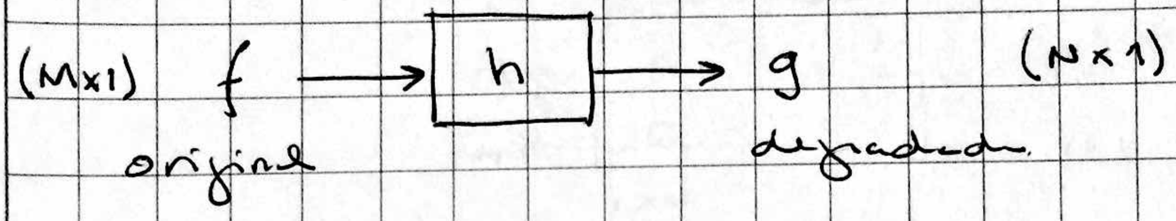
RESTAURACIÓN DE IMÁGENES II

Esquema de degradación por filt



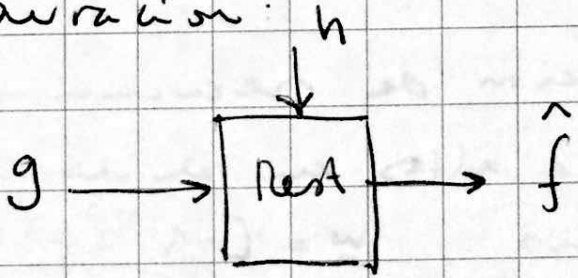
$h = [h_1 \ h_2 \dots h_n]$ ej: $h_i = \frac{1}{n}$

$$\underset{(N \times M)}{H} = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \cdot 0 \\ & h & 0 \cdot\cdot 0 \\ & \cdot & \\ & & h \end{bmatrix}$$

g = conv2(f, h, 'valid')

$g = Hf$

Restauración:



Función objetivo con operadores de Lagrange:

$$Hf = g \implies \|Hf - g\| = 0$$

Criterio

$$\|Wf\| \rightarrow \min$$

Ejemplo. MINIMIZAR RIZADO

a) → los primeros N elementos de f lo más parecido a g.

$$\underset{N\times 1}{f_N} = \overbrace{\underset{N\times 1}{\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & 0 \end{bmatrix}}}^{P} \underset{M\times 1}{f}$$

$f_N = Pf$ criterio: $\|Pf - g\| \rightarrow \min$

$\|Pf - Hf\| =$

con $W = P - H$. $\|Wf\| \rightarrow \min$

b) Minimización de norma de f

$W = I$

c) Minimización de frecuencias altas.

Filtro pasa altos en el dominio del espacio: $\underline{w} = [-1 \;\; 2 \; -1]$

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Minimización de frecuencias altas en el dominio de la frecuencia..

f → Transformada de Fourier → norma de frecuencias altas.

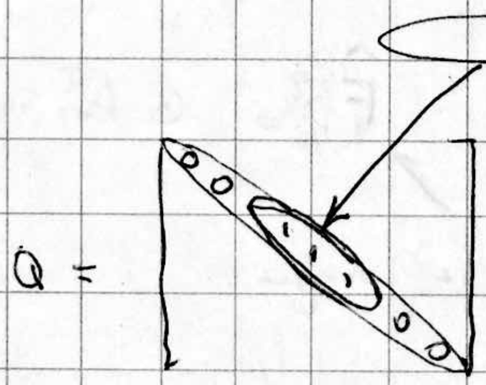
En forma matricial:

$$\underline{W}_{DFT} \, \underline{f} = DFT(f) = \underline{F}$$

$$W_{DFT}(i,k) = e^{-j\frac{2\pi ik}{M}} \leftarrow \text{Matriz } M \times M$$

¿Como hacer filtro pasa altos en Fourier?

$$\underline{F} = [F_0 \;\; F_1 \;\; \cdots \;\; F_{M-1}]^T$$



frecuencias centrales son las altas

$\|QF\| \rightarrow \min$

buen criterio

$$\underline{W} = \underline{Q} \, \underline{W}_{DFT}$$

Solución:

$$J(f) = \lambda \|Hf - g\|^2 + \|Wf\|^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial J}{\partial f} = 2\lambda H^T(Hf - g) + 2W^T W f = 0$$

$$\cancel{2}\lambda H^T H f + \cancel{2} W^T W f = +\cancel{2}\lambda H^T g$$

$$(\lambda H^T H + W^T W) f = \lambda H^T g$$

$$\hat{f} = \underbrace{\lambda[\lambda H^T H + W^T W]^{-1} H^T}_{\underline{A}} g$$

$$\underline{\hat{f}} = \underline{A}\,\underline{g} \qquad \hat{f}^T = g^T A^T$$

$$\hat{F} = G A^T$$

↗ toda la imagen

¿Qué pasa cuando la degradación no es fila por fila sino en toda una región? ej: desenfoque?

$$F \longrightarrow \boxed{\text{degradación}} \longrightarrow G$$

$$G = \text{conv2}(F, h, \text{'valid'})$$

$$h = \text{ones}(n,n)/n^2;$$

El planteamiento $J(f)$ no sirve (?)

Se puede plantear G como HF?

La respuesta es sí! Pero con mucha memoria:

$$\text{Imagen } F \longrightarrow \tilde{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{columna 1} \\ \leftarrow \text{colum 2} \\ \\ \leftarrow \text{colum } N_f \end{array}$$

$$G \longrightarrow \tilde{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{columna 1} \\ \\ \text{columna } N_g \end{array}$$

Luego: $\tilde{g} = \tilde{H}\tilde{f}$ $\tilde{H}$: Matrices Circulantes Block Toeplitz

ver EjemploCirculante.m

Deconvolución en Fourier:

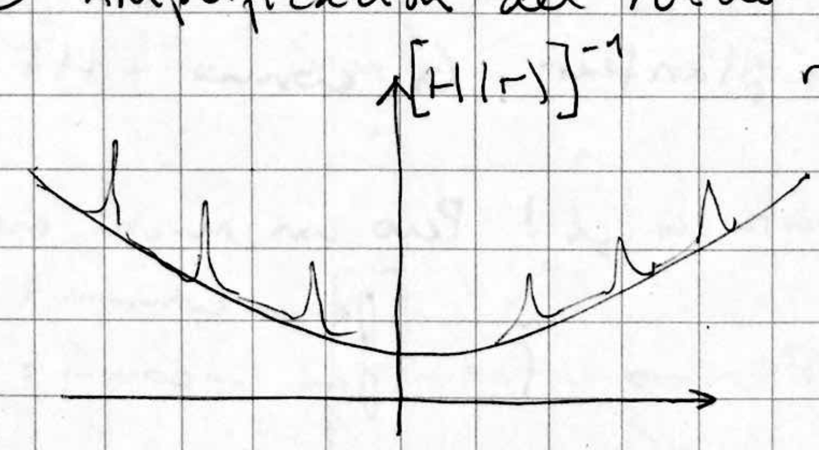
$F \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow G \qquad G(u,v) = F(u,v)\,H(u,v)$

Filtro inverso: $F(u,v) = \dfrac{G(u,v)}{H(u,v)} \xrightarrow{\text{luego}} \text{ifft2}$

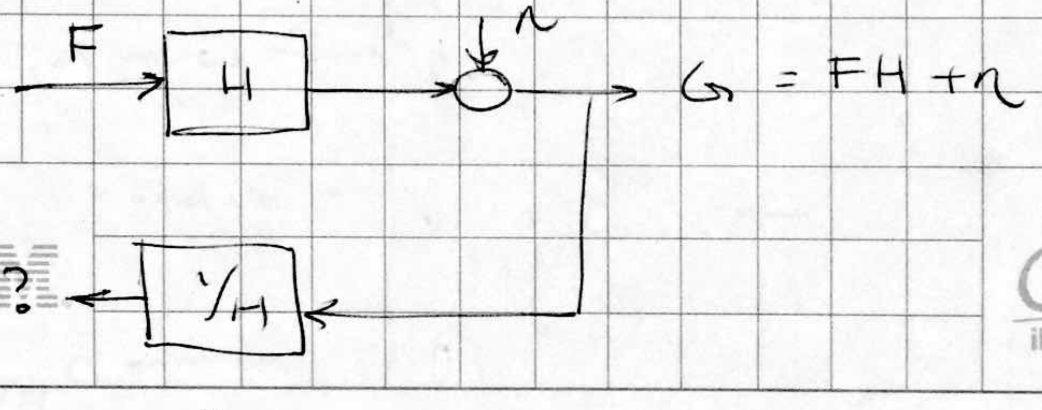
¿Por qué no funciona?

① H tiene ceros y valores cercanos a cero.

② Amplificación del ruido.



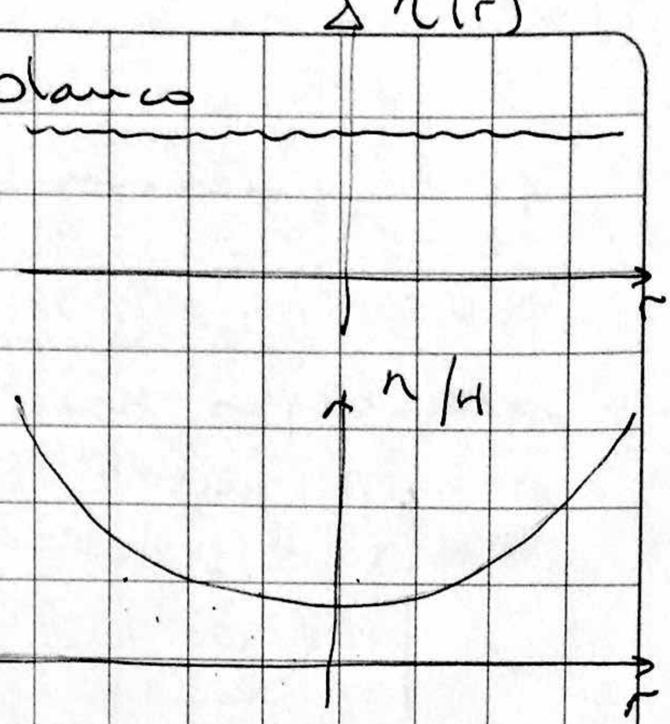
$r = \sqrt{u^2+v^2}$



$G = FH + n$

$\hat{F} = F + \frac{n}{H}$

Espectro del ruido blanco



Para frecuencias altas n/H es muy grande!

Ver ejemploDeconvolution (primera parte sin C)

Solución:

H^* conjugado complejo

$$W = \frac{1}{H} = \frac{H^*}{H H^*} = \frac{H^*}{|H|^2}$$

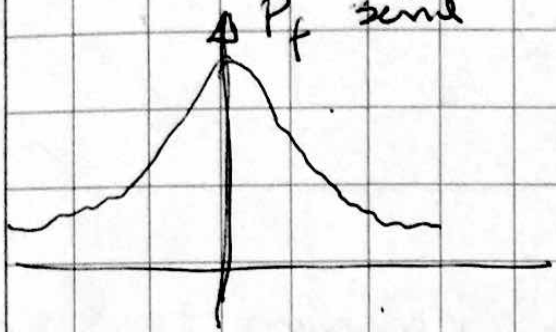
$$W \simeq \frac{H^*}{|H|^2 + R}$$

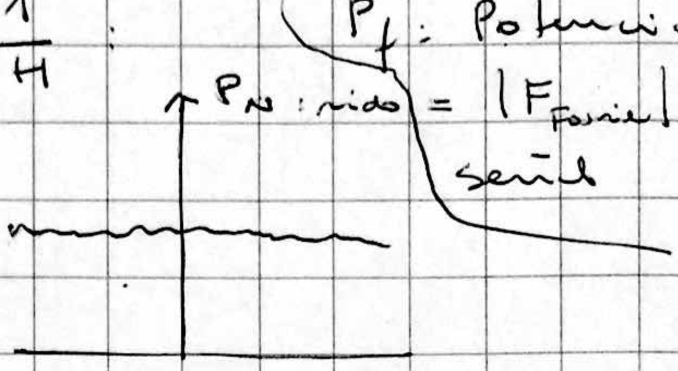
① → evita división por cero

② → evita amplificación del ruido

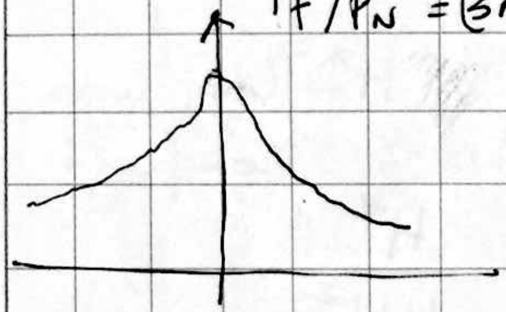
① se evita con $R \neq 0$ por ejemplo $R = cte$

② Se evita con una función que para frecuencias altas haga que $\frac{1}{H}$ sea bajo y que para frecuencias ~~altas~~ bajas sea $\frac{1}{H}$:





P_f : Potencia $= |F_{Fourier}|^2$ señal



Una buena solución sería:

$$R = C / SNR^2$$

$$W = \frac{H^*}{|H|^* + \frac{C}{SNR^2}}$$

$\rightarrow$ r bajo $\Rightarrow$ R bajo

$\Rightarrow W \simeq 1/H$

$\rightarrow$ r alto $\Rightarrow$ R alto

$\Rightarrow W = \frac{H^*}{R}$

$$\frac{1}{SNR^2} \sim r^\beta$$

Tambien se puede modelar como

$$W(u,v) = \left(\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2} \right)^a \left(\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + c/SNR^2} \right)^{1-a}$$

$a = 1$ Filtro inverso total

$a = 0$ " " corregido total.