TRANSFORMADAS

Señal en 1D : $\underline{f} = [f_0 \; f_1 \; \cdots \; f_{N-1}]^T$

Transformada : $\underline{F} = [F_0 \; F_1 \; \cdots \; F_{M-1}]^T$

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, b_{m,n}$$

$b_{m,n}$: función base

Ejemplo : DFT

$$b_{m,n} = e^{-j\frac{2\pi m n}{N}}$$

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, e^{-j\frac{2\pi m n}{N}}$$

$$= f_0 e^0 + f_1 e^{-j\frac{2\pi m}{N}} + f_2 e^{-j\frac{2\pi \cdot 2}{N}} \cdots f_{N-1} e^{-j\frac{2\pi (N-1)}{N}}$$

$$= f_0 b_{m,0} + f_1 b_{m,1} + f_2 b_{m,2} + \cdots f_{N-1} b_{m,N-1}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{m,0} & b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{b}_m \cdot \underline{f}$$

NOTACIÓN MATRICIAL

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0,N-1} \\ \vdots & & & \\ b_{N-1,0} & b_{N-1,1} & \cdots & b_{N-1,N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underset{N\times 1}{\underline{F}}}_{\text{transformada}} = \underbrace{\underset{N\times N}{\underline{B}}}_{\text{funciones base}} \cdot \underbrace{\underset{N\times 1}{\underline{f}}}_{\text{señal 1D}}$$

Muchas veces $\underline{B}$ es ortonormal:

$$\underline{B}^T \underline{B} = \underline{I} \Rightarrow \underline{B}^{-1} = \underline{B}^T$$

$$\Rightarrow \underline{f} = \underline{B}^T \underline{F}$$: Transformada inversa

APLICACIONES:

- La información contenida en $\underline{F}$ es más fácil de interpretar que la información en $\underline{f}$, como si fueran dos idiomas.

IMPORTANTE:

- Las bases deben ser funciones representativas dentro de las posibles funciones que puedan estar presentes en $\underline{f}$.

COMPRESIÓN:

- Si $\underline{f}$ es representada con pocos elementos en $\underline{F}$, es decir si hay muchos elementos $|F_m| \leq \varepsilon$, entonces es posible almacenar $\underline{f}$ sólo guardando los elementos de F mayores a ε. Como las bases son conocidas entonces la reconstrucción es posible.
  De esta manera hay una reducción del tamaño en bytes de la señal.

$\longrightarrow$ IMG04_compresion.m

Señal en 2D:

imagen $\underline{f} = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0,N-1} \\ & & & \\ f_{N-1,0} & \cdots & & f_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$

La Transformada queda definida como:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, \underbrace{b(u,x)}\, \underbrace{b(y,v)}$$

En Fourier

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j\frac{2\pi u x}{N}}\, e^{-j\frac{2\pi v y}{N}}$$

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} b_{u,0} & b_{u,1} & \cdots & b_{u,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{00} & & \cdots & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & \cdots & & f_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,v} \\ b_{1,v} \\ \vdots \\ b_{N-1,v} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\underline{F} = \underline{B}^T \underline{f}\, \underline{B}$$

→ en caso de que B sea ortonormal: $\underline{f} = \underline{B}\,\underline{F}\,\underline{B}^T$