Trabajo en Grupo sobre Restauración de Imágenes

Objetivos:

- Comprender nociones básicas de restauración de imágenes
- Restaurar imágenes degradadas por movimiento horizontal uniforme

Para restaurar una imagen G de N columnas que haya tenido un proceso de degradación fila por fila, como por ejemplo, el movimiento horizontal uniforme de n pixeles, se puede plantear la siguiente ecuación. Esta ecuación modela el proceso de degradación de una fila f de la imagen original F de M columnas. <u>La fila degradada g (de la imagen G) es la convolución de f con la máscara h de n elementos:</u>

[RELLENAR TODOS LOS ESPACIOS VACIOS]

$$\mathbf{g} = f * h = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}}$$

Esta ecuación puede escribirse matricialmente como:

______________________ (1)

Conociendo $\mathbf{g}$ y la máscara $\mathbf{h}$, vemos que el sistema de ecuaciones tiene ____ ecuaciones y _____ incógnitas. Como M es mayor/menor (tachar) que N, entonces existen _______ soluciones. Estos sistemas se llaman completos/subdeterminados/superdeterminados (tachar).

Para resolver (1), es necesario imponer una restricción para $\mathbf{f}$. Esta restricción puede ser planteada como:

$$||\mathbf{Wf}||^2 \rightarrow \min \qquad (2)$$

Donde $\mathbf{Wf}$ es una señal por ejemplo que deja pasar las frecuencias altas de $\mathbf{f}$. De esta manera la solución que andamos buscando es una función $\mathbf{f}$ que cumpla (1) y que tenga un rizado mínimo. La solución será llamada $\hat{\mathbf{f}}$.

La solución para $\mathbf{f}$ debe ser tal que se cumplan (1) y (2) simultáneamente. La ecuación (1) puede replantearse de la siguiente forma:

$$|| \quad\quad\quad\quad\quad\quad ||^2 = 0 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) tienen la estructura de un problema de optimización que puede resolverse usando el multiplicador de Lagrange λ (en este caso un número múy grande como 10^6). Usando el multiplciador de Lagrange, la función objetivo $V(\mathbf{f})$ a minimzar puede plantearse como:

$$V(\mathbf{f}) = \lambda||\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{\substack{\text{término que}\\ \text{debe ser cero}}}||^2 + ||\underbrace{\qquad\quad}_{\substack{\text{término a}\\ \text{minimizar}}}||^2 \rightarrow \min \tag{4}$$

¿Por qué al minimizar esta función objetivo se cumplen simultáneamente las ecuaciones (1) y (2)?

Para encontrar $\mathbf{f}$, podermos derivar $V(\mathbf{f})$ con respecto a $\mathbf{f}$ e igualar a cero.

Utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}||\mathbf{X}\mathbf{f} + \mathbf{z}||^2 = 2\mathbf{X}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X}\mathbf{f} + \mathbf{z}) \tag{5}$$

donde $\mathbf{X}$ es una matriz y $\mathbf{z}$ un vector, encuentre:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}||\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}||^2 = \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}||\mathbf{W}\mathbf{f}||^2 = \tag{7}$$

Usando (6) y (7), encuentre:

$$\frac{\partial V(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} = \tag{8}$$

Igualando a cero la ecuación anterior, encuentre $\mathbf{f}$:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f} = \tag{9}$$

Buenos resultados en imágenes se obtienen con $\lambda = 10^6$.

Ejercicios:

1) Escriba una ecuación matricial para encontrar la imagen restaurada $\hat{\mathbf{F}}$ conociendo G, H, W y λ. (aquí H es mayúscula)

    ____

2) Escriba un programa en Matlab o Python que restaure una imagen G que tenga como parámetros de entrada G, h y W. (aquí h es mayúscula)

3) Un criterio simple para minimizar el rizado de la fila restaurada es que la solución encontrada para f tenga mínima norma

    a) ¿Por qué?,

    ____

    b) Encuentre cómo sería W en la ecuación (2) para este criterio.

    ____

    c) ¿Cómo quedaría (4) en este caso?

    ____

4) En clase vimos que un criterio que puede ser utilizado para minimizar el rizado de la solución f, es minimizando la diferencia entre g y un vector conformado por los primeros N elementos de f, que llamamos f_N. En este caso la restricción (2) puede ser escrita como

    $$||\mathbf{f}_N - \mathbf{g}|| \rightarrow \min \tag{10}$$

    donde f_N puede ser escrito en forma matricial como

    $$\mathbf{f}_N = \mathbf{P}\mathbf{f} \tag{11}$$

    con P una matriz de N x M elementos con una diagonal de “unos”:

    $$\mathbf{P} = \left[\qquad \qquad \qquad \right]$$

    Usando las ecuaciones (10), (11) y (1),

    a) Encuentre cómo sería W en la ecuación (2) para este criterio.

b) ¿Cómo quedaría (4) en este caso?

5) Un criterio muy intuitivo para reducir el rizado de la solución es minimizar las frecuencias altas de f (usando transformada de Fourier).

a) Encuentre cómo sería W en la ecuación (2) para este criterio.

b) ¿Cómo quedaría (4) en este caso?

[TIP] La expresión Wf en (2) deberían ser las frecuencias altas de f solamente, es decir, si X es la transformada discreta de Fourier de f, donde X es un vector de M elementos (el mismo número de elementos de f), podríamos multiplicar por cero los elementos de X correspondientes a las bajas frecuencias, esto se realiza multiplicando X por una matriz Q de MxM elementos con algunos "unos" en la diagonal y "ceros" en el resto. De esta manera Wf puede ser reemplazado por QX. Sabemos que la transformada discreta de Fourier de f puede ser computada como una multiplicación de f con una matriz B de MxM elementos con las funciones base de Fourier, es decir X es Bf. En este ejercicio debe definir las matrices Q y B, y con ellos encontrar W en la ecuación (2).

6) Encuentre n a partir de G sabiendo que el movimiento fue horizontal y uniforme.

[TIP] Estudie el promedio de las filas de la Transformada de Fourier de G para distintos valores de n. Pruebe con estos comandos y obtenga conclusiones.

```
F = imread('cameraman.tif'); % imagen original
n = 15; h = ones(1,n)/n; % mascara de degradacion
G = conv2(F,h,'valid'); % imagen degradada
X = fftshift(fft2(G)); % transformada de fourier de G centrada
K = log(abs(X)+1); % transformada en escala logaritmica
plot(mean(K)) % promedio de todas las filas de K
```

Se recomienda ver el Artículo de referencia disponible en la página web del curso: Imágenes > Material > "Introducción a la Restauración de Imágenes (Mery, 2003)".