UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Ciclo Básico Común

Análisis Matemático I

Cátedra Palacios - Puebla

Notas teóricas III: Límites y continuidad

1. El concepto de límite

El concepto de función es uno de los conceptos más importantes de la ciencia, no sólo en matemática pura, sino también en las aplicaciones prácticas. Las leyes físicas no son más que enunciados referentes a la manera en la cual ciertas cantidades dependen de otras cuando se permite que algunas de ellas varíen. Así, el tono de la nota emitida al tensar una cuerda depende de la longitud, el peso y la tensión de la cuerda; la presión atmosférica depende de la altitud, y la energía de una bala depende de su masa y de su velocidad. La tarea del físico o el ingeniero es determinar la naturaleza, exacta o aproximada, de esta dependencia funcional.

Uno de los aspectos más importantes en el estudio de esta dependencia funcional es la noción de continuidad: ¿cómo varía la variable dependiente a medida que varía la variable independiente? El *cómo* tiene un sentido preciso: ¿varía suavemente o varía bruscamente? Vamos a ver en esta nota que esta pregunta es una pregunta profunda, y que de hecho les llevó a los matemáticos del siglo XVII y XVIII mucho tiempo formalizar.

1.1. Límite en el infinito

En esta sección nuestro objetivo será estudiar el comportamiento asintótico de una función, es decir, qué es lo que hace una función «a largo plazo» o en términos matemáticos, *en el infinito*. Comencemos con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.1. Hallar el comportamiento a largo plazo de $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Para ver qué pasa con los valores que toma f para valores de x arbitrariamente grandes, podemos a priori tratar de hacer unas pocas cuentas para tener algunos datos:

$$f(1000) \approx 0{,}001 \quad f(100000) \approx 0{,}00001 \quad f(1000000) \approx 0{,}000001 \ldots$$

Es decir, a medida que los valores de x crecen arbitrariamente, los «resultados» de f se hacen arbitrariamente pequeños. Recordemos lo que sucedía para la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$. Para expresar esta idea que los resultados cada vez se parecen más a 0 cuando los x son arbitrariamente grandes, escribimos en símbolos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

¿Qué sucede cuando x tiende a $-\infty$? Ciertamente vale el mismo resultado. O sea, también tenemos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$\square$

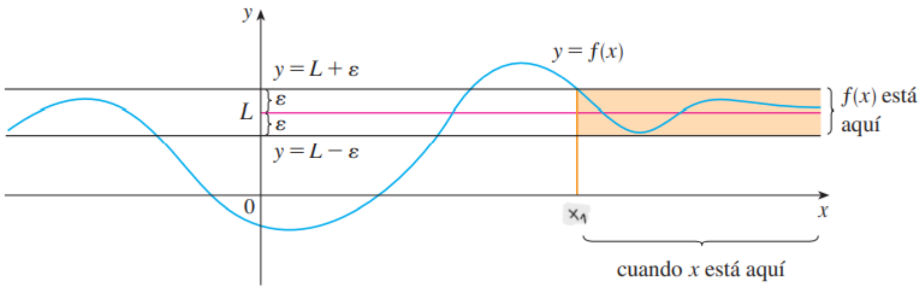
Este límite que calculamos es de mucha importancia porque en base a él calcularemos otros más complejos.

Demos ahora una definición formal.

Definición 1.1. Sea $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{D}$ no está acotado superiormente. Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es *límite de f en $+\infty$* si para todo $\epsilon > 0$ existe $x_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon, \quad \forall\, x > x_1.$$

O, equivalentemente, para todo $x > x_1$, se verifica que $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$, como se muestra en la figura:



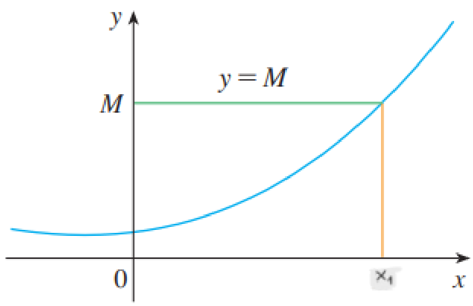
Como notación, usaremos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Diremos en tal caso que la recta de ecuación $y = L$ es una *asíntota horizontal a derecha* para f.

Decimos que la función f tiende a $+\infty$ en $+\infty$ y lo notamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si para todo $M > 0$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) > M \quad \forall x > x_1$$



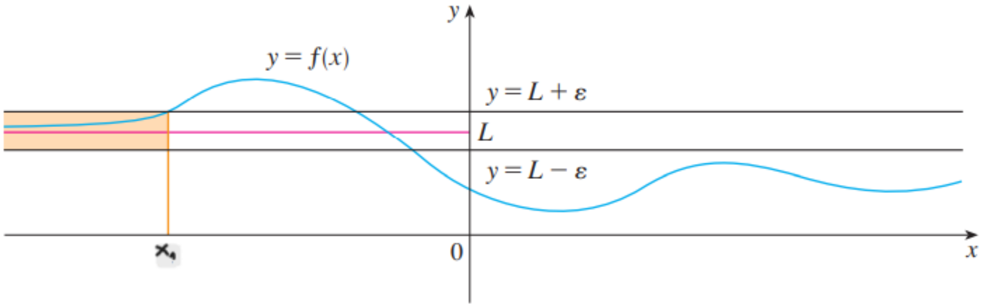
Análogamente, decimos que f tiende a $-\infty$ en $+\infty$ y lo notamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si para todo $M < 0$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < M \quad \forall x > x_1.$$

Si una función no tiene límite (finito) en $+\infty$ diremos que *diverge en el infinito* o simplemente que no tiene límite allí.

Definición 1.2. Sea $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{D}$ no está acotado inferiormente. Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es *límite de f en $-\infty$* si para todo $\epsilon > 0$ existe $x_1 < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon, \quad \forall\, x < x_1.$$



Como notación, usaremos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Diremos en tal caso que la recta de ecuación $y = L$ es una *asíntota horizontal a izquierda* para f. Si una función no tiene límite en $-\infty$ diremos que *diverge en* $-\infty$ o simplemente que no tiene límite allí.

Decimos que la función f tiende a $+\infty$ en $-\infty$ y lo notamos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si para todo $M > 0$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) > M \quad \forall x < x_1$$

Análogamente, decimos que f tiende a $-\infty$ en $-\infty$ y lo notamos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si para todo $M < 0$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < M \quad \forall x < x_1$$

Ejemplo 1.2.

1. Tenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n es par y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n es impar.
3. Tenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente a lo que sucedía para sucesiones, tenemos ciertos recursos para calcular límites como el Álgebra de límites o el Teorema de comparación, que siguen siendo válidos al pasar a variable real.

Teorema 1.1. ***[Álgebra de límites]*** *Consideremos las funciones $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{D}$ no está acotado superiormente. Supongamos que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = M \in \mathbb{R}.$$

Entonces

I) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = L+M$

II) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$

III) *Si* $g(x)\neq 0$ *para* $x>x_0$ *y* $M\neq 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

IV) $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)| = |L|$

V) *Si* $L>0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{g(x)} = L^M$

Los mismos resultados son válidos si tomamos límite con x tendiendo a $-\infty$.

Ejemplo 1.3. Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, vamos a calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)-7|+(f(x))^2}{5-\sqrt{f(x)-1}}$$

Utilizando el álgebra de límites tenemos que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-7| = |5-7| = 2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^2 = 5^2 = 25$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(|f(x)-7|+(f(x))^2) = 2+25 = 27$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)-1} = \sqrt{5-1} = 2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 5-\sqrt{f(x)-1} = 5-2 = 3$

Luego, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)-7|+(f(x))^2}{5-\sqrt{f(x)-1}} = \dfrac{27}{3} = 9.$

Las mismas observaciones que realizamos al estudiar sucesiones acerca de cuales límites son indeterminados y cuales no, son válidos para límites en infinito de funciones de variable real.

Ejemplo 1.4. Hallar los límites en infinito y dar las ecuaciones de las asíntotas horizontales de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{1+2x}{1+2x^2}$$

En este caso no podemos utilizar directamente el Álgebra de límites, ya que el numerador y el denominador tienden a infinito. Para ver qué pasa con los valores que toma f para valores de x arbitrariamente grandes, podemos a priori tratar de hacer unas pocas cuentas para tener algunos datos:

$$f(1000)\approx 0{,}001 \quad f(100000)\approx 0{,}00001 \quad f(1000000)\approx 0{,}000001\ldots$$

Aparentemente, los valores de f se acercan a cero. Veamos que esto es efectivamente así, sacando como "factor común" las mayores potencias de x en el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x}{1+2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}{x^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{\left(\dfrac{1}{x}+2\right)}{\left(\dfrac{1}{x^2}+2\right)}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+2 = 2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}+2 = 2$, aplicando el álgebra de límites nos queda:

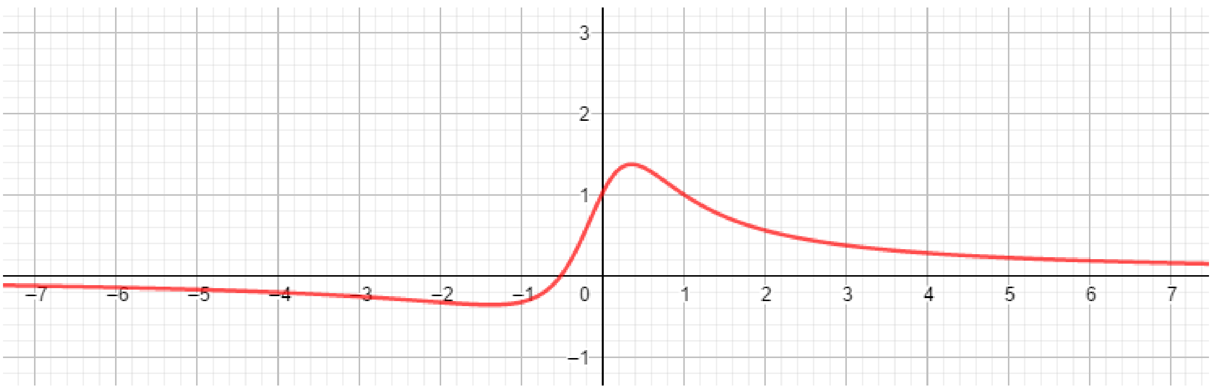
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Observemos que podríamos repetir esta cuenta sin ningún cambio para obtener el límite en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Concluimos que $y = 0$ es asíntota horizontal (tanto a derecha como a izquierda).

La siguiente figura corresponde al gráfico de la función f, donde podemos observar que el gráfico de f se "parece" a la recta $y = 0$ cuando el valor absoluto de x es suficientemente grande.



□

Ejemplo 1.5. Hallar los límites en infinito y dar las ecuaciones de las asíntotas horizontales de $f : (-\infty, -4] \cup [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x}}{5x+10}$$

Nuevamente no podemos utilizar directamente el Álgebra de límites, ya que el numerador y el denominador tienden a infinito. Volvemos a sacar como "factor común" las mayores potencias de x en el numerador (dentro de la raíz) y en el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{5x+10} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\dfrac{4}{x})}}{x(5+\dfrac{10}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{(1+\dfrac{4}{x})}}{x(5+\dfrac{10}{x})}$$

Como x tiende a $+\infty$, tenemos que $x > 0$ y por lo tanto, $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Nos queda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{(1+\frac{4}{x})}}{x(5+\frac{10}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(1+\frac{4}{x})}}{5+\frac{10}{x}} = \frac{1}{5},$$

al utilizar el álgebra de límites ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(1+\frac{4}{x})} = 1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 + \frac{10}{x} = 5$.

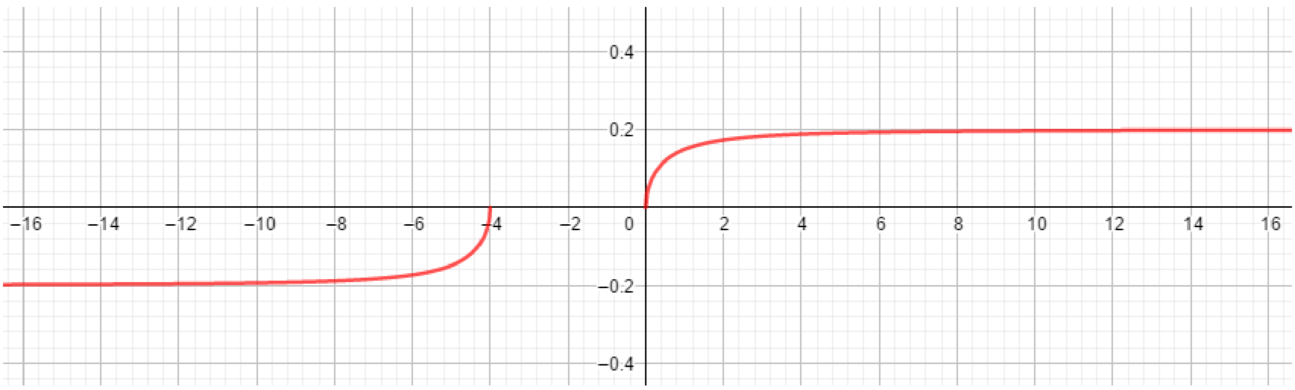
La recta $y = \frac{1}{5}$ es una asíntota horizontal a derecha.

Cuando x tiende a $-\infty$, tenemos que $x < 0$ y por lo tanto $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Reemplazando nos queda

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\sqrt{(1+\frac{4}{x})}}{x(5+\frac{10}{x})} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\sqrt{(1+\frac{4}{x})}}{5+\frac{10}{x}} = -\frac{1}{5}$$

La recta $y = -\frac{1}{5}$ es una asíntota horizontal a izquierda.

La siguiente figura corresponde al gráfico de la función f, donde podemos observar que el gráfico de f se "parece" a la recta $y = \frac{1}{5} = 0,2$ cuando x tiende a $+\infty$ y a la recta $y = -\frac{1}{5} = -0,2$ cuando x tiende a $-\infty$.



$\square$

También es posible que una función tenga **asíntotas oblicuas**. Éstas son rectas no verticales cuya distancia al gráfico de f tiende a 0 cuando x tiende a infinito. Es decir, si la ecuación de la recta oblicua es $y = mx + b$, se verifica que

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$$

Para que exista una asíntota oblicua será necesario que existan los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

Acá, cuando tomamos límite, puede ser que x tienda a $+\infty$ o a $-\infty$. Para resumir ambos casos pusimos directamente ∞, pero a la hora de calcular los límites deberemos indicar si x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Ejemplo 1.6. Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y oblicuas de

$$f(x) = \frac{x^2|x| - x^3 + 2x}{x^2+1}$$

Comenzamos analizando si la función posee una asíntota horizontal a derecha. En este caso, como x tiende a $+\infty$, tenemos que $x > 0$ y entonces $|x| = x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2|x| - x^3 + 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})} = 0$$

Luego, $y = 0$ es asíntota horizontal a derecha.

Veamos ahora si la función posee una asíntota horizontal a izquierda. En este caso, como x tiende a $-\infty$, tenemos que $x < 0$ y entonces $|x| = -x$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2|x| - x^3 + 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3 - x^3 + 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3 + 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-2+\frac{2}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(-2+\frac{2}{x^2})}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Luego, la función f no tiene asíntota horizontal a izquierda.

Analicemos si la función tiene una asíntota oblicua a izquierda.

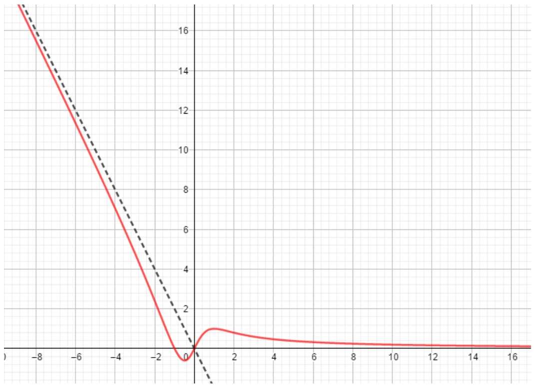
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2|x| - x^3 + 2x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3 + 2x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-2+\frac{2}{x^2})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})} = -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2|x| - x^3 + 2x}{x^2+1} - (-2x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3 + 2x}{x^2+1} + 2x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3 + 2x + 2x^3 + 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = 0$$

Luego $y = -2x$ es asíntota oblicua a izquierda.

En la siguiente figura se observan el gráfico de f y la asíntota oblicua con línea punteada.



Versiones análogas al teorema del sandwich y a la propiedad de "cero por acotado"que hemos visto para sucesiones son válidas para límites en infinito.

Teorema 1.2. *Consideremos las funciones $f, g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{D}$ no está acotado superiormente.*

*a) **[Teorema del Sandwich]** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = L$ y a partir de cierto x_0 vale*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = L.$$

*b) **["Cero por acotado"]** Si $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $g(x)$ es una función acotada, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$

c) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y a partir de cierto x_0 vale $f(x) \leq g(x)$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Resultados análogos son válidos para límites en $-\infty$.

Ejemplo 1.7. Determinar $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ si la función $g(x)$ verifica

$$\frac{10x^2-1}{2x^2+1} < g(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

para todo $x > 1$.

Llamemos $f(x) = \dfrac{10x^2-1}{2x^2+1}$ y $h(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ y calculemos sus límites en infinito.

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2-1}{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot(10-\frac{1}{x^2})}{x^2\cdot(2+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{10}{2} = 5.$

- $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x\cdot(1-\dfrac{1}{x})}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$

  $= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = 5.$

  Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 5$, por el teorema del sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 5.$$

1.2. Límite en un punto

1.2.1. Definición de límite en un punto

Vamos a comenzar esta sección con un ejemplo sencillo para fijar ideas.

Ejemplo 1.8. Considere la función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2 + 3x.$$

¿Cómo se comportan los valores que toma f cuando la variable independiente está *arbitrariamente cerca* de $x_0 = 5$ sin ser necesariamente 5? Una posibilidad sería hacer una tabla de valores para la variable independiente y observar cómo se comportan las imágenes:

x	$f(x)$
4.98	16.94
4.989	16.967
4.999	16.997
5.0001	17.0003
5.00001	17.00003

Por los resultados analíticos y por la gráfica de f vemos que cuando x está arbitrariamente cerca de $x_0 = 5$ entonces $f(x)$ está arbitrariamente cerca de 17.

¿Podremos hallar un intervalo alrededor de $x_0 = 5$ de modo tal que $f(x)$ no se aleje en más de 0,1 de 17? Dicho de otro modo: ¿podemos hallar un $\delta > 0$ de modo tal que

$$5 - \delta < x < 5 + \delta \implies 17 - 0{,}1 < f(x) < 17 + 0{,}1?$$

Probemos con esta estrategia: pedimos que pase $17 - 0{,}1 < f(x) < 17 + 0{,}1$ y luego aplicamos las propiedades del orden para encontrar un δ:

$$17 - 0{,}1 < f(x) < 17 + 0{,}1 \iff 17 - 0{,}1 < 2 + 3x < 17 + 0{,}1 \iff 15 - 0{,}1 < 3x < 15 + 0{,}1$$

$$\iff \frac{15 - 0{,}1}{3} < x < \frac{15 + 0{,}1}{3} \iff 5 - \frac{0{,}1}{3} < x < 5 + \frac{0{,}1}{3}$$

Es decir, el intervalo que garantiza lo pedido es $(5 - \frac{0,1}{3}, 5 + \frac{0,1}{3})$, que es en efecto un intervalo alrededor del 5. Tomando así $\delta < \frac{0,1}{3}$, hallamos lo que necesitabamos. Así como lo hicimos con 0,1, ¿podríamos haberlo hecho con alguna otra tolerancia alrededor de 17? Si miramos nuestro razonamiento, nos damos cuenta que la deducción del δ no cambia si lo hacemos para ϵ genérico en vez de 0,1:

$$17-\epsilon < f(x) < 17+\epsilon \iff 17-\epsilon < 2+3x < 17+\epsilon \iff 15-\epsilon < 3x < 15+\epsilon$$

$$\iff \frac{15-\epsilon}{3} < x < \frac{15+\epsilon}{3} \iff 5-\frac{\epsilon}{3} < x < 5+\frac{\epsilon}{3}$$

El δ que nos asegura lo pedido es $\delta < \frac{\epsilon}{3}$.

Esto nos indica que el límite de la función f cuando x tiende a 5 es 17 y lo notamos $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 17$.

Procedamos con la definición formal de límite en un punto. Así como sucedió para los límites de sucesiones y límites de funciones de variable real en infinito, luego tendremos diversas herramientas que nos permitirán calcular los límites puntuales.

Definicion 1.1: Weierstrass: $\epsilon - \delta$

Sea f una función definida en algún intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0. Decimos que un número real L es límite de f cuando x tiende a x_0 y escribimos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

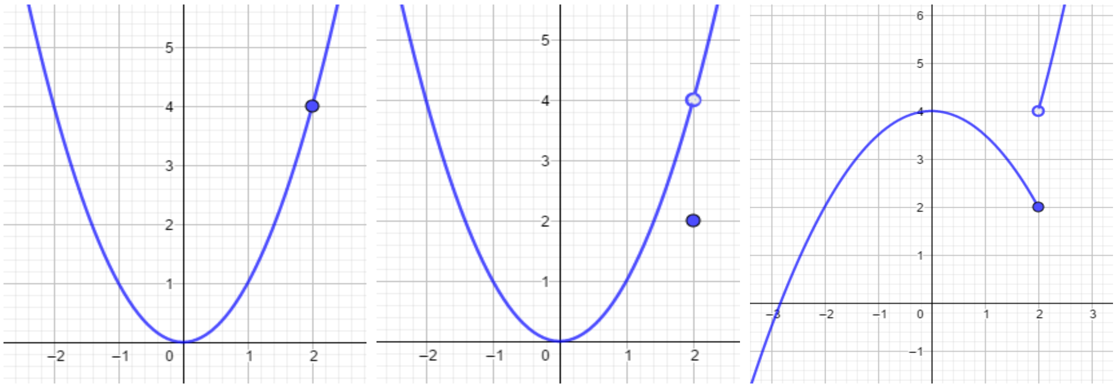
si para *todo* $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ de modo tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Una manera de pensar en esta definición es en términos de la *controlabilidad* de f. Por ejemplo, si suponemos que $f(x)$ mide el peso de una cierta barra de acero en términos del largo x, esta definición dice que el peso L de una barra puede especificarse con una incertidumbre de $\epsilon > 0$, si medimos la longiud x con una precisión mejor que δ.

El concepto de límite es el resultado de un trabajo colectivo que duró más de un siglo. Todavía en el siglo XIX los matemáticos tenían una visión no del todo transparente sobre la noción de límite. El trabajo de Louis-Agustin Cauchy (1789-1857) introdujo la idea de aproximación *arbitraria*, pero la formulación actual en términos de épsilon y delta fue dada por Karl Weierstrass (1815-1857).

Ejemplo 1.9. Observemos los siguientes gráficos de tres funciones y veamos que sucede con el límite cuando x tiende a 2.



(a) f(x) (b) g(x) (c) h(x)

Para las dos primeras funciones tenemos que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \quad y \quad \lim_{x \to 2} g(x) = 4$$

ya que no es importante cual es el valor de $f(x)$ y de $g(x)$ en $x = 2$ sino alrededor de ese punto. Para la tercera función el límite cuando x tiende a 2 no existe, ya que para los x mayores a 2 (los x a la derecha de 2) la función tiende a 4 mientras que para los x menores a 2 (los x a la izquierda de 2) la función tiende a 2. Para indicar estos límites, que llamamos "por izquierda" y "por derecha", vamos a definir los llamados "límites laterales".

Definición 1.3. [Límites laterales] Sea f una función definida en algún intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0.

- Decimos que un número L es *límite por derecha* de una función f en x_0 y lo notaremos
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$
si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

- Decimos que un número M es *límite por izquierda* de una función f en x_0 y lo notaremos
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = M$$
si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - M| < \epsilon$$

Ejemplo 1.10. Para las funciones cuyos gráficos se presentaron en el ejemplo anterior tenemos que:

- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 4$
- $\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = 4$

- $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 4$, $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 2$ y no existe $\lim_{x\to 2} h(x)$.

Observemos que, para que exista el límite en un punto, ambos límites laterales deben ser iguales. Ésto es lo que afirma el siguiente teorema:

Teorema 1.1

Sea f una función definida en algún intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Definición 1.4. [Funciones divergentes en un punto] Cuando una función no posee límite en un punto diremos que *diverge* allí, o simplemente que *no tiene límite* en ese punto.

Diremos que f *diverge a* $+\infty$ *en* x_0 y lo notaremos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

si para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$

Diremos que f *diverge a* $-\infty$ *en* x_0 y lo notaremos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

si para todo $N < 0$, existe $\delta > 0$ tal que

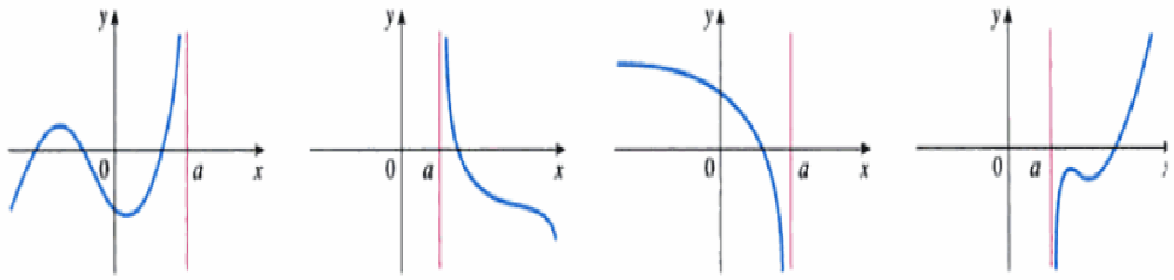
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N$$

Definición 1.5. Sea f una función definida en algún intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0. Si alguno de los límites laterales

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

da $+\infty$ o $-\infty$ decimos que la recta vertical de ecuación $x = x_0$ es una *asíntota vertical* para f.

Esquemáticamente, se pueden presentar algunas de las situaciones que se observan en la siguiente figura.



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ (c) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (d) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

Ejemplo 1.11. Hallar los límites laterales en $x = 0$ para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Para calcular

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

tenemos que ver «a qué se parecen» los valores que toma f a medida que $x > 0$ se hace cada vez más cercano a cero. Hagamos algunas cuentas:

$$f(0{,}001) = 10^3, \quad f(0{,}00001) = 10^5, \quad f(0{,}0000001) = 10^7 \ldots$$

Ya tenemos una idea de qué pasa: cuando $x > 0$ es pequeño, $f(x)$ toma valores *arbitrariamente grandes cerca del 0*. Así escribimos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

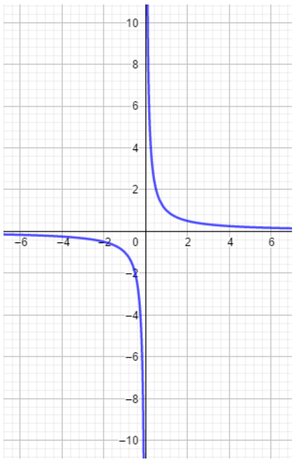
Para calcular $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ repetimos la estrategia, pero esta vez con $x < 0$, veamos:

$$f(-0{,}001) = -10^3, \quad f(-0{,}00001) = -10^5, \quad f(0{,}0000001) = -10^7 \ldots$$

Cuando $x < 0$ es cada vez más cercano a 0, $f(x)$ toma valores *arbitrariamente chicos* (con valor absoluto arbitrariamente grande). Así escribimos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

La recta $x = 0$ es una *asíntota vertical* para f.



La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a la cual le calculamos los límites laterales en $x = 0$ y los límites en infinito al inicio de estas notas, es el ejemplo más sencillo de las funciones llamadas "homográficas".

1.2.2. Funciones homográficas

Las funciones homográficas son funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

o, equivalentemente, de la forma

$$f : \mathbb{R} - \{B\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{A}{x-B} + C, \quad A \neq 0$$

Es fácil pasar de una expresión a la otra. La segunda forma es más conveniente a la hora de hacer el gráfico de la función ya que podemos obtenerlo aplicando transformaciones rígidas y no rígidas al gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ejemplo 1.12. Veamos las principales características de la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

- El dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $C_+ = (0, +\infty)$ y $C_- = (-\infty, 0)$. Esta función no tiene ceros.
- Es una función inyectiva ya que para todo $x_1, x_2 \neq 0$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

- La imagen es $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} /$ existe $x \neq 0$ tal que $f(x) = y\}$

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = y$$

Vemos que si $y \neq 0$ tenemos

$$x = \frac{1}{y}$$

Entonces

$$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

- la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para el gráfico de f ya que

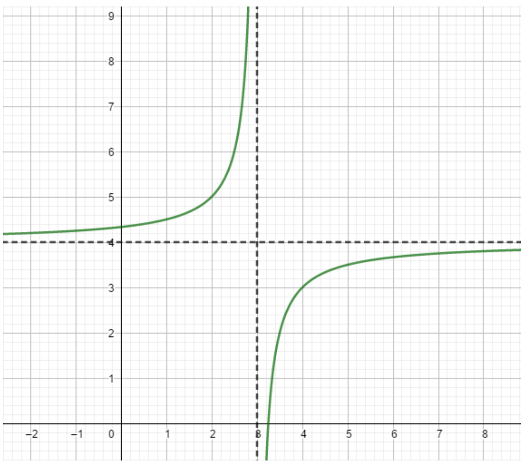
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- la recta de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical para el gráfico de f ya que

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Ejemplo 1.13. A partir del gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, realicemos el gráfico de $g(x) = \frac{-1}{x-3}+4$.

Para graficar la función g se aplican los corrimientos que estudiamos en la unidad 1: se realiza el gráfico simétrico del de f respecto al eje x, se lo corre 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba.



La función g verifica:

- $Dom(g) = \mathbb{R} - \{3\}$
- $Im(g) = \mathbb{R} - \{4\}$
- $x = 3$ es asíntota vertical de g ya que $\lim_{x\to3^+} \frac{-1}{x-3}+4 = -\infty$ y $\lim_{x\to3^-} \frac{-1}{x-3}+4 = +\infty$.
- $y = 4$ es asíntota horizontal de g ya que $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x-3} + 4 = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-3} + 4 = 4$.
- g crece en los intervalos $(-\infty, 3)$ y $(3, +\infty)$.

- $$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x-3} + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x-3} = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{13}{4}$$

  Por lo tanto $C_0 = \left\{\frac{13}{4}\right\}$. A partir del gráfico podemos observar que:

  $$C_+ = (-\infty, 3) \cup (\frac{13}{4}, +\infty), \quad C_- = (3, \frac{13}{4})$$

- g es inyectiva ya que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$

  $$g(x_1) = g(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x_1 - 3} + 4 = \frac{-1}{x_2 - 3} + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x_1 - 3} = \frac{-1}{x_2 - 3}$$
  $$\Leftrightarrow \quad x_1 - 3 = x_2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

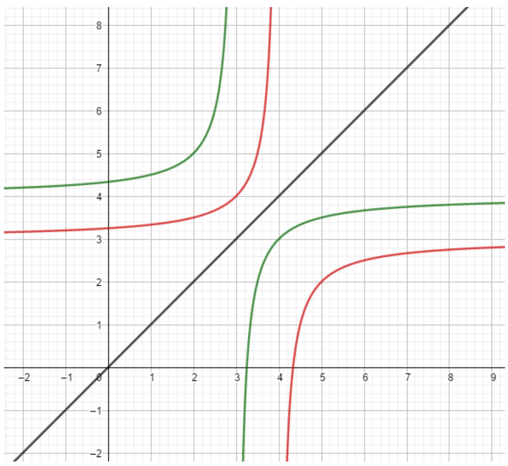
- $g : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{4\}$ es biyectiva. Por lo tanto existe $g^{-1} : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{3\}$. Calculemos su fórmula

  $$g(x) = y \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{x-3} + 4 = y \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{x-3} = y - 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{y-4} = x - 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1}{y-4} + 3$$

  Entonces
  $$g^{-1} : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{3\}, \quad g^{-1}(x) = \frac{-1}{x-4} + 3$$

  Observemos que la función inversa de g también es una función homográfica con asíntota vertical $x = 4$ y asíntota horizontal $y = 3$. Notemos la relación entre las asíntotas de g y g^{-1} debida a la simetría de los gráficos respecto a la recta $y = x$.

  En la siguiente figura vemos los gráficos de g (en verde) y g^{-1} (en rojo).



Ejemplo 1.14. Realicemos el gráfico y el análisis anterior para la función $h(x) = \dfrac{-2x-5}{x+3}$.

Para realizar el gráfico de h vamos a escribir a la función en la forma $h(x) = \dfrac{A}{x-B} + C$. Para ello buscamos A, B y C planteando:

$$h(x) = \frac{-2x-5}{x+3} = \frac{A}{x-B} + C = \frac{A + C(x-B)}{x-B}$$

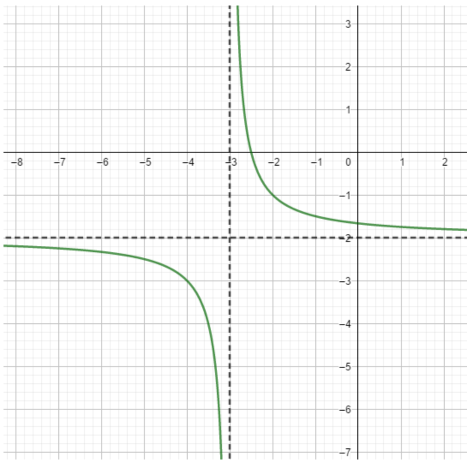
Para que las expresiones sean iguales pedimos

$$B = -3 \quad y \quad A + C(x+3) = -2x - 5$$

Igualando grado a grado obtenemos que $A = 1$ y $C = -2$, entonces

$$h(x) = \frac{1}{x+3} - 2$$

Ahora aplicamos las transformaciones que vimos antes: corremos 3 unidades a la izquierda al gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y 2 unidades hacia abajo.



La función h verifica:

- $Dom(h) = \mathbb{R} - \{-3\}$
- $Im(h) = \mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = -3$ es asíntota vertical de h ya que

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} - 2 = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} - 2 = -\infty$$

- $y = -2$ es asíntota horizontal de h ya que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3} - 2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x+3} - 2 = -2$$

- h decrece en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(-3, +\infty)$.

- $$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x-5}{x+3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{2}$$

  Por lo tanto $C_0 = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$. A partir del gráfico podemos concluir que

  $$C_+ = (-3, -\frac{5}{2}), \quad C_- = (-\infty, -3) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$$

- h es inyectiva ya que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-3\}$

  $$h(x_1) = h(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x_1-5}{x_1+3} = \frac{-2x_2-5}{x_2+3} \quad \Leftrightarrow \quad (-2x_1-5)(x_2+3) = (-2x_2-5)(x_1+3)$$

  $$\Leftrightarrow \quad -2x_1x_2 - 6x_1 - 5x_2 - 15 = -2x_1x_2 - 6x_2 - 5x_1 - 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

- $h : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$ es biyectiva.
  Por lo tanto existe $h^{-1} : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{-3\}$. Vamos a calcularla

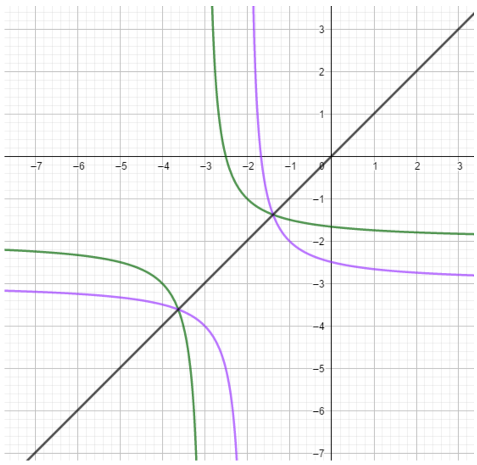
  $$h(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x-5}{x+3} = y \quad \Leftrightarrow \quad -2x-5 = y(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad -2x-5 = yx+3y$$

  $$\Leftrightarrow \quad -5-3y = yx+2x = x(y+2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3y-5}{y+2}$$

  Entonces
  $$h^{-1} : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{-3\}, \quad h^{-1}(x) = \frac{-3x-5}{x+2}$$

  Observemos que la función inversa de h también es una función homográfica con asíntota vertical $x = -2$ y asíntota horizontal $y = -3$.

  En la siguiente figura vemos los gráficos de h (en verde) y h^{-1} (en lila).



1.2.3. Álgebra de límites

Para calcular límites tenemos algunas herramientas, como hemos visto para límites en infinito. Entre ellas, el Álgebra de límites:

Teorema 1.2: Álgebra de límites

Sean f, g dos funciones con límites L y M en un punto común x_0. Entonces

I) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

II) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

III) Si $M \neq 0$ entonces $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

IV) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$

V) Si $L > 0$ entonces $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L^M$

Ejemplo 1.15. [Límites y polinomios]

I) Las funciones constantes tienen límite: dada la función constate $f(x) = a$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} a = a$$

II) La función $f(x) = x$ tiene límite para todo $x_0 \in \mathbb{R}$: tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

III) Utilizando *i*) y *ii*) del álgebra de límites, todo polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tiene límite en cualquier x_0, y vale además

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0).$$

Ejemplo 1.16. Calcular el límite

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$$

Utilizando el álgebra de límites y el ejemplo anterior tenemos que:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 1.17. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{5x + 1}$$

Utilizando el álgebra de límites y los límites de polinomios tenemos que:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{5x + 1} = \frac{0}{16} = 0$$

Ejemplo 1.18. Calcular el límite

$$\lim_{x\to -2} \frac{4x + 1}{x^2 + 2x}$$

En este caso no se puede utilizar el álgebra de límites ya que $\lim_{x\to -2} x^2 + 2x = 0$ pero vemos que sucede algo análogo a cuando calculamos el límite de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando x tiende a 0. Ésto es, tenemos un cociente en el cual el numerador tiende a un número distinto de 0 y el denominador tiende a 0. Este cociente diverge a ∞ ($+\infty$ o $-\infty$ dependiendo si nos acercamos a -2 por derecha o por izquierda).

- $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{4x + 1}{x^2 + 2x} = +\infty$ ya que $\lim_{x\to -2^+} 4x + 1 = -7$ y $x^2 + 2x < 0$ para $x > -2$ (por la regla de los signos el cociente será positivo).
- $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{4x + 1}{x^2 + 2x} = -\infty$ ya que $\lim_{x\to -2^+} 4x + 1 = -7$ y $x^2 + 2x > 0$ para $x < -2$ (por la regla de los signos el cociente será negativo).

Se suele escribir

$$\lim_{x\to -2} \frac{4x + 1}{x^2 + 2x} = \infty$$

donde ∞ no tiene signo (decimos "infinito a secas") entendiendo que el signo depende si nos acercamos a -2 por derecha o por izquierda.

Ejemplo 1.19. Calcular el límite

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

En este caso no se puede utilizar el álgebra de límites ya que $\lim_{x\to -1} 2x^2 + 3x + 1 = 0$ y $\lim_{x\to -1} x^2 - 2x - 3 = 0$ (es una indeterminación del tipo "cero sobre cero"). Para salvar esta indeterminación vamos a factorizar el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)(x+\frac{1}{2})}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{(x-3)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 1.20. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4}$$

Observemos no podemos aplicar el álgebra de límites ya que tanto el numerador como el denominador tienden a 0.

Tenemos que

$$|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ -(x^2 - x - 2) & x \in (-1, 2) \end{cases}$$

Así que vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^-} -\frac{x+1}{x+2} = -\frac{3}{4}$$

Como $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4} \neq \lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4}$, concluimos que

$$\nexists \lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4}$$

Ejemplo 1.21. Calcular el límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{(x-1)^2}$$

Observemos no podemos aplicar el álgebra de límites ya que tanto el numerador como el denominador tienden a 0.

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{3x+1})^2 - 4}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} =$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x + 1 - 4}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3(x-1)}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = +\infty$$

Análogamente, si calculamos el límite acercándonos por la izquierda

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{3x+1} - 2)(\sqrt{3x+1} + 2)}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(\sqrt{3x+1})^2 - 4}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} =$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x + 1 - 4}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3(x-1)}{(x-1)^2(\sqrt{3x+1} + 2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = -\infty$$

Si bien ambos límites laterales son distintos, al ser infinitos se suele escribir

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{(x-1)^2} = \infty$$

(el símbolo de infinito sin signo, "infinito a secas"), entendiendo que los límites laterales son $+\infty$ si nos acercamos por derecha y $-\infty$ si nos acercamos por izquierda a $x = 1$.

En este caso, la recta de ecuación $x = 1$ es una asíntota vertical.

Pasemos ahora a un ejemplo de aplicación práctica del concepto de límite para calcular velocidades instantáneas (anticipo de lo que vendrá en la práctica 5).

Ejemplo 1.22. [Velocidad de crecimiento] Se sabe que el volumen de una esfera se expresa en términos del radio a través de

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Suponga que el radio depende del tiempo según $r(t) = \frac{1}{10}t^2 + 1$. Halle el volumen de la esfera en $t_0 = 1$ y la velocidad instantánea de cambio en $t_0 = 1$.

Como sabemos que el volumen depende del radio y que el radio depende del tiempo, podemos pensar que el volumen depende del tiempo a través de la composición de funciones:

$$V(t) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{10}t^2 + 1)^3.$$

Así para hallar el volumen en el instante $t_0 = 1$ simplemente calculamos

$$V(1) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{1}{10}1^2 + 1)^3 = \frac{1331}{750}\pi \approx 5{,}5752,$$

donde el volumen está expresado en metros cúbicos. Para hallar la velocidad instantánea de cambio del volumen, necesitamos ver qué pasa con

$$\lim_{t \to 1} \frac{V(t) - V(1)}{t - 1}.$$

Es decir, interpretamos la velocidad instantánea de cambio como una velocidad de cambio promedio en el intervalo $(1, t)$ cuando hacemos que t *tienda* a 1. Observemos que no podemos aplicar álgebra de límites pues el denominador tiende a cero. Vamos a tener que trabajar un poco la expresión a ver qué sucede. Observemos que el numerador es básicamente una resta de cubos:

$$V(t) - V(1) = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(r^3(t) - r^3(1)\right)$$

y que es posible factorizar una resta de cubos de modo sencillo:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + yx + y^2)$$

Luego

$$V(t) - V(1) = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(r^3(t) - r^3(1)\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi(r(t) - r(1)) \left(r^2(t) + r(t)r(1) - r^2(1)\right).$$

Ahora lo que nos queda es simplemente observar que

$$r(t) - r(1) = \frac{1}{10}(t^2 - 1) = \frac{1}{10}(t - 1)(t + 1).$$

Ya sabemos cómo factorizar el numerador y estamos listos para calcular el límite pedido:

$$\lim_{t \to 1} \frac{V(t) - V(1)}{t - 1} = \frac{4}{3} \cdot \pi \lim_{t \to 1} \frac{\frac{1}{10}(t - 1)(t + 1)(r^2(t) + r(t)r(1) - r^2(1))}{t - 1}.$$

Simplificando el factor $t-1$, ahora sí podemos reemplazar $t=1$ pues nos queda un polinomio en t, y resulta

$$\lim_{t\to 1}\frac{V(t)-V(1)}{t-1}=\frac{4}{3}\cdot\pi\lim_{t\to 1}\frac{1}{10}(1+1)(r^2(1)+r(1)r(1)-r^2(1))=\frac{121}{375}\cdot\pi\approx 1{,}0136,$$

donde la respuesta viene dada en metros cúbicos sobre segundo.

□

Un teorema muy útil a la hora de calcular límites es el teorema del sandwich.

Teorema 1.3: Teorema del sándwich

Sean f,g,h funciones definidas en un entorno de a tales que en ese entorno vale

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$$

Si $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$ entonces

$$\lim_{x\to a} g(x)=L.$$

Esquemáticamente,

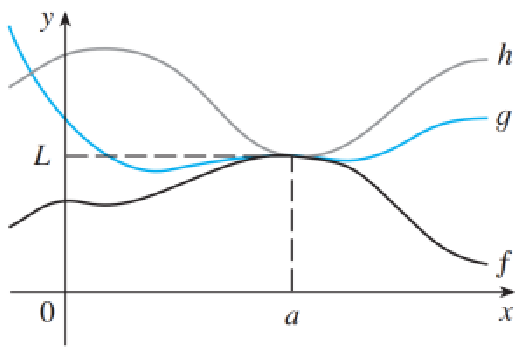


Figura 2: Teorema del sandwich.

Ejemplo 1.23. Dada una función $f(x)$ para la cual se verifica que

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\leq f(x)\leq\frac{1}{6}x+\frac{9}{2},\quad \forall x\geq 0,\ x\neq 9,$$

calcular $\lim_{x\to 9} f(x)$.

Observemos que

- $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\sqrt{x}+3=6$
- $\lim_{x\to 9}\frac{1}{6}x+\frac{9}{2}=6$

Luego, por el teorema del sandwich, tenemos que

$$\lim_{x\to 9} f(x)=6$$

2. El concepto de continuidad

Definicion 2.1: Continuidad

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es continua en x_0 si

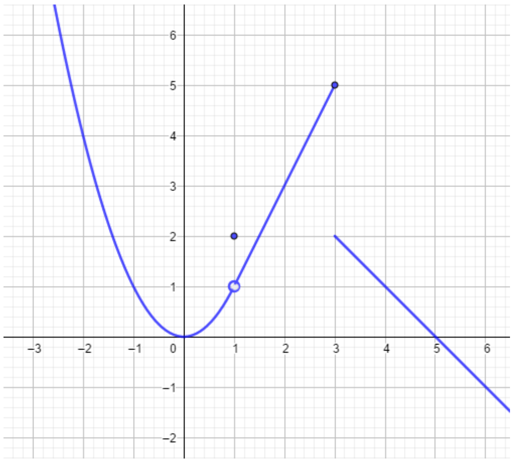
I) $x_0 \in Dom(f)$ II) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ III) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Cuando f es continua en todo punto de su dominio, diremos que f es continua *en* $\mathcal{D}$.

Ejemplo 2.1. Vamos a analizar si la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 3 \\ 5 - x & x > 3 \end{cases}$$

es continua en $x_0 = 1$ y en $x_0 = 3$.



Comencemos analizando la continuidad en $x_0 = 1$. Primero vamos a calcular los límites laterales:

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 = 1$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Luego, el límite existe y vale $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. Como $f(1) = 2$ y $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, la función no es continua en $x_0 = 1$.

Ahora analizamos la continuidad en $x_0 = 3$. Calculamos los límites laterales:

- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 5 - x = 2$
- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2x - 1 = 5$

Como $\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x)$, el límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe y la función no es continua en $x_0 = 3$.

Observación 1. Para funciones definidas en intervalos, como son las que usualmente encontraremos nosotros, se tiene que

- Para una $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, tenemos que

$$f \text{ es continua en}(a, b) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a, b)$$

- Para una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tenemos que f es continua en $[a, b]$ si y sólo si

  I) f es continua en (a, b)

  II) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplo 2.2. [Continuidad de la raíz cuadrada] Probar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en todo $x_0 \in [0, +\infty)$.

Necesitamos ver que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \text{o equivalentemente } \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Estudiemos el límite si $x_0 \neq 0$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{x}-\sqrt{x_0} = \lim_{x\to x_0} (\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = 0$$

Si $x_0 = 0$, hay que ver que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$. Tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} x} = 0$$

Luego, para todo $x_0 \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

□

Como la noción de continuidad descansa sobre la existencia del límite, resulta que el álgebra de límites habilita la posibilidad de operar algebraicamente con funciones continuas en un punto para obtener nuevas funciones continuas:

Teorema 2.1. ***[Álgebra de funciones continuas]*** *Sean f, g dos funciones continuas en un punto común x_0. Entonces*

I) *$f + g$, $f \cdot g$ son continuas en x_0;*

II) *Si $g(x_0) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0*

Corolario 2.2. *Los polinomios son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.3. Probar que la función

$$f(x) = \frac{1 + x^4}{2 + x^2}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Vamos a justificar que f es una función continua en $\mathbb{R}$ utilizando el teorema anterior ya que:

1. El numerador $1 + x^4$ es continuo en todo $\mathbb{R}$ pues es un polinomio.
2. El denominador $2 + x^2$ es continuo en todo $\mathbb{R}$ pues es un polinomio.
3. Como el denominador no se anula nunca, resulta que el cociente $f(x)$ es continuo en todo $x \in \mathbb{R}$

$\square$

Vamos ahora a dar un teorema muy importante, que relaciona la continuidad de las funciones con una de las operaciones conjuntistas más útiles: la composición.

Teorema 2.3. ***[Composición de continuas]*** *Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en x_0 y $g : \mathcal{D}' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $f(x_0)$ tales que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$. Entonces $g \circ f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0.*

Ejemplo 2.4. Probar que la función

$$g(x) = \sqrt{\frac{1 + x^4}{2 + x^2}}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Consideremos funciones

$$h(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{1 + x^4}{2 + x^2}$$

y observemos que $g = h \circ f$.

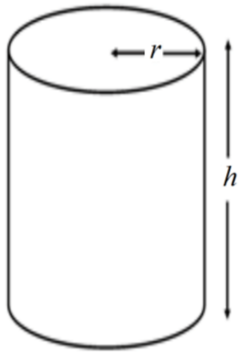
Vimos en el ejemplo anterior que f es una función continua en $\mathbb{R}$ y antes habíamos probado que $h(x) = \sqrt{x}$ es una función continua en $[0, +\infty)$. Como $Im(f) \subseteq Dom(h)$ concluimos, aplicando el teorema anterior, que $g = h \circ f$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$\square$

Veamos un caso donde la continuidad está ligada a un proceso de medición muy corriente.

Ejemplo 2.5. [Volumen de un tambor] El volumen de un tambor metálico de altura h y radio r viene dado por la expresión

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$



a) Considere al volumen como función del radio r. Explique por qué es una función continua.

b) Para $h = 100\,cm$, halle el radio del tambor que garantice un volumen de 200 litros.

c) ¿Cuáles son las dimensiones máximas y mínimas del radio que garantizan que el volumen esté entre 190 y 210 litros?

a) Comencemos con una observación. Como r tiene un significado físico (representa una longitud), vamos a considerar la función

$$V = V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

en el dominio $\mathcal{D} = [0, +\infty)$. La función $V(r)$ es polinomial en r con lo cual, es una función *continua*.

b) Para hallar el radio pedido, primero tenemos que tener en cuenta las unidades. Nos dan el volumen en litros mientras que las medidas que tenemos para calcular el volumen son en fracciones de metros. Si recordamos que 1 litro equivale a 1000 centímetros cúbicos, luego 200 litros serán $1000 \cdot 200$ centímetros cúbicos. Entonces, para hallar el radio pedido resolvemos

$$V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot 100 = 200000 \implies r^2 = \frac{2000}{\pi} \implies r = \sqrt{\frac{2000}{\pi}};$$

donde la respuesta está dada en centímetros. Este es el valor exacto del radio necesario. Aproximando al milímetro, el radio es aproximadamente 25,2 centímetros, lo cual produce un volumen de $V(25{,}2) = 63504\pi \approx 199503{,}699\,cm^3 \approx 199{,}5$ litros.

c) Para ver en qué rango debe estar el radio del tambor para que el volumen esté entre 190 y 210 litros, necesitamos hallar los $r > 0$ para los cuales

$$190 \cdot 1000 < V(r) < 210 \cdot 1000$$

Resolvamos las inecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc}
190000 & < & V(r) & < & 210000 \\
190000 & < & \pi \cdot r^2 \cdot 100 & < & 210000 \\
1900 & < & \pi \cdot r^2 & < & 2100 \\
\frac{1900}{\pi} & < & r^2 & < & \frac{2100}{\pi} \\
\sqrt{\frac{1900}{\pi}} & < & |r| & < & \sqrt{\frac{2100}{\pi}} \\
\sqrt{\frac{1900}{\pi}} & < & r & < & \sqrt{\frac{2100}{\pi}}
\end{array}$$

En la última inecuación eliminamos las barras de módulo pues $r > 0$. De nuevo, esto da el rango exacto para r. En términos prácticos, ¿qué rango vamos a dar? Demos un intervalo al milímetro para r:

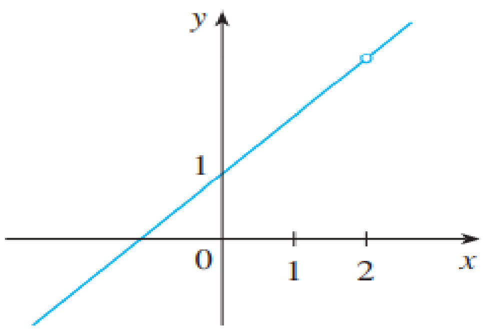
$$\sqrt{\frac{1900}{\pi}} \approx 24{,}592; \qquad \text{tomamos } r > 24{,}6; \qquad \sqrt{\frac{2100}{\pi}} \approx 25{,}854; \qquad \text{tomamos } r < 25{,}8,$$

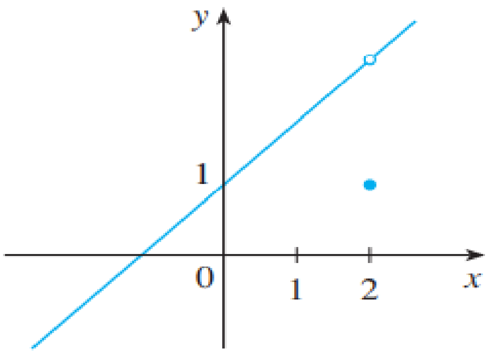
con lo cual nos garantizamos que si $r \in (24{,}6, 25{,}8)$ entonces el volumen estará entre los 190 y 210 litros.

Definición 2.1. Si una función f no es continua en x_0, decimos que f es *discontinua en* x_0 o que f tiene una *discontinuidad en* x_0. Las discontinuidades pueden ser de dos tipos:

- *Discontinuidad evitable*: se produce cuando existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pero no existe $f(x_0)$ o, si existe $f(x_0)$ se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

  Esta discontinuidad es evitable porque al definir $f(x_0)$ o cambiar la definición de $f(x_0)$, podemos dar una redefinición de f que resulta una función continua en x_0.



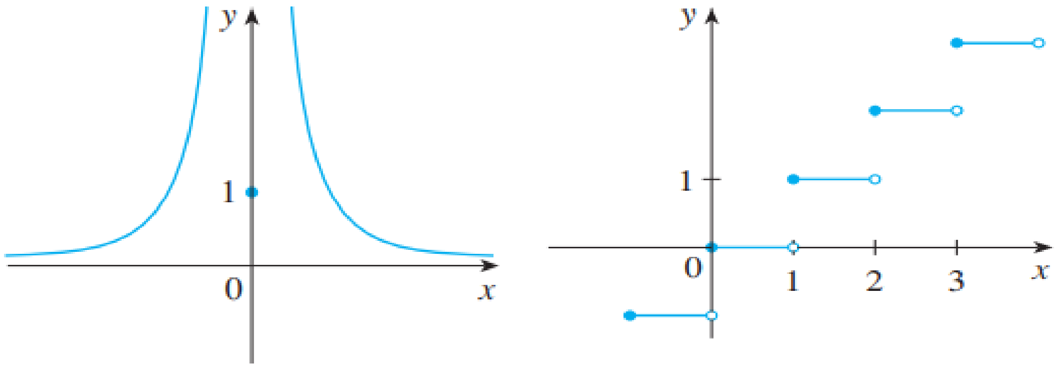


- *Discontinuidad esencial*: se produce cuando no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

  Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ o $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$, estamos en presencia de una "asíntota vertical".

  Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y estos límites son finitos, decimos de la discontinuidad es de tipo "salto finito".

  Esta discontinuidad es esencial porque aunque cambiemos la definición de $f(x_0)$, no podremos dar una redefinición de f que resulte una función continua en x_0.



Ejemplo 2.6. Para cada una de las siguientes funciones, describir el conjunto de puntos de continuidad y caracterizar los puntos de discontinuidad:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x}-1}{|x+2|(x-1)}$ b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

a) Comencemos calculando el dominio de f:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/; 3+x \geq 0,\ x+2 \neq 0,\ x-1 \neq 0\} = [-3,-2) \cup (-2,1) \cup (1,+\infty)$$

Recordemos que una función f es continua en x_0 si

I) $x_0 \in Dom(f)$ II) existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ III) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Para los $x \in Dom(f)$, la función f es continua ya que:

- La función $f_1(x) = 3 + x$ es continua porque es una función polinómica, $f_2(x) = \sqrt{x}$ es una función continua y $f_3(x) = x - 1$ es continua porque es una función polinómica. Entonces $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = \sqrt{3+x} - 1$ es continua para $x \geq -3$ por ser composición de funciones continuas.
- La función $f_4(x) = |x+2|$ es una función continua ya que es la composición de una función polinómica y la función módulo que son continuas. La función $f_5(x) = |x+2|(x-1)$ es una función continua porque es el producto de dos funciones continuas (las funciones f_3 y f_4).
- La función f es continua en $Dom(f)$ por ser división de funciones continuas con denominador no nulo.

Los puntos de discontinuidad son $x = -2$ y $x = 1$ ya que no pertenecen al dominio. Analicemos que tipo de discontinuidad presentan en cada caso. Para ello calculemos los límites $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

- Para $x = -2$ vamos a calcular los límites laterales ya que se presenta una indeterminación del tipo “cero sobre cero” y tenemos un módulo. Recordemos que $|x+2| = x+2$ si $x \geq -2$ y $|x+2| = -(x+2)$ si $x \leq -2$. Entonces

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{3+x}-1}{|x+2|(x-1)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{3+x}-1}{(x+2)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(\sqrt{3+x}-1)(\sqrt{3+x}+1)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3+x}+1)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(3+x-1)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3+x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+1)} = -\frac{1}{6}$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{3+x}-1}{|x+2|(x-1)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{3+x}-1}{-(x+2)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{(\sqrt{3+x}-1)(\sqrt{3+x}+1)}{-(x+2)(x-1)(\sqrt{3+x}+1)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(3+x-1)}{-(x+2)(x-1)(\sqrt{3+x}+1)} =$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{-(x-1)(\sqrt{3+x}+1)} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) \neq \lim_{x\to -2^-} f(x)$$

y entonces

$$\nexists \lim_{x\to -2} f(x)$$

En $x=-2$ la función presenta una discontinuidad esencial de tipo salto finito.

- Calculamos los límites laterales para $x=1$, observando que $x-1>0$ si tomamos límite por derecha y $x-1<0$ si tomamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{3+x}-1}{|x+2|(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{3+x}-1}{|x+2|(x-1)} = -\infty$$

Luego la función presenta una discontinuidad esencial en $x=1$. La recta de ecuación $x=1$ es una asíntota vertical de f.

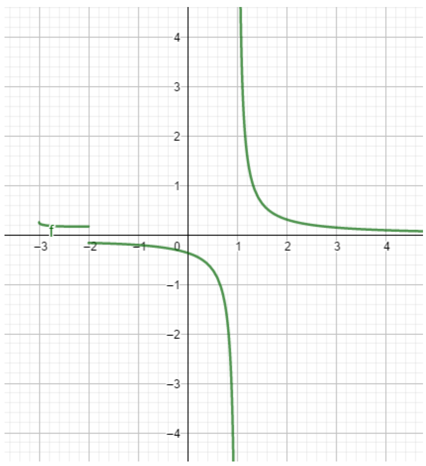


Figura 5: Gráfico de f

b) Veamos primero el dominio de $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$. En este caso la raíz cúbica está definida para todo número real, así que la única restricción será que no podemos dividir por cero. Luego,

$$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R}/\ x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Para todo $x \in Dom(g)$, la función es continua ya que:

- $g_1(x) = \sqrt[3]{x}$ es una función continua (la demostración es similar a la de $\sqrt{x}$) y $g_2(x) = x+1$ es una función continua por ser un polinomio.
  Entonces $(g_2 \circ g_1)(x) = \sqrt[3]{x}+1$ es una función continua por ser composición de funciones continuas.
- g es continua para $x \neq -1$ por ser división de dos funciones continuas ($g_2 \circ g_1$ y g_2) con denominador no nulo.

La función g presenta una discontinuidad en $x = -1$. Analicemos de que tipo es esta discontinuidad.

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \underbrace{=}_{y=\sqrt[3]{x}} \lim_{y\to -1} \frac{y+1}{y^3+1} = \lim_{y\to -1} \frac{y+1}{(y+1)(y^2-y+1)} = \frac{1}{3}$$

Como existe el límite, la función g posee una discontinuidad evitable en $x = -1$. Esto es, si definiéramos $g(-1) = \dfrac{1}{3}$, la función resultaría continua en $x = -1$.

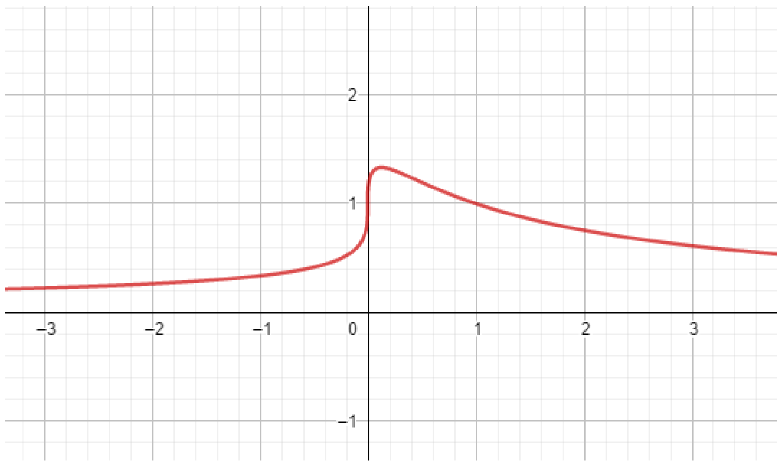
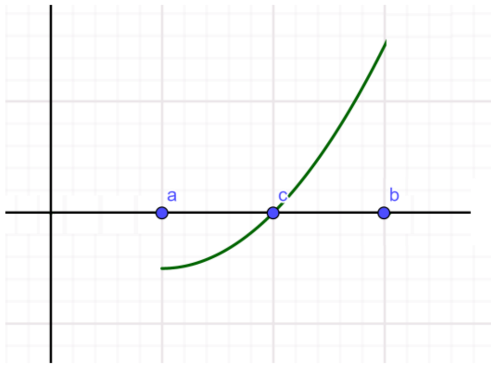


Figura 6: Gráfico de g

3. Teoremas sobre funciones continuas

3.1. Teorema de Bolzano

Observemos el siguiente gráfico donde se presenta una función continua definida en un intervalo $[a, b]$ que toma signos opuestos en los extremos del intervalo (en este caso, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$). Vemos que en algún punto del intervalo (a, b) la función debe anularse (por lo menos en un punto). Este es el enunciado del Teorema de Bolzano.



Teorema 3.1: Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = 0.$$

El teorema de Bolzano es un teorema de *existencia*. Garantiza la existencia de puntos donde se verifican ciertas condiciones, pero *no especifica cómo hallarlos*. Sin embargo da lugar a un método para aproximar raíces de ecuaciones. Veamoslo con un ejemplo.

Ejemplo 3.1. Muestre que el polinomio $f(x) = x^6 - 4x^4 - 12x^2 + 1$ posee al menos una raíz en el intervalo $[0, \frac{2}{5}]$.

Vamos a aplicar directamente el teorema de Bolzano. Podemos hacerlo pues f es continua en ese intervalo al tratarse de un polinomio. Investigamos signos en los extremos:

$$f(0) = 1, \quad f(\frac{2}{5}) \approx -1{,}018 \implies f \text{ tiene una raíz en } [0, \frac{2}{5}],$$

que es lo que queríamos mostrar. No sabríamos a priori cómo obtener tal c, pero sabemos que existe.

$\square$

En el ejercicio anterior, ¿habrá algún método que nos permita decir algo más sobre c? Exploremos la siguiente idea: vamos construyendo sistemáticamente intervalos que contengan a la raíz hasta que encontremos un intervalo de anchura lo suficientemente pequeña, de modo tal que podamos conocer c con la cantidad de decimales que deseamos.

Comencemos con un intervalo inicial $[a, b]$ y supongamos que tenemos definido un intervalo $[a_n, b_n]$ conteniendo una raíz de f. Para construir el próximo intervalo, consideramos el punto medio $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ y estudiamos tres posibilidades:

I) $f(a_n)$, $f(c_n)$ con signos opuestos $\implies$ hay un cero en $[a_n, c_n]$ y definimos

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n];$$

II) $f(c_n)$, $f(b_n)$ con signos opuestos $\implies$ hay un cero en $[c_n, b_n]$ y definimos

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n];$$

III) $f(c_n) = 0$ entonces listo, terminamos el método pues hallamos la raíz.

Evidentemente, el caso *iii)* raramente se da en la práctica. Observemos además que tanto en los casos *i)* y *ii)* encontramos un intervalo de la mitad de ancho del anterior donde hay una raíz de f. El próximo teorema demuestra que este proceso en efecto produce aproximaciones de una raíz de f, y que *en el infinito, produce una raíz.*

Teorema 3.1. ***[Método de bisección de Bolzano]*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua de modo que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los puntos medios asociada a los intervalos $[a_n, b_n]$ descriptos arriba. Entonces se tiene que*

I) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a una raíz r de f.*

II) $|r - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Continuemos con el ejemplo anterior y veamos cómo funciona el método de la bisección.

Ejemplo 3.2. Aproxime una raíz de $f(x) = x^6 - 4x^4 - 12x^2 + 1$ a tres decimales mediante el método de la bisección.

<u>*Solución*</u> 1. En el ejemplo anterior mostramos que efectivamente f posee una raíz en $[0, \frac{2}{5}]$ pues $f(0) = 1$ y $f(\frac{2}{5}) \approx -1{,}018$. Vamos a aplicar el método de bisección de manera ordenada: armando una tabla para los extremos de los intervalos encajados.

Iteración	a_k	c_k	b_k	$f(c_k)$
0	0	0.2	0.4	0.513664
1	0.2	0.3	0.4	-0.111671
2	0.2	0.25	0.3	0.234619
3	0.25	0.275	0.3	0.070055
4	0.275	0.2875	0.3	-0.0186338
5	0.275	0.28125	0.2875	0.026247
6	0.28125	0.284375	0.2875	0.0039399
7	0.284375	0.2859375	0.2875	-0.0073154
8	0.284375	0.285156	0.285937	-0.00167
9	0.284375	0.2847655	0.285156	0.0011333
10	0.2847655	0.28496075	0.285156	-0.0002715

Detengámonos en este punto y aprovechemos para hacer algunas observaciones.

- A partir de la iteración número seis ya sabemos que la raíz que estamos buscando es de la forma
$$r = 0{,}28 + \epsilon$$
con $0 \leq \epsilon < 0{,}01$. Es decir, tenemos una aproximación válida hasta el segundo decimal inclusive.

- En la décima iteración vemos que $f(a_{10}) > 0$ mientras que $f(c_{10}) < 0$, con lo cual el próximo intervalo lo tomamos de la forma $[a_{10}, c_{10}]$. Entonces la raíz que estamos buscando es de la forma
$$0{,}284 + \epsilon$$
con $0 \leq \epsilon < 0{,}001$. Es decir, tenemos una aproximación válida hasta el tercer decimal inclusive, que es lo que nos pedía el problema.

- En la undécima iteración, vemos también que tendremos al menos tres dígitos en la aproximación $f(c_{11})$.

$\square$

Este método es uno de los más antiguos y utilizados, aunque padece de algunas limitaciones. La primera de ella es la velocidad de convergencia. Es un método lento, en el sentido que se necesitan muchas iteraciones para obtener precisión de un puñado de decimales. Otra limitación es que en ciertos casos puede no detectar raíces dobles. Como contrapeso, es un método que no le pide nada más a las funciones que la continuidad.

Veamos ahora un corolario del teorema de Bolzano que puede llegar a ser útil para determinar el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de algunas funciones.

Corolario 3.2. [Corolario del Teorema de Bolzano] *Sea $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathcal{D}$ y sean r_1 y r_2, $r_1 < r_2$, dos ceros consecutivos de f (es decir, f no posee ceros en el intervalo (r_1, r_2)). Entonces $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ para todo $x \in (r_1, r_2)$.*

Ejemplo 3.3. Hallar el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x - 2}$$
Primero debemos hallar el dominio de la función f. En este caso
$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/\ x + 1 \geq 0,\ x - 2 \neq 0\} = [-1, 2) \cup (2, +\infty)$$
Esta función es continua en su dominio ya que:

- La función $f_1(x) = x + 1$ es continua en $\mathbb{R}$, la función $f_2(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$ y la función $f_3(x) = x - 3$ es continua en $\mathbb{R}$. Luego $f_4(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$ es continua en $[-1, \infty)$ por ser la composición de funciones continuas.

- La función $f_5(x) = x - 2$ es continua en $\mathbb{R}$.

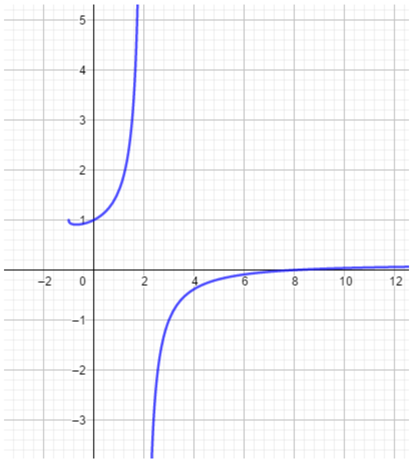
- La función $f(x) = \dfrac{f_4(x)}{f_5(x)}$ es continua en $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$ por ser un cociente de funciones continuas con denominador no nulo.

  Por lo tanto, podremos aplicar el corolario. Calculemos los ceros de f:
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x - 2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$$
Esto es, $C_0 = \{8\}$.

Nos quedan determinados los intervalos $[-1, 2)$, $(2, 8)$ y $(8, +\infty)$, donde la función f no cambia de signo. Para saber cual es el signo de f en cada intervalo, alcanza con evaluar la función en un punto de cada intervalo. Tenemos que:

- $f(0) = 1 > 0$. Entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in [-1, 2)$.
- $f(3) = -1 < 0$. Entonces $f(x) < 0$ para todo $x \in (2, 8)$.
- $f(15) = \dfrac{1}{13} > 0$. Entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in (8, +\infty)$.

  Luego,
$$C_+(f) = [-1, 2) \cup (8, +\infty) \quad y \quad C_-(f) = (2, 8)$$



3.2. Teorema del Valor Intermedio

En esta sección daremos una versión del teorema de Bolzano comúnmente llamado *teorema del valor intermedio*.

Teorema 3.2: Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para todo $k \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que
$$f(c) = k$$

Esquemáticamente

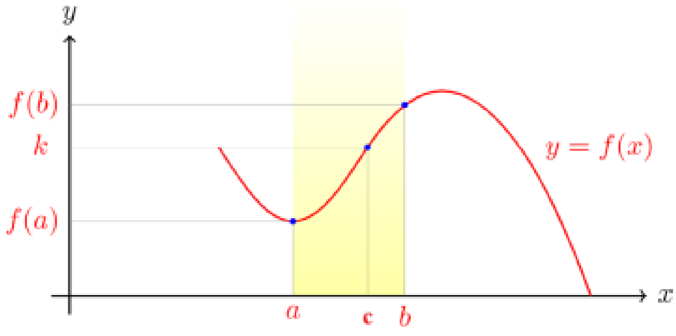


Figura 7: Teorema del valor intermedio.

Demostración. Tomemos un $k \in (f(a), f(b))$. Luego se tiene que $f(a) < k < f(b)$, con lo cual

$$f(a) - k < 0 < f(b) - k.$$

Definamos $g(x) = f(x) - k$. La función g es continua en $[a, b]$ por ser combinación de funciones continuas allí. Entonces el teorema de Bolzano garantiza que g posee una raíz $c \in (a, b)$:

$$g(c) = 0 \implies f(c) - k = 0 \implies f(c) = k$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Observación 2. Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, el teorema de los valores intermedios asegura que $[f(a), f(b)] \subseteq Im(f)$ si $f(a) < f(b)$ o $[f(b), f(a)] \subseteq Im(f)$ si $f(b) < f(a)$.

Ejemplo 3.4. Dada la función $f(x) = x^3 - 8x + 10$, justificar la existencia de valores de c tales que:

1) $f(c) = \pi$ 2) $f(x) = -\sqrt{3}$ 3) $f(c) = 5000000$

La función f es continua en $\mathbb{R}$ ya que es un polinomio. Vamos a justificar la existencia de los valores de c utilizando el teorema de los valores intermedios.

1) Observemos que $f(0) = 10$ y $f(1) = 3$.

   Como f es continua en $[0, 1]$ (ya que es continua en $\mathbb{R}$) y $f(1) < \pi < f(0)$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = \pi$.

2) Ahora debemos buscar valores de a y b para los cuales $f(a) < -\sqrt{3} < f(b)$. Vemos que $f(-4) = -22$ y $f(-3) = 7$.

   Como f es continua en $[-4, -3]$ y $f(-4) < -\sqrt{3} < f(-3)$, existe $c \in (-4, -3)$ tal que $f(c) = -\sqrt{3}$.

3) Por último busquemos valores de a y b para los cuales $f(a) < 5000000 < f(b)$. Vemos que $f(170) = 4911650$ y $f(180) = 5830570$.

   Como f es continua en $[170, 180]$ y $f(170) < 5000000 < f(180)$, existe $c \in (170, 180)$ tal que $f(c) = 5000000$.

Notemos que, para esta función, cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$, existe c tal que $f(c) = k$. Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, para todo $k \in \mathbb{R}$ existirá $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < k$ y existirá $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(b) > k$. El teorema de los valores intermedios garantiza que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$. Luego, $Im(f) = \mathbb{R}$.

Observación 3. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, el teorema de los valores intermedios nos permite justificar que $Im(f) = \mathbb{R}$.

3.3. Funciones continuas y problemas de optimización

En esta sección enunciaremos un teorema muy importante que trata sobre funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado y que está en la base de todo problema de optimización que querramos resolver, en el ámbito teórico como en el práctico: las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados siempre alcanzan máximos y mínimos.

Teorema 3.3: Weierstrass

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen $x_m, x_M \in [a, b]$ tales que

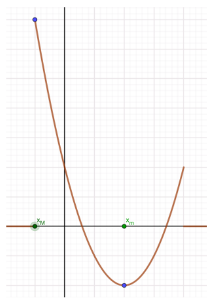
$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b].$$

Este teorema nos dice que si buscamos valores extremos para una función continua en un intervalo cerrado y acotado, entonces seguro que esos valores existen. No nos dice *cómo* hallarlos, pero nos garantiza que en algún punto del intervalo se *realiza* el máximo absoluto de f y en algún punto del intervalo se *realiza* el mínimo absoluto de f.

Ejercicio 3.1. Hallar máximos y mínimos absolutos para la función $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

El gráfico de f puede observarse en la siguiente figura:



Se puede comprobar en este caso la validez del teorema de Weierstrass. Lo característico de este caso es que podemos hallar *explícitamente* los puntos donde se realizan los extremos de f. Como f es un polinomio de grado 2 podemos expresarlo de manera conveniente, de modo tal de poder ver su vértice y así saber la forma de su gráfica:

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

Su vértice está en $(-2, -2)$ y entonces f alcanza un mínimo absoluto en $x_m = -2$. Para hallar el máximo, investigamos los bordes del intervalo de definición y obtenemos

$$f(-1) = 7, \quad f(4) = 2$$

Por lo tanto, f alcanza un máximo absoluto en $x_M = -1$.

$\square$

Hay otra familia de funciones donde podemos encontrar de modo explícito los puntos donde se realizan los extremos absolutos: las funciones *monótonas*.

Ejercicio 3.2. Considere la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1+x}{1+5x}$$

Encuente los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$.

Observemos la naturaleza de la función f. Tanto numerador como denominador son polinomios, luego funciones continuas. Como el denominador no se anula en el intervalo $[0,3]$, resulta que f es una función continua en $[0,3]$.

Gracias al teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza sus máximos y mínimos absolutos en $[0,3]$. Pero ¿dónde? Basta observar que f es una función *decreciente*. Escribamos

$$f(x) = \frac{1+x}{1+5x} = \frac{1}{5} + \frac{\frac{4}{5}}{1+5x}$$

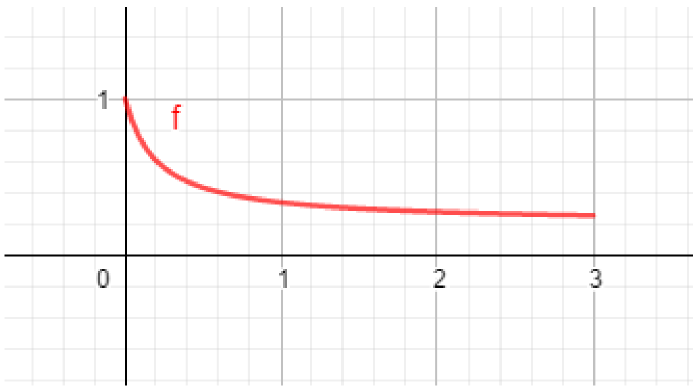
Tomemos $a \leq b$, $a, b \in [0,3]$, y veamos que $f(a) \geq f(b)$:

$$a \leq b \Longrightarrow 1+5a \leq 1+5b \Longrightarrow \frac{1}{1+5a} \geq \frac{1}{1+5b} \Longrightarrow \frac{\frac{4}{5}}{1+5a} \geq \frac{\frac{4}{5}}{1+5b}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{5} + \frac{\frac{4}{5}}{1+5a} \leq \frac{1}{5} + \frac{\frac{4}{5}}{1+5b} \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$$

Luego, el máximo se alcanza en el extremo izquierdo: $x_M = 0$ y el mínimo se alcanza en el extremo derecho $x_m = 3$. Corroboramos fácilmente calculando

$$f(0) = 1, \qquad f(5) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$



Evidentemente, no todos los problemas de optimización involucran funciones monótonas. En el transcurso de la materia veremos algunas técnicas que nos permitirán resolver gran cantidad de problemas de optimización.

Referencias

[1] Thomas, G., Finney, R. *Cálculo y geometría analítica.* Addison Wesley, novena edición, 1995.

[2] Courant, R., Robbins, H. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* Fondo de Cultura Económica, 2002.

[3] Spivak, M. *Calculus* Publish or Perish, cuarta edición, 2008.

[4] Stewart, J. *Cálculo* Cengage Learning, octava edición, 2015.