UNIVERSIDAD DE GRANADA

DECSAI

Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

Tema 5 – Autómatas con pila

Manuel Pegalajar Cuéllar
manupc@ugr.es

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
http://decsai.ugr.es

Objetivos del tema

- Conocer el concepto de autómata con pila y su uso para reconocimiento de lenguajes.
- Conocer los lenguajes independientes del contexto deterministas.
- Conocer la equivalencia entre gramáticas y autómatas con pila.

Anotación sobre estas diapositivas:

El contenido de estas diapositivas es esquemático y representa un apoyo para las clases presenciales teóricas. No se considera un sustituto para apuntes de la asignatura.

Se recomienda al alumno completar estas diapositivas con notas/apuntes propios, tomados en clase y/o desde la bibliografía principal de la asignatura.

Autómatas con pila

1. Autómatas con pila
2. Criterios de aceptación
3. Autómatas con pila deterministas
4. Lenguajes libres del contexto deterministas
5. Equivalencia de gramáticas y autómatas

Definición: Autómata con pila no determinista

Un autómata con pila no determinista (APND) es una séptupla (Q,A,B,δ,q_0,Z_0,F) en la que:

- Q es un conjunto finito de estados
- A es un alfabeto de entrada
- B es un alfabeto para la pila
- δ es la función de transición

$$\delta: Q \times \{A \cup \{\varepsilon\}\} \times B \rightarrow P(Q \times B^*)$$

- q_0 es el estado inicial
- Z_0 es el símbolo inicial de la pila
- F es el conjunto de estados finales

Donde P(x) denota a las partes del conjunto x.

Un ejemplo

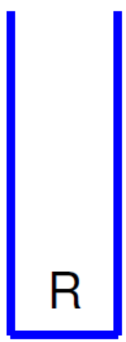
$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

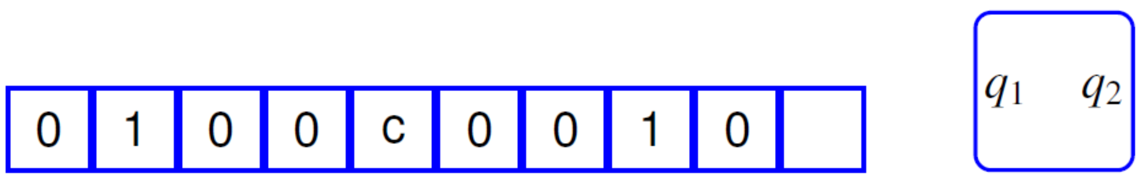
$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

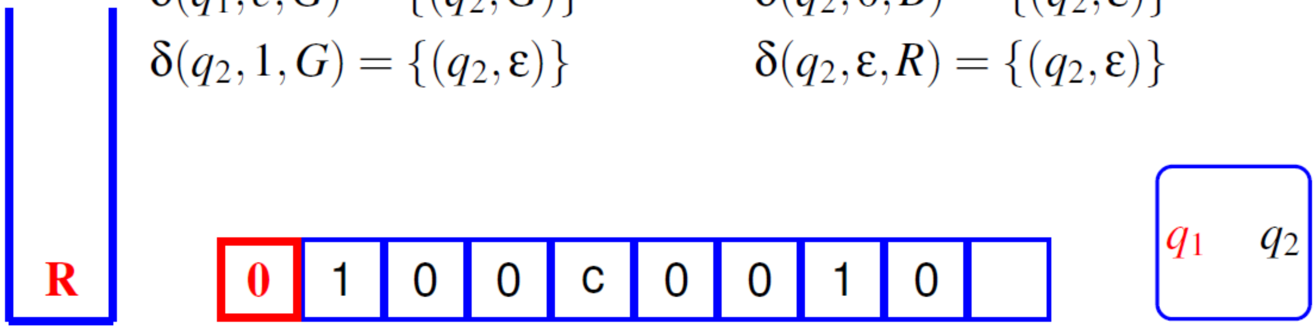




Un ejemplo

$M = (\{q_1,q_2\},\{0,1,c\},\{R,B,G\},\delta,q_1,R,\emptyset)$ donde

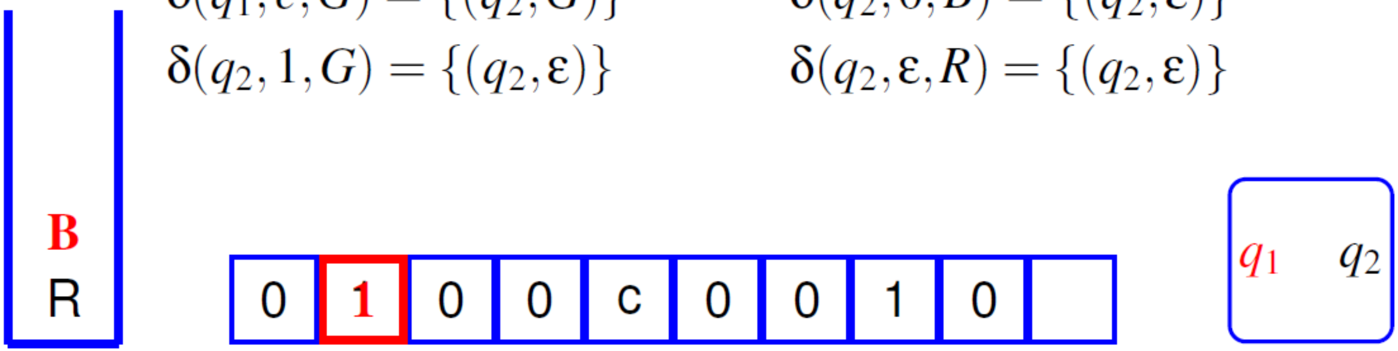
$$\delta(\mathbf{q_1},\mathbf{0},\mathbf{R}) = \{(\mathbf{q_1},\mathbf{BR})\} \qquad \delta(q_1,1,R) = \{(q_1,GR)\}$$
$$\delta(q_1,0,B) = \{(q_1,BB)\} \qquad \delta(q_1,1,B) = \{(q_1,GB)\}$$
$$\delta(q_1,0,G) = \{(q_1,BG)\} \qquad \delta(q_1,1,G) = \{(q_1,GG)\}$$
$$\delta(q_1,c,R) = \{(q_2,R)\} \qquad \delta(q_1,c,B) = \{(q_2,B)\}$$
$$\delta(q_1,c,G) = \{(q_2,G)\} \qquad \delta(q_2,0,B) = \{(q_2,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2,1,G) = \{(q_2,\varepsilon)\} \qquad \delta(q_2,\varepsilon,R) = \{(q_2,\varepsilon)\}$$



Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \boldsymbol{\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$



Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$

$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\boldsymbol{\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

G
B
R

0	1	**0**	0	c	0	0	1	0	

q_1 q_2

Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\quad\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$

$\boldsymbol{\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}}$ $\quad\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$

$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ $\quad\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$

$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$ $\quad\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$

$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$ $\quad\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\quad\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

B
G
B
R

0	1	0	**0**	c	0	0	1	0	

q_1 $\quad q_2$

Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \boldsymbol{\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

B
B
G
B
R

0	1	0	0	**c**	0	0	1	0	

q_1 q_2

Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$

$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \boldsymbol{\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}}$$

$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

B
B
G
B
R

0	1	0	0	c	**0**	0	1	0	

q_1 q_2

Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\quad$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$

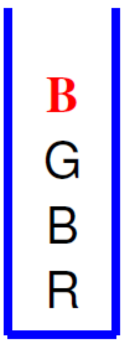
$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\quad$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$

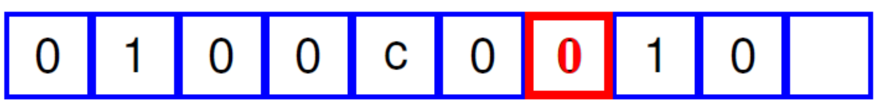
$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ $\quad$ $\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$

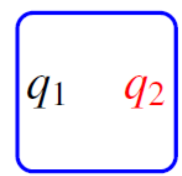
$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$ $\quad$ $\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$

$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$ $\quad$ $\boldsymbol{\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}}$

$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\quad$ $\delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$



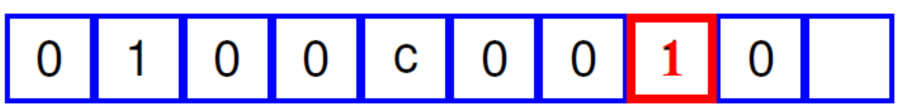


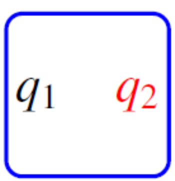


Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\boldsymbol{\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$





Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \boldsymbol{\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}}$$
$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

B
R

0	1	0	0	c	0	0	1	**0**	

q_1 q_2

Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$

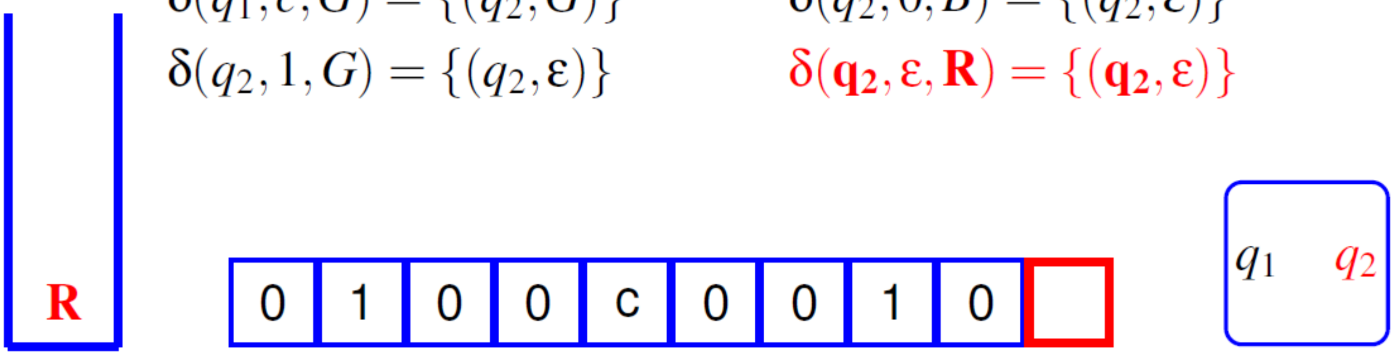
$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$

$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$

$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\}$ $\qquad$ $\delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$

$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\}$ $\qquad$ $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

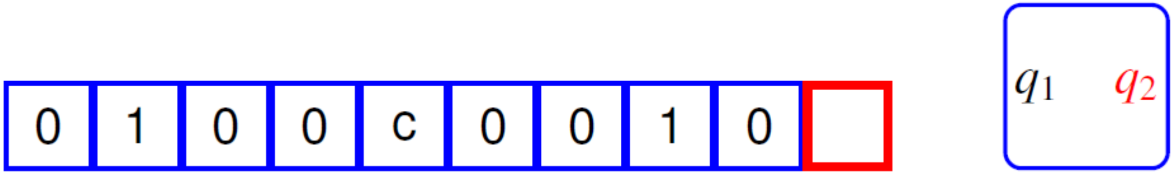
$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ $\qquad$ $\delta(\mathbf{q_2}, \varepsilon, \mathbf{R}) = \{(\mathbf{q_2}, \varepsilon)\}$



Un ejemplo

$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$ donde

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} & \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\} \\
\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} & \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\} \\
\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} & \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\} \\
\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} & \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\} \\
\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} & \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{array}
$$



1. Autómatas con pila
2. Criterios de aceptación
3. Autómatas con pila deterministas
4. Lenguajes libres del contexto deterministas
5. Equivalencia de gramáticas y autómatas

Definición: Descripción instantánea (o configuración)

Se llama **descripción instantánea** o **configuración** de un autómata con pila a una tripleta

$$(q, u, \alpha) \in Q \times A^* \times B^*$$

en la que *q* es el estado en el se encuentra el autómata, *u* es la parte de la cadena de entrada que queda por leer y α el contenido de la pila (el primer símbolo es el tope de la pila).

Paso de cálculo

Se dice que de la configuración (*q*,*au*,*Z*α) se puede llegar mediante un **paso de cálculo** a la configuración (*p*,*u*,βα) y se escribe

$$(q, au, Z\alpha) \vdash (p, u, \beta\alpha)$$

si y solo si $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$ donde *a* puede ser cualquier símbolo de entrada o la cadena vacía.

Sucesión de pasos de cálculo

Si C1 y C2 son dos configuraciones, se dice que de la configuración C1 se puede llegar a C2, y se escribe $C1 \vdash^* C2$, si, y sólo si, existe una secuencia de configuraciones T1, T2, …, Tn tales que:

$$C1 = T1 \vdash T2 \vdash \cdots \vdash Tn = C2$$

Si M es un APND y u es un símbolo de A, se llama **configuración inicial** correspondiente a esta entrada a $(q_0;u;Z_0)$ donde q_0 es el estado inicial y Z_0 el símbolo inicial de la pila.

Un ejemplo

En el autómata del ejemplo anterior tenemos:

$$(q_1, 011c110, R) \vdash (q_1, 11c110, BR) \vdash (q_1, 1c110, GBR) \vdash$$
$$(q_1, c110, GGBR) \vdash (q_2, 110, GGBR) \vdash (q_2, 10, GBR) \vdash$$
$$(q_2, 0, BR) \vdash (q_2, \varepsilon, R) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

Criterios de aceptación de lenguajes

Existen dos criterios para determinar el lenguaje aceptado por un APND:

a) Lenguaje aceptado por estados finales

$$L(M) = \{w \in A^*: (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \gamma), p \in F, \gamma \in B^*\}$$

a) Lenguaje aceptado por pila vacía

$$N(M) = \{w \in A^*: (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon), p \in Q\}$$

Ejemplos: Construir APNDs que acepten los lenguajes…

- $L = \{0^i1^i : i >= 0\}$
- $L = \{0^i1^j : i >= j >= 0\}$
- $L = \{u \text{ en } \{0,1\}^* : u = u^{-1}\}$
- Conjunto de palabras en las que la cantidad de 0 es igual que la cantidad de 1.
- Conjunto de palabras en las que la cantidad de 0 es menor o igual que la cantidad de 1.
- Conjunto de palabras en las que la cantidad de 0 es el doble que la cantidad de 1.
- $L = \{0^i1^j0^j1^i : i,j >= 0\}$

Ejemplos: $L = \{0^i 1^i : i >= 0\}$ (por pila vacía)

$$M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \quad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \quad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Ejemplos: $L = \{0^i 1^i : i >= 0\}$ (por estados finales)

$$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \quad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_3, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \quad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$

Ejemplos: $L = \{0^i 1^j : i >= j >= 0\}$ (por pila vacía)

$$M = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \quad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\} \quad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Ejemplos: $L = \{u \text{ en } \{0,1\}^* : u = u^{-1}\}$(por pila vacía)

Lenguaje $\{wcw^{-1} : w \in \{0,1\}^*\}$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} \qquad \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} \qquad \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$
$$\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} \qquad \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$
$$\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} \qquad \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\}$$
$$\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} \qquad \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Ejemplos: $L = \{u \text{ en } \{0,1\}^* : u = u^{-1}\}$(por pila vacía)

$\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,BR)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,1,R) = \{(q_1,GR)\}$

$\delta(q_1,0,B) = \{(q_1,BB)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,1,B) = \{(q_1,GB)\}$

$\delta(q_1,0,G) = \{(q_1,BG)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,1,G) = \{(q_1,GG)\}$

$\delta(q_2,0,B) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

$\delta(q_2,1,G) = \{(q_2,\varepsilon)\}$ $\quad$ $\delta(q_2,\varepsilon,R) = \{(q_2,\varepsilon)\}$

$\delta(q_1,\varepsilon,R) = \{(q_2,R)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,\varepsilon,B) = \{(q_2,B)\}$

$\delta(q_1,\varepsilon,G) = \{(q_2,G)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,0,R) = \{(q_2,R)\}$

$\delta(q_1,0,B) = \{(q_2,B)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,0,G) = \{(q_2,G)\}$

$\delta(q_1,1,R) = \{(q_2,R)\}$ $\quad$ $\delta(q_1,1,B) = \{(q_2,B)\}$

$\delta(q_1,1,G) = \{(q_2,G)\}$

Ejemplos: L = {cantidad de 0=cantidad de 1}

$$M = (\{q_1\}, \{0,1\}, \{R,X,Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$$

$$\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,XR)\} \quad \delta(q_1,0,X) = \{(q_1,XX)\}$$
$$\delta(q_1,1,R) = \{(q_1,YR)\} \quad \delta(q_1,1,Y) = \{(q_1,YY)\}$$
$$\delta(q_1,1,X) = \{(q_1,\varepsilon)\} \quad \delta(q_1,0,Y) = \{(q_1,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1,\varepsilon,R) = \{(q_1,\varepsilon)\}$$

Ejemplos: L = {cantidad de 0<=cantidad de 1}

$$M = (\{q_1\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \quad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} \quad \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$$
$$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, \varepsilon, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Ejemplos: L = {cantidad de 0= doble cantidad de 1}

$$M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \qquad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$

$$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YYR)\} \qquad \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YYY)\}$$

$$\delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_1, YR)\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Ejemplos: $L = \{0^i1^j0^j1^i : i >= j >= 0\}$ (estados finales)

$$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_5\}, \{0, 1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \{q_5\})$$

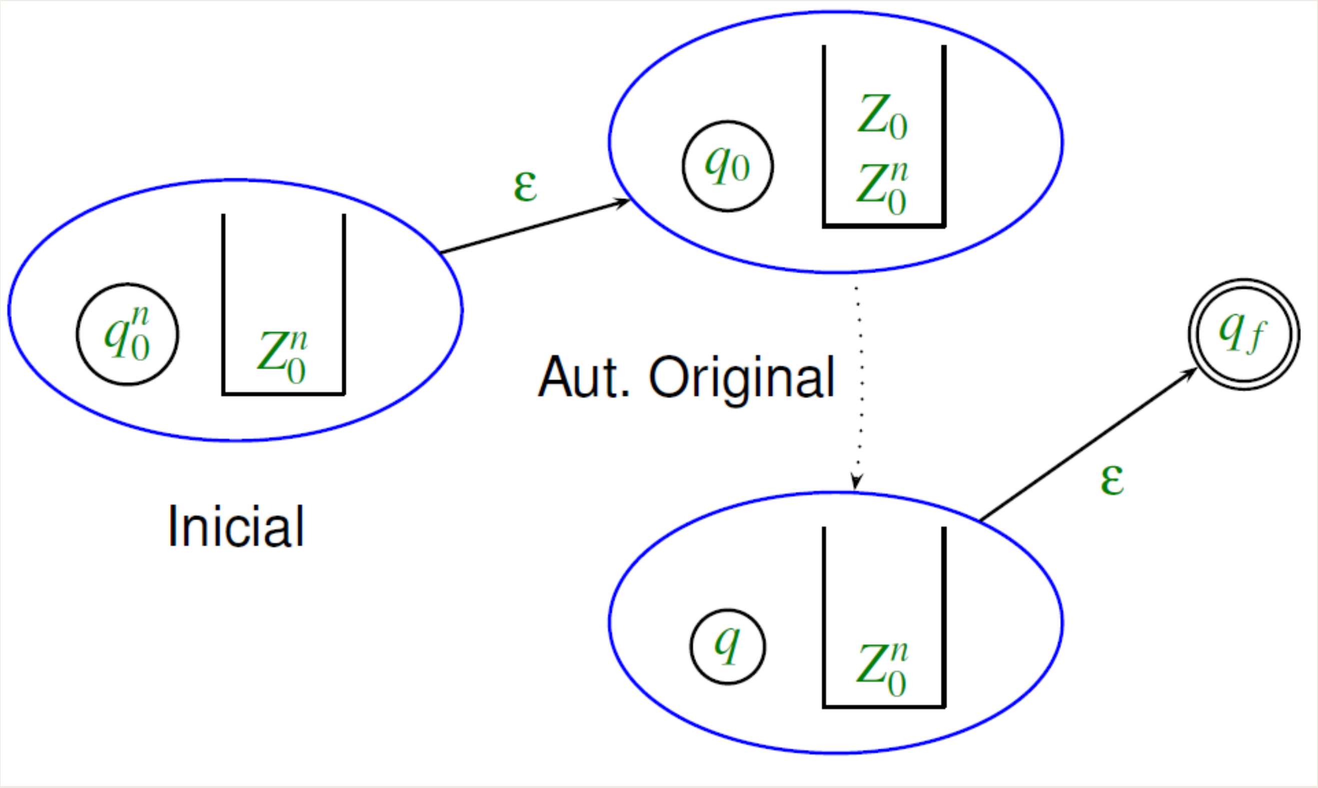
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_5, R)\} \qquad \delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \qquad \delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, R)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, X)\} \qquad \delta(q_2, 1, R) = \{(q_2, YR)\}$$
$$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, YX)\} \qquad \delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, YY)\}$$
$$\delta(q_2, \varepsilon, Y) = \{(q_3, Y)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_3, X)\}$$
$$\delta(q_3, 0, Y) = \{(q_3, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_3, \varepsilon, X) = \{(q_4, X)\}$$
$$\delta(q_3, \varepsilon, R) = \{(q_4, R)\} \qquad \delta(q_4, 1, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_4, \varepsilon, R) = \{(q_5, R)\}$$

Ejemplos: $L = \{0^i 1^j 0^j 1^i : i >= j >= 0\}$ (estados finales)

$$M = (\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_5\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \{q_5\})$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_5, R)\} \qquad \delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$$
$$\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\} \qquad \delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, R)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, X)\} \qquad \delta(q_2, 1, R) = \{(q_2, YR)\}$$
$$\delta(q_2, 1, X) = \{(q_2, YX)\} \qquad \delta(q_2, 1, Y) = \{(q_2, YY)\}$$
$$\delta(q_2, \varepsilon, Y) = \{(q_3, Y)\} \qquad \delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_3, X)\}$$
$$\delta(q_3, 0, Y) = \{(q_3, \varepsilon)\} \qquad \delta(q_3, \varepsilon, X) = \{(q_4, X)\}$$
$$\delta(q_3, \varepsilon, R) = \{(q_4, R)\} \qquad \delta(q_4, 1, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_4, \varepsilon, R) = \{(q_5, R)\}$$

Criterio de pila vacía → estados finales



Algoritmo: Criterio de pila vacía → estados finales

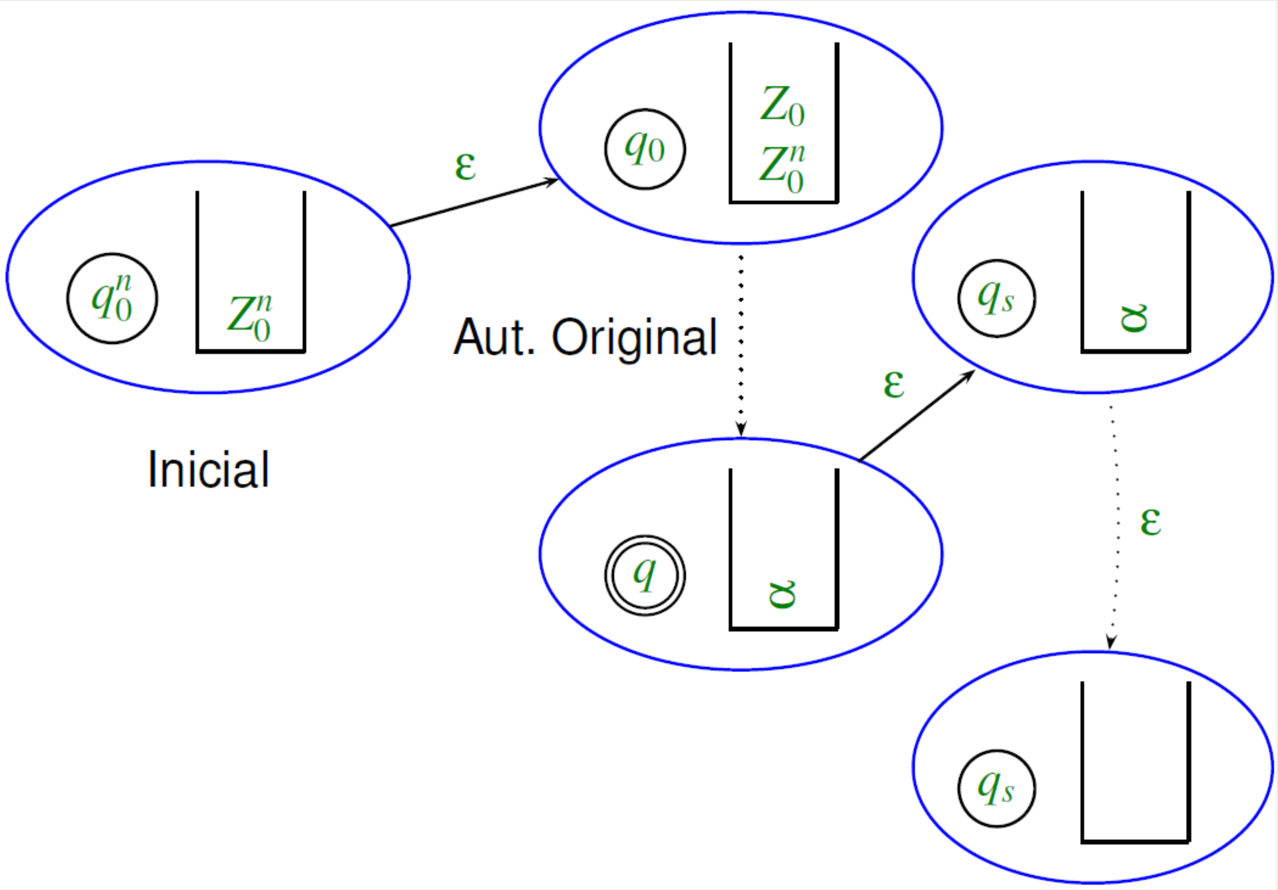
Construcción de un autómata *Mf* que acepta por el criterio de estados finales el mismo lenguaje que *M* por el criterio de pila vacía.

Si $M = (Q,A,B,\delta,q_0,Z_0,F)$, entonces el autómata *Mf* se construye a partir de *M* siguiendo los siguientes pasos:

- Se añaden dos estados nuevos, q^n_0 y q_f . El estado inicial de *Mf* será q^n_0 y el final será q_f
- Se añade un nuevo símbolo a *B*: Z^n_0. Este será el nuevo símbolo inicial de la pila.
- Se mantienen todas las transiciones de *M*, añadiéndose las siguientes:

$$\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_0, Z_0 Z_0^n)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_0, Z_0 Z_0^n)\}$$

Criterio de estados finales → pila vacía



Algoritmo: Criterio de estados finales → pila vacía

Construcción de un autómata *Mn* que acepta por el criterio de pila vacía el mismo lenguaje que *M* por el criterio de estados finales.

Si $M = (Q,A,B,\delta,q_0,Z_0,F)$, entonces el autómata *Mfn*se construye a partir de *M* siguiendo los siguientes pasos:

- Se añaden dos estados nuevos, $q^n{}_0$ y q_s . El estado inicial de *Mn* será $q^n{}_0$
- Se añade un nuevo símbolo a *B*: $Z^n{}_0$. Este será el nuevo símbolo inicial de la pila.
- Se mantienen todas las transiciones de *M*, añadiéndose las siguientes:

$$\delta(q_0^n, \varepsilon, Z_0^n) = \{(q_0, Z_0Z_0^n)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, H) = \{(q_s, H)\ \forall q \in F, H \in \{B \cup \{Z_0^n\}\}\}$$
$$\delta(q_s, \varepsilon, H) = \{(q_s, \varepsilon)\ \forall H \in \{B \cup \{Z_0^n\}\}\}$$

1. Autómatas con pila
2. Criterios de aceptación
3. Autómatas con pila deterministas
4. Lenguajes libres del contexto deterministas
5. Equivalencia de gramáticas y autómatas

DECSAI

Definición: Autómatas con pila deterministas (APD)

Un autómata con pila $M = (Q,A,B,\delta,q_0,Z_0,F)$ se dice **determinista si, y sólo si**, se cumplen las siguientes condiciones:

1. δ(q, a, X) contiene a lo sumo un elemento, donde $q \in Q, a \in \{A \cup \varepsilon\}, X \in B$
2. Si δ(q, a, X) **es no vacío para algún a en A**, entonces

$$\delta(q, \varepsilon, X)=\emptyset$$

Una condición equivalente es que para cada configuración $C1$ existe, a lo más, una configuración $C2$ tal que $C1 \vdash C2$ (se puede llegar de $C1$ a $C2$ en un solo paso de cálculo).

Ejemplo

El autómata de ejemplos anteriores que acepta L={wcw^{-1}, w=secuencia de 0's y 1's}, era determinista:

$$\delta(q_1,0,R)=\{(q_1,BR)\} \qquad \delta(q_1,1,R)=\{(q_1,GR)\}$$
$$\delta(q_1,0,B)=\{(q_1,BB)\} \qquad \delta(q_1,1,B)=\{(q_1,GB)\}$$
$$\delta(q_1,0,G)=\{(q_1,BG)\} \qquad \delta(q_1,1,G)=\{(q_1,GG)\}$$
$$\delta(q_1,c,R)=\{(q_2,R)\} \qquad \delta(q_1,c,B)=\{(q_2,B)\}$$
$$\delta(q_1,c,G)=\{(q_2,G)\} \qquad \delta(q_2,0,B)=\{(q_2,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2,1,G)=\{(q_2,\varepsilon)\} \qquad \delta(q_2,\varepsilon,R)=\{(q_2,\varepsilon)\}$$

1. Autómatas con pila
2. Criterios de aceptación
3. Autómatas con pila deterministas
4. Lenguajes libres del contexto deterministas
5. Equivalencia de gramáticas y autómatas

Definición: Lenguaje libre del contexto determinista

Un lenguaje independiente del contexto se dice que es **determinista** si y solo si es aceptado por un autómata con pila determinista por el ***criterio de estados finales***.

Ejemplo

El lenguaje del ejemplo anterior es determinista pues puede aceptarse por estados finales por el autómata.

$$M_f = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{R, G, B\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, BR)\} & \delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, GR)\} \\
\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} & \delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\} \\
\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} & \delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\} \\
\delta(q_1, c, R) = \{(q_2, R)\} & \delta(q_1, c, B) = \{(q_2, B)\} \\
\delta(q_1, c, G) = \{(q_2, G)\} & \delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, R) = \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

Definición: Lenguaje libre del contexto determinista

Un lenguaje independiente del contexto se dice que es **determinista** si y solo si es aceptado por un autómata con pila determinista por el ***criterio de estados finales***.

Ejemplo

El lenguaje del ejemplo anterior es determinista pues puede aceptarse por estados finales por el autómata.

$$M_f = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{R,G,B\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,BR)\} & \delta(q_1,1,R) = \{(q_1,GR)\} \\
\delta(q_1,0,B) = \{(q_1,BB)\} & \delta(q_1,1,B) = \{(q_1,GB)\} \\
\delta(q_1,0,G) = \{(q_1,BG)\} & \delta(q_1,1,G) = \{(q_1,GG)\} \\
\delta(q_1,c,R) = \{(q_2,R)\} & \delta(q_1,c,B) = \{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,c,G) = \{(q_2,G)\} & \delta(q_2,0,B) = \{(q_2,\varepsilon)\} \\
\delta(q_2,1,G) = \{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_2,\varepsilon,R) = \{(q_3,R)\}
\end{array}$$

Determinismo y criterios de aceptación de lenguajes

Si *L* es aceptado por un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía, entonces *L* es aceptado por un autómata con el criterio estados finales (la transformación que vimos anteriormente añadía transiciones deterministas).

Pero la relación inversa no es cierta (*las transiciones de un estado final al estado que dejaba la pila vacía eran opcionales - no deterministas*).

Propiedad prefijo

Un lenguaje L tiene la propiedad prefijo si y solo si para cada palabra x de L, ningún prefijo de x (distinto de x) está en L.

Teorema:

Un lenguaje puede ser aceptado por un autómata determinista por el criterio de pila vacía si y solo si es aceptado por un autómata determinista por el criterio de estados finales y tiene la propiedad prefijo.

Ejemplo

Autómata que acepta por pila las palabras que tienen el mismo número de 0's que de 1's:

$$M = (\{q_1\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \quad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} \quad \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$$
$$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

No es determinista. ¿Por qué?

$\delta(q_1, \varepsilon, R)!=\emptyset$;

$\delta(q_1, 0, X)=\{(q_1,XR\}!=\emptyset$;

$\delta(q_1, 1, R)=\{(q_1,YR)\}!= \emptyset$

Ejemplo

El autómata no se puede transformar en uno APD:

$$M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \{q_2\})$$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,XR)\} & \delta(q_1,0,X) = \{(q_1,XX)\} \\
\delta(q_1,1,R) = \{(q_1,YR)\} & \delta(q_1,1,Y) = \{(q_1,YY)\} \\
\delta(q_1,1,X) = \{(q_1,\varepsilon)\} & \delta(q_1,0,Y) = \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_1,\varepsilon,R) = \{(q_1,\varepsilon)\} &
\end{array}$$

No se puede transformar en APD que acepte el mismo lenguaje por criterio de pila vacía. Por ejemplo, la palabra 001110 está en el lenguaje y 0011 también: No cumple el criterio prefijo. Sin embargo, sí se puede hacer APD que acepte el lenguaje por criterio de estados finales.

Ejemplo

El autómata no se puede transformar en uno APD:

$$M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X, Y\}, \delta, q_1, R, \{q_2\})$$

$$\delta(q_1, 0, R) = \{(q_1, XR)\} \quad \delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, 1, R) = \{(q_1, YR)\} \quad \delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$$
$$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

APD que acepte el lenguaje por criterio de estados finales:

$$\delta(q_1, 0, X) = \{(q_1, XX)\}$$
$$\delta(q_1, 1, Y) = \{(q_1, YY)\}$$
$$\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, 0, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, R) = \{(q_2, R)\} \quad \delta(q_2, 0, R) = \{(q_1, XR)\}$$
$$\delta(q_2, 1, R) = \{(q_1, YR)\}$$

Lenguajes deterministas y pila vacía

La distinción entre los dos criterios aplicados a lenguajes deterministas no es sustancial. Si un lenguaje L es determinista (aceptado por un autómata determinista por el criterio de estados finales) y no cumple la propiedad prefijo una sencilla transformación lo convertiría en un lenguaje con la propiedad prefijo y, por tanto, aceptado por un autómata determinista por el criterio de pila vacía:

Se añade un nuevo símbolo que no esté en el alfabeto y se pone este símbolo al final de todas las palabras. Si \$ es ese símbolo que no está en A, entonces consideramos $L\{\$\} = \{u\$: u$ es palabra de L$\}$.

Es como añadir un fin de palabra a todas las de *L*.

Lenguajes no deterministas

Hay lenguajes independientes de contexto que no son deterministas. El lenguaje L = {u: u es palíndromo} puede ser aceptado por el criterio de estados finales por el siguiente autómata:

$$\delta(q_1,0,R)=\{(q_1,BR),(q_2,R)\} \qquad \delta(q_1,1,R)=\{(q_1,GR),(q_2,R)\}$$
$$\delta(q_1,0,B)=\{(q_1,BB),(q_2,B)\} \qquad \delta(q_1,1,B)=\{(q_1,GB),(q_2,G)\}$$
$$\delta(q_1,0,G)=\{(q_1,BG),(q_2,G)\} \qquad \delta(q_1,1,G)=\{(q_1,GG),(q_2,G)\}$$
$$\delta(q_1,\varepsilon,R)=\{(q_2,R)\} \qquad \delta(q_1,\varepsilon,B)=\{(q_2,B)\}$$
$$\delta(q_1,\varepsilon,G)=\{(q_2,G)\} \qquad \delta(q_2,0,B)=\{(q_2,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2,1,G)=\{(q_2,\varepsilon)\} \qquad \delta(q_2,\varepsilon,R)=\{(q_3,R)\}$$

Pero no es determinista. El problema está en saber cuándo cambia de q_1 a q_2.

1. Autómatas con pila
2. Criterios de aceptación
3. Autómatas con pila deterministas
4. Lenguajes libres del contexto deterministas
5. Equivalencia de gramáticas y autómatas

Equivalencia gramáticas <-> autómatas con pila

Dada una gramática libre de contexto $G = (V;T;P;S)$ existe un autómata con pila $M = (Q,A,B,\delta,q_0,Z_0,F)$ que acepta el mismo lenguaje que genera G, y recíprocamente, dado un autómata con pila M existe una gramática libre de contexto G que genera el lenguaje que acepta M.

El autómata no tiene por qué ser determinista.

Equivalencia gramáticas <-> autómatas con pila

Dada una gramática libre de contexto $G = (V;T;P;S)$, los elementos del autómata serán:

- $Q = \{q\}$ $q_0=q$
- $A = T$ $Z_0=S$
- $B = V \cup T$ $F=\emptyset$
- δ viene determinado por:

$$\begin{aligned} \delta(q,\varepsilon,B) &= \{(q,\alpha) : B \rightarrow \alpha \in P\} \\ \delta(q,a,a) &= \{(q,\varepsilon)\} \end{aligned}$$

Acepta el mismo lenguaje por el criterio de pila vacía

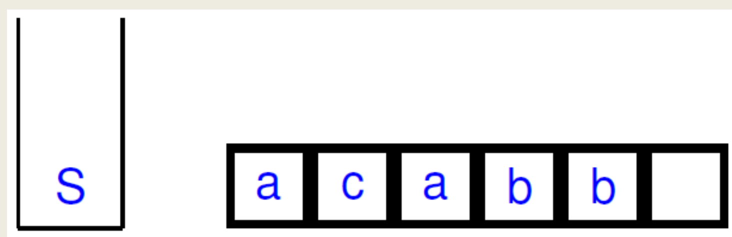
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S)=\{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a)=\{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b)=\{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c)=\{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



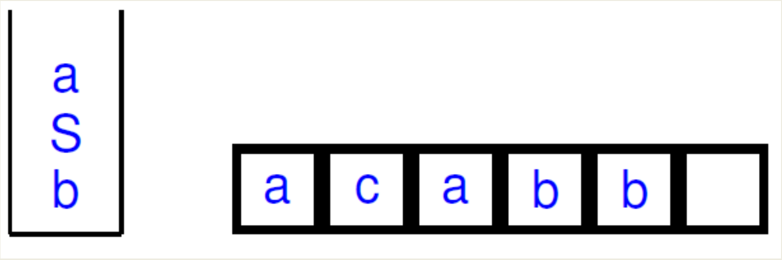
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S)=\{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a)=\{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b)=\{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c)=\{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



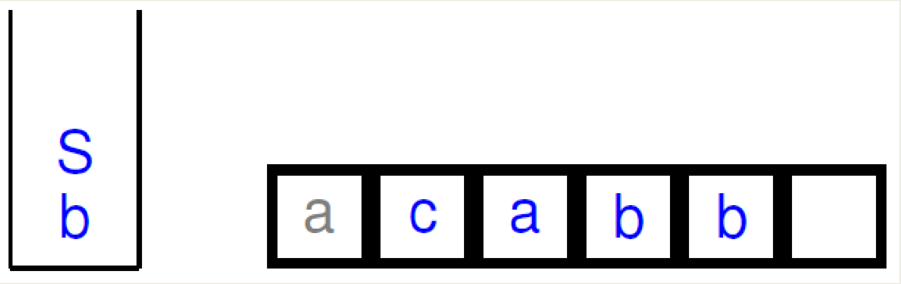
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S) = \{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b) = \{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c) = \{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



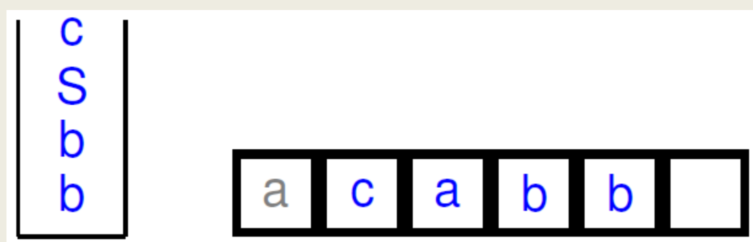
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S)=\{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a)=\{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b)=\{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c)=\{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



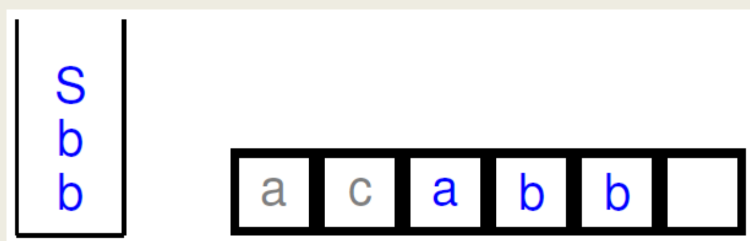
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S)=\{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a)=\{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b)=\{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c)=\{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



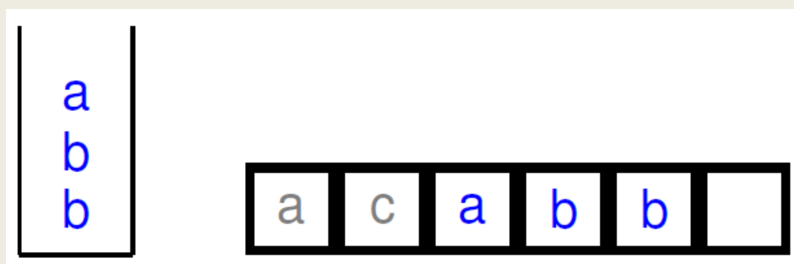
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S) = \{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b) = \{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c) = \{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



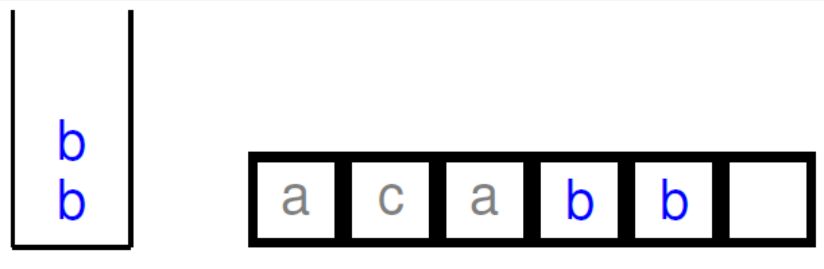
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S)=\{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a)=\{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b)=\{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c)=\{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



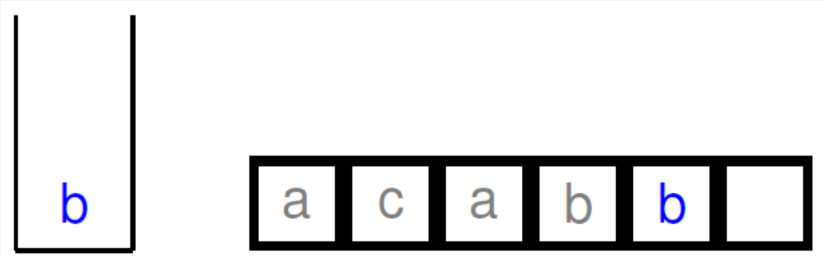
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S)=\{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a)=\{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b)=\{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c)=\{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



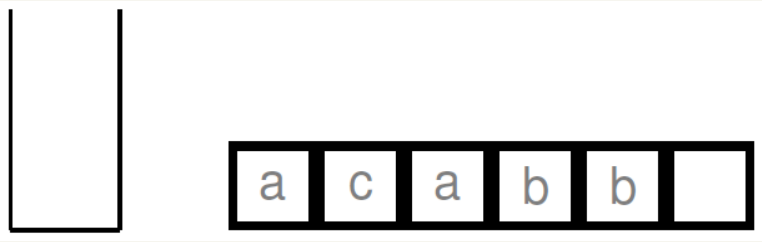
Ejemplo

Gramática: S→ aSb; S→cSb; C→a

Autómata:

$$\delta(q,\varepsilon,S) = \{(q,aSb),(q,cSb),(q,a)\} \quad \delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\}$$
$$\delta(q,b,b) = \{(q,\varepsilon)\} \quad \delta(q,c,c) = \{(q,\varepsilon)\}$$

Ejemplo: $S \Rightarrow aSb \Rightarrow acSbb \Rightarrow acabb$



Autómatas con pila → Gramáticas

Sea un autómata con pila $M = (Q,A,B,\delta,q_0,Z_0,F)$ que acepta el lenguaje L= N(M). La gramática $G = (V;T;P;S)$ se construye a partir de variables S y todas las de la forma *[p, X, q]*, donde p,q están en Q y X está en B.

La idea básica es: *La variable [p;X;q] debe de generar aquellas palabras que son capaces de llevar el autómata con pila desde el estado p al estado q, quitando a X de la pila.*

Después se añaden todas las producciones de la forma:

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q], \text{ donde q pertenece a Q}$$

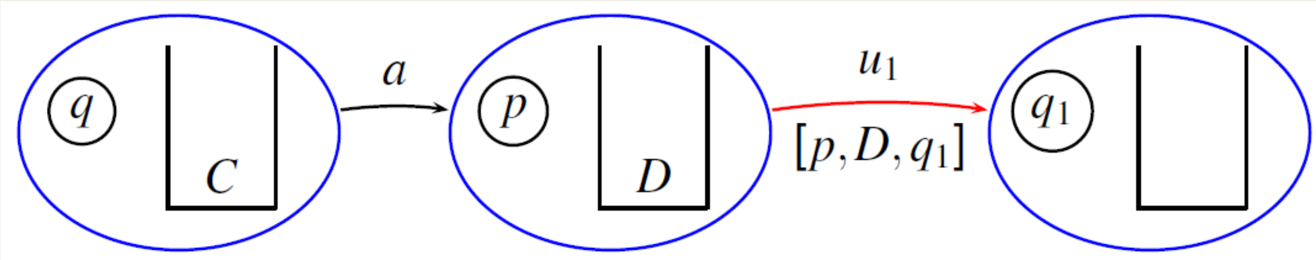
Autómatas con pila → Gramáticas

Si tenemos que $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, C)$, entonces leyendo una a el autómata pasa de q a p quitando C de la pila. Se añade:

[q,C,a]→a

Donde a puede ser terminal o cadena vacía.

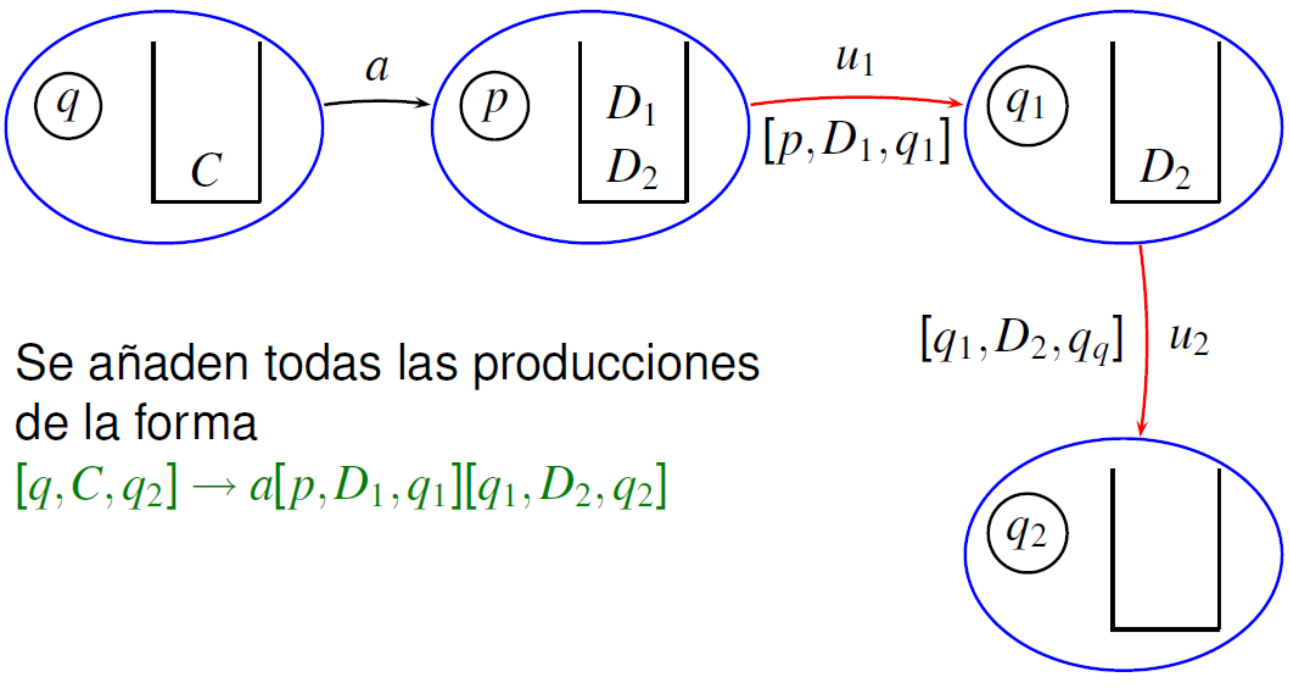
Si tenemos que $(p, D) \in \delta(q, a, C)$, entonces tenemos:



Se añade $[q,C,q_1] \rightarrow a[p,D,q_1]$

Autómatas con pila → Gramáticas

Si tenemos que $(p, D_1 D_2) \in \delta(q, a, C)$, entonces tenemos:



Autómatas con pila → Gramáticas

Si tenemos que $(p, D_1 D_2 D_3) \in \delta(q, a, C)$, entonces añadimos todas las producciones de la forma:

$$[q, C, q_3] \rightarrow a[p, D_1, q_1][q_1, D_2, q_2][q_2, D_3, q_3]$$

Si Q={r,s}:

$$\begin{array}{ll}
[q,C,r] \rightarrow a[p,D_1,r][r,D_2,r][r,D_3,r], & [q,C,s] \rightarrow a[p,D_1,r][r,D_2,r][r,D_3,s] \\
[q,C,r] \rightarrow a[p,D_1,r][r,D_2,s][s,D_3,r], & [q,C,s] \rightarrow a[p,D_1,r][r,D_2,s][s,D_3,s] \\
[q,C,r] \rightarrow a[p,D_1,s][s,D_2,r][r,D_3,r], & [q,C,s] \rightarrow a[p,D_1,s][s,D_2,r][r,D_3,s] \\
[q,C,r] \rightarrow a[p,D_1,s][s,D_2,s][s,D_3,r], & [q,C,s] \rightarrow a[p,D_1,s][s,D_2,s][s,D_3,s]
\end{array}$$

Resumen

$M = (Q,A,B,\delta,q_0,Z_0,F)$ AP. $G = (V;T;P;S)$

G se construye:

- Variables (V): [q,C,p], p,q en Q, C en B, además de la variable S
- Producciones(P):
  - $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$ para cada q en Q
  - $[q, C, q_m] \rightarrow a[p, D_1, q_1][q_1, D_2, q_2]\ldots[q_{m-1}, D_m, q_m]$ para cada $q_1 \ldots q_m$ en Q, si $(p, D_1D_2 \ldots D_m) \in \delta(q, a, C)$ donde a puede ser ε. *(Nota: Si m=0 entonces la producción es [q, A, p]→a)*

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}, & \delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\} \end{array}$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\}, & \delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 0, X) &= \{(q_0, XX)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_0], \quad S \rightarrow [q_0, Z_0, q_1]$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{aligned} \delta(q_0,0,Z_0) &= \{(q_0,XZ_0)\}, & \delta(q_1,1,X) &= \{(q_1,\varepsilon)\} \\ \delta(q_0,0,X) &= \{(q_0,XX)\}, & \delta(q_1,\varepsilon,X) &= \{(q_1,\varepsilon)\} \\ \delta(q_0,1,X) &= \{(q_1,\varepsilon)\}, & \delta(q_1,\varepsilon,Z_0) &= \{(q_1,\varepsilon)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [q_0,Z_0,q_0] &\to 0[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_0] \\ [q_0,Z_0,q_1] &\to 0[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_1] \\ [q_0,Z_0,q_0] &\to 0[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0] \\ [q_0,Z_0,q_1] &\to 0[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_1] \end{aligned}$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\}, & \delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 0, X) &= \{(q_0, XX)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

$$[q_1, X, q_1] \rightarrow 1$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0,0,Z_0) = \{(q_0,XZ_0)\}, & \delta(q_1,1,X) = \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_0,0,X) = \{(q_0,XX)\}, & \delta(q_1,\varepsilon,X) = \{(q_1,\varepsilon)\} \\
\delta(q_0,1,X) = \{(q_1,\varepsilon)\}, & \delta(q_1,\varepsilon,Z_0) = \{(q_1,\varepsilon)\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
[q_0,X,q_0] \rightarrow 0[q_0,X,q_0][q_0,X,q_0] \\
[q_0,X,q_1] \rightarrow 0[q_0,X,q_0][q_0,X,q_1] \\
[q_0,X,q_0] \rightarrow 0[q_0,X,q_1][q_1,X,q_0] \\
[q_0,X,q_1] \rightarrow 0[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]
\end{array}
$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}, \quad \delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}, \quad \delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \quad \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$[q_1, X, q_1] \rightarrow \varepsilon$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\}, & \delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 0, X) &= \{(q_0, XX)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow 1$$

Ejemplo

$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0, Z_0) &= \{(q_0, XZ_0)\}, & \delta(q_1, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 0, X) &= \{(q_0, XX)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, 1, X) &= \{(q_1, \varepsilon)\}, & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

$$[q_1, Z_0, q_1] \rightarrow \varepsilon$$

Ejemplo

Gramática:

$$S \to [q_0, Z_0, q_0], \quad S \to [q_0, Z_0, q_1]$$

$$[q_0, Z_0, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_0]$$

$$[q_0, Z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_1]$$

$$[q_0, Z_0, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_0]$$

$$[q_0, Z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1]$$

$$[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0]$$

$$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1]$$

$$[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0]$$

$$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$$

$$[q_0, X, q_1] \to 1, \quad [q_1, X, q_1] \to 1, \quad [q_1, X, q_1] \to \varepsilon, \quad [q_1, Z_0, q_1] \to \varepsilon$$

Ejemplo

Eliminando símbolos y producciones inútiles:

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_1]$$
$$[q_0, Z_0, q_1] \rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1]$$
$$[q_0, X, q_1] \rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$$
$$[q_1, X, q_1] \rightarrow 1$$
$$[q_1, X, q_1] \rightarrow \varepsilon$$
$$[q_1, Z_0, q_1] \rightarrow \varepsilon$$

Lenguaje: $L(G) = \{0^i 1^j : i \geq j \geq 1\}$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DECSAI

Modelos de Computación

Grado en Ingeniería Informática

Tema 5 – Autómatas con pila

Manuel Pegalajar Cuéllar
manupc@ugr.es

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
http://decsai.ugr.es