Modelizando la aleatoriedad: Distribuciones

M. Teresa Ortuño

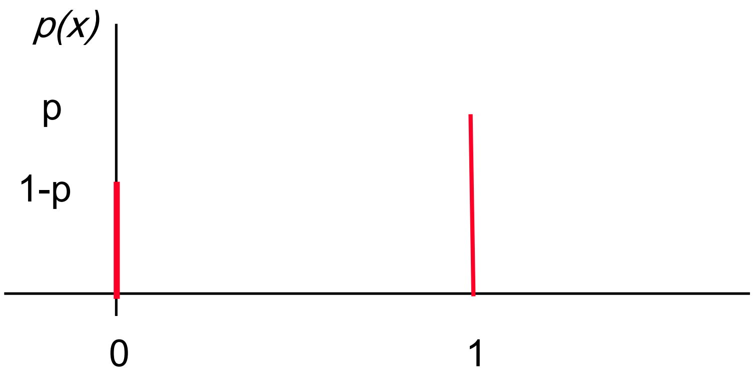
I. Distribuciones Discretas

Bernoulli (p)

- *Aplicaciones: experimentos con 2 posibles resultados; generar otras distribuciones (binomial, geométrica,...)*
- *Función de masa y Función de distribución:*

$$p(x)=\begin{cases}1-p & x=0\\ p & x=1\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-p & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

- *Rango: {0,1}*
- *Media: p*
- *Varianza: p(1-p)*
- *Moda:* $\begin{cases}1 & p\ge 1/2\\ 0 & p\le 1/2\end{cases}$



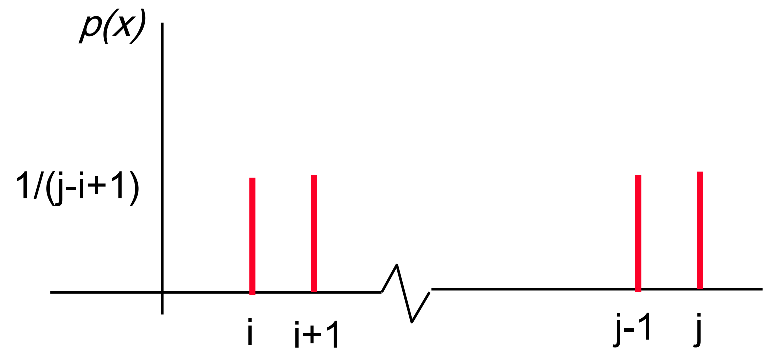
I. Distribuciones discretas

❑ *Uniforme Discreta (i,j)*

- ✓ *Aplicaciones: experimento con varios resultados posibles y equiprobables; no informativa*
- ✓ *Función de masa y Función de distribución:*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{j-i+1} & x \in \{i, i+1, \ldots, j\} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < i \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor - i + 1}{j-i+1} & i \le x \le j \\ 1 & x > j \end{cases}$$

- ✓ *Rango:* $\{i, i+1, \ldots, j\}$
- ✓ *Media:* $\dfrac{i+j}{2}$
- ✓ *Varianza:* $\dfrac{(j-i+1)^2 - 1}{12}$
- ✓ *Moda: No hay única*



I. Distribuciones discretas

❑ *Binomial (n,p)*

- ✓ *Aplicaciones: número "éxitos" al repetir n veces independientes un experimento Bernoulli; número elementos defectuosos en un lote de tamaño n; demanda de producto en inventario*
- ✓ *Función de masa y Función de distribución:*

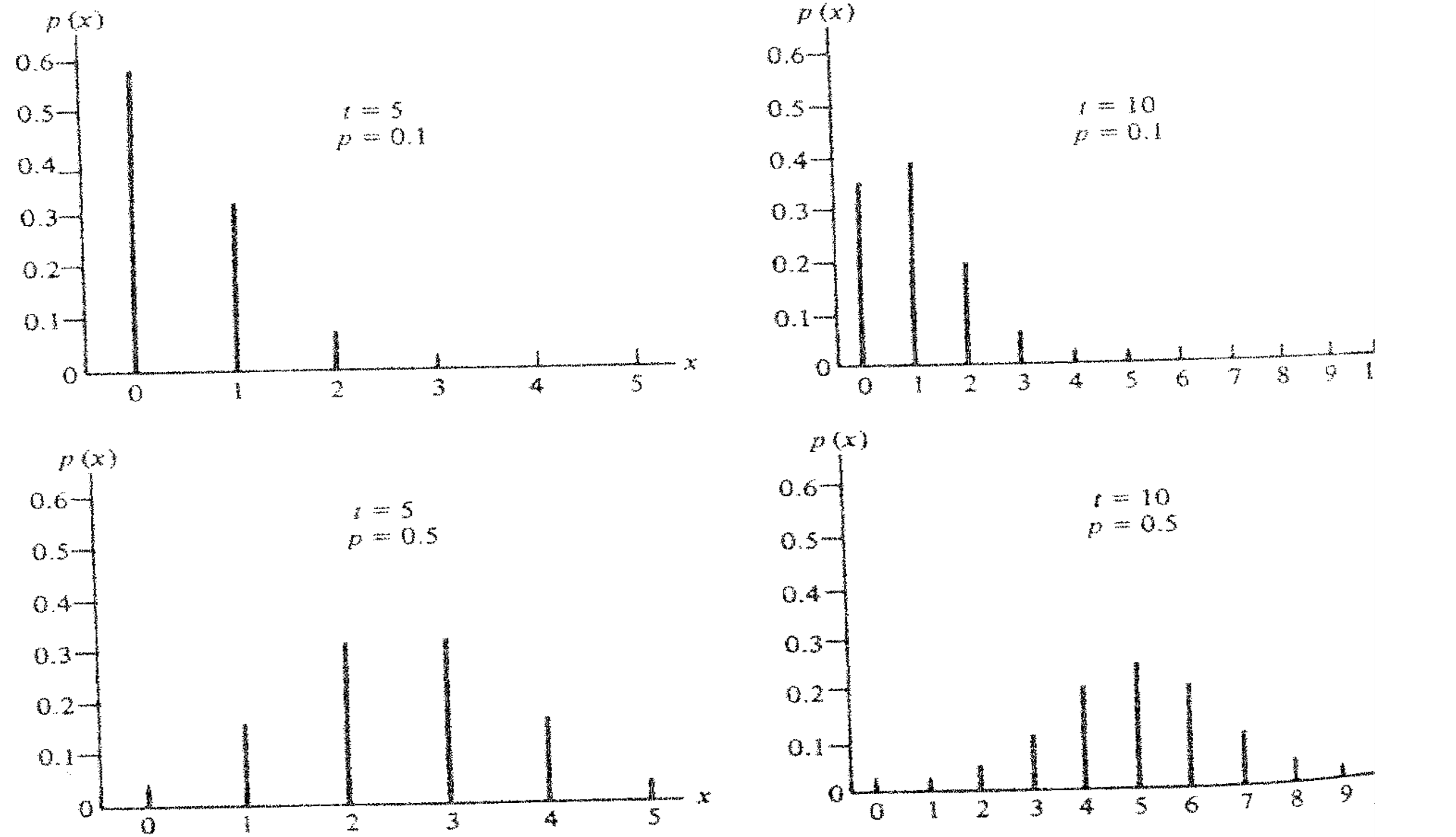
$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & 0 \le x \le n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

- ✓ Rango: $\{0,1,\ldots,n\}$ Media: np Varianza: $np(1-p)$
- ✓ Comentarios:
  - *Binomial(n,p): Suma de n variables indeptes. Bernoulli(p)*
  - *Reproductiva respecto a n (suma binomiales parámetro p, es binomial con n suma de los parámetros, y p el mismo)*
  - *X Bin(n,p) si y sólo si n-X Bin(n,1-p)*

I. Distribuciones discretas

❑ ***Binomial (n,p)*** *(cont.)*



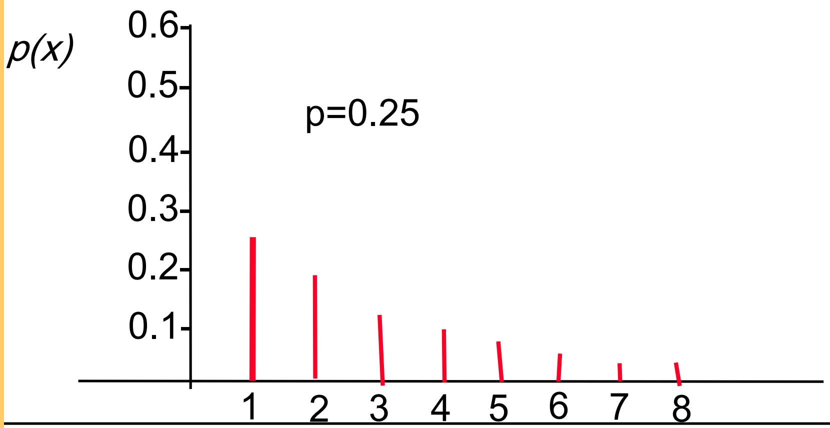
I. Distribuciones discretas

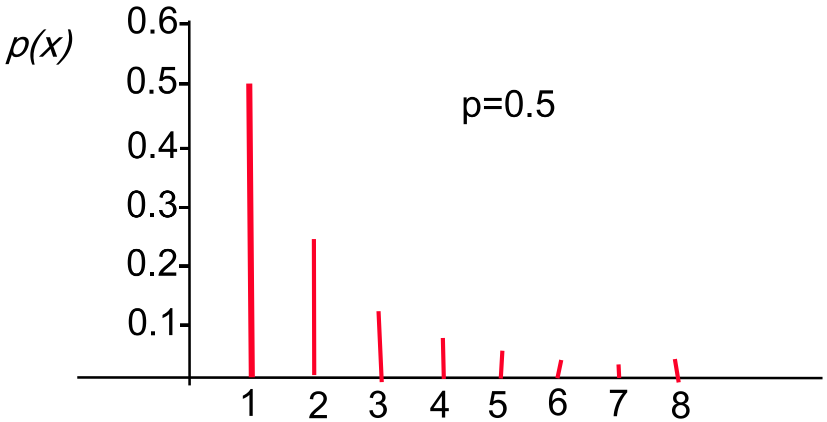
❑ *Geométrica(p)*

- ✓ *Aplicaciones: número de ensayo de primer éxito al repetir experimentos Bernoulli(p); número de productos inspeccionados hasta encontrar el primero defectuoso; número de productos en un lote de tamaño variable; demanda producto en inventario*
- ✓ *Función de masa y Función de distribución:*

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor} & x \geq 1 \end{cases}$$

- ✓ *Rango:* $\{1, 2, \ldots\}$ *Media: 1/p* *Varianza:* $1/p^2$
- ✓ *Comentarios: Análoga a la exponencial, no tiene memoria*





I. Distribuciones discretas

❑ *Poisson (λ)*

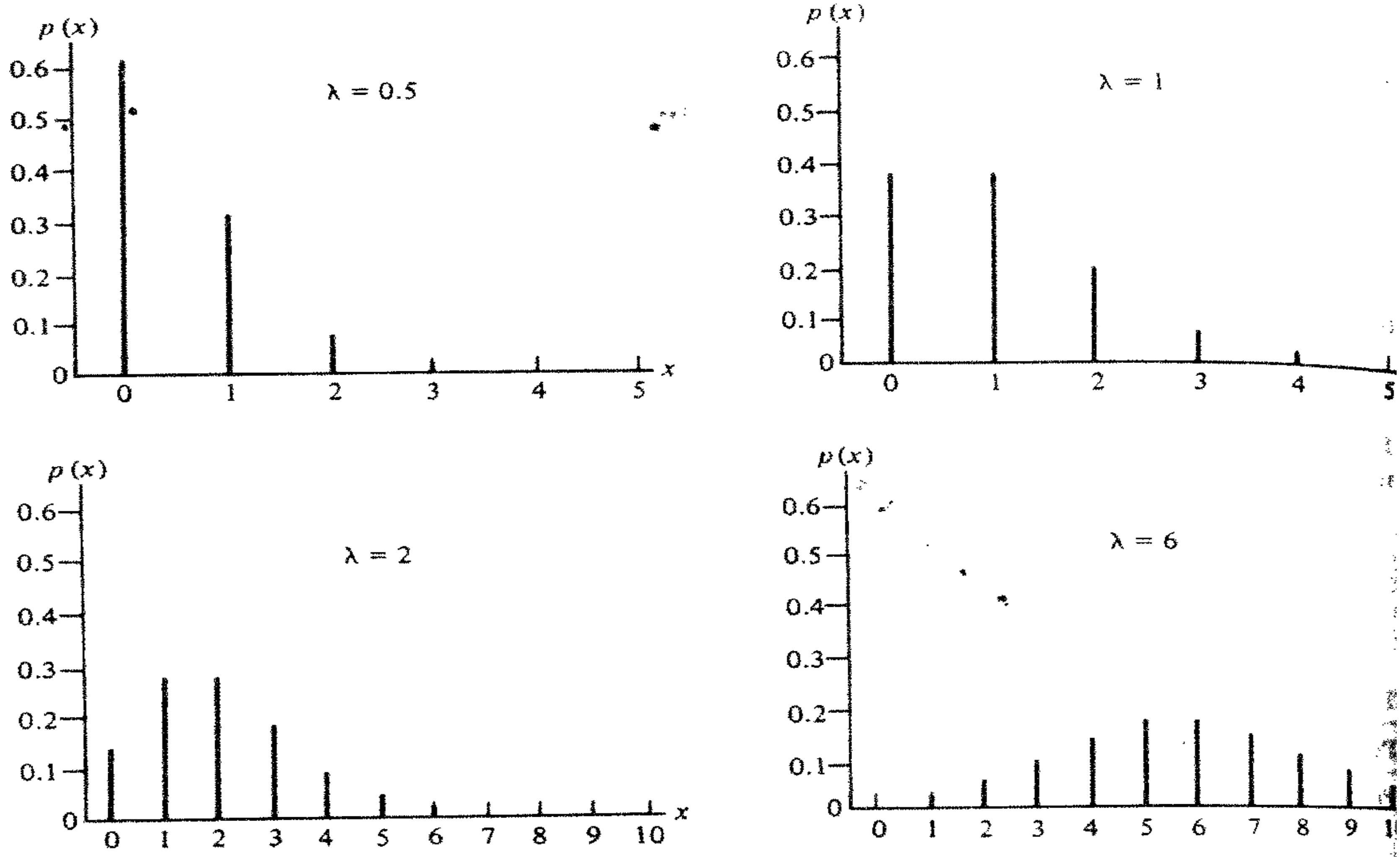
- *Aplicaciones: número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo cuando ocurren con tasa constante; número de artículos en un lote de tamaño aleatorio; demanda de un inventario*
- *Función de masa:*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x \in \{0,1,\ldots\} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- *Rango:* $\{0,1,2,\ldots\}$ *Media:* λ *Varianza:* λ
- *Comentarios:*
  - *Tiempo entre dos eventos independientes Exponencial (**λ**) si y sólo si número de eventos en intervalo de tamaño t es Poisson(λt)*
  - *Reproductiva respecto a λ*
  - *Distribución de los sucesos raros: en una binomial si n es grande, p pequeño, y np pequeño (<5), aproxima a la binomial*

I. Distribuciones discretas

❑ ***Poisson (λ)*** *(cont.)*:



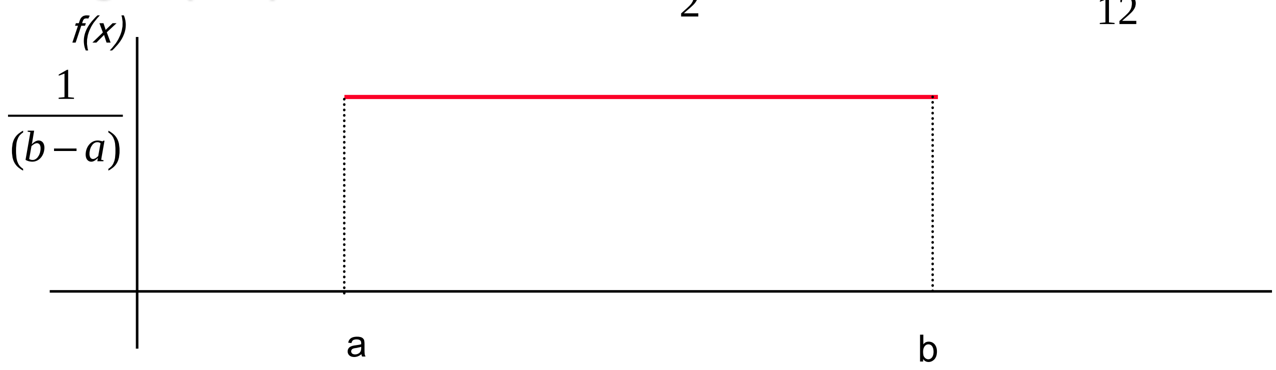
II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Uniforme(a,b):*

- ✓ *Aplicaciones: magnitud con valor igualmente distribuido en un intervalo; no informativa (no hay razones para suponer más probable una zona que otra); generar valores aleatorios*
- ✓ *Función de densidad y Función de distribución:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)} & a<x<b\\ 0 & resto\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

- ✓ *Rango: (a,b)* *Media:* $\dfrac{a+b}{2}$ *Varianza:* $\dfrac{(b-a)^2}{12}$



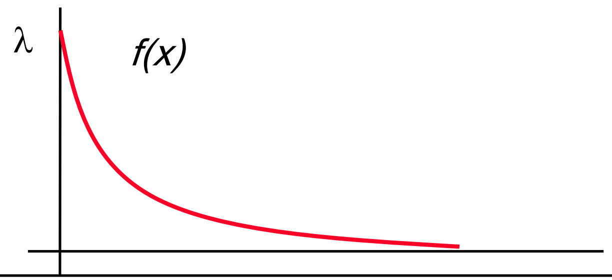
II. Distribuciones absolutamente continuas

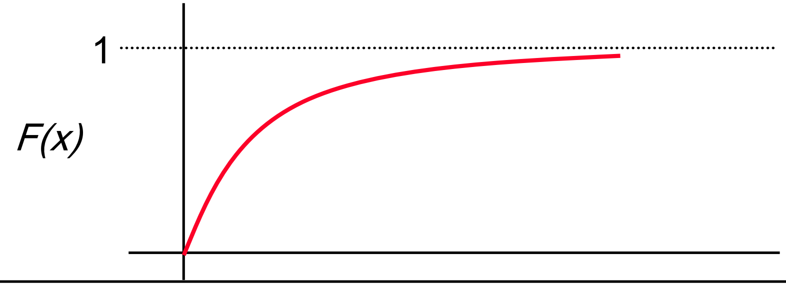
❑ *Exponencial(λ):*

- ✓ *Aplicaciones: tiempos entre sucesos independientes; tiempos hasta fallo componentes con tasa fallo constante; tiempos entre llegadas a un sistema; tiempos para completar una tarea*
- ✓ *Función de densidad y Función de distribución:*

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}$$

- ✓ *Rango: $[0,\infty)$* *Media: $1/\lambda$* *Varianza: $1/\lambda^2$*
- ✓ *Comentarios:*
  - *Única continua sin memoria, como geométrica discreta*
  - *Caso particular de Gamma y Weibull*
  - *La suma exponenciales independientes mismo parámetro es Erlang*





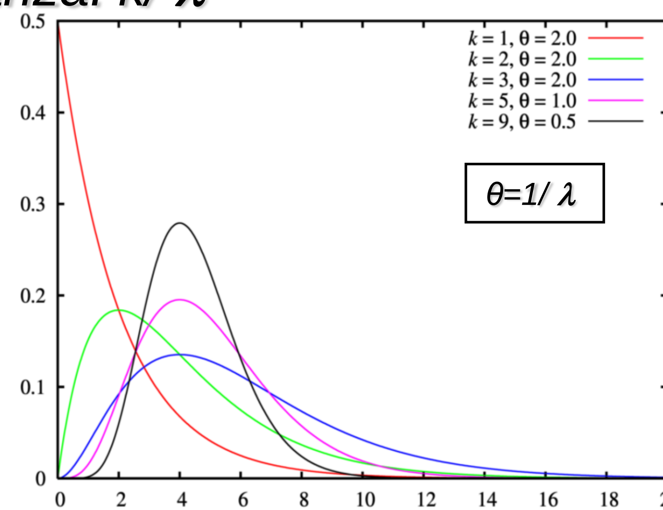
II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Erlang(k,λ):*

- ✓ *Tiempo hasta el suceso k-esimo en un proceso de Poisson.*
- ✓ *Aplicaciones: tiempos hasta k-esimo fallo de componentes iguales con tasa fallo constante*
- ✓ *Función de densidad y Función de distribución:*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}\dfrac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} & x\geq 0 \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{\gamma(k,\lambda x)}{(k-1)!} & x\geq 0 \end{cases}$$

- ✓ *Rango: $[0,\infty)$* *Media: k/λ* *Varianza: k/λ^2*
- ✓ *Comentarios:*
  - *Caso particular de Gamma*
  - *Suma exp(λ) independientes*



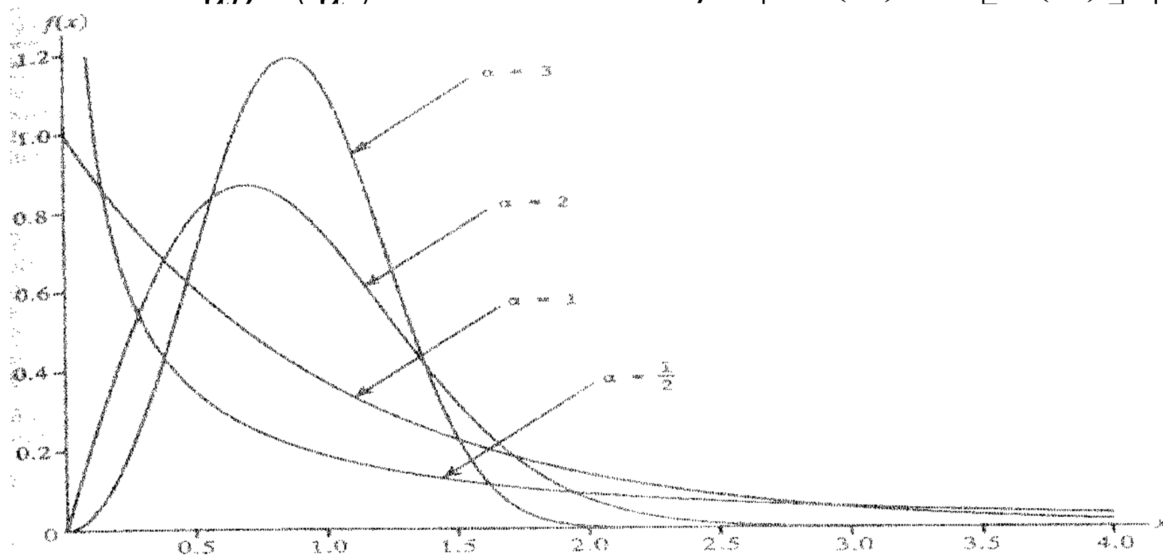
II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Weibull(α,β):*

- ✓ *Aplicaciones: tiempo para completar una tarea; tiempo hasta el fallo de un equipo (forma similar a la gamma)*
- ✓ *Función de densidad y Función de distribución:*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \alpha\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^{\alpha}} & x\geq 0 \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-(\beta x)^{\alpha}} & x\geq 0 \end{cases}$$

- ✓ *Rango: [0,∞)* *Media:* $\frac{1}{\alpha\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ *Varianza:* $\frac{1}{\alpha\beta^{2}}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{2}\right\}$



II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Weibull(α,β):*

✓ *Comentarios:*

- *α: parámetro de forma.*
  - *Weibull(1,β) es Exponencial(β) (tasa de sucesos constante)*
  - *α < 1 tasa decreciente; α > 1 tasa creciente*
- *β : parámetro de escala*
- *Log-Weibull es Gumbel (o de valores extremos)*
  - utilizada para modelar la distribución del máximo (o el mínimo); se usa para calcular valores extremos.
  - Ejemplo: Distribución del máximo nivel de un río a partir de datos de niveles máximos durante 10 años.
  - Resulta muy útil para predecir terremotos, inundaciones o cualquier otro desastre natural.
- *Weibull(2,β) es Rayleigh($\beta/\sqrt{2}$)*

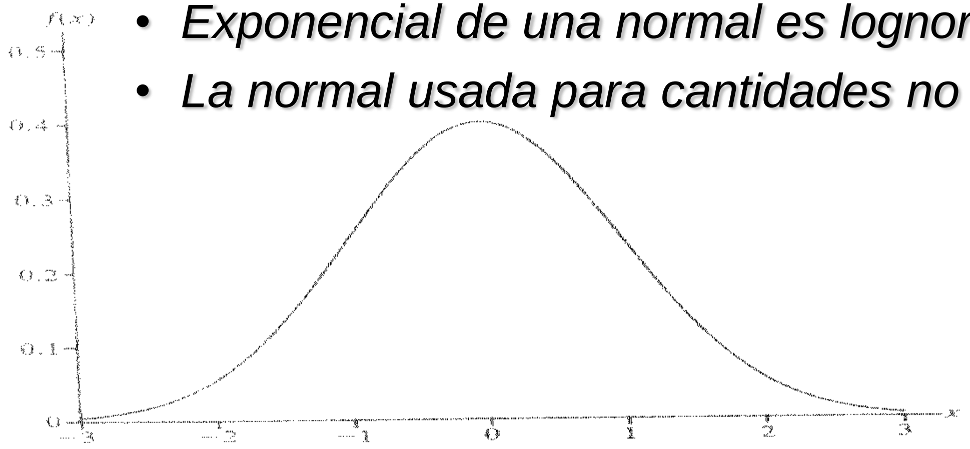
II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Normal(μ,σ):*

- ✓ *Aplicaciones: Errores de varios tipos (punto impacto artefacto,...); cantidades que son suma de gran número de otras cantidades*
- ✓ *Función de densidad (de distribución no tiene explícita):*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- ✓ *Rango: (- ∞, ∞)* *Media: μ* *Varianza: σ^2*
- ✓ *Comentarios: Combinación lineal de normales es normal*
  - *Si dos normales son incorreladas, entonces son independientes*
  - *Suma de normales independientes al cuadrado es Chi2*
  - *Exponencial de una normal es lognormal*
  - *La normal usada para cantidades no negativas ha de truncarse en 0*



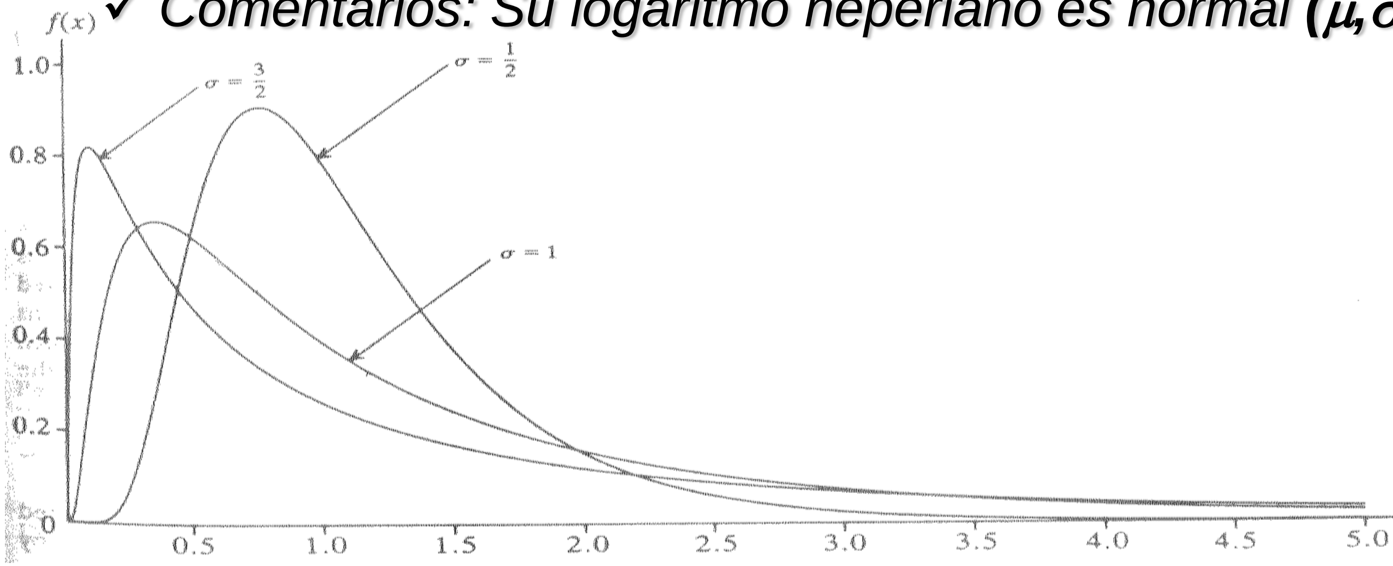
II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Lognormal(μ,σ):*

- ✓ *Aplicaciones: tiempo para desarrollar una tarea; forma similar a Weibull y Gamma, pero puede tener “pico” más alto cerca de 0; cantidades que son producto de gran número de otras*
- ✓ *Función de densidad:*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2} & x>0 \end{cases}$$

- ✓ *Rango: [0,∞)* *Media:* $e^{\mu+\sigma^2/2}$ *Varianza:* $e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$
- ✓ *Comentarios: Su logaritmo neperiano es normal **(μ,σ)***



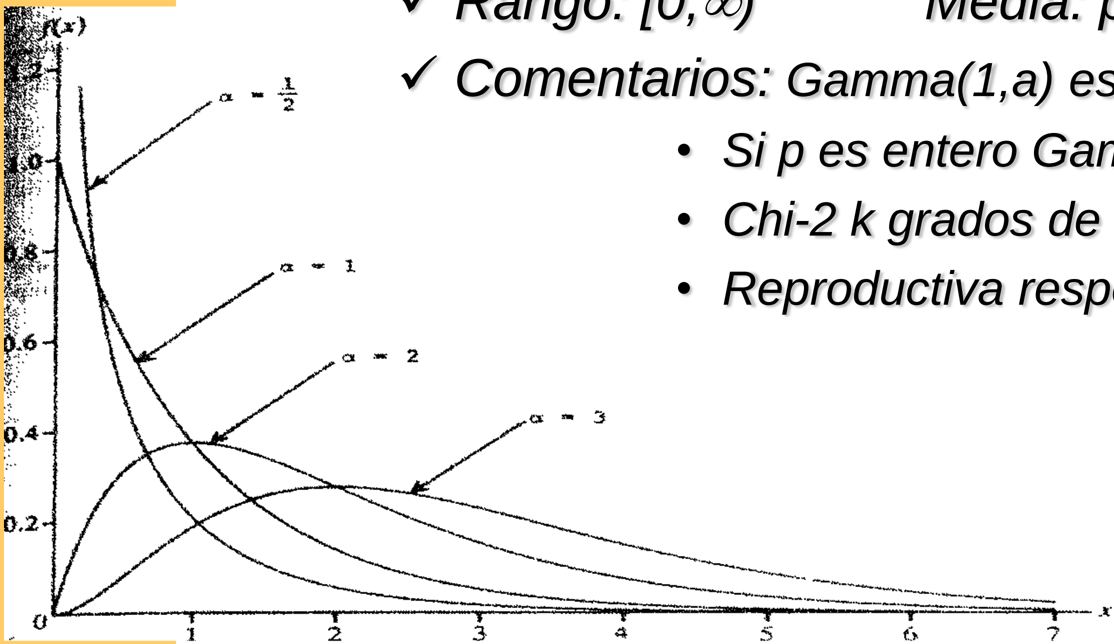
II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Gamma(p,a):*

- ✓ *Aplicaciones: tiempo para completar una tarea; tiempo de servicio de atención a un cliente; tiempo hasta fallo de un equipo*
- ✓ *Función de densidad:*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(p)}a^{p}x^{p-1}e^{-ax} & x>0 \end{cases} \qquad F(x)(\text{si } p \text{ entero})=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{-ax}\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\dfrac{(ax)^{j}}{j!} & x<0 \end{cases}$$

- ✓ *Rango: [0,∞)* *Media: p/a* *Varianza: p/a^2*
- ✓ *Comentarios: Gamma(1,a) es Exponencial(a)*
  - *Si p es entero Gamma(p,a)=Erlang(p,a)*
  - *Chi-2 k grados de libertad es Gamma(k/2,1/2)*
  - *Reproductiva respecto a p*

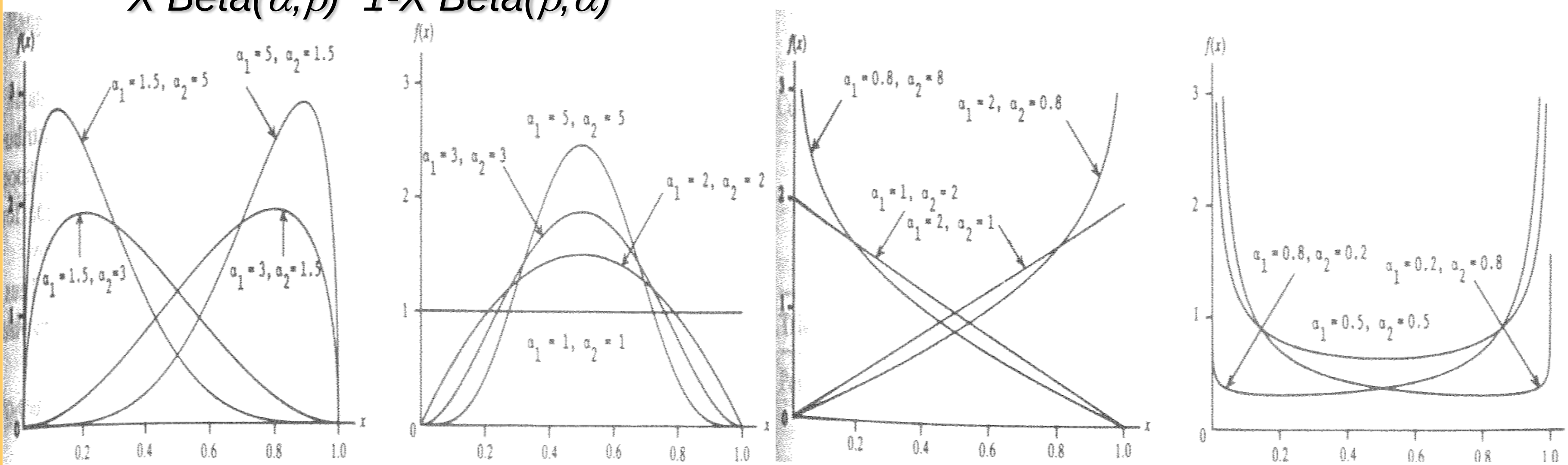


II. Distribuciones absolutamente continuas

- **_Beta(α,β):_**
  - ✓ *Aplicaciones: modelo en ausencia de datos (muchas formas); distribución de proporciones (como número defectuosos en un lote); tiempo para completar una tarea (redes PERT)*
  - ✓ *Función densidad (distribución no cerrada):*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

  - ✓ *Rango: (0,1)* Media: *$\alpha/(\alpha+\beta)$* Varianza: *$\alpha\beta/[(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)]$*
  - ✓ *Comentarios: Beta(1,1) es Uniforme (0,1); Se puede trasladar: a+(b-a)X; X Beta(α,β) 1-X Beta(β,α)*



II. Distribuciones absolutamente continuas

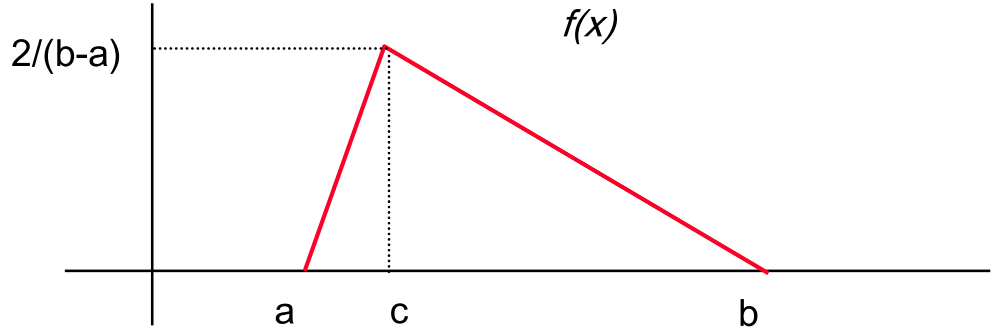
❑ *Triangular (a,b,c):*

- ✓ *Aplicaciones: modelo en ausencia de datos (muchas formas);*
- ✓ *Función de densidad y F. Distribución:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c\le x\le b \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le c \\ 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & c<x\le b \\ 1 & x>b \end{cases}$$

- ✓ *Rango: (a,b)   Media: (a+b+c)/3   Varianza: (a^2+ b^2+c^2-ab-ac-bc)/18*
- ✓ *Comentarios: Moda: c*



II. Distribuciones absolutamente continuas

❑ *Logística (μ,s):*

- ✓ Se parece a la distribución normal en su forma, pero tiene colas más grandes y curtosis más altas.
- ✓ *Función de densidad:* *Función de distribución:*

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}}{s\left(1+e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}\right)^2} \qquad F(x) = \frac{1}{1+e^{-\left(\frac{x-\mu}{s}\right)}}$$

- ✓ *Rango: (- ∞, ∞)* *Media: μ* *Varianza:* $\frac{\pi^2}{3}s^2$
- ✓ *Comentarios: Se usa para describir la difusión de nuevos productos, la propagación de epidemias, modelos de crecimiento, etc.*