al final es un homomorfismo.

### Respuesta:

FALSO. Por ejemplo, si  $A=\{0, 1\}$ , entonces la palabra de dos símbolos  $u=01$  tiene como valor  $h(01)=001011$ , pero no se cumple  $h(01) \neq h(0)h(1)=00011 \ 00111$



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

## Introducción a la computación

1. ¿Por qué estudiar computación?
2. Operaciones con palabras y lenguajes
- » 3. Gramáticas
4. Jerarquía de Chomsky



DECSAI

### Definición: Gramáticas generativas

Una **gramática generativa** es un cuadrupla  $(V, T, P, S)$  donde:

- $V$  es un alfabeto, llamado de **variables** o símbolos no terminales. Sus elementos se suelen representar con letras mayúsculas.
- $T$  es un alfabeto, llamado de **símbolos terminales**. Sus elementos se suelen representar con letras minúsculas.
- $P$  es un conjunto de pares  $(\alpha, \beta)$ , llamados **reglas de producción**, donde  $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$  y  $\alpha$  contiene, al menos un símbolo de  $V$ . El par  $(\alpha, \beta)$  se suele representar como  $\alpha \rightarrow \beta$
- $S$  es un elemento de  $V$ , llamado **símbolo de partida**.

### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de producción:

$$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Gramáticas para generar palabras de un lenguaje

Una gramática sirve para determinar un lenguaje. Las palabras son las de  $T^*$  que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de producción:

$E \rightarrow E + E$      $E \rightarrow E * E$      $E \rightarrow (E)$      $E \rightarrow a$      $E \rightarrow b$      $E \rightarrow c$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E$



### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de producción:

$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E$



### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de producción:

$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E$

### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de producción:

$$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E$

### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de producción:

$$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E \Rightarrow (a + b) * E$

### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de derivación:

$$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E \Rightarrow (a + b) * E \Rightarrow (a + b) * b$
- Todos los símbolos resultantes son terminales (conjunto  $T$ ). No se pueden aplicar más reglas de derivación.

### Ejemplo de gramática generadora de expresiones

- $V = E \rightarrow$  Símbolos no terminales
- $T = \{+, *, (, ), a, b, c\} \rightarrow$  Símbolos terminales
- $P =$  Reglas de derivación:

$$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$$

- $S = E \rightarrow$  Símbolo inicial de partida

### Ejemplo de generación de una palabra del lenguaje asociado

- $S = E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E \Rightarrow (a + b) * E \Rightarrow (a + b) * b \rightarrow$  **palabra generada**
- Todos los símbolos resultantes son terminales (conjunto  $T$ ). No se pueden aplicar más reglas de derivación.

### Definición: Paso de derivación

Sea una gramática  $G = (V, T, P, S)$  y dos palabras  $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$

Se dice que  $\beta$  es derivable a partir de  $\alpha$  en un paso ( $\alpha \Rightarrow \beta$ ) si, y solo si:

existe una producción  $Y \rightarrow \Phi$  tal que  $\alpha$  contiene a  $Y$  como subcadena y  $\beta$  se obtiene sustituyendo  $Y$  por  $\Phi$  en  $\alpha$

### Ejemplo de derivación en un paso

- Reglas de derivación:

$$E \rightarrow E + E \quad E \rightarrow E * E \quad E \rightarrow (E) \quad E \rightarrow a \quad E \rightarrow b \quad E \rightarrow c$$

- Una posible derivación en un paso:  $(E)^*E \Rightarrow (E+E)^*E$

### Definición: Secuencia de Derivación

$\beta$  es **derivable** de  $\alpha$ , y lo notamos  $\alpha \Rightarrow^* \beta$ , si y solo si existe una sucesión de palabras  $Y_1, \dots, Y_n$  ( $n \geq 1$ ) tales que:

$$\alpha = Y_1 \Rightarrow Y_2 \Rightarrow \dots Y_n \Rightarrow \beta$$

### Ejemplo de derivación

- **$(a+b)*b$  se deriva de  $E$** , mediante la siguiente secuencia de derivación:

$$E \Rightarrow E*E \Rightarrow (E)*E \Rightarrow (E+E)*E \Rightarrow (a+E)*E \Rightarrow (a+b)*E \Rightarrow \mathbf{(a+b)*b}$$



### Definición: Lenguaje generado por una gramática

Sea una **gramática generativa**  $G=(V, T, P, S)$ . Denominamos al lenguaje  $L$  generado por la gramática  $L(G)$  como:

$$L(G) = \{u \in T^* | S \Rightarrow^* u\}$$

### Ejemplo

Sea  $G=(V,T,P,S)$ , donde  $V =\{S,A,B\}$ ,  $T=\{a,b\}$ , el símbolo de partida es  $S$  y las reglas en  $P$  son:

$S \rightarrow aB$   $S \rightarrow bA$   $A \rightarrow a$   $A \rightarrow aS$   $A \rightarrow bAA$   $B \rightarrow b$   $B \rightarrow bS$   $B \rightarrow aBB$

¿Qué lenguaje genera esta gramática?

### Ejemplo

Sea  $G=(V,T,P,S)$ , donde  $V=\{S,A,B\}$ ,  $T=\{a,b\}$ , el símbolo de partida es  $S$  y las reglas en  $P$  son:

$S \rightarrow aB$   $S \rightarrow bA$   $A \rightarrow a$   $A \rightarrow aS$   $A \rightarrow bAA$   $B \rightarrow b$   $B \rightarrow bS$   $B \rightarrow aBB$

¿Qué lenguaje genera esta gramática?

### Solución

Genera el lenguaje  $L = \{u \in \{a,b\}^+ \mid N_a(u) = N_b(u)\}$ ,

donde  $N_x(u)$  es el número de veces que aparece el símbolo  $x$  en la palabra  $u$ .

### Ejemplo

Sea  $G=(V,T,P,S)$ , donde  $V=\{S,X,Y\}$ ,  $T=\{a,b,c\}$ , el símbolo de partida es  $S$  y las reglas en  $P$  son:

$S \rightarrow abc$   $S \rightarrow aXbc$   $Xb \rightarrow bX$   $Xc \rightarrow Ybcc$   $bY \rightarrow Yb$   $aY \rightarrow aaX$   $aY \rightarrow aa$

¿Qué lenguaje genera esta gramática?

### Solución

Genera el lenguaje  $L = \{a^i b^i c^i, i > 0\}$ ,

donde  $N_x(u)$  es el número de veces que aparece el símbolo  $x$  en la palabra  $u$ .



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

## Introducción a la computación

1. ¿Por qué estudiar computación?
2. Operaciones con palabras y lenguajes
3. Gramáticas
- » 4. Jerarquía de Chomsky



DECSAI

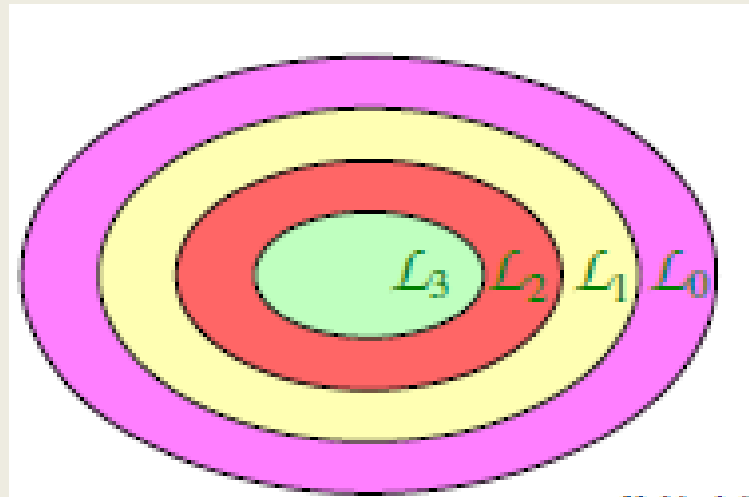
## Jerarquía de lenguajes de Chomsky

- **Lenguajes de Tipo 0:** Cualquier gramática. Sin restricciones. Da como resultado lenguajes recursivamente enumerables.
- **Lenguajes de Tipo 1: Dependientes del contexto.** Todas las reglas de producción tienen la forma  $\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in (V \cup T)^*$ ,  $A \in V$ ,  $\beta \neq \varepsilon$  excepto para  $S \rightarrow \varepsilon$ , donde  $S$  no aparece a la derecha de las reglas.
- **Lenguajes de Tipo 2: Independientes del contexto.** Toda producción tiene la forma  $A \rightarrow \alpha$ , donde  $\alpha \in (V \cup T)^*$ ,  $A \in V$
- **Lenguajes de Tipo 3: Regulares.** Todas las reglas tienen la forma  $A \rightarrow \alpha B$  ó  $A \rightarrow \alpha$ , donde  $\alpha \in (V \cup T)^*$  y  $A, B \in V$

### Clases de lenguajes

- Un lenguaje se dice de tipo  $i$  ( $i=0,1,2,3$ ) si es generado por una gramática de tipo  $i$ .
- La clase o familias de lenguajes generados por gramáticas de tipo  $i$  se denomina  $L_i$

$$L_3 \subseteq L_2 \subseteq L_1 \subseteq L_0$$



### Ejercicio 1

Demostrar que la gramática  $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$  genera el lenguaje  $L = \{a^i b^i, i \geq 0\}$

### Ejercicio 2

¿Cuál es el lenguaje generado por la siguiente gramática?

$G = (\{A,B,C\}, \{a,b\}, P, S)$ , con  $P = \{S \rightarrow aAB, bB \rightarrow a, Ab \rightarrow SBb, Aa \rightarrow SaB, B \rightarrow SA, B \rightarrow ab\}$

### Ejercicio 1

Demostrar que la gramática  $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$  genera el lenguaje  $L = \{a^i b^i, i > 0\}$

### Ejercicio 2

¿Cuál es el lenguaje generado por la siguiente gramática?

$G = (\{A,B,C\}, \{a,b\}, P, S)$ , con  $P = \{S \rightarrow aAB, bB \rightarrow a, Ab \rightarrow SBb, Aa \rightarrow SaB, B \rightarrow SA, B \rightarrow ab\}$

### Solución

El lenguaje vacío. No existe una derivación que lleve a contener sólo símbolos de  $T(\{a,b\})$



### Ejercicios

Encontrar gramáticas libres del contexto que generen cada uno de los siguientes lenguajes:

1.  $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$
2.  $L = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
3.  $L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
4.  $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
5.  $L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a, b\}^*\}$
6.  $L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

Donde  $\mathbb{N}$  denota al conjunto de los naturales (incluyendo el 0)

7. Determinar si el lenguaje generado por la siguiente gramática es de tipo 3:  $S \rightarrow AB, A \rightarrow Ab, A \rightarrow a, B \rightarrow cB, B \rightarrow d$

## Ejercicio 1: Solución

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$$

$$S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSb, S \rightarrow Sb$$

UNIVERSITY



ULTRA

### Ejercicio 2: Solución

$$L = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

$$S \rightarrow aSb, S \rightarrow B, B \rightarrow bBa, B \rightarrow \varepsilon$$

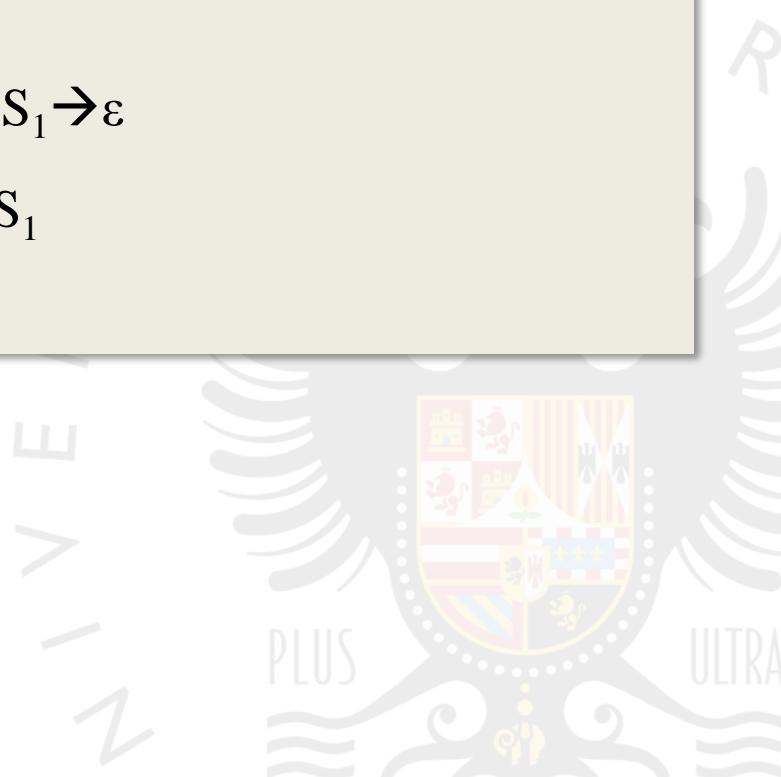


### Ejercicio 3: Solución

$$L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

$$S_1 \rightarrow aS_1b, S_1 \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow S_1 S_1$$



### Ejercicio 4: Solución

$$L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$S_1 \rightarrow aS_1b, S_1 \rightarrow \varepsilon$$

$$S_2 \rightarrow bS_2a, S_2 \rightarrow \varepsilon$$

$$S \rightarrow S_1$$

$$S \rightarrow S_2$$

### Ejercicio 5: Solución

$$L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a,b\}^+\}$$

$$S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb \quad S \rightarrow \varepsilon$$



### Ejercicio 6: Solución

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

$$S \rightarrow aSc, S \rightarrow B, B \rightarrow bBc, B \rightarrow \varepsilon$$



### Ejercicio 7: Solución

Determinar si el lenguaje generado por la siguiente gramática es de tipo 3:

$S \rightarrow AB, A \rightarrow Ab, A \rightarrow a, B \rightarrow cB, B \rightarrow d$

El lenguaje generado es  $L = \{ ab^i c^j d \mid i, j \in \mathbb{N} \}$ , que también puede ser generado por la siguiente gramática

$S \rightarrow aB, B \rightarrow bB, B \rightarrow C, C \rightarrow cC, C \rightarrow d$

Como la gramática es de tipo 3, el lenguaje también es de tipo 3.





UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



# Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

## Tema 1 – Introducción a la computación

*Este documento está protegido por la Ley de Propiedad Intelectual ([Real Decreto Ley 1/1996 de 12 de abril](#)). Queda expresamente prohibido su uso o distribución sin autorización del autor.*

Manuel Pegalajar Cuéllar  
manupc@ugr.es

Departamento de Ciencias de la  
Computación e Inteligencia Artificial  
<http://decsai.ugr.es>