DFT: Discrete Fourier Transform

$f(t) \rightarrow$ muestreo cada ΔT:

$$\tilde{f}(t) = f(t)\, S_{\Delta T}(t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t - n\Delta T)$$

La transformada de Fourier de $\tilde{f}(t)$ sería:

$$\tilde{F}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t)\, e^{-j2\pi w t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t - n\Delta T)\, e^{-j2\pi w t}\, dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta(t - n\Delta T)\, e^{-j2\pi w t}\, dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, e^{-j2\pi w n \Delta T} \qquad f_n = f(n\Delta T)$$

Se define la Transformada Discreta de Fourier como el muestreo de $\tilde{F}(w)$ a una frecuencia $w_m = \frac{m}{M\Delta T}$ para $m = 0, 1, 2, \ldots M-1$, es decir en un periodo del dominio de la frecuencia $\frac{1}{\Delta T}$ existen M muestras de $\tilde{F}(w)$.

Como el resultado es una función periódica de periodo $1/\Delta T$ tomamos como definición sólo los primeros M términos:

$$\boxed{F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j\frac{2\pi m n}{M}}} \quad \text{para } m=0,1 \ldots M-1$$

DFT

Similarmente se define la transformada discreta inversa:

$$\boxed{f_n = \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{+j\frac{2\pi m n}{M}}} \quad \text{para } n=0,1, \ldots M-1$$

IDFT

* La transformada rápida de Fourier (FFT) obtiene el mismo resultado que la DFT, pero con un cómputo más rápido, agrupando términos de 2 en 2, 4 en 4, etc.