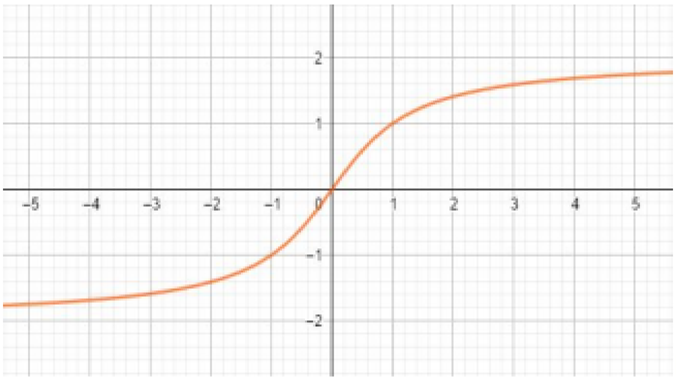
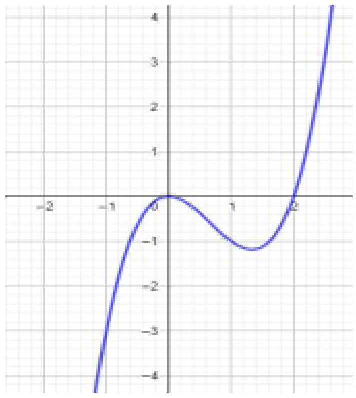
Práctica 3: límites y continuidad

Ejercicio 1. Para las siguientes funciones, estamos interesados en estudiar el comportamiento para valores de x tendiendo a $+\infty$ o $-\infty$. ¿Qué comportamiento observa en cada caso? ¿Las funciones consideradas poseen asíntotas horizontales? Escriba su respuesta en términos de límites.

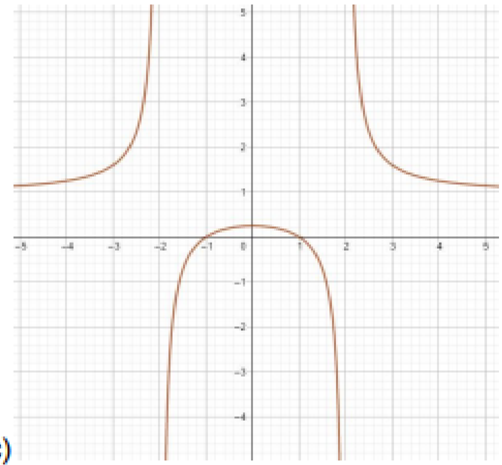
a)



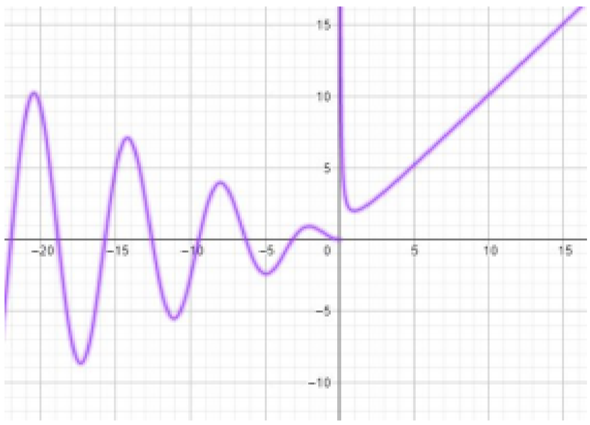
b)



c)



d)



Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites. En cada caso, analizar si la función correspondiente posee asíntotas horizontales.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3+5x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5+5x-1}{2x^2+6x}$

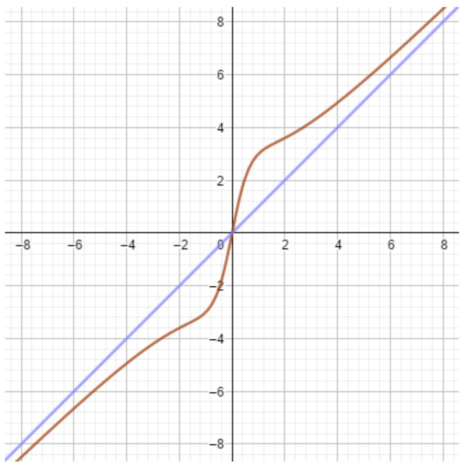
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x-2|+x}{5x+1}$

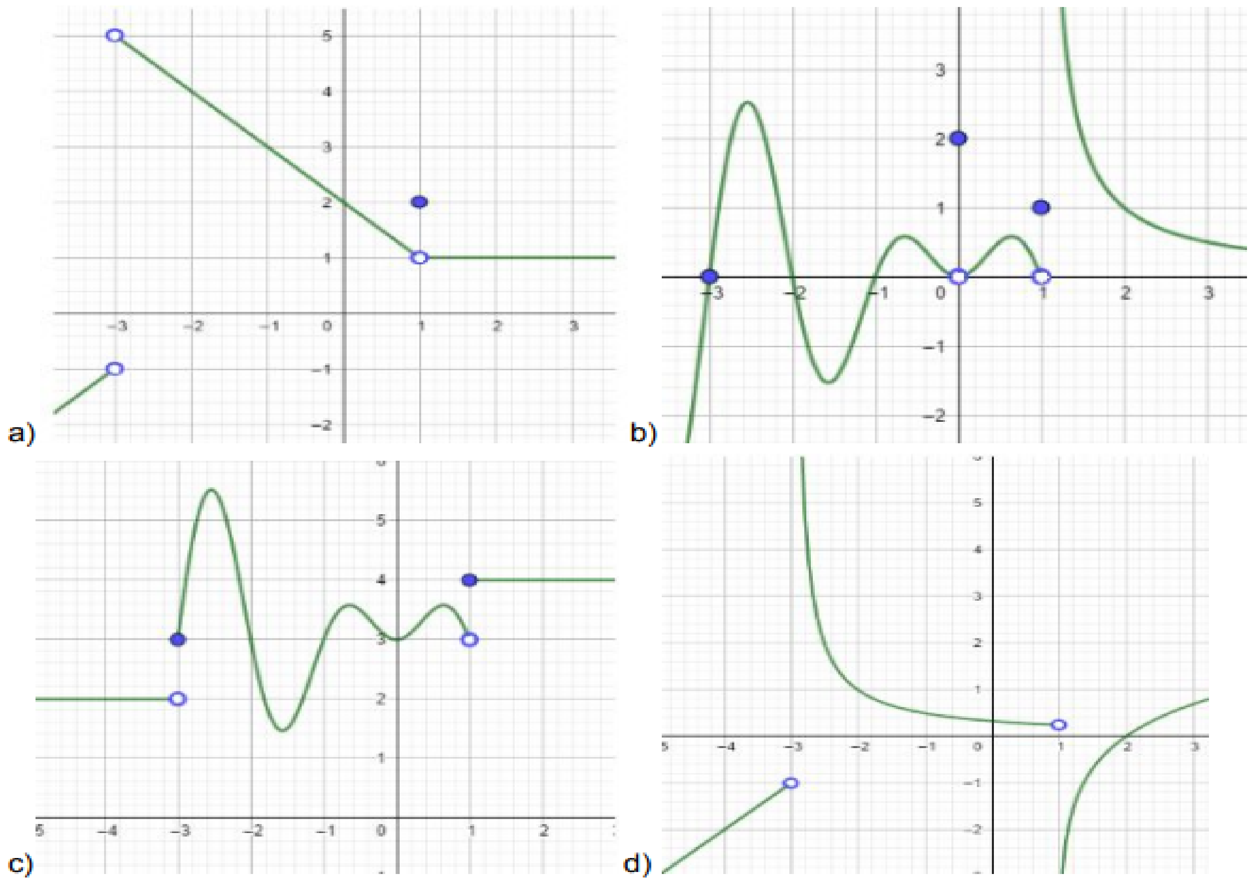
f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x-2|+x}{5x+1}$

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3+5x}{x^2+1}$, verificar que no posee asíntotas horizontales. Comprobar sin embargo que, como se muestra en la figura, la recta $y = x$ es una asíntota oblícua para esta función.

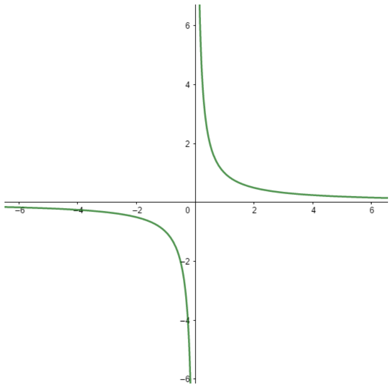


Ejercicio 4. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2|x| + x^3 + 1}{x^2 + 3x}$, analizar la existencia de asíntotas horizontales u oblícuas para el gráfico de esta función.

Ejercicio 5. Para las siguientes funciones, estamos interesados en estudiar el comportamiento alrededor de $x_0 = -3, 0, 1$. ¿Cuáles de esos puntos son parte del dominio de la función? ¿Qué comportamiento hay en cada caso? Escriba su respuesta en términos de límites.



Ejercicio 6. Las funciones homográficas pueden escribirse en la forma $f(x) = \dfrac{A}{x-B} + C$, con $A \neq 0$. Sus gráficos son hipérbolas. En la siguiente figura se observa el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Consideremos las siguientes funciones homográficas:



1. $g(x) = \dfrac{1}{x-1} - 3$

2. $h(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$

a) A partir del gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, realizar el gráfico de las funciones dadas. Indicar dominio e imagen y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales?

b) Calcular los ceros, conjuntos de positividad y negatividad de cada una de las funciones.

c) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $h(x)$ es mayor estricto que -2.

d) Hallar las funciones inversas de cada una de las funciones. Indicar dominio, imagen y asíntotas de las funciones inversas.

Ejercicio 7. Supongamos que sabemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 3, \quad \lim_{x\to a} h(x) = -1$$

Calcule y justifique detalladamente los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + 5g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to a} g(x) + f(x)h^2(x)$

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{f(x)+4} + 5h(x)$

d) $\lim\limits_{x\to a} (h(x) + 5g(x))^2$

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+5x}{3x^3+3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2x^2+10x-12}{3x^2-3x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-8}{\sqrt{x+5}-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x^3-27}$

f) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Ejercicio 9. Sea $g(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ 2-x^2 & 1 < x \leq 2 \\ x-3 & x > 2 \end{cases}$

a) Calcular, si existen,

I) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

II) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

III) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

IV) $g(1)$

V) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

VI) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

VII) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

VIII) $g(2)$

b) Graficar g y dar todos los puntos de continuidad de g.

Ejercicio 10. Trazar el gráfico de una función f que verifique:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$; f está definida para $x = 0$ pero f no es continua en $x = 0$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$; $y = 4$ es asíntota horizontal.

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$; $x = 1$ es asíntota vertical; f tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$; $y = x + 2$ es asíntota oblícua.

Ejercicio 11. Utilice la definición formal de límite para demostrar que las siguientes funciones son continuas en el punto indicado

a) $f(x) = 2x - 3$ en $x_0 = 1$

b) $f(x) = 3x^2 - 2$ en $x_0 = 2$

Pista: graficar las funciones puede ser de gran ayuda.

Ejercicio 12. [Ley de Ohm] La ley de Ohm establece que cuando a un conductor se lo somete a una diferencia de potencial V (medida en *voltios*) constante, la corriente eléctrica I (medida en *amperes*) que circula a lo largo de un conductor es inversamente proporcional a la resistencia R del conductor; en símbolos

$$I = \frac{V}{R}$$

La resistencia se mide en *ohmios* y depende de las dimensiones del mismo y del material del que está hecho. Un fabricante de cables eléctricos debe entregar un lote de cables para un cliente que necesita que circulen $I = 5 \pm 0{,}1$ amperes cuando somete el circuito a una diferencia de potencial de $V = 120$ voltios. ¿Cuál es el rango de resistencias que deben tener los cables que entrega el fabricante? Si el cliente necesita que circulen $I = 5 \pm \epsilon$ amperes para el mismo V - ¿cúal es el rango de resistencias aceptable? Concluya que $I = I(R)$ es una función continua en $R = 24$.

Ejercicio 13. [Ley de Torricelli de fluidos] La ley de Torricelli dice que la velocidad (en metros cúbicos por segundo) a la que un líquido sale de un tanque vertical es proporcional a la raíz cuadrada de la altura de la columna de líquido que contiene. Suponga que para cierto tanque cargado con gaseosa cola la velocidad de vaciado viene dada por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

a) Halle la velocidad de vaciado cuando la altura de la columna de refresco es de 4 metros.

b) ¿Qué rango de alturas de líquido garantizan que la velocidad de salida esté entre 0,8 y 1,2 metros cúbicos por segundo?

c) Para $0 < \epsilon < 1$ describa el rango de alturas de líquido que garantizan una velocidad de salida entre $1 - \epsilon$ y $1 + \epsilon$ metros cúbicos por segundo. Concluya que f es una función continua en $x = 4$.

Ejercicio 14. Para cada una de las siguientes funciones, describir el conjunto de puntos de continuidad y caracterizar los puntos de discontinuidad indicando si la discontinuidad es evitable o esencial (en este caso, si tiene una asíntota vertical o un salto):

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+|x|}$ b) $h(x) = \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ c) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{|x+1|} + \dfrac{x^3-1}{x-1}$

Ejercicio 15. Sea $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$

a) Hallar $Dom(f)$ y explicar por qué f es continua para todo $x \in Dom(f)$.

b) ¿Existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$? Si es así, calcular el límite. ¿Cómo podríamos definir $f(-2)$ de modo que f resulte continua en $x = -2$?

c) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función f tiene una asíntota vertical en $x = 1$? ¿Se podría definir $f(1)$ de modo que f resulte continua en $x = 1$?

d) Hallar la ecuación de la asíntota horizontal de f. ¿Depende del valor de a?

Ejercicio 16. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 1-x & x \geq 1 \end{cases}$

a) Hallar una sucesión monótona $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = 2$.

b) Hallar una sucesión monótona $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = 0$.

c) Hallar una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$ y $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión divergente.

Ejercicio 17. [Verdadero o falso] [Optativo] Cuando el enunciado sea verdadero, justifique. Cuando el enunciado se falso, exhiba un contraejemplo y explíquelo. En lo que sigue suponga que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Si para toda sucesión monótona $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a c se tiene que la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces f tiene límite en c.

b) Si f es continua en c, entonces transforma sucesiones convergentes a c en sucesiones convergentes a $f(c)$.

c) Si f es discontinua en c entonces para toda sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a c, resulta que $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

d) Si f y g son discontinuas en c, también lo son $f + g$ y $f \cdot g$

Ejercicio 18. Considere la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5 - 2x^3 - 2$.

a) Demuestre que f posee al menos una raíz en $[0, 2]$.

b) Utilice el método de la bisección para hallar con una raíz con precisión de 3 decimales.

c) ¿Cuántas iteraciones precisa para hallar la raíz con 5 decimales de precisión?

Ejercicio 19. Sean $a, b > 0$. Probar que la ecuación

$$\frac{a}{x^3+x^2+x+1} + \frac{b}{x^3-x^2+4x-4} = 0$$

tiene una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

Ejercicio 20. **[Dos maratonistas]** Adriana y Belén son dos maratonistas que corren una maratón en la Ciudad de Buenos Aires. Salen juntas de la línea de largada a las 8:00 am. A las 9 de la manñana Adriana recorrió 13 kilómetros, mientras que Belén llevaba recorridos 16 kilómetros. Para las 10:30 am, Adriana estaba por el kilómetro 30 mientras que Belén llevaba recorridos 26. Probar que en algún momento entre las 8 y las 10:30 Adriana y Belén estuvieron juntas en el mismo lugar.

Ejercicio 21. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 4} - 2}{x^2 + 3x}$.
Determinar el dominio, los ceros y los intervalos de positividad y negatividad de f. Para ésto último, utilizar la siguiente consecuencia del teorema de Bolzano: en un intervalo cuyos extremos son dos raíces consecutivas de f, la función no cambia de signo.

Ejercicio 22. **[Optativo]** Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua.

a) Pruebe que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

b) ¿Es cierto el resultado anterior si cambiamos $[0, 1]$ por $\mathbb{R}$? Justifique.

c) ¿Y si cambiamos $[0, 1]$ por $(0, 1)$? Justifique.

Ejercicio 23. **[Optativo]** En este ejercicio vamos a emplear la función $g : [2, 3] \to [2, 3]$ dada por

$$g(x) = \frac{2x + 5}{x + 2}$$

para calcular aproximadamente $\sqrt{5}$.

a) Pruebe que $\sqrt{5}$ es un punto fijo de g.

b) Elija $x_0 \in [2, 3]$ y calcule $\sqrt{5}$ a través de la sucesión dada por

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

con 6 dígitos de exactitud.

c) El teorema de Weierstrass garantiza que g alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[2, 3]$. Hállelos y deduzca que $\forall a, b \in [2, 3]$ vale

$$|g(a) - g(b)| \leq \frac{1}{16}|a - b|$$

d) Evalue la desigualdad anterior en $a = \sqrt{5}$ y $b = x_n$. Deduzca que la sucesión se acerca al punto fijo en cada iteración.

e) Acote la diferencia $\sqrt{5} - x_n$ en términos de $|\sqrt{5} - 1|$ y concluya que la sucesión converge al punto fijo.

f) Por el item $a)$ sabemos que la ecuación

$$g(x) = x$$

tiene solución, y que esa solución es $\sqrt{5}$. Utilice el método de Bolzano para aproximarla con 6 dígitos de exactitud. ¿Cuántas iteraciones necesitó?